MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI

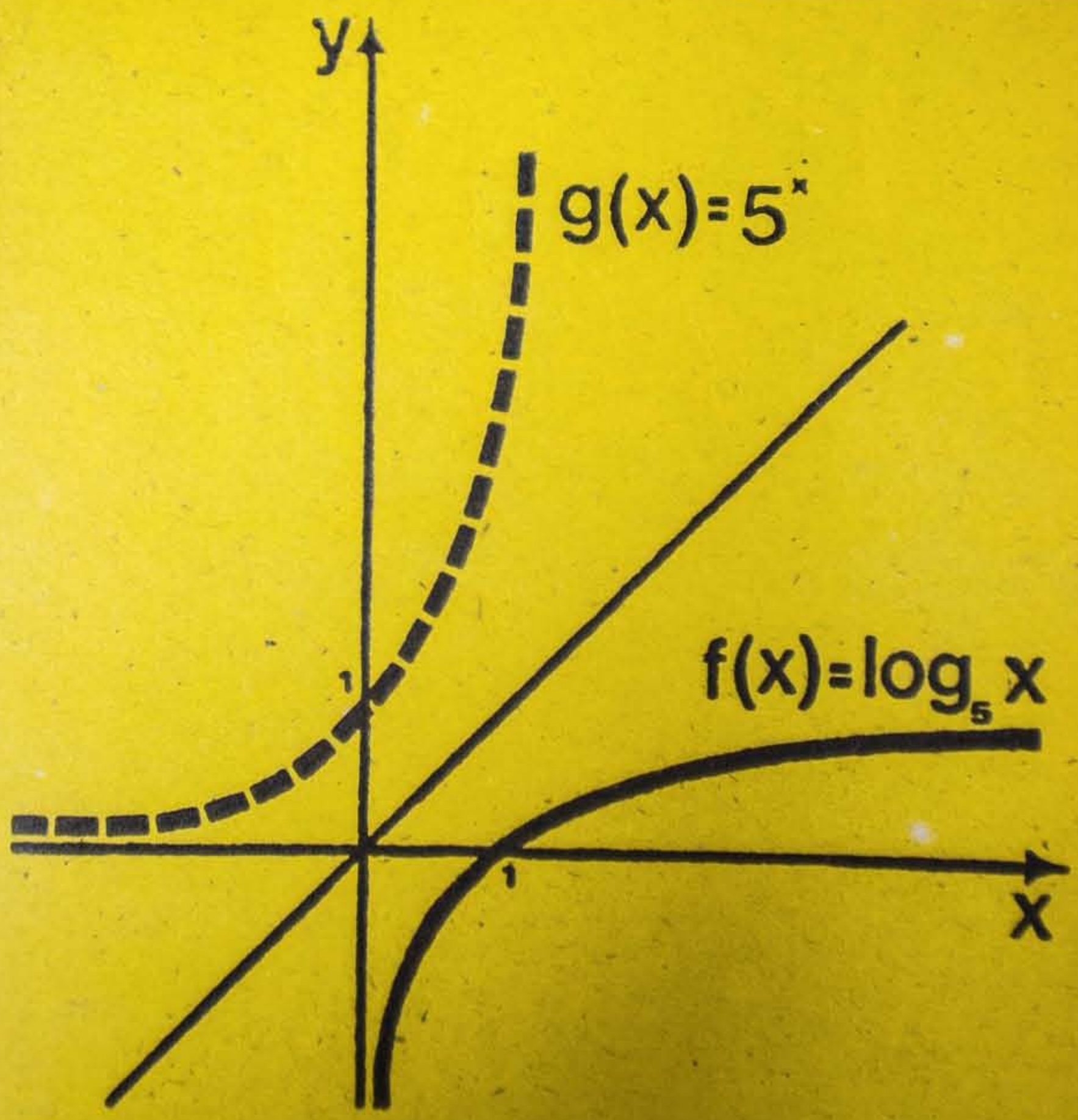
C. NĂSTĂSESCU C. NIȚA S. POPA

Matematică

Manual pentru clasa a X-a

X

Algebră



MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI

C. Năstăsescu C. Niță S. Popa

Matematică

Algebră

Manual pentru clasa a X-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A., BUCUREȘTI

Referenți: Prof. univ. dr. *Ion Tomescu*
Prof. *Silvia Florescu*
Prof. *Eugen Onofraș*

ISBN 973-30-3034-1

Redactor: Prof. *Viorica Fătu*
Tehnoredactor: *Anca Peța*
Coperta: *Nicolae Sîrbu*

I Funcția exponențială și funcția logaritmică

§ 1. Funcția exponențială

1.1. Puteri cu exponent rațional (recapitulare)

În clasa a IX-a s-a definit puterea cu exponent rațional. Să amintim această definiție.

1. *Puteri cu exponent rațional pozitiv.* Dacă $a \geq 0$ este un număr real nenegativ, iar $\frac{m}{n}$ un număr rațional pozitiv, atunci

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$

2. *Puteri cu exponent rațional negativ.* Dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv, iar $\frac{m}{n}$ un număr rațional negativ, atunci

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}. \qquad (2)$$

Deoarece numărul $-\frac{m}{n}$ este pozitiv, $a^{-\frac{m}{n}}$ a fost definit la punctul 1.

3. În sfârșit, dacă $a > 0$ iar $\frac{m}{n} = 0$, atunci

$$a^0 = 1. \qquad (3)$$

Relațiile (1), (2) și (3) definesc puterea unui număr pozitiv $a > 0$ pentru orice exponent, rațional $\frac{m}{n}$. În clasa a IX-a s-au studiat o serie de proprietăți ale puterilor cu exponent rațional oarecare. În cele ce urmează vom folosi în special proprietățile date de următoarea teoremă

Teorema 1.1.1. 1°. Dacă $a > 1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent raţional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceea al cărei exponent este mai mare.

2°. Dacă $0 < a < 1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent raţional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceéa al cărei exponent este mai mic.

Demonstraţie. 1°. Într-adevăr, fie $\frac{m}{n} > \frac{p}{q} > 0$ două numere raţionale pozitive. Avem $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ şi $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Aducem aceşti radicali la radicali de acelaşi ordin:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}, \quad \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}}.$$

Cum $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, rezultă că $mq > np$. Dar, cum $a > 1$ rezultă $a^{mq} > a^{np}$, de unde $\sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{np}}$ sau

$$a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}.$$

2°. Demonstraţia este analoagă cu cea de la punctul 1° şi de aceea o omitem.

Exemple. 1) Avem $1{,}21 < 1{,}22$. De aceea

$$2^{1,21} < 2^{1,22}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1,21} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1,22}.$$

2) Avem $0{,}3 < 0{,}4$. De aceea

$$[\sqrt{3}]^{0,3} < [\sqrt{3}]^{0,4}; \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,3} > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,4}.$$

1.2. Puteri cu exponent real oarecare

În acest paragraf vom defini puterea cu exponent real oarecare de bază pozitivă, astfel încât aceasta să coincidă pentru exponent raţional cu cea introdusă mai înainte.

Mai precis, dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv, iar x un număr real oarecare, ne propunem să dăm sens expresiei a^x.

Amintim, mai întâi, câteva fapte privind aproximările zecimale ale numerelor reale.

Fie x un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracţie zecimală infinită, adică $x = x_0, x_1x_2x_3\ldots x_n\ldots$. Pentru numărul x, aproximările zecimale cu o eroare mai mică decât 10^{-n} sunt:

i) prin lipsă: $x'_n = x_0, x_1x_2x_3\ldots x_n$,

ii) prin adaos: $x''_n = x_0, x_1x_2x_3\ldots x_n + 10^{-n}$.

Aşadar numărului x i-am asociat aproximările sale zecimale:

prin lipsă: $x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, \ldots,$

prin adaos: $x''_0, x''_1, x''_2, x''_3, \ldots,$

astfel încât:

$$x'_0 \leqslant x < x''_0,$$
$$x'_1 \leqslant x < x''_1,$$
$$x'_2 \leqslant x < x''_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Observăm că aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale unui număr real x sunt totdeauna numere raționale.

1. *Puteri cu exponent real pozitiv*

Pentru definirea puterii de bază $a > 0$, cu exponent real, distingem două cazuri, după cum baza este supraunitară sau subunitară:

1° $a > 1$. Fie $x > 0$ un număr real și să considerăm aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}. Atunci pentru orice n, avem

$$x'_n \leqslant x < x''_n.$$

După cum am observat numerele x'_n, x''_n sunt raționale pozitive și deci conform definiției puterilor cu exponent rațional, au sens puterile $a^{x'_n}$ și $a^{x''_n}$, pentru orice n.

Mai mult, după punctul 1° al teoremei 1.1.1, rezultă că $a^{x'_n} < a^{x''_n}$.

D e f i n i ț i a 1.2.1. Fie $a > 1$ și x un număr real pozitiv. Se numește *puterea x a lui a* un număr real y, care pentru orice număr natural n satisface inegalitățile:

$$a^{x'_n} \leqslant y < a^{x''_n},$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există și, mai mult, este unic. Demonstrația riguroasă a acestui fapt depășește programa clasei a X-a. Ea necesită noțiunea de limită și se va studia la Analiză matematică în clasa a XI-a.

Numărul y dat de definiția precedentă se notează a^x și se citește *a la puterea x*.

Exemplu. Să explicăm ce trebuie înțeles prin $3^{\sqrt{2}}$. Aproximările zecimale ale lui $\sqrt{2}$ sunt următoarele:

prin lipsă: 1; 1,4; 1,41; 1,414; ...,

prin adaos: 2; 1,5; 1,42; 1,415; ...;

astfel încât:

$$1 \leqslant \sqrt{2} < 2,$$
$$1,4 \leqslant \sqrt{2} < 1,5,$$
$$1,41 \leqslant \sqrt{2} < 1,42,$$
$$1,414 \leqslant \sqrt{2} < 1,415,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Numărul care ne interesează $y = 3^{\sqrt{2}}$ îndeplinește inegalitățile

$$3^1 \leqslant y < 3^2,$$
$$3^{1,4} \leqslant y < 3^{1,5},$$
$$3^{1,41} \leqslant y < 3^{1,42},$$
$$3^{1,414} \leqslant y < 3^{1,415},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

2° $0 < a < 1$. Dacă $x > 0$ este un număr real, avem

$$x'_n \leqslant x < x''_n.$$

După punctul 2° al teoremei din paragraful precedent rezultă că $a^{x'_n} < a^{x''_n}$.

Definiția 1.2.2. Fie $0 < a < 1$ și x un număr real pozitiv. Se numește *puterea x a lui a* un număr real y, care pentru orice număr natural n, satisface inegalitățile:

$$a^{x''_n} < y \leqslant a^{x'_n}.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există și, mai mult, este unic.

Exemplu. Să explicăm ce trebuie înțeles prin $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Având în vedere cele de mai înainte precum și tabelul aproximărilor zecimale ale lui $\sqrt{2}$ din exemplul precedent, numărul care ne interesează $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ îndeplinește inegalitățile:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,42} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,415} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414}.$$

.....

Vom adăuga că pentru orice număr real x,

$$1^x = 1.$$

În final trebuie menționată o proprietate importantă a puterilor cu exponent pozitiv și anume:

Oricare ar fi $a > 0$ și $x > 0$ avem $a^x > 0$.

Într-adevăr, fie x'_n și x''_n aproximările zecimale ale lui x prin lipsă, respectiv prin adaos. Atunci, pentru orice n, avem:

1° Dacă $a > 1$, atunci

$$a^{x'_n} \leqslant a^x < a^{x''_n}.$$

2° Dacă $0 < a < 1$, atunci

$$a^{x''_n} < a^x \leqslant a^{x'_n}.$$

Numerele x'_n și x''_n sunt raționale și pozitive. De aceea $a^{x'_n} > 0$ și $a^{x''_n} > 0$, pentru orice $a > 0$. Atunci, evident $a^x > 0$ deoarece este cuprins între două numere pozitive.

2. *Puteri cu exponent real negativ*

Dacă $a > 0$ şi x este un număr real negativ, atunci prin definiţie

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}. \qquad (1)$$

Deoarece numărul $-x$ este pozitiv, a^{-x} a fost definit la punctul 1. Mai mult, am demonstrat că $a^{-x} \neq 0$, pentru $-x > 0$.

De exemplu, $3^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{3^{\sqrt{5}}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}}$.

Am demonstrat că dacă $x > 0$ atunci $a^{-x} > 0$. Cum $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, rezultă că şi *pentru* $x < 0$, *avem* $a^x > 0$.

Amintim că pentru $a \neq 0$, am convenit să punem $a^0 = 1$.

Astfel, am definit puterea unui număr pozitiv cu orice exponent real. Puterea unui număr negativ cu exponent real, în general, nu este definită.

3. *Proprietăţi ale puterilor cu exponent real*

Fie $a > 0$ şi $b > 0$ (numere reale pozitive). Atunci pentru x şi y numere reale, avem:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, 3. $(ab)^x = a^x b^x$, 5. $(a^x)^y = a^{xy}$.

2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, 4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$,

Pe baza definiţiei puterii cu exponent real dată mai înainte şi folosind proprietăţile corespunzătoare ale puterii cu exponent raţional, verificarea acestora se face fără dificultate. Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea lor.

Exemple. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{8}} = (2^{-1})^{-\sqrt{8}} = 2^{\sqrt{8}}$.

2) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{81}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} = (2^{-1})^{-9} = 2^9 = 512.$

3) $\frac{7^{\sqrt{8}}}{7^{\sqrt{2}}} = 7^{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = 7^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2}}$.

1.3. Funcţia exponenţială

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv. Am văzut în paragraful 1.2 (pct. 1 şi 2) că oricare ar fi numărul real x, avem $a^x > 0$. Aşadar, putem defini funcţia următoare:

$$f : \mathbf{R} \to (0, \infty),\ f(x) = a^x.$$

Observație. Pentru $a = 1$ se obține o funcție constantă $f: \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 1$ și de aceea acest caz nu prezintă un interes special.

O funcție $f: \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, unde $a > 0$ și $a \neq 1$, se numește *funcție exponențială (de bază a)*.

Enunțăm, în continuare, o serie de proprietăți importante ale funcției exponențiale.

1. *Dacă $a > 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x > 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x < 1$. Dacă $a < 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x < 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x > 1$.*

Demonstrație. Fie $a > 1$ și $x > 0$. Dacă x este rațional, adică $x = \frac{m}{n}$, atunci $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Cum $a > 1$ rezultă că și $a^m > 1$, dar atunci și $\sqrt[n]{a^m} > 1$. Dacă x este un număr real pozitiv oarecare, fie x'_n și x''_n pentru orice n, aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale lui x. Atunci

$$x'_n \leqslant x < x''_n.$$

Cum $a > 1$, rezultă că pentru orice n avem

$$a^{x'_n} \leqslant a^x < a^{x''_n}.$$

Dar x'_n este rațional pozitiv și după cum am observat mai înainte $a^{x'_n} > 1$, de unde $a^x > 1$.

Dacă $x < 0$, atunci avem

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Dar $-x > 0$ și deci $a^{-x} > 1$. Prin urmare

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1.$$

Cazul în care $0 < a < 1$ se tratează analog; îl lăsăm ca exercițiu.

2. *Dacă $x = 0$, atunci independent de $a > 0$ avem $a^x = 1$.* Aceasta rezultă din definiția puterii nule.

3. *Pentru $a > 1$, funcția exponențială $f(x) = a^x$ este strict crescătoare, iar pentru $0 < a < 1$ este strict descrescătoare.*

Demonstrație. Fie $a > 1$ și $x_1 < x_2$. Să arătăm că

$$a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Într-adevăr, din $x_1 < x_2$ rezultă că există $u > 0$ astfel încât $x_2 = x_1 + u$. Atunci

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1} - a^{x_1+u} = a^{x_1}(1 - a^u).$$

Deoarece $u > 0$, după proprietatea 1 a funcției exponențiale rezultă $a^u > 1$. Așadar, $a^{x_1} > 0$ și $1 - a^u < 0$, de unde $a^{x_1}(1 - a^u) < 0$. Înseamnă că $a^{x_2} - a^{x_1} < 0$, sau $a^{x_1} < a^{x_2}$. Deci din $x_1 < x_2$ rezultă $a^{x_1} < a^{x_2}$, adică funcția $f(x) = a^x$ este strict crescătoare.

Analog, se demonstrează că pentru $0 < a < 1$ funcţia $f(x) = a^x$ este strict descrescătoare.

4. *Funcţia exponenţială* $f: \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *este bijectivă.*

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că f este injectivă. Fie, pentru aceasta, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1 \neq x_2$. Atunci avem $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Să presupunem, de exemplu, că $x_1 < x_2$. Atunci după monotonia funcţiei exponenţiale (proprietatea 3) rezultă:

1. dacă $a > 1$, atunci $f(x_1) < f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$;
2. dacă $0 < a < 1$, atunci $f(x_1) > f(x_2)$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Analog, rezultă pentru $x_1 > x_2$. Deci f este injectivă. Demonstraţia faptului că funcţia exponenţială f este surjectivă depăşeşte programa clasei a X-a. Ea necesită noţiunea de continuitate şi se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a. Cu alte cuvinte, se poate demonstra că oricare ar fi $y_0 > 0$, un număr real pozitiv, există un număr real x_0 astfel încât $a^{x_0} = y_0$. (Conform injectivităţii funcţiei f rezultă că x_0 este unic.)

5. *Funcţia exponenţială* $f(x) = a^x$ *este inversabilă.*

Această proprietate este evidentă, deoarece orice funcţie bijectivă este inversabilă.

În § 2 ne vom ocupa de studiul inversei funcţiei exponenţiale.

1.4. Graficul funcţiei exponenţiale

Pe aceeaşi figură vom reprezenta graficul funcţiilor $f(x) = 2^x$ şi $g(x) = 5^x$, iar pe alta al funcţiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. Trasarea fiecărui grafic se face „prin puncte". Asociem tabelele de valori următoare:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x) = 2^x$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	
$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$		8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

Observăm că pentru $x = \pm 2, \pm 3$ şi, în general, pentru x întreg diferit de ± 1, valorile funcţiilor $g(x) = 5^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ sunt ori foarte mari, ori foarte mici, deci punctele corespunzătoare sunt greu de figurat pe grafic. De aceea, în acest caz, vom lua pentru x valori fracţionare cuprinse între -1 şi 1, de exemplu: $x = -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

Valorile funcţiilor vor fi calculate aproximativ. Astfel:

$$5^0 = 1;$$

$$5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5} = \sqrt{\sqrt{5}} \approx \sqrt{2{,}2360} \approx 1{,}5$$

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}24;$$

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = (\sqrt[4]{5})^3 \approx 3{,}34$$

$$5^1 = 5;$$

$$5^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} \approx \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}66, \text{ ş.a.m.d.}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
$g(x) = 5^x$		0,2	0,3	0,45	0,66	1	1,5	2,24	3,34	5	
$k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$		5	3,34	2,24	1,5	1	0,66	0,45	0,3	0,2	

Prezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obţinute le unim printr-o linie continuă.

În figura I. 1 sunt reprezentate graficele funcţiilor $f(x) = 2^x$ şi $g(x) = 5^x$, iar în figura I. 2 sunt reprezentate graficele funcţiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ şi $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

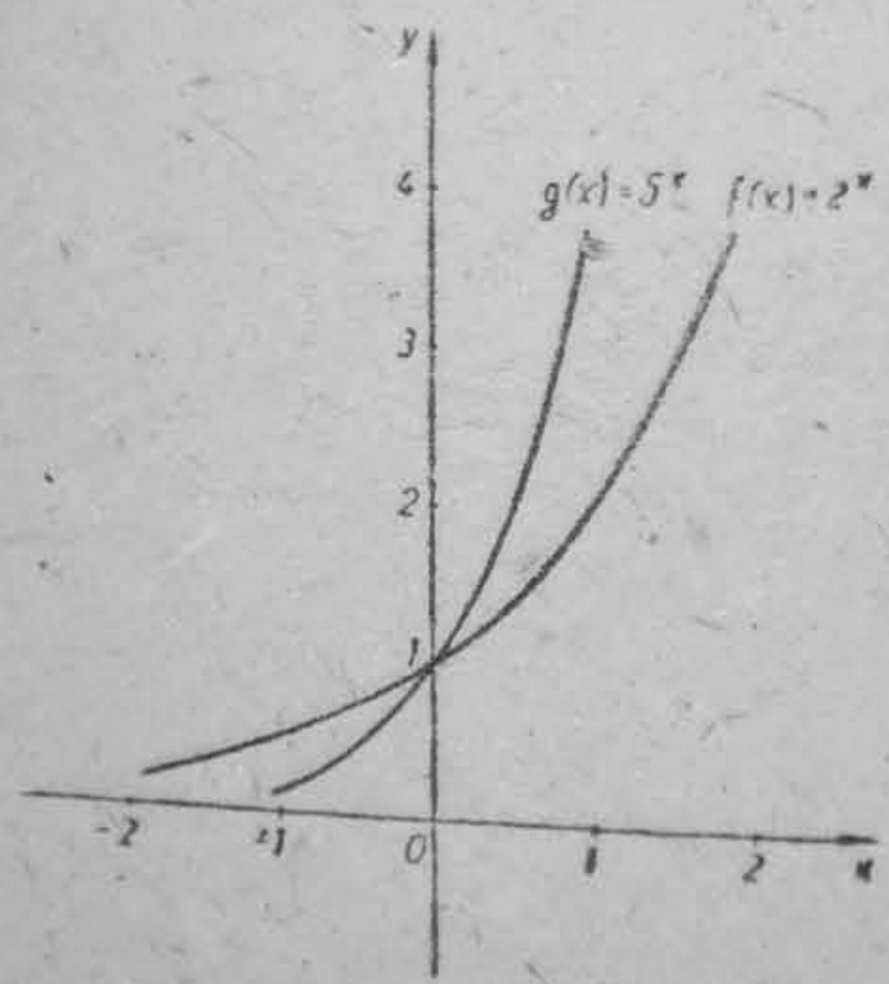


Fig. I. 1

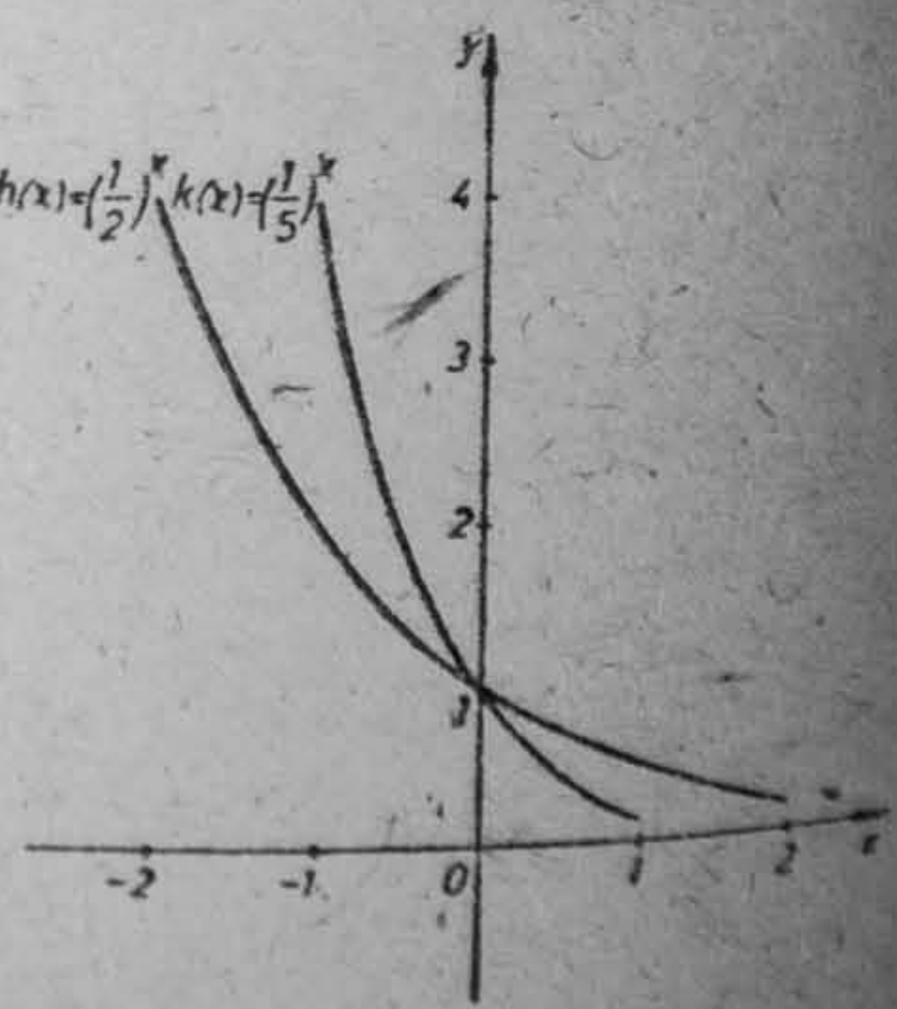


Fig. I. 2

Analizând graficul funcției exponențiale pentru diverse baze, constatăm că el are următoarele proprietăți:

1) Trece prin punctul de coordonate (0,1) de pe axa Oy.

2) Graficul funcției exponențiale este constituit dintr-o singură ramură care „urcă" pentru baza $a > 1$ și „coboară" pentru baza $0 < a < 1$.

3) Graficul funcției exponențiale este din ce în ce mai „apropiat" de axele Ox și Oy cu cât a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cât a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.

Exerciții

1. Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $3^{\frac{4}{5}}$ și $3^{\frac{3}{5}}$;

b) $\sqrt[11]{6^3}$ și $\sqrt[15]{6^7}$;

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$ și $\left(\frac{2}{5}\right)^{4}$;

d) $(0,5)^{-18}$ și 2^{18};

e) $(\sqrt{3})^{-6}$ și $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{6}$;

f) $2^{-\sqrt{5}}$ și $2^{-\sqrt{3}}$;

g) $5^{\sqrt{3}}$ și $5^{\sqrt{2,5}}$;

h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{88}}$ și $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{8}\right)^{88}}$.

2. Să se aducă la formă mai simplă expresiile:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^{3}$;

b) $\frac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}} \cdot \frac{2^{27\sqrt{3}}}{8^{\sqrt{27}}}$;

c) $\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{5}}\right]^{-3\sqrt{5}}$;

d) $\left[\left(\sqrt{8}\right)^{-4\frac{1}{3}}\right]^{\frac{\sqrt{6}}{26}}$.

3. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care este adevărată inegalitatea:

a) $3^x \geq 729$;

b) $2^x \leq 0,25$;

c) $2^x \geq \frac{1}{128}$;

d) $3^x < 3$;

e) $(\sqrt{2})^x \cdot 2 \geq \frac{1}{8}$;

f) $(0,01)^x(\sqrt{10})^x < 1$;

g) $\left(\frac{1}{81}\right)^x \sqrt{3} > 1$;

h) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{0,5}}\right)^x < \frac{1}{4}$;

i) $32(\sqrt[3]{2})^x \geq 0,25$.

4. Să se compare m și n dacă este adevărată inegalitatea:

a) $(3\pi)^m \geq (3\pi)^n$;

b) $\left(\frac{5\pi}{16}\right)^m < \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n$;

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^m \geq (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n$;

d) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^m \leq (\sqrt{7} - \sqrt{3})^n$.

5. Să se deducă care din numerele următoare este mai mare decât 1, și care mai mic decât 1:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{8}}$;

b) $(\sqrt{5})^{\frac{1}{9}}$;

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{n}$;

d) $(\sqrt{2} - 1)^{-\frac{8}{2}}$;

e) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^{-\frac{8}{3}}$;

f) $\left(\frac{n+1}{4}\right)^{-\sqrt{8}}$.

6. Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $\pi^{-\sqrt{2}}$ și $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{2}}$;

b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1+\sqrt{3}}$ și $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2}$;

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$ și $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$;

d) $(\sqrt{5})^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ și $(\sqrt{5})^{\sqrt{3}-3}$.

7. Să se afle x astfel încât $a^x > \left(\frac{1}{a}\right)^x$, unde $a > 0$ este un număr real pozitiv.

8. Să se spună dacă sunt echivalente inegalitățile următoare:

a) $a^x > a^4$ și $x > 4$;

b) $6^{x^2} < 6^x$ și $x^2 < x$;

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ și $2x < x - 1$;

d) $8^{x^2} < 4$ și $3x^2 > 2$.

9. Să se traseze graficul funcțiilor $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde:

a) $f(x) = 2^{x-2}$;

b) $f(x) = 2^{x+2}$;

c) $f(x) = 2^{|x|}$;

d) $f(x) = 2^{-|x|}$;

e) $f(x) = 2^x - 2$;

f) $f(x) = 2^x + 2$.

10. Să se traseze graficul funcțiilor $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$;

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$;

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$;

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$;

e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$;

f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

§2. Logaritmi

2.1. Definiția logaritmului unui număr pozitiv

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv, $a \neq 1$. Considerăm ecuația exponențială

(1) $a^x = N$, $N > 0$.

Din proprietatea 4 (§ 1, pct. 1.3) rezultă că ecuația (1) are o soluție care este unic determinată. Această soluție se notează

(2) $x = \log_a N$

și se numește *logaritmul numărului pozitiv N în baza a.*

Din (1) și (2) obținem egalitatea

(3) $a^{\log_a N} = N$

care ne arată că logaritmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza a ($a > 0$, $a \neq 1$) *pentru a obține numărul dat.*

Dacă în (1) facem $x = 1$ obținem $a^1 = a$ și deci

(4) $\log_a a = 1$.

Exemple. 1) Să calculăm $\log_2 32$. Cum $2^5 = 32$, atunci din definiția logaritmului avem $\log_2 32 = 5$.

2) Să determinăm $\log_2 \frac{1}{16}$. Din egalitatea $2^{-4} = \frac{1}{16}$ obținem $\log_2 \frac{1}{16} = -4$.

3) Să determinăm $\log_{\frac{1}{3}} 27$. Să considerăm ecuația exponențială $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$. Cum $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{3^{-3}} = 27$, obținem $x = -3$ și deci $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$.

4) Cum $4^4 = 256$ atunci din definiția logaritmului obținem $\log_4 256 = 4$.

Observație. În toate exemplele pe care le-am dat am putut să calculăm logaritmul numerelor date. În general, determinarea logaritmului unui număr oarecare nu se poate face cu exactitate. Când vom studia tabelele de logaritmi vom arăta că logaritmul unui număr se poate indica cu o anumită aproximație.

2.2. Funcția logaritmică

Fie $a > 0$, $a \neq 1$ un număr real. În paragraful precedent definim noțiunea de logaritm în baza a, fiecărui număr pozitiv N i s-a asociat un număr real bine determinat. Acest lucru ne permite să definim o funcție

$$f : (0, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_a x$$

numită *funcție logaritmică*.

Iată câteva proprietăți ale funcției logaritmice:

1° $f(1) = 0$.

Într-adevăr, cum $a^0 = 1$, rezultă că $\log_a 1 = 0$ și deci $f(1) = 0$.

2° *Funcția logaritmică este monotonă. Mai exact, dacă $a > 1$, atunci funcția logaritmică este strict crescătoare, iar dacă $0 < a < 1$, funcția logaritmică este strict descrescătoare.*

Într-adevăr, să considerăm cazul $a > 1$ și fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încât $x_1 < x_2$.

Cum $x_1 = a^{\log_a x_1}$ și $x_2 = a^{\log_a x_2}$, rezultă că $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$.

Dar funcția exponențială fiind crescătoare (a se vedea § 1) obținem că $\log_a x_1 < \log_a x_2$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

În cazul $0 < a < 1$, din inegalitatea $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ și din faptul că funcția exponențială cu baza un număr real $0 < a < 1$ este strict descrescătoare, rezultă că $\log_a x_1 > \log_a x_2$, adică $f(x_1) > f(x_2)$.

3° *Funcția logaritmică este bijectivă.*

Într-adevăr, dacă $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Dar din egalitatea (3) (§ 2) obținem $x_1 = a^{\log_a x_1}$ și $x_2 = a^{\log_a x_2}$, adică $x_1 = x_2$. Deci f este o funcție injectivă.

Fie $y \in \mathbf{R}$, un număr real oarecare. Notăm $x = a^y$. Se vede că $x \in (0, +\infty)$ și $\log_a x = \log_a a^y = y$. Deci $f(x) = y$ ceea ce ne arată că f este și surjectivă. Așadar f este bijectivă.

4° *Inversa funcției logaritmice este funcția exponențială.*

Funcția logaritmică

$$f : (0, +\infty) \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_a x$$

fiind bijectivă, rezultă din § 3.7, cap II, Algebră clasa a IX-a că ea este inversabilă. Inversa sa este funcția exponențială

$$g : \mathbf{R} \to (0, +\infty),\ g(x) = a^x.$$

Într-adevăr, dacă $x \in (0, +\infty)$ avem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$ și dacă $y \in \mathbb{R}$, atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(a^y) = \log_a a^y = y$.

Graficul funcției logaritmice $f(x) = \log_a x$ pentru $a = 2, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Considerăm tabelele de valori

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\log_2 x$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{2}} x$	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4

x	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125	625
$\log_5 x$	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{5}} x$	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă.

În figura I.3 sunt reprezentate graficele funcțiilor $f(x) = \log_2 x$ și $g(x) = \log_5 x$, iar în figura I.4 sunt reprezentate graficele funcțiilor $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ și $k(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

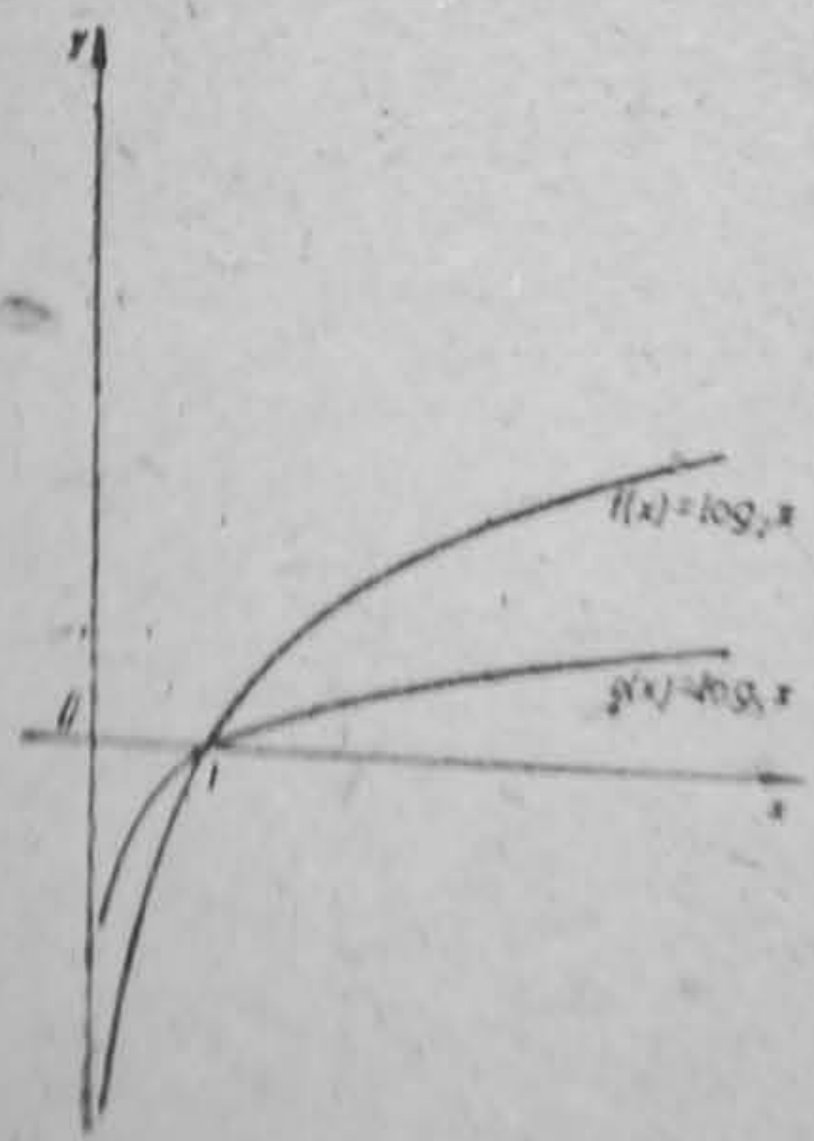


Fig. I. 3

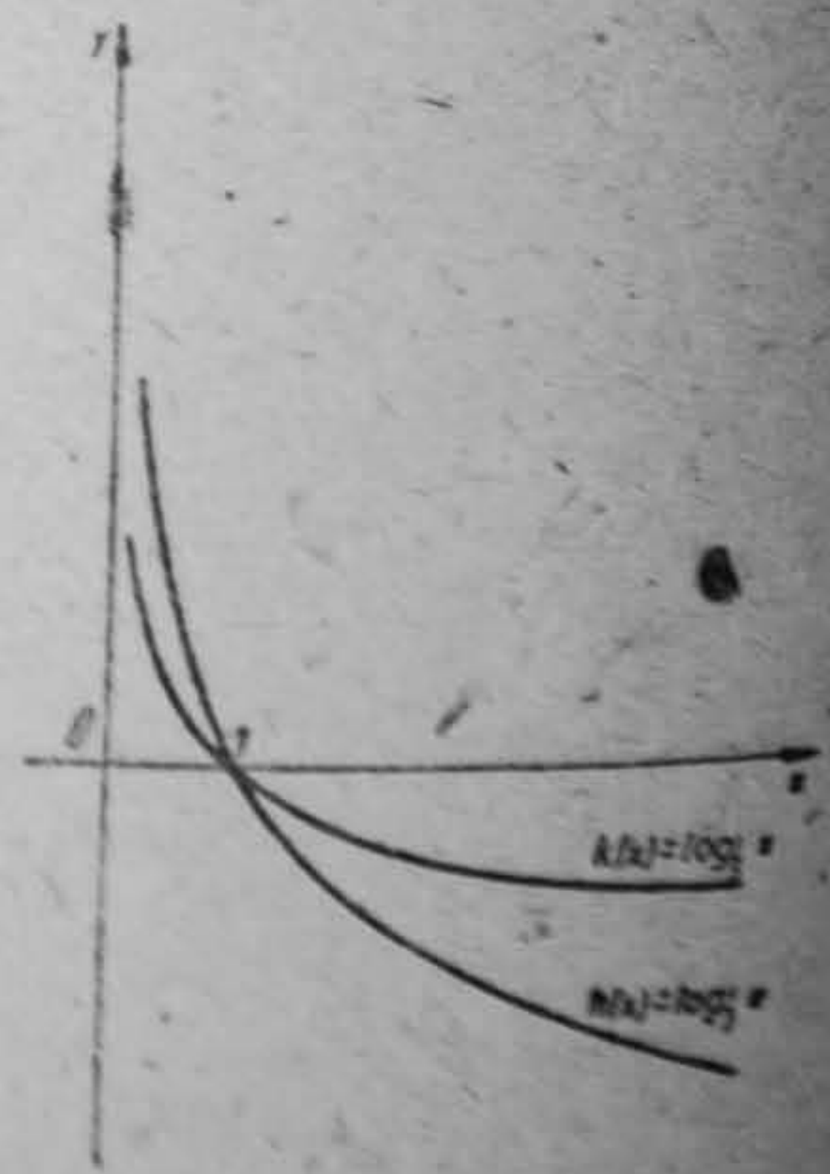


Fig. I. 4

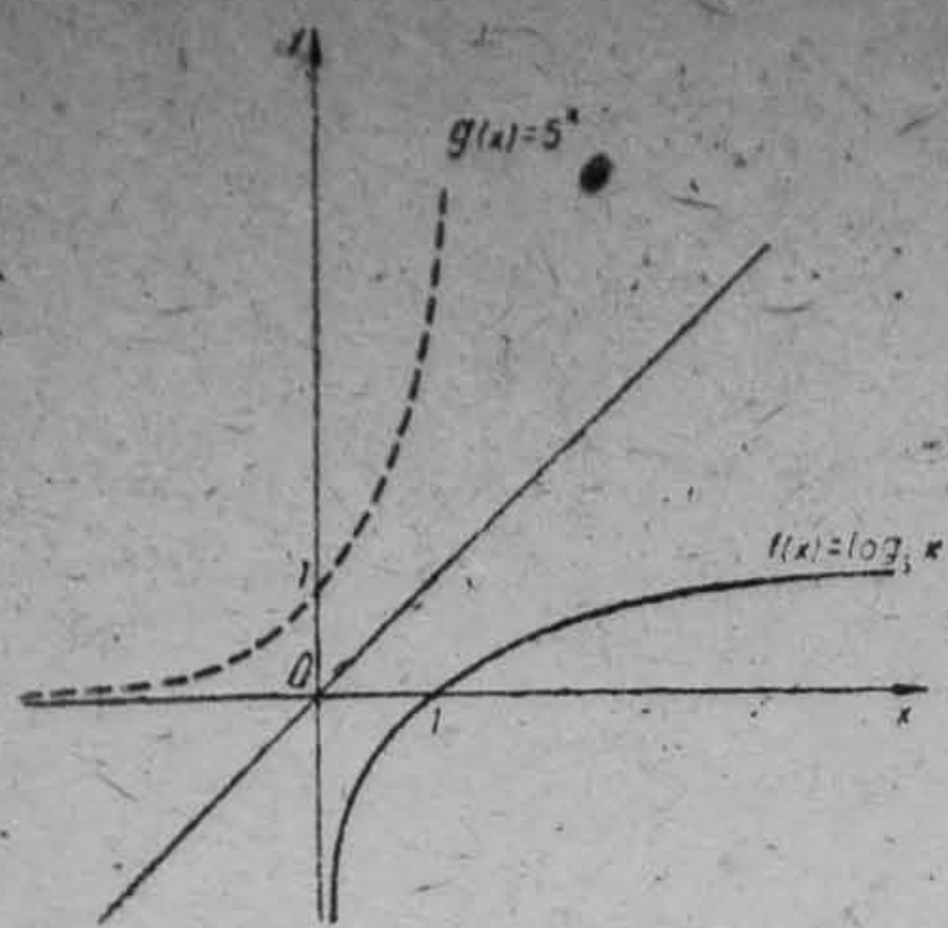


Fig. I. 5

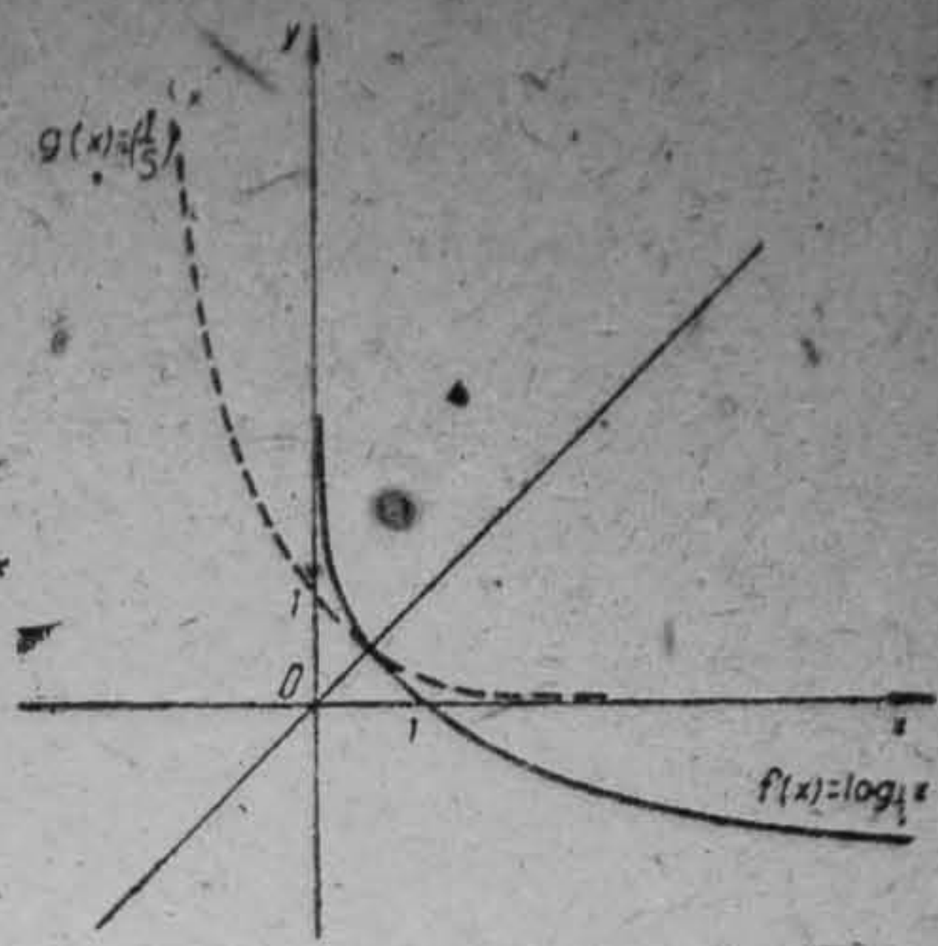


Fig. I. 6

Deoarece funcţia logaritmică este inversa funcţiei exponenţiale, graficele celor două funcţii sunt simetrice faţă de prima bisectoare. În figura I.5 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_5 x$ şi $g(x) = 5^x$, iar în figura I.6 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ şi $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Graficul funcţiei logaritmice are următoarele proprietăţi:

1) Trece prin punctul de coordonate (1, 0) de pe axa Ox.

2) Graficul funcţiei logaritmice este constituit dintr-o singură ramură care „urcă" dacă baza $a > 1$ şi „coboară" dacă $0 < a < 1$.

3) Graficul funcţiei logaritmice este din ce în ce mai „apropiat" de axele Ox şi Oy cu cât a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cât a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.

4) Graficul funcţiei logaritmice este simetricul graficului funcţiei exponenţiale faţă de bisectoarea unghiului xOy.

2.3. Proprietăţile logaritmilor

Folosind proprietăţile puterilor cu exponenţi reali obţinem următoarele proprietăţi pentru logaritmi:

1° *Dacă A şi B sunt două numere pozitive, atunci*

$$\boxed{\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B}$$

(logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ şi $\log_a B = y$, atunci $a^x = A$ şi $a^y = B$. Cum $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, obţinem $a^{x+y} = AB$ şi deci $\log_a AB = x + y = \log_a A + \log_a B$.

Observaţie. Proprietatea se poate da pentru n numere pozitive $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adică

$$\boxed{\log_a(A_1A_2 \ldots A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \ldots + \log_a A_n}$$

2° *Dacă A şi B sunt două numere pozitive, atunci*

$$\boxed{\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B}$$

(logaritmul câtului a două numere este egal cu diferenţa dintre logaritmul numărătorului şi al numitorului).

Într-adevăr, ţinând cont de proprietatea 1°, avem $\log_a A = \log_a\left(\frac{A}{B} \cdot B\right) = \log_a \frac{A}{B} + \log_a B$, de unde rezultă că $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

Observaţie. Dacă punem $A = 1$ şi ţinem cont că $\log_a 1 = 0$, obţinem egalitatea:

$$\boxed{\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B}$$

3° *Dacă A este un număr pozitiv şi m un număr real arbitrar, atunci*

$$\boxed{\log_a A^m = m \log_a A}$$

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii şi logaritmul numărului).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$, atunci $a^x = A$. Dar atunci $A^m = (a^x)^m = a^{mx}$ şi deci $\log_a A^m = mx = m \log_a A$.

4° *Dacă A este un număr pozitiv şi n un număr natural ($n \geqslant 2$), atunci*

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}}$$

(logaritmul unui radical dintr-un număr este egal cu câtul dintre logaritmul numărului şi ordinul radicalului).

Într-adevăr, proprietatea 4° este un caz particular al proprietăţii 3°, punând $m = \frac{1}{n}$.

Exemple. 1) Să calculăm $\log_3 75$.

Avem $\log_3 75 = \log_3(3 \cdot 25) = \log_3 3 + \log_3 25 = 1 + \log_3 5^2 = 1 + 2\log_3 5$.

2) Să calculăm $\log_2 1\,000 - \log_2 125$.

Avem $\log_2 1\,000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1\,000}{125} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.

3) Să calculăm $\log_{10} 0{,}18 - \log_{10} 180$.

Avem $\log_{10} 0{,}18 - \log_{10} 180 = \log_{10} \frac{0{,}18}{180} = \log_{10} \frac{1}{1\,000} = \log_{10} 10^{-3} = -3$.

4) Să calculăm $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12}$.

Avem $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12} = -\log_6 18 - \log_6 12 = -(\log_6 18 + \log_6 12) = -\log_6 (18 \cdot 12) =$
$= -\log_6 6^3 = -3$.

5) Să calculăm $\log_2 \sqrt[4]{8}$.

Avem $\log_2 \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \log_2 2^3 = \frac{3}{4} \log_2 2 = \frac{3}{4}$.

6) Să calculăm $\log_3 \sqrt[5]{81}$.

Avem $\log_3 \sqrt[5]{81} = \frac{1}{5} \log_3 81 = \frac{1}{5} \log_3 3^4 = \frac{4}{5} \log_3 3$.

2.4. Schimbarea bazei logaritmului aceluiaşi număr

Dacă a şi b sunt două numere pozitive diferite de 1, iar A un număr pozitiv oarecare, are loc egalitatea:

$$\boxed{\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b}$$

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ şi $\log_b A = y$, atunci avem $a^x = A$ şi $b^y = A$, de unde obţinem $a^x = b^y$. Dar atunci $\log_a a^x = \log_a b^y$ sau $x \log_a a = y \log_a b$.

Cum $\log_a a = 1$, avem $x = y \log_a b$, adică $\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$.

Observaţie. Dacă în egalitatea de mai sus $A = a$, obţinem $\log_a a = \log_b a \cdot \log_a b$. Cum $\log_a a = 1$, rezultă că:

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Exemple. 1) Să se scrie $\log_2 x$ în funcţie de $\log_4 x$.

Avem $\log_2 x = \log_4 x \cdot \log_2 4 = 2 \log_4 x$.

2) Să se arate că expresia $E = \frac{\log_2 x}{\log_5 x}$ nu depinde de x.

Într-adevăr, $E = \frac{\log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_5 2} = \frac{1}{\log_5 2} = \log_2 5$.

3) Să se arate că $\log_2 6 + \log_6 2 > 2$.

Avem $\log_2 6 + \log_6 2 = \log_2 6 + \frac{1}{\log_2 6}$. Deci trebuie să arătăm că $\log_2 6 + \frac{1}{\log_2 6} > 2$ sau $(\log_2 6)^2 - 2\log_2 6 + 1 > 0$, sau încă $(\log_2 6 - 1)^2 > 0$, inegalitate evidentă deoarece $\log_2 6 \neq 1$.

2.5. Operaţia de logaritmare a unei expresii

De multe ori în practică suntem puşi în situaţia să determinăm valoarea aproximativă a unui număr dat printr-o expresie în care apar radicali de ordin foarte mare. De exemplu, să considerăm numărul:

$$x = \frac{17^3 \sqrt[4]{131} \cdot \sqrt[3]{92}}{\sqrt[5]{37 \cdot 98 \cdot 23}} \qquad (1)$$

și vrem să determinăm o valoare aproximativă a numărului x. Vom logaritma expresia (1) într-o anumită bază convenabilă a. Folosind proprietățile logaritmilor obținem:

$$\log_a x = \log_a(17^3\sqrt[4]{131}\sqrt[3]{92}) - \log_a\sqrt[5]{37\cdot 98\cdot 23} = \log_a 17^3 + \log_a\sqrt[4]{131} +$$

$$+ \log_a\sqrt[3]{92} - \frac{\log_a(37\cdot 98\cdot 23)}{5} = 3\log_a 17 + \frac{1}{4}\log_a 131 + \frac{1}{3}\log_a 92 -$$

$$-\frac{1}{5}\log_a 37 - \frac{1}{5}\log_a 98 - \frac{1}{5}\log_a 23.$$

Deci am obținut egalitatea:

$$\log_a x = 3\log_a 17 + \frac{1}{4}\log_a 131 + \frac{1}{3}\log_a 92 - \frac{1}{5}\log_a 37 -$$

$$-\frac{1}{5}\log_a 98 - \frac{1}{5}\log_a 23. \qquad (2)$$

Utilizând tabelele de logaritmi (a se vedea § 3) din egalitatea (2) putem să determinăm o valoare aproximativă pentru x.

În general, dacă E este o expresie algebrică în care apar produse de puteri și radicali, putem să-i asociem, exact ca în exemplul (1), o expresie, notată $\log E$, în care apar sume (diferențe) de logaritmi înmulțite eventual cu anumite numere raționale. Operația prin care expresiei E i se asociază expresia $\log E$ se numește „operație de logaritmare".

Exemple. 1) Fie $E = a^2\sqrt[7]{ab^6}$.

Prin operația de logaritmare obținem:

$$\log_a E = \log_a(a^2\sqrt[7]{ab^6}) = \log_a a^2 + \log_a\sqrt[7]{ab^6} = 2\log_a a + \frac{1}{7}\log_a a + \frac{6}{7}\log_a b.$$

2) Fie $E = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}$. Prin operația de logaritmare obținem expresia

$$\log_a E = \log_a\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}} = \frac{1}{4}\log_a\frac{a^3}{b^5} = \frac{1}{4}(\log_a a^3 - \log_a b^5) = \frac{3}{4}\log_a a - \frac{5}{4}\log_a b.$$

Observație. Adesea în calcule este nevoie să se facă și operația inversă, adică unei expresii în care intervin logaritmi să-i asociem o expresie fără logaritmi.

De exemplu, fie expresia

$$\log_a x = 2\log_a a - \frac{1}{2}\log_a b - 3\log_a 3.$$

Folosind proprietățile logaritmilor avem:

$$\log_a x = \log_a a^2 - \log_a\sqrt{b} - \log_a 3^3 = \log_a\frac{a^2}{\sqrt{b}\cdot 3^3} = \log_a\frac{a^2}{27\sqrt{b}},$$

de unde obținem că $x = \frac{a^2}{27\sqrt{b}}$.

Exerciţii

1. Să se determine valorile lui x pentru ca următorii logaritmi să aibă sens:

a) $\log_2(1-x)$; b) $\log_3(1-x^2)$; c) $\log_{\frac{1}{2}}(1+x^2)$;

d) $\log_4(x^2+x-2)$; e) $\log_3(-x^2+5x-6)$; f) $\log_5(x^2-x+1)$;

g) $\log_4(\log_2 x)$; h) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)$; i) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}} x)$.

2. Care din următoarele numere este mai mare?

a) $\log_2 4$ sau $\log_2 5$; b) 2 sau $\log_3 10$;

c) $\log_5 \frac{1}{2}$ sau $\log_5 \frac{1}{7}$; d) 3 sau $\log_2 7$.

3. Pentru ce valori ale lui x au loc inegalităţile:

a) $\log_3 x > \log_3 4$; b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 5$;

c) $\log_3 x^2 \geqslant \log_2 8$; d) $\log_6(x^2-1) \leqslant \log_6(4x+4)$.

4. Pornind de la graficul funcţiei logaritmice să se construiască graficele următoarelor funcţii:

a) $f\colon (-1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_2(1+x)$;
b) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_3 x^4$;
c) $f\colon (1, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_5(x-1)$;
d) $f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_3 x^2$;
e) $f\colon (2, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$;
f) $f\colon \mathbf{R}\setminus\{3\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_6|x-3|$.

5. Să se calculeze:

a) $\log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5}$; b) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$;

c) $\log_3 1\,000 - \log_3 40$; d) $\log_6 7 - \log_6 \frac{7}{36}$;

e) $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0,5$; f) $\log_4 6 + \log_4 8 - \log_4 3$;

g) $\log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 12 + \log_{\frac{1}{2}} 2$; h) $\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 4 - \log_{0,1} 2$.

6. Ştiind că $\log_{10} 7 \approx 0,84510$ şi $\log_{10} 5 \approx 0,69897$ să se calculeze:

a) $\log_{10} 0,7$; b) $\log_{10} \sqrt[3]{7}$; c) $\log_{10} 35$; d) $\log_{10} 175$; e) $\log_{10} 7\sqrt{5}$.

7. Să se arate că expresiile:

a) $E = \dfrac{\log_2 x^2}{\log_4 x^2}$; $E = \dfrac{\log_2 x + \log_2 \sqrt{x}}{\log_3 x + \log_3 \sqrt{x}}$; c) $E = \dfrac{\log_x \sqrt{7}}{\log_x 7}$ nu depind de x.

8. Să se logaritmeze expresiile:

a) $E = 41^2 \sqrt[12]{41 \cdot 37^5}$; b) $E = \dfrac{31^2 \sqrt[7]{41 \cdot 33^4}}{17^2 \sqrt[3]{23^2 \cdot 29}}$ c) $E = a^2 \sqrt[5]{ab^2c}$; d) $E = 23a^2 \sqrt[3]{b^2a^4}$;

e) $E = \sqrt[6]{\left(\dfrac{a}{5b}\right)^7}$; f) $E = \left(\sqrt{\dfrac{a^4}{2b}}\right)^3$; g) $E = \dfrac{21}{4} \sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$; h) $E = \dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}}$

i) $E = \dfrac{2(a-b)}{3(a+b)} \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$; j) $E = \dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}$

9. Să se determine expresia lui x astfel încât să avem:

a) $\log_a x = \log_a 3 + \log_a 4 - \log_a 5$; b) $\log_a x = 2\log_a 7 + 3\log_a 6 - 4\log_a 5$;

c) $\log_a x = 2\log_a a + 3\log_a(a+b) - 4\log_a(a-b)$;

d) $\log_a x = -\frac{1}{2}\log_a(a+b) + \frac{1}{4}\left[\log_a(a-b) - \frac{2}{3}\log_a(a+b) + \frac{2}{3}\log_a(2b) - \frac{1}{2}\log_a(2a)\right]$.

§ 3. Logaritmi zecimali

3.1. Logaritmi zecimali și proprietățile lor

Definiția 3.1.1. Dacă a este un număr real, se numește *partea întreagă a lui a*, cel mai mare număr întreg care este cel mult egal cu a.

Partea întreagă a lui a se notează cu $[a]$. Conform definiției avem $[a] \in \mathbf{Z}$ și $[a] \leqslant a$; dacă $[a] \leqslant n \leqslant a$, $n \in \mathbf{Z}$, atunci $n = [a]$. Altfel spus, partea întreagă a lui a este un număr întreg n, cu proprietatea $n \leqslant a < n + 1$. Deoarece oricare ar fi numărul real a, în intervalul $(a-1, a]$ există un număr întreg și numai unul, rezultă că $a - 1 < [a] \leqslant a$.

De *exemplu*: $[3,2] = 3$; $[0{,}245] = 0$; $[6] = 6$; partea întreagă a numărului $-4{,}7$ este -5, deoarece $-5 < -4{,}7 < -4$. Analog se obține: $[-5{,}791] = -6$; $[-0{,}231] = -1$, $[-\pi] = [-3{,}141\ldots] = -4$.

Se observă că dacă a este un număr real oarecare și n este întreg, atunci $[a+n] = [a] + n$.

Definiția 3.1.2. Diferența dintre numărul a și partea sa întreagă $[a]$ se numește *partea fracționară* a lui a și se notează cu $\{a\}$.

Deci $\{a\} = a - [a]$. Deoarece $[a] \leqslant a < [a]+1$, rezultă că $0 \leqslant \{a\} < 1$.

De *exemplu*: $\{2{,}4\} = 2{,}4 - 2 = 0{,}4$; $\{0{,}261\} = 0{,}261 - 0 = 0{,}261$; $\{-6{,}81\} = -6{,}81 - (-7) = 0{,}19$; $\{-0{,}231\} = -0{,}231 - (-1) = 0{,}769$.

Orice număr real a este suma dintre partea sa întreagă și partea sa fracționară: $a = [a] + \{a\}$.

Se observă că dacă numărul real a are scrierea ca fracție zecimală $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$, cu $a_0 \in \mathbf{Z}$ și $a_1, a_2, a_3\ldots$, sunt numere naturale cuprinse între 0 și 9 atunci

$$[a] = \begin{cases} a_0, & \text{dacă } a \geqslant 0 \text{ sau } a \in \mathbf{Z}, \\ a_0 - 1, & \text{dacă } a < 0 \text{ și } a \notin \mathbf{Z}, \end{cases}$$

$$\text{iar } \{a\} = \begin{cases} 0, a_1a_2a_3\ldots, & \text{dacă } a \geqslant 0 \text{ sau } a \in \mathbf{Z}, \\ 1 - 0, a_1a_2a_3\ldots, & \text{dacă } a < 0 \text{ și } a \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Dacă $a < 0$, $a \notin \mathbf{Z}$ și $|[a]| = b_0$, $\{a\} = 0, b_1b_2b_3\ldots$, atunci vom scrie numărul a în următoarea formă:

$$a = b_0, b_1b_2b_3\ldots.$$

De *exemplu*, $-4{,}3 = [-4{,}3] + \{-4{,}3\} = -5 + 0{,}7 = \bar{5}{,}7$.

În practică se folosesc logaritmii în bază zece care se mai numesc şi logaritmi zecimali. Aceştia se notează cu lg, în loc de log; de aceea nu mai este nevoie să se specifice baza. Astfel, vom scrie lg 101 în loc de $\log_{10} 101$ şi lg 5 în loc de $\log_{10} 5$ ş.a.m.d.

Logaritmii zecimali au toate proprietăţile pe care le au logaritmii în bază supraunitară. Astfel, logaritmul zecimal al unui număr mai mare decât 1 este pozitiv, iar logaritmul zecimal al unui număr mai mic decât 1 este negativ. Dacă două numere pozitive sunt într-o anumită ordine, atunci logaritmii lor zecimali sunt în aceeaşi ordine. Dacă α este un număr real oarecare şi a este pozitiv, atunci $\lg a^{\alpha} = \alpha \lg a$. Dacă a şi b sunt pozitive, atunci $\lg ab = \lg a + \lg b$. În particular dacă $a = 10^n$, atunci $\lg 10^n = n$ şi $\lg 10^n \cdot b = n + \lg b$.

De *exemplu*: $\lg 10\sqrt{10} = \lg 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$; $\lg 10\,000 = \lg 10^4 = 4$; $\lg 100 = \lg 10^2 = 2$; $\lg 0{,}001 = \lg 10^{-3} = -3$; $\lg 56{,}81 = \lg 5681 \cdot 10^{-2} = -2 + \lg 5681$.

Din aceste proprietăţi generale, deducem următoarele *proprietăţi ale logaritmului zecimal*:

1° Logaritmul unui număr care scris în baza zece este de forma 1 urmat de n zerouri, este egal cu n; adică, dacă $a = \underbrace{100\ldots0}_{n}$, atunci $\lg a = n$.

2° Logaritmul unui număr subunitar care scris în baza zece are după virgulă n cifre de zero urmate de cifra 1, este egal cu $-n-1$; adică pentru $a = \underbrace{0{,}00\ldots01}_{n}$, avem $\lg a = \lg 10^{-n-1} = -n-1$.

3° Dacă $10^n < a < 10^{n+1}$, atunci $\lg 10^n < \lg a < \lg 10^{n+1}$ şi deci $n < \lg a < n+1$.

De *exemplu*: dacă $a = 87{,}23$, atunci $10 < 87{,}23 < 100$ şi deci $1 < \lg a < 2$.

Deducem că logaritmul oricărui număr care nu este egal cu o putere întreagă a lui 10, este un număr zecimal (nu este număr întreg).

Definiţia 3.1.3. Dacă a este un număr pozitiv vom numi *caracteristica logaritmului* său zecimal, numărul întreg $[\lg a]$; vom numi *mantisa logaritmului* lui a numărul $\{\lg a\}$.

Prin urmare avem $\lg a = [\lg a] + \{\lg a\}$. Caracteristica logaritmului lui a este cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că $10^n \leq a$. Mai precis, caracteristica lui $\lg a$ este un număr întreg n, cu proprietatea că $10^n \leq a < 10^{n+1}$.

De *exemplu*, caracteristica lui lg 87,23 este 1; dacă $a = 4573$, atunci $1\,000 \leq a < 10\,000$, $3 < \lg 4573 < 4$, prin urmare caracteristica lui lg 4573 este 3; dacă $a = 0{,}0123$, atunci $10^{-2} \leq a < 10^{-1}$ şi deci caracteristica logaritmului său este -2.

Din cele de mai sus rezultă următoarele două reguli de calculare a caracteristicii logaritmului zecimal al unui număr a:

i) *Dacă un număr supraunitar scris în formă zecimală are n cifre la stânga virgulei (adică la partea sa întreagă), atunci caracteristica logaritmului său este* $n - 1$.

ii) *Caracteristica unui număr subunitar scris în formă zecimală se obține în felul următor: se ia numărul de zerouri situate la stânga primei cifre diferite de zero (inclusiv zeroul din stânga virgulei), numărul natural astfel obținut fiind luat cu semnul minus.*

De *exemplu*, dacă $a = 0{,}57$, atunci $[\lg 0{,}57] = -1$; dacă $a = 0{,}0012$, $[\lg a] = -3$.

4° Dacă înmulțim un număr întreg a cu o putere întreagă a lui 10, atunci caracteristica logaritmului numărului astfel obținut se obține din caracteristica logaritmului lui a, la care se adaugă exponentul lui 10. Într-adevăr, avem $[\lg 10^n \cdot a] = [n + \lg a] = n + [\lg a]$. De *exemplu*, dacă înmulțim pe a cu 10, 100, 1000 etc., atunci caracteristica numărului obținut crește cu o unitate, cu două, cu trei etc.; dacă împărțim pe a cu 10, 100, 1000 etc., caracteristica scade cu 1, cu 2, cu 3 etc.

5° Mantisa logaritmului unui număr a nu se modifică, dacă înmulțim pe a cu o putere întreagă a lui 10. Într-adevăr, avem

$$\{\lg 10^n a\} = \lg 10^n \cdot a - [\lg 10^n \cdot a] = n + \lg a - [n + \lg a] =$$
$$= n + \lg a - n - [\lg a] = \lg a - [\lg a] = \{\lg a\}.$$

Cu ajutorul regulilor enumerate până acum, deducem că dificultatea aflării logaritmului unui număr constă în calcularea mantisei. Aceasta se află cu ajutorul tabelelor de logaritmi.

3.2. Tabele de logaritmi cu 5 zecimale

Cu ajutorul acestor tabele se pot afla mantisele logaritmilor numerelor de la 1 la 9999, cu o aproximație de 0,00001. Această aproximație este în general suficient de bună pentru calculele din practică. Pe prima pagină a tabelelor sunt scrise mantisele logaritmilor de la 1 până la 100; în coloana cu indicatorul N sunt scrise numerele, iar în dreapta lor, în coloana lg, se află mantisele respective.

Celelalte pagini sunt aranjate în felul următor: în coloana întâi cu indicatorul N, sunt scrise numerele de la 100 la 9999 și urmează apoi zece coloane cu indicativul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 în care sunt scrise mantisele logaritmilor numerelor cu patru cifre.

Pentru a afla mantisa logaritmului numărului cu patru cifre $n = a_1a_2a_3a_4$, se procedează astfel: se caută în coloana N numărul $\overline{a_1a_2a_3}$ obținut prin tăierea cifrei unităților în numărul n (dacă n are trei cifre, se caută în coloana N chiar numărul n), apoi fixăm coloana cu indicativul a_4; luăm primele două cifre ale mantisei logaritmului lui $a_1a_2a_3$ din coloana 0

apoi la intersecţia liniei orizontale a lui $a_1a_2a_3$ cu coloana a_4 se găsesc restul de trei cifre ale mantisei (dacă n are doar trei cifre vom căuta logaritmul său în coloana 0).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48 001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	430	444	458	473	487	501	515	530	544	588
306	572	586	601	615	629	643	657	671	686	700
307	714	728	742	756	770	785	799	813	827	841
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	49 136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	554	568	583	596	610	624	638	651	665	679
314	693	707	721	734	748	762	766	790	803	817
315	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955
316	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501

Exemple. 1) Dacă vom căuta în tabele lg 3153, procedăm în felul următor: deoarece 3153 are 4 cifre, caracteristica sa este 3 iar pentru a afla mantisa, căutăm în coloana N numărul 315. La intersecţia liniei corespunzătoare acestui număr cu coloana 3, vom găsi numărul 49872, deci

$$\lg 3153 \approx 3{,}49872$$

2) Să aflăm logaritmul lui 1,25. Deoarece 1,25 are o singură cifră semnificativă la stânga virgulei, caracteristica logaritmului său este 0 (conform unor proprietăţi stabilite). Mantisa este aceeaşi cu a numărului 125 din coloana N a tabelelor; deci obţinem

$$\lg 1{,}25 \approx 0{,}09691.$$

3) Logaritmul numărului 81,13 are caracteristica 1, iar mantisa aceeaşi cu a numărului 8113 pe care o găsim în tabele. Obţinem astfel

$$\lg 81{,}13 \approx 1{,}90918.$$

4) Logaritmul numărului 0,0003145 are caracteristica $\bar{4}$ iar în tabele vom găsi mantisa lui în dreptul numărului 314, în coloana 5. Obţinem astfel

$$\lg 0{,}0003145 \approx \bar{4}{,}49762.$$

Logaritmul unui număr cu cinci zecimale. Să aflăm de *exemplu* lg 32437 cu aproximaţie cât mai bună. Procedăm astfel: caracteristica este 4, iar

mantisa este aceeaşi ca pentru lg 3243,7. Observăm că 3243,7 este cuprins între 3243 şi 3244, deci lg 3243,7 este cuprins între lg 3243 şi lg 3244. Să admitem că pe porţiunea dintre 3243 şi 3244 logaritmul este proporţional cu creşterea numerelor. Din tabele obţinem:

$$\lg 3243 \approx 3{,}51095,$$
$$\lg 3244 \approx 3{,}51108$$

şi rezultă că pentru o creştere a numărului cu 1, logaritmul se măreşte cu $0{,}00013 = 13 \cdot 10^{-5}$. Deci, dacă numărul creşte de la 3243 la 3243,7, adică cu 0,7, logaritmul său va creşte cu $13 \cdot 10^{-5} \times 0{,}7 = 9{,}1 \cdot 10^{-5} = 0{,}000091$. Deoarece lucrăm numai cu 5 zecimale, rotunjim pe 0,000091 la 0,00009 şi vom avea

$$\lg 3243{,}7 \approx 4{,}51095 + 0{,}00009 = 4{,}51104.$$

În practică este comod să fie aşezate calculele de mai sus în felul următor:

$$\begin{array}{l} \lg 3243 = 3{,}51095 \\ \underline{\lg 3244 = 3{,}51108} \\ \qquad\qquad\quad 13 \\ \hline 1 \ldots\ldots\ldots 13 \\ 0{,}7 \ldots\ldots 13 \times 0{,}7 = 9{,}1 \approx 9 \\ \lg 32437 \approx 4{,}51095 + 0{,}00009 = 4{,}51104. \end{array}$$

Operaţia prin care am aflat logaritmul de mai sus se numeşte interpolare. Ea oferă posibilitatea unui calcul *aproximativ*, cu eroare destul de mică, pentru aflarea mantisei logaritmului unui număr cu cinci sau mai multe cifre. În realitate *creşterile logaritmilor nu sunt proporţionale cu creşterile numerelor*, deoarece, de *exemplu*, $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$ şi, prin urmare, logaritmul s-a mărit de 2 ori, în timp ce numărul s-a mărit de 10 ori. Când însă creşterile sunt mici, putem să considerăm creşterea logaritmilor aproximativ proporţională cu creşterea numerelor.

Aflarea unui număr căruia i se cunoaşte logaritmul.

Considerăm de *exemplu* problema următoare: să se afle numărul x ştiind că $\lg x = 3{,}49982$. Să căutăm mai întâi un număr a cărui mantisă a logaritmului să fie 0,49982. Pentru aceasta căutăm în coloana 0 a tabelelor de logaritmi primul număr care începe cu cifrele 49, apoi urmărim în jos pe această coloană până ajungem la cel mai mare număr, mai mic decât 49982. Acesta este 49969. Urmărim apoi pe linia corespunzătoare acestuia pînă găsim numărul 49982 sau un număr cât mai apropiat de acesta. În cazul nostru găsim numărul 49982 în coloana 1, deci numărul căutat este un număr de forma $a_1a_2a_3a_4$, în care numărul $a_1a_2a_3$ este în coloana N, în aceeaşi linie cu mantisa 49982, iar a_4 este indicativul coloanei în care se găseşte 49982, în cazul nostru $a_4 = 1$. Obţinem numărul 3161. Deoarece numărul $\lg x$ are caracteristica 3, rezultă că x are 4 cifre în stânga virgulei deci $x \approx 3161$.

Procedeul descris ne ajută la calcularea puterilor lui 10, deoarece egalitatea $\lg x = 1$ este echivalentă cu $x = 10$. Prin urmare calculul lui x revine la aflarea lui 10, unde α este numărul dat. Ca şi aflarea logaritmului cu ajutorul tabelelor, acesta este un calcul *aproximativ*. Dacă numărul dat $\lg x$ nu se află în tabele, se procedează la interpolare, ca în cazul operaţiei inverse, de aflare a mantisei lui $\lg x$ când se cunoaşte x.

3.3. Operaţii cu logaritmi

Tabelele de logaritmi zecimali se pot întrebuinţa la efectuarea mai rapidă a unor calcule numerice complicate. Astfel proprietăţile următoare:

1° $\lg xy = \lg x + \lg y$;

2° $\lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y$;

3° $\lg x^n = n \lg x$;

4° $\lg \sqrt[n]{x} = \frac{\lg x}{n}$;

5° $\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$,

ne permit ca în loc de o înmulţire să efectuăm o adunare, în loc de o împărţire să efectuăm o diferenţă, în loc de ridicare la putere să efectuăm o înmulţire, în loc de extragere de radical să efectuăm o împărţire. Proprietatea 5° reduce calcularea logaritmilor într-o bază oarecare la calcularea unor logaritmi zecimali.

Practic, trebuie să ştim deci să adunăm, să scădem, să înmulţim, sau să împărţim numere scrise sub forma

$$n + \varepsilon, \text{ cu } n \in \mathbf{Z} \text{ şi } 0 < \varepsilon < 1,$$

unde n reprezintă caracteristica iar ε mantisa unui anumit logaritm.

Adunarea. Pentru a efectua adunarea mai multor logaritmi procedăm la fel ca la adunarea numerelor zecimale, ţinând cont însă de unităţile care pot apărea la adunarea mantiselor; acestea se adaugă la caracteristică.

Exemple. 1) Să efectuăm adunarea:

$$\lg 3452 + \lg 253 + \lg 1{,}439.$$

În tabele găsim:

$$\lg 3452 \approx 3{,}53807;$$
$$\lg 253 \approx 2{,}40312;$$
$$\lg 1{,}439 \approx 0{,}15806.$$

Vom obţine:

$$\begin{array}{r} 3{,}53807\ + \\ 2{,}40312 \\ ,15806 \\ \hline 6{,}09925 \end{array}$$

2) Să efectuăm adunarea

$$\lg 345 + \lg 0{,}98 + \lg 75{,}43 + \lg 0{,}029.$$

Căutând în tabele, rezultă următoarea adunare:

$$\begin{array}{r} 2{,}53782\ + \\ \bar{1}{,}99123 \\ 1{,}87754 \\ \bar{2}{,}46240 \\ \hline 2{,}86899 \end{array}$$

Scăderea. Scăderea se poate reduce la o adunare, ținând cont că pentru un număr scris sub forma $n + \varepsilon$ cu $n \in \mathbf{Z}$ și $0 < \varepsilon < 1$, avem $-(n + \varepsilon) = (-n - 1) + (1 - \varepsilon)$.

Exemplu. Să aflăm $\lg \frac{345}{5\,933}$.

Avem $\lg \frac{345}{5\,933} = \lg 345 - \lg 5\,933 \approx 2{,}53782 - 3{,}77327 = 2{,}53782 + \bar{4}{,}22673 = \bar{2}{,}76455$.

Înmulțirea cu un număr întreg. Pentru a înmulți un logaritm cu un număr întreg, înmulțim separat mantisa și separat caracteristica cu acel număr, adăugând la caracteristică unitățile pozitive ce rezultă de la înmulțirea mantisei.

Exemple 1) Să se calculeze $\lg (312{,}6)^8$.

Avem: $\lg (312{,}6)^8 = 8 \lg 312{,}6 \approx 8 \cdot 2{,}49499 = 19{,}95992$.

2) $\lg (0{,}0074)^6 = 6 \lg 0{,}0074 \approx 6 \cdot \bar{3}{,}86923 = -18 + 6 \cdot 0{,}86923 = \bar{13}{,}21538$.

Împărțirea cu un număr natural nenul. Această operație apare în calcularea unor logaritmi de tipul: $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{\lg a}{n}$. Vom da trei exemple din care vor rezulta cazurile ce se pot ivi în astfel de situații.

Exemple: 1) Să se calculeze $\lg \sqrt[3]{520}$.

Obținem $\lg \sqrt[3]{520} = \frac{\lg 520}{3} \approx \frac{2{,}71600}{3} \approx 0{,}90533$.

În acest caz, caracteristica logaritmului lui 520 fiind pozitivă, nu am avut nici o dificultate, împărțirea efectuându-se în mod obișnuit.

2) Să se calculeze $\lg \sqrt[3]{0{,}00786}$.

Avem $\lg \sqrt[3]{0{,}00786} = \frac{\lg 0{,}00786}{3} \approx \frac{\bar{3}{,}89542}{3} = \frac{-3 + 0{,}89542}{3} =$

$$= -1 + 0{,}29847 = \bar{1}{,}29845.$$

În acest caz caracteristica este negativă, dar ea împărțindu-se exact la împărțitorul dat 3, am putut afla caracteristica câtului și apoi mantisa lui, efectuând împărțirile separat.

3) Să se calculeze $\lg \sqrt[5]{0{,}0458}$.

Obținem $\lg \sqrt[5]{0{,}0458} = \frac{\lg 0{,}0458}{5} \approx \frac{\bar{2}{,}66087}{5} = \frac{-2 - 3 + 3 + 0{,}66087}{5} =$

$$= \frac{-5 + 3{,}66087}{5} = \frac{-5}{5} + \frac{3{,}66087}{5} = -1 + 0{,}73217 = \bar{1}{,}73217.$$

Observăm că am redus în acest caz problema la o situație similară cu cea din exemplul 2). Pentru aceasta am scăzut și am adunat 3, astfel încât caracteristica să se împartă exact la numitorul 5, mantisa obținîndu-se prin împărțirea lui 3,66087 la 5. Deci în cazul în care caracteristica este negativă și nu este divizibilă la împărțitor, se scade un număr de unități până ce ea devine multiplu al împărțitorului și se efectuează împărțirea $\left(\text{în cazul de mai sus } \frac{-5}{5} = -1\right)$. În același timp se adaugă același număr de unități mantisei, numărul astfel obținut împărțindu-se separat la numitorul comun (în cazul nostru 5). Din prima împărțire rezultă caracteristica, iar din a doua, mantisa numărului cerut.

Împărțirea logaritmilor. În cazul ecuațiilor de forma $a^x = b, a, b > 0, a \neq 1$, apare problema împărțirii a doi logaritmi, deoarece egalitatea $a^x = b$ este echivalentă pe rând cu egalitățile:

$$\lg a^x = \lg b,$$
$$x \lg a = \lg b,$$
$$x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

În astfel de situații este preferabil să se scrie atât $\lg a$ cât și $\lg b$ sub forma zecimală obișnuită (deci cu semn în față) și să se efectueze împărțirea în mod obișnuit.

Exemplu:

$$\frac{\lg 0,458}{\lg 65} \approx \frac{\bar{1},66087}{1,81291} = \frac{-1 + 0,66087}{1,81291} = -\frac{0,33913}{1,81291} \approx -0,18707.$$

Efectuarea unor calcule numerice complicate cu ajutorul logaritmilor. Folosind proprietățile logaritmilor și utilizând tabelele de logaritmi, se pot înlocui calculele lungi și dificile, cu calcule simple de tipul sumei și diferenței, sau de multiplicare și împărțire cu numere naturale.

Exemple. 1) Să se calculeze $\sqrt[3]{125 \cdot 4593}$. Vom proceda în acest caz, ca și în cele ce urmează în felul următor: notăm cu x numărul care trebuie aflat, calculăm întâi $\lg x$, cu ajutorul tabelelor și calculelor învățate, apoi aflăm din tabele numărul x al cărui logaritm îl cunoaștem.

Astfel avem în exemplul de mai sus:

$$\lg x = \frac{\lg 125 + \lg 4593}{3} = \frac{2,09691 + 3,66210}{3} = \frac{5,75901}{3} = 1,91967.$$

Căutăm apoi în tabele numărul al cărui logaritm are mantisa 0,91957. Obținem numărul din patru cifre 8311 și ținând cont că $\lg x$ are caracteristica 1, deducem că x are două cifre la stînga virgulei, deci:

$$x \approx 83,11.$$

2) Să se calculeze $x = \sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}}$.

Vom calcula mai întâi $y_1 = \sqrt[4]{35}$ și $y_2 = \sqrt[6]{30}$. Astfel obținem $\lg y_1 = \frac{\lg 35}{4} \approx \frac{1,54407}{4} \approx$ $\approx 0,38602$. Căutând în tabele numărul cu mantisa 0,38602, obținem $y_1 \approx 2,432$. Analog obținem $\lg y_2 = \frac{\lg 30}{6} \approx \frac{1,47712}{6} \approx 0,24619$ și deci $y_2 = 1,763$. Prin urmare $\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30} \approx$ $\approx 0,669$.

În final avem că

$$\lg x \approx \lg\sqrt[5]{0,669} = \frac{\lg 0,669}{5} \approx \frac{\bar{1},82543}{5} = \frac{-1+0,82543}{5} = \frac{-5+4,82543}{5} = \bar{1},96509.$$

Căutând în tabele și ținând cont că x are o singură cifră de zero în stânga virgulei (caracteristica lui $\lg x$ fiind -1) rezultă că $x \approx 0,9228$.

Logaritmi naturali

În matematica superioară, apar foarte des logaritmi care au ca bază numărul irațional, notat cu e, $e = 2,718281828\ldots$. Folosirea acestor logaritmi permite simplificarea multor formule matematice. Logaritmi în baza e apar în rezolvarea unor probleme fizice și intră în mod natural în descrierea matematică a unor procese chimice, biologice ș.a. Logaritmul natural al numărului a se notează $\ln a$.

Exerciții

1. Să se calculeze caracteristica logaritmilor zecimali ai numerelor: 2; 57,38; 632,7; 5237,81; 0,024; 0,99; 0,0003; 54; 231,002.
2. Știind că $\lg 2 \approx 0,301$ și $\lg 3 = 0,477$, să se calculeze:

   $\lg 6$; $\lg 15$; $\lg 32$; $\lg 30$; $\lg \frac{1}{12}$.
3. Să se calculeze cu ajutorul tabelelor de logaritmi, logaritmii zecimali ai următoarelor numere:

   37 · 990; 235; 99; 301; 1457; 1,231; 54,36; 10325; 26739; 263,56; 35,074; 0,0028631; 2 8 · 534,215.
4. Să se efectueze operațiile:

   a) $\bar{1},4792 + \bar{2},4506 + 3,0025$; b) $\bar{7},0032 + 3,8265 + \bar{3},8502$; c) $0,9329 - \bar{1},2543 - \bar{5},06$;

   d) $\bar{2},4645 - \bar{4},3732 + \bar{5},2104 + \bar{8},3714$.
5. Să se efectueze următoarele operații, rotunjindu-se cu o eroare mai mică decât 0,00001

   a) $\bar{2},21455 \cdot 0,36$; b) $\bar{4} \cdot 51203 \cdot 9,8$; c) $\bar{1},02561 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; d) $\bar{6},45437\ (-0,2)$.
6. Folosind tabelele de logaritmi, să se calculeze:

   a) $\lg\sqrt[5]{2431}$; b) $\lg (53,24)^6$; c) $\lg (21,4)^3 \cdot \sqrt[4]{6531}$; d) $\log_3 5$; e) $\log_5 17$; f) $\log_{0,024} 0,312$.
7. Să se calculeze x cunoscând logaritmul său zecimal:

   a) $\lg x = 0,36253$; b) $\lg x = 4,00021$; c) $\lg x = -0,39285$; d) $\lg x = 2,54401$;

   e) $\lg x = -1,02574$.
8. Să se efectueze, cu ajutorul tabelelor de logaritmi, următoarele calcule:

   a) $\dfrac{12,48^2\sqrt[4]{5,76}}{\sqrt[5]{673,8} \cdot 1,842}$; b) $\sqrt[6]{\dfrac{2,591 \cdot \sqrt[3]{0,0836}}{1,147^2}}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{(3,89)^4(-0,1536)}{0,924^6}}$;

   d) $\sqrt[3]{5\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{5}}$.

§ 4. Ecuații exponențiale și ecuații logaritmice

4.1. Ecuații exponențiale

Ecuația exponențială este o ecuație în care necunoscuta este exponent, sau o ecuație în care este exponent o expresie care conține necunoscuta.

Astfel ecuațiile: $3^x = 2^{x-1}$; $5^{x^2-6} - 1 = 0$ și $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ sunt ecuații exponențiale.

În practică, când avem de rezolvat o ecuaţie exponenţială, vom proceda astfel: folosind diverse substituţii precum şi proprietăţile funcţiei exponenţiale, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuaţii simple, de regulă de gradul întâi sau gradul al doilea.

Cele mai multe ecuaţii exponenţiale sunt reductibile la forma $a^{f(x)} = b$, cu $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$.

Datorită injectivităţii funcţiei logaritmice, această ecuaţie este echivalentă cu

$$f(x) = \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

În aplicaţiile practice, în aceste ecuaţii b se poate de obicei exprima ca putere a lui a,

$$b = a^{\alpha},$$

de unde rezultă ecuaţia

$$f(x) = \alpha.$$

Exemplu. Să se rezolve ecuaţiile $2^{2x} = 64$; $3^{2x} = 81$; $5^{x^2-x-2} = 625$.

Vom avea $2^{2x} = 2^6$, de unde rezultă $2x = 6$, adică $x = 3$.

Din ecuaţia $3^{2x} = 81$, $3^{2x} = 3^4$, deducem $2x = 4$, $2x = 2^2$ şi deci $x = 2$.

Pentru ultima ecuaţie obţinem $5^{x^2-x-2} = 5^4$, deci $x^2 - x - 2 = 4$, de unde rezultă

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Avem în final $x_1 = 3$ şi $x_2 = -2$.

Dacă într-o ecuaţie de forma $a^x = b$, b nu se poate exprima ca putere a lui a, atunci ecuaţia se rezolvă folosind tabelele de logaritmi, ţinând cont că

$$x = \lg_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Să rezolvăm, de *exemplu*, ecuaţia $18^x = 3{,}1$.

Ea este echivalentă cu:

$$x = \frac{\lg 3{,}1}{\lg 18} \approx \frac{0{,}49136}{1{,}25527} \approx 0{,}39.$$

Unele ecuaţii exponenţiale se aduc la forma mai generală $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Din această ecuaţie ţinând cont de injectivitatea funcţiei exponenţiale, deducem: $f(x) = g(x)$, care apoi se rezolvă.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuaţia $3^{x-6} = 3^{15-2x}$.

Obţinem $x - 6 = 15 - 2x$, deci $3x = 21$, $x = 7$.

2) Să se rezolve ecuaţia $49^x = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}$

Obţinem $7^{2x} = 7^{-x^2}$, deci

$$2x = -x^2, \text{ de unde deducem } x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Există ecuaţii exponenţiale care nu se pot reduce la nici una din formele discutate.

Exemple, 1) $2^x = 3^{2x+1}$.

Ținând cont de injectivitatea funcției logaritmice, obținem prin logaritmare ecuație echivalentă

$$x \lg 2 = (2x + 1) \lg 3 \text{ și deci}$$

$$x(2 \lg 3 - \lg 2) = -\lg 3,$$

$$x = \frac{-\lg 3}{2 \lg 3 - \lg 2},$$

această ultimă expresie a lui x se calculează apoi cu aproximație, din tabele.

2) $5^{7^x} = 7^{5^x}$.

Logaritmând deducem $7^x \lg 5 = 5^x \lg 7$; logaritmând din nou obținem $x \lg 7 + \lg \lg 5 = x \lg 5 + \lg \lg 7$ și deci

$$x = \frac{\lg \lg 7 - \lg \lg 5}{\lg 7 - \lg 5},$$ expresie care se calculează cu aproximație din tabele.

3) $3^{2x} \cdot 5^{2x-3} = 7^{x-1} \cdot 4^{x+3}$.

Deducem că $2x \lg 3 + (2x - 3) \lg 5 = (x - 1) \lg 7 + (x + 3) \lg 4$, prin urmare $x(2 \lg 3 + 2 \lg 5 - \lg 7 - \lg 4) = 3 \lg 5 - \lg 7 + 3 \lg 4$; în final avem

$$x = \frac{3 \lg 5 - \lg 7 + 3 \lg 4}{2 \lg 3 + 2 \lg 5 - \lg 7 - \lg 4} = \frac{\lg \frac{125 \cdot 64}{7}}{\lg \frac{225}{28}} \approx \frac{3{,}05799}{0{,}90502}; \; x \approx 3{,}367.$$

4) Să considerăm în cele ce urmează ecuația $4^x + 2^x = 272$.

Pentru a rezolva ecuații de acest tip vom observa mai întâi că putem scrie $2^{2x} + 2^x - 272 = 0$ și deci făcând substituția $2^x = y$, obținem:

$$y^2 + y - 272 = 0,$$

$$y_1 = 16, \; y_2 = -17.$$

Deoarece $2^x > 0$, rezultă că -17 nu poate fi egal cu 2^x și deci singura soluție se obține din $2^x = 16$, $2^x = 2^4$, deci $x = 4$.

În unele situații, substituția efectuată la exercițiul precedent nu se poate face imediat în forma inițială a exercițiului. Să luăm, de exemplu, ecuația: $6^x + 4^x = 9^x$.

Vom împărți ambii termeni cu 9^x și obținem

$$\left(\frac{6}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 1.$$

Făcând substituția $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, obținem $y^2 + y - 1 = 0$ și deci

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Deoarece $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, rezultă că singura soluție a ecuației o obținem din:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ și deci } x = \frac{\lg \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}{\lg \frac{2}{3}}.$$

4.2. Ecuaţii logaritmice

Ecuaţiile logaritmice sunt ecuaţii în care expresiile ce conţin necunoscuta apar ca bază sau ca argument al unor logaritmi.

De *exemplu*:

$$\log_{x+1}(x+2) = 1;\ \lg(x^2+x-2) = 3;\ \log_x(5x^2+3) = \lg(2x+3) - 1.$$

Folosind injectivitatea funcţiei exponenţiale avem că, rezolvarea unei ecuaţii de tipul $\log_{g(x)} f(x) = b$ este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei $f(x) = g(x)^b$. Vom avea însă grijă ca soluţiile obţinute să satisfacă $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$, pentru care expresia $\log_{g(x)} f(x)$ are sens.

La fel ca la ecuaţiile exponenţiale, în practică cînd avem de rezolvat o ecuaţie logaritmică, vom proceda astfel: folosind diverse substituţii precum şi proprietăţile logaritmilor, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuaţii simple, de regulă, de gradul întâi sau gradul al doilea.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia:

$$\log_x(x^2 - 3x + 9) = 2.$$

Obţinem $x^2 - 3x + 9 = x^2$ şi deci $3x = 9$, $x = 3$.

Deoarece pentru $x = 3 > 0$, expresia $x^2 - 3x + 9$ este pozitivă, rezultă că $x = 3$ este soluţie a ecuaţiei.

Rezolvarea altor ecuaţii se bazează pe injectivitatea funcţiei logaritmice, şi anume din $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, deducem $f(x) = g(x)$, însă având grijă să punem condiţia $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuaţia:

$$\lg(x^2 - 15) = \lg(x - 3).$$

Deducem $x^2 - 15 = x - 3$, deci $x^2 - x - 12 = 0$, adică $x_1 = 4$, $x_2 = -3$.

Deoarece pentru $x_2 = -3$ obţinem $x - 3 = -3 - 3 = -6 < 0$, rezultă că $x_2 = -3$ nu este soluţie a ecuaţiei. Deci numai 4 este soluţie.

2) Să se rezolve ecuaţia

$$2\lg(x-1) = \frac{1}{2}\lg x^5 - \lg\sqrt{x}.$$

În această ecuaţie punem de la început condiţiile

$x - 1 > 0$, $x > 0$, pentru a avea sens expresiile $\lg(x-1)$, $\lg x^5$, $\sqrt{x}$, $\lg\sqrt{x}$.

Ecuaţia se mai scrie

$$2\lg(x-1) = \frac{5}{2}\lg x - \frac{1}{2}\lg x \text{ şi deci}$$

$$2\lg(x-1) = 2\lg x. \text{ Prin urmare } \lg(x-1) = \lg x,$$

de unde obţinem $x - 1 = x$, $-1 = 0$ egalitate ce nu are sens: rezultă că ecuaţia dată nu are soluţii.

3) Să se rezolve ecuaţia

$$\lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2.$$

Punem condiţiile de existenţă a logaritmilor:

$$x + 7 > 0 \text{ şi } 3x + 1 > 0, \text{ deci } x > -\frac{1}{3}.$$

Obţinem $\lg(x+7)(3x+1) = 2$ şi deci

$$(x+7)(3x+1) = 10^2 = 100.$$

Rezultă ecuația de gradul al doilea

$$3x^2 + 22x - 93 = 0, \text{ de unde vom avea}$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{31}{3}.$$

Deoarece $-\frac{31}{3} < -\frac{1}{3}$, obținem că 3 este singura soluție a ecuației date.

Observație. Ecuația precedentă nu este echivalentă cu ecuația

$$\lg (x + 7)(3x + 1) = 2,$$

care are două soluții $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{31}{3}$, deoarece pentru amândouă aceste valori ale lui x, $\lg (x + 7)(3x + 1)$ are sens.

4) Să se rezolve ecuația

$$\log_3^2 x - 3 \log_3 x - 4 = 0.$$

Avem condiția $x > 0$ și făcând substituția $\log_3 x = y$, obținem $y^2 - 3y - 4 = 0$. Deci $y_1 = 4$, $y_2 = -1$. Din $\log_3 x = 4$, obținem $x = 3^4$, $x = 81$, iar din $\log_3 x = -1$, obținem $x = 3^{-1}$, $x = \frac{1}{3}$.

În continuare vom rezolva câteva ecuații care nu se pot încadra într-un anumit tip. Astfel, pot apărea ecuații cu logaritmi scriși în diferite baze, ecuații în care apar expresii conținând necunoscute și la exponenți și la logaritmi etc.

5) Să se rezolve ecuația

$$\log_2 x + \log_3 x = 1.$$

Deducem, aplicând formula de schimbare a bazei,

$$\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1, \text{ sau } \lg x = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}.$$

Deci $x = 10^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$

6) Să se rezolve ecuația

$$\log_3 x + \log_x 3 = 2.$$

Deoarece $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, rezultă $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 2$.

Notând $\log_3 x = y$, obținem $y + \frac{1}{y} = 2$, adică $y^2 - 2y + 1 = 0$; deci $y = 1$ adică $\log_3 x = 1$.

Prin urmare, $x = 3^1$, $x = 3$.

7) Să se rezolve ecuația

$$x^{\lg x + 2} = 1\,000.$$

Punem condiția de existență a expresiilor, $x > 0$. Logaritmând, obținem o ecuație echivalentă $\lg (x^{\lg x + 2}) = \lg 1\,000$, care devine $(\lg x + 2) \lg x = 3$. Notând $\lg x = y$, avem $y^2 + 2y - 3 = 0$ și deci $y_1 = -3$, $y_2 = 1$.

Din $\lg x = -3$, obținem $x = 10^{-3}$, $x = 0{,}001$, iar din $\lg x = 1$, obținem $x = 10^1$, $x = 10$.

4.3. Sisteme de ecuații exponențiale și logaritmice

În astfel de sisteme se aplică metodele arătate anterior, la ecuațiile de tipul respectiv.

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul:

$$27^{2y-1} = 243 \cdot 3^{4x+2},$$

$$3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2x-1}}.$$

Deoarece $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$ obținem:

$$\begin{cases} 3^{6y-3} = 3^{4x+7}, \\ 3^{x+y} = 3^{4x-3}. \end{cases}$$

Rezultă sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 6y - 3 = 4x + 7, \\ x + y = 4x - 3 \end{cases}$$

deci $x = 2$, $y = 3$ și soluția sistemului este perechea (2, 3).

2) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ \lg x + \lg y = 2. \end{cases}$$

Obținem pe rând sistemele echivalente

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ \lg xy = 2, \\ x, y > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ xy = 100, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

Acest sistem simetric îl putem rezolva pe căile cunoscute din clasa a IX-a: punem $s = x+y$, $p = xy$ și vom avea

$$\begin{cases} s^2 - 2p = 425 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 = 625 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \pm 25 \\ p = 100. \end{cases}$$

Sistemul $\begin{cases} s = 25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluțiile (5, 20) și (20,5) care satisfac și condițiile de existență a sistemului inițial $x > 0, y > 0$; sistemul $\begin{cases} s = -25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluțiile (−20, −5), (−5, −20) care nu convin.

4.4. Inecuații logaritmice și exponențiale

Rezolvarea inecuațiilor exponențiale și logaritmice se bazează pe proprietățile de monotonie ale funcțiilor exponențiale și logaritmice. Am văzut că atât funcția exponențială cât și funcția logaritmică sunt crescătoare dacă baza este supraunitară și descrescătoare dacă baza este subunitară.

Exemple. 1) Să se rezolve inecuația:

$$3^x > 9.$$

Inecuația se scrie $3^x > 3^2$ și deoarece funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x$ este crescătoare, rezultă că $x > 2$.

2) Să se rezolve inecuația:

$$2^{x^2-4x} > \frac{1}{8}.$$

Deoarece $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ inecuația se scrie $2^{x^2-4x} > 2^{-3}$ care este echivalentă cu $x^2 - 4x > -3$. Rezolvarea inecuației $x^2 - 4x + 3 > 0$ dă pentru x valorile posibile $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

3) Să se rezolve inecuația:

$$\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) > -3.$$

Avem că $-3 = \log_{\frac{1}{3}} 27$ și inecuația devine $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) > \log_{\frac{1}{3}} 27$. Deoarece baza $\frac{1}{3}$ a lo-

garitmului este subunitară (funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$ este descrescătoare), inecuația devine $2x - 1 < 27$, adică $x < 14$. În același timp, din condiția de existență a logaritmului inițial avem $2x - 1 > 0$, adică $x > \frac{1}{2}$. Deci, obținem pentru x valorile posibile $x \in \left(\frac{1}{2}, 14\right)$.

Exerciții

Să se rezolve ecuațiile (exercițiile 1—11):

1. a) $5^x = 125$; b) $4^x = 1024$; c) $9^x = \frac{1}{729}$; d) $25^x = 0{,}2$; e) $2^{x+8} = 32$; f) $8^x = 16$; g) $6^{-x} = 1296$; h) $3^x = \sqrt[3]{9}$.

2. a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; c) $3^{2x-1} = 81$; d) $2^{x^2-6x-2{,}5} = 16\sqrt{2}$; e) $a^{(x-2)(x-3)} = 1$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

3. a) $5^x + 5^{x+1} = 3750$; b) $7^x - 7^{x-1} = 6$; c) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$; d) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$; e) $3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x-1} - 7 \cdot 3^x + 21 = 0$.

4. a) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; b) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; c) $16\sqrt{(0{,}25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

5. a) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$;
b) $9^x - 3^x - 6 = 0$;
c) $4^x + 2^{x+1} = 80$;
d) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$;
e) $4 + \frac{2}{5^x - 1} = \frac{3}{5^{x-1}}$;
f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 1{,}2$;
g) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$;
h) $2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$;
i) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;
j) $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$.

6. a) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$; b) $7 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^x$; c) $11^x = 17^x$; d) $a^x = b^x$ $(a > 0,\ b > 0,\ a \neq b)$; e) $6^{2x+4} = 2^{8+x} \cdot 3^{3x}$.

7. a) $\lg x = \lg 2$; b) $\lg x = -\lg 2$; c) $\log_2(x - 1) = \log_2(x^2 - x - 16)$; d) $\frac{2 \lg x}{\lg(5x - 4)} = 1$.

8. a) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$; b) $\log_x 2 - \log_x 3 = 2$; c) $\log_x(x + 3) = \log_x(x^2 + 1)$.

9. a) $\frac{1}{12} \lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \lg x$; b) $3 \lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$; c) $2 \lg^2(x^2) - 3 \lg x - 1 = 0$; d) $4 \log_3^2 5x - 7 \log_3 15x + 7 = 0$.

10. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$

11. $\sqrt{\log_x \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_x \sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = 2$.

12. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 641, \\ 2 \lg x + 2 \lg y = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^y - y^x = 0, \\ 2^x - 4^y = 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4; \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y^x, \\ y^{\sqrt{x}} = x^y. \end{cases}$

13. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\lg (x^2 - 3) > \lg (x + 3)$; b) $\lg^2 x - 2 \lg x - 8 \leqslant 0$; c) $(0,25)^{x-4} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^x$

14. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$; b) $\lg 2 + \lg (4^{x-2} + 9) \leqslant 1 + \lg (2^{x-2} + 1)$.

15. Să se rezolve inecuația

$$3^x + 4^x < 5^x.$$

16. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului a, inecuațiile:

a) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geqslant \frac{3}{4}$;

b) $\log_a x + \log_a(x + 5) + \log_a 0,02 < 0$.

II Inducție matematică. Combinatorică

§ 1. Inducția matematică

1.1. Noțiunile de deducție și inducție

Propozițiile (în sensul logicii matematice) pot fi clasate în *propoziții generale* și *propoziții particulare*. Astfel, propozițiile: „În orice triunghi suma măsurilor unghiurilor sale este egală cu 180°", „Orice număr a cărui ultimă cifră este 0 sau 5 este divizibil cu 5", care au un caracter general, sunt propoziții generale. Însă propozițiile: „Suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC este egală cu 180°", „Numerele 1980 și 1985 sunt divizibile cu 5" sunt propoziții particulare, de fapt sunt, respectiv, cazuri particulare ale propozițiilor generale de mai înainte.

Procedeul prin care din propoziții generale se obțin propoziții particulare se numește *deducție*.

Una dintre trăsăturile caracteristice matematicii și altor științe (de *exemplu*, mecanicii teoretice, fizicii teoretice, lingvisticii matematice) este *construcția deductivă a teoriei*, prin care toate afirmațiile decurg, apelând la deducție, din câteva principii de bază numite axiome.

Dar deducția nu este singura metodă de raționament științific. În același timp cu aceasta, în matematică se trece adesea de la propoziții particulare la propoziții generale, adică se fac raționamente inductive.

Prin *inducție* se înțelege o metodă de raționament care conduce de la propoziții particulare la o oarecare propoziție generală.

Să dăm câteva *exemple*:

1. Să calculăm sumele succesive de numere naturale impare: 1, $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7$, $1+3+5+7+9$. Obținem, respectiv, numerele $1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^2$, $16=4^2$, $25=5^2$. Observăm că în toate cazurile considerate suma este egală cu pătratul numărului termenilor sumei. În mod natural, se poate presupune că această proprietate ar putea să aibă loc pentru orice astfel de sumă (având oricât de mulți termeni). Presupunerea

ipoteza) noastră se poate formula astfel: Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, are loc egalitatea:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

Astfel cele cinci cazuri particulare ne-au sugerat o ipoteză, care după cum vom arăta în continuare la punctul 1.2, este adevărată.

2. Fie trinomul

$$f(x) = x^2 + x + 41.$$

Înlocuind pe x cu numerele naturale $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, obținem:

$$f(0) = 41,\ f(1) = 43,\ f(2) = 47,\ f(3) = 53,\ f(4) = 61,\ f(5) = 71.$$

Observăm că toate valorile trinomului obținute mai înainte sunt numere prime. Se poate emite ipoteza că valoarea trinomului $f(x)$ este număr prim pentru orice număr natural x. Totuși, această ipoteză este falsă, deoarece, de exemplu

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41(40 + 1) = 41^2,$$

care nu este număr prim. De fapt, $x = 40$ este primul număr natural pentru care $f(x)$ nu este prim.

3. Matematicianul francez Pierre Fermat (1601–1665) considerând numerele: $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65\,537$, care sunt numere prime, a tras concluzia că pentru orice număr natural n numărul $2^{2^n} + 1$ este prim. El nu a reușit să verifice dacă pentru $n = 5$, numărul $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ este sau nu este prim.

Însă, matematicianul și fizicianul elvețian Leonard Euler (1707–1783) a arătat că acest număr, nu este prim, mai precis:

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Ulterior s-au găsit și alte valori ale lui n, $n = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$, pentru care numărul $2^{2^n} + 1$ nu este prim.

4. Matematicianul polonez Waclaw Sierpinski (1882–1969) a emis ipoteza că numărul $991n^2 + 1$ nu dă pătrate perfecte pentru n natural. Aceasta s-a dovedit a fi falsă, cel mai mic număr natural n pentru care se obține pătrat perfect fiind un număr format din 29 de cifre.

5. Din mica teoremă a lui Fermat (aplicație, pct. 3.2, § 3 din acest capitol) rezultă că dacă $p \geqslant 3$ este un număr prim, atunci $2^{p-1} - 1$ se divide cu p. Totuși oricare ar fi numărul prim $p < 1000$, $2^{p-1} - 1$ nu se divide cu p^2. De aici ar putea urma că, în general, pentru nici un număr prim p, numărul $2^{p-1} - 1$ nu se divide cu p^2. Totuși s-a arătat că $2^{1093-1} - 1$ se divide cu 1093^2.

Exemplele de mai sus arată că aceeași metodă de raționament conduce în unele cazuri la propoziții adevărate, iar în altele la propoziții false. Deoarece prin această metodă concluzia se trage după considerarea câtorva

exemple, şi nu a tuturor cazurilor posibile, această metodă de raţionament se numeşte *inducţie incompletă*.

Inducţia incompletă, după cum am văzut, nu conduce mereu la propoziţii adevărate, dar este folositoare, deoarece permite să se formuleze o presupunere, care după aceea poate fi confirmată sau infirmată.

Câteodată însă, o astfel de metodă de raţionament poate să conducă, studiind un număr finit de cazuri, la epuizarea tuturor posibilităţilor. Iată două *exemple* în acest sens:

1. Să se demonstreze că fiecare număr natural par n, unde $4 \leqslant n \leqslant 20$, se poate scrie ca suma a două numere prime (care pot fi şi egale).

Pentru demonstraţie să considerăm fiecare din numerele pare cuprinse între 4 şi 20. Avem: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 7 + 7$, $16 = 5 + 11$, $18 = 7 + 11$, $20 = 7 + 13$.

2. Să se demonstreze că pentru orice poliedru regulat este îndeplinită relaţia $V - M + F = 2$, unde V este numărul vârfurilor, M este numărul muchiilor, iar F este numărul feţelor.

Pentru demonstraţie, este suficient să considerăm numai cinci cazuri, şi anume: tetraedru, octoedru, cub, dodecaedru, icosaedru, deoarece nu există alte poliedre regulate. Pentru aceste cinci cazuri afirmaţia se verifică direct, deoarece pentru tetraedru: $V = 4$, $M = 6$, $F = 4$; pentru octoedru: $V = 6$, $M = 12$, $F = 8$; pentru cub: $V = 8$, $M = 12$, $F = 6$; pentru dodecaedru: $V = 20$, $M = 30$; $F = 12$; pentru icosaedru: $V = 12$, $M = 30$, $F = 20$. Într-adevăr, pentru toate cele cinci poliedre avem: $V - M + F = 2$.

O astfel de metodă de raţionament, în care concluzia rezultă pe baza cercetării tuturor cazurilor, se numeşte *inducţie completă*.

1.2. Metoda inducţiei matematice

Inducţia completă are un domeniu restrâns de aplicabilitate în matematică. De regulă, propoziţiile matematice se referă la o mulţime infinită de elemente (de exemplu, mulţimea numerelor naturale, mulţimea numerelor prime, mulţimea poliedrelor ş.a.m.d.) şi nu este posibil de considerat, pe rând, toate aceste elemente. Există însă o metodă de a raţiona, care înlocuieşte analiza, de altfel imposibil de realizat în practică, a unei mulţimi infinite de cazuri cu demonstrarea faptului că, dacă o propoziţie este adevărată într-un caz, atunci ea se dovedeşte a fi adevărată şi în cazul care succede acestuia. O astfel de metodă de raţionament se numeşte *inducţie matematică*.

Să reluăm presupunerea (ipoteza) făcută în paragraful precedent: *Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$ are loc egalitatea:*

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru numărul natural n. Atunci, faptul că $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ sunt adevărate, înseamnă că egalitatea (1) are loc respectiv pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, după cum s-a arătat în paragraful precedent.

Întrucât $P(5)$ este adevărată: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$, avem

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = (5 + 1)^2 = 6^2,$$

adică este adevărată $P(6)$.

Astfel, am demonstrat că dacă $P(5)$ este adevărată, rezultă că este adevărată $P(6)$.

Să emonstrăm, în același mod, că pentru un număr natural oarecare $k \geqslant 1$, avem $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Aceasta înseamnă că din egalitatea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

să rezulte egalitatea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Într-adevăr,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Astfel, egalitatea $P(n)$ este adevărată pentru $n = 1$, iar din faptul că ea este adevărată pentru $n = k$, rezultă că ea este adevărată și pentru $n = k + 1$.

Atunci $P(1) \Rightarrow P(2)$, deoarece $2 = 1 + 1$; $P(2) \Rightarrow P(3)$, deoarece $3 = 2 + 1$; $P(3) \Rightarrow P(4)$, deoarece $4 = 3 + 1$; $P(4) \Rightarrow P(5)$, deoarece $5 = 4 + 1$ ș.a.m.d.

Pare natural că în modul acesta se poate ajunge până la orice număr n, adică $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant 1$; deci raționamentul făcut pare convingător. Acest raționament este riguros din punct de vedere matematic, deoarece este un caz particular al unui principiu de bază al matematicii, numit *principiul inducției matematice (primul principiu de inducție)*.

Acesta se formulează astfel:

Dacă o propoziție $P(n)$, n fiind un număr natural, este adevărată pentru $n = 0$, și, din aceea că ea este adevărată pentru $n = k$ (unde k este un număr natural oarecare) rezultă că ea este adevărată și pentru numărul natural $n = k + 1$, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

În aritmetică se pune în evidență că principiul inducției matematice constituie una din axiomele de bază ale *aritmeticii numerelor naturale*, având numeroase aplicații. Acest principiu ne dă metoda de demonstrație numită *metodă inducției matematice*.

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de un număr natural $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstrația prin metoda inducției matematice a propoziției $P(n)$, constă din două etape:

1° Se verifică mai întâi că $P(m)$ este adevărată.

2° Se presupune că $P(k)$ este adevărată și se demonstrează că $P(k+1)$ este adevărată, k fiind un număr natural $\geqslant m$ (adică $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \geqslant m$).

Dacă ambele etape ale demonstrației sunt verificate, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Intuitiv, această metodă de demonstrație se justifică astfel:

Din $P(m)$ adevărată și $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, pentru orice $k \geqslant m$, rezultă $P(m+1)$ adevărată ($k = m$); apoi luând $k = m+1$ se obține că $P(m+2)$ este adevărată ș.a.m.d. Raționând „din aproape în aproape" deducem că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Metoda inducției matematice arată că egalitatea (1) este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, deoarece ea este adevărată pentru $m = 1$, și din $P(k)$ rezultă $P(k+1)$, pentru $k \geqslant 1$.

Observații

1) Dacă se cere să demonstrăm că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat, prima etapă a demonstrației prin inducție matematică constă în verificarea faptului că $P(n)$ este adevărată pentru $n = m$ și nu pentru alt număr natural. Este posibil ca pentru numerele naturale mai mici decât m propoziția să fie falsă, sau să nu aibă sens.

2) Cele două etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt la fel de importante. În paragraful precedent, considerând exemplul $f(x) = x^2 + x + 41$, ne-am convins că o propoziție poate fi adevărată pentru un număr de cazuri particulare, nefiind adevărată în general. Acest exemplu arată cât de importantă este etapa a doua a demonstrației prin inducție matematică.

Nu înseamnă că prima etapă este mai puțin importantă decât a doua. Iată un exemplu care arată la ce concluzie absurdă se poate ajunge, dacă se omite prima etapă a demonstrației prin inducție matematică.

Să considerăm propoziția $P(n)$:

„Orice număr natural n este egal cu succesorul său".

Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, k fiind un număr natural adică $k = k + 1$. Adunând 1 la fiecare membru al egalității $k = k + 1$, rezultă $k + 1 = k + 2$, adică $P(k+1)$ este adevărată. Etapa a doua a demonstrației a fost efectuată, totuși propoziția nu este adevărată. Într-adevăr, pentru $n = 0$, $P(n)$ nu este adevărată, deoarece $0 \neq 1$, și deci prima etapă a demonstrației prin inducție matematică ne spune că $P(n)$ este falsă.

Metoda inducției matematice are o largă utilizare în matematică. Ea poate fi folosită la calcularea de sume și produse, la demonstrarea unor egalități și inegalități, în probleme de divizibilitate a numerelor. Vom da câteva exemple în care utilizăm metoda inducție matematice.

Exemple

1) Să se calculeze suma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)},$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

Soluție. Notăm această sumă cu S_n. Ca să stabilim expresia sumei S_n, calculăm suma în câteva cazuri particulare: S_1, S_2, S_3, S_4.

Considerând aceste numere formulăm ipoteza și după aceea pentru demonstrarea ei folosim metoda inducției matematice.

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2};$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=S_1+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3};$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=S_2+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4};$$

$$S_4=\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=S_3+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}.$$

Cercetând aceste sume observăm că numărătorul este indicele sumei căutate, iar numitorul este succesorul său. În acest mod, formulăm următoarea ipoteză:

Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, are loc egalitatea:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \qquad (2)$$

Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (2), pentru numărul natural n. Demonstrăm că $P(n)$ este adevărată prin metoda inducției matematice.

1° $P(1)$ este adevărată, deoarece $S_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$.

2° Demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$:

$$S_{k+1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sunt verificate. Prin urmare egalitatea (2) este demonstrată și deci

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

2) Să se demonstreze că pentru orice $n \geqslant 1$, avem

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}; \qquad (3)$$

Demonstrație. Notăm cu $P(n)$ egalitatea (3), pentru numărul natural n.

1° Pentru $n = 1$, egalitatea (3) devine $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ și deci $P(1)$ este adevărată.

2° Demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Avem

$$P(k): 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} \qquad (3')$$

$$P(k+1): 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)}. \qquad (3'')$$

Scăzând membru cu membru, prima egalitate din a doua, obținem egalitatea

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1},$$

care este evident adevărată.

Înseamnă că dacă este adevărată egalitatea (3') atunci este adevărată și egalitatea (3'') Conform metodei inducției matematice rezultă că egalitatea (3) este îndeplinită pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

3) Să se demonstreze că dacă $x > -1$ inegalitatea

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \qquad (4)$$

este adevărată, oricare ar fi numărul natural n.*

Demonstrație. Să notăm cu $P(n)$ inegalitatea (4), pentru numărul natural n.

1° Pentru $n = 0$, avem $(1 + x)^0 = 1 + 0 \cdot x = 1$, deci $P(0)$ este adevărată.

2° Să demonstrăm $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Înmulțim ambii membri ai inegalității $(1 + x)^k \geqslant 1 + kx$ cu $1 + x$. Cum $1 + x > 0$, semnul inegalității nu se schimbă, deci:

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant (1 + kx)(1 + x) = 1 + kx + x + kx^2.$$

Deoarece $kx^2 \geqslant 0$, cu atât mai mult avem:

$$(1 + x)^{k+1} > 1 + kx + x = 1 + (k+1)x.$$

Deci

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)x.$$

Conform metodei inducției matematice rezultă inegalitatea (4), pentru orice număr natural

4) Să se demonstreze că $n^3 - n$ se divide cu 3, pentru orice număr natural n.

Demonstrație. Notăm cu $P(n)$ propoziția: $d_n = n^3 - n$ se divide cu 3.

Deoarece $d_0 = 0 - 0 = 0$, atunci pentru $n = 0$, d_n se divide cu 3, adică $P(0)$ este adevărată

Să demonstrăm $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, adică din: d_k se divide cu 3, să rezulte că d_{k+1} se divide cu 3.

Într-adevăr,

$$d_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3(k^2 + k) =$$

$$= d_k + 3(k^2 + k).$$

---

*Inegalitatea (4) se numește inegalitatea lui Bernoulli; Jacob Bernoulli (1654–1705) matematician elvețian.

Observăm că d_{k+1} este o sumă de doi termeni. Primul termen al acestei sume se divide cu 3, iar al doilea termen este evident divizibil cu 3. Prin urmare, fiecare termen al sumei d_{k+1} se divide cu 3, de unde şi d_{k+1} se divide cu 3. Propoziţia este demonstrată.

5) Să se demonstreze că numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu n elemente într-o mulţime cu m elemente este m^n.

Demonstraţie. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ două mulţimi, având n, respectiv m elemente. Să arătăm că numărul funcţiilor definite pe A, cu valori în B este m^n. Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice, după n. Fie $P(n)$ afirmaţia: Numărul funcţiilor definite pe o mulţime cu n elemente într-o mulţime cu m elemente este m^n.

1° $P(1)$ este adevărată, deoarece evident de la o mulţime cu un element într-o mulţime cu m elemente sunt $m = m^1$ funcţii. Fiecare astfel de funcţie duce unicul element al mulţimii A într-unul din cele m elemente ale mulţimii B.

2° Să arătăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Fie mulţimea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$ cu $k+1$ elemente. Să considerăm $A' = A - \{a_{k+1}\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Cum $P(k)$ este adevărată rezultă că numărul funcţiilor definite pe A' cu valori în B este m^k. Dacă $f: A' \to B$ este o funcţie care atunci definim $f_i: A \to B$, $1 \leqslant i \leqslant m$, prin $f_i(a_j) = f(a_j)$ pentru $1 \leqslant j \leqslant k$ şi $f_i(a_{k+1}) = b_i$, unde $1 \leqslant i \leqslant m$. Aşadar pentru orice funcţie de la A' la B se obţin m funcţii de la A la B. Mai mult, toate funcţiile de la A la B sunt de acest tip. Deci numărul funcţiilor de la A' la B este $m^k \cdot m = m^{k+1}$. Conform metodei inducţiei matematice afirmaţia este demonstrată

1.3. O variantă a metodei inducţiei matematice

Fie $A \subset \mathbf{N}$ o submulţime nevidă a mulţimii numerelor naturale. Spunem că a din A este un *prim element* (sau un *cel mai mic element*) al mulţimii A, dacă $a \leqslant x$ pentru orice x din A.

Dăm în continuare o proprietate importantă a mulţimii numerelor naturale, care se demonstrează cu ajutorul inducţiei matematice.

Teorema 1.3.1. (proprietatea de bună ordonare a mulţimii numerelor naturale). Orice submulţime nevidă a mulţimii numerelor naturale are un prim element.

Demonstraţie. Fie $A \subset \mathbf{N}$ o submulţime nevidă. Dacă $0 \in A$, atunci 0 este primul element al său. Dacă $0 \notin A$, fie M mulţimea numerelor naturale n, astfel încât $n \leqslant x$, oricare ar fi $x \in A$. Evident, $0 \in M$ şi dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \notin M$. Deci $M \neq N$. Vom arăta că există un nmuăr natural $a \in M$ astfel încît $a + 1 \notin M$. Într-adevăr presupunem prin absurd că pentru oricare $k \in M$ avem $k + 1 \in M$.

Fie propoziţia $P(n)$: Dacă $n \in \mathbf{N}$, atunci $n \in M$.

Deoarece $0 \in M$, rezultă $P(0)$ adevărată.

Mai mult, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, deoarece după presupunerea prin absurd, dacă $k \in M$ atunci $k + 1 \in M$.

Conform metodei inducţisi matematice, rezultă $M = \mathbf{N}$, contradicţie. Deci există $a \in M$ astfel încât $a + 1 \notin M$. Arătăm că a este numărul căutat. Într-adevăr $a \leqslant x$, pentru orice $x \in A$. Mai mult, $a \in A$; în caz contrar, $a < x$ pentru orice $x \in A$ şi deci $a + 1 \leqslant x$, pentru orice $x \in A$. Aşadar $a + 1 \in M$, contradicţie.

Proprietatea mulţimii numerelor naturale de a fi bine ordonată stă la baza celui de *al doilea principiu de inducţie matematică*. Acest principiu

---

* Textele insemnate cu o bară la marginea paginii sunt facultative.

este echivalent cu primul principiu de inducţie, însă, uneori este mai oportun pentru unele demonstraţii.

El se formulează astfel:

Dacă o propoziţie $P(n)$, n fiind un număr natural, este adevărată pentru $n = 0$ şi, din faptul că ea este adevărată pentru toate numerele $n < k$, rezultă că ea este adevărată şi pentru $n = k$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

Demonstraţie. Fie M submulţimea mulţimii $\mathbf{N}$ a numerelor naturale pentru care $P(n)$ este falsă. Dacă această submulţime este nevidă, atunci ea are un prim element k. Acest număr nu poate să fie 0, deoarece $P(0)$ este adevărată. Deci $k > 0$. Cum k este cel mai mic număr pentru care $P(k)$ este falsă, atunci pentru orice $n < k$, $P(n)$ este adevărată, şi din ipoteză, rezultă că $P(n)$ este adevărată şi pentru $n = k$. Deci $P(k)$ este în acelaşi timp şi falsă şi adevărată, contradicţie. Deci neapărat mulţimea A este vidă. Aşadar nu există numere naturale pentru care $P(n)$ este falsă, adică $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

Acest principiu stă la baza unei *variante a metodei de demonstraţie prin inducţie matematică.*

Fie $P(n)$ o propoziţie care depinde de un număr natural $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstraţia prin această variantă a metodei inducţiei matematice a propoziţiei $P(n)$ constă din:

1° *Se verifică mai întâi că $P(m)$ este adevărată.*

2° *Se presupune că $P(l)$ este adevărată pentru orice l, unde $m \leqslant l < k$, şi se demonstrează că $P(k)$ este adevărată.*

Dacă ambele etape ale demonstraţiei sunt verificate, atunci propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Exemplu. Să se demonstreze că orice număr natural $n \geqslant 2$, ori este număr prim, ori se descompune în produsul unui număr finit de numere prime.

(Amintim că numărul natural $p \geqslant 2$ se numeşte prim dacă nu are alţi divizori în afară de 1 şi p.)

Demonstraţie. Folosim metoda inducţiei matematice (varianta a doua). Notăm cu $P(n)$ propoziţia: Numărul $n \geqslant 2$, ori este prim, ori este produs de numere prime.

1° $P(2)$ este adevărată, deoarece $n = 2$ este număr prim.

2° Să presupunem că $P(l)$ este adevărată pentru orice l, $2 \leqslant l < k$, şi să demonstrăm că $P(k)$ este adevărată. Într-adevăr, fie numărul natural k. Dacă k este număr prim, rezultă că $P(k)$ este adevărată. Dacă k nu este număr prim, atunci $k = ab$, unde $2 \leqslant a, b < k$. După presupunerea noastră $P(a)$ şi $P(b)$ sunt adevărate, adică a şi b ori sunt prime, ori se descompun în produse de numere prime. Atunci este clar că şi $k = ab$ se descompune în produs de numere prime, adică $P(k)$ este adevărată. Conform metodei inducţiei matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 2$.

Observaţie. Am remarcat mai înainte că la baza celui de-al doilea principiu de inducţie matematică, care de altfel este echivalent cu primul, stă proprietatea mulţimii nu-

merelor naturale de a fi bine ordonată. Astfel, acest principiu poate fi extins și la alte mulțimi de numere bine ordonate.

De exemplu:

1) O mulțime finită este bine ordonată.

2) Dacă m este un număr întreg oarecare, mulțimea numerelor întregi, x, $x \geqslant m$, este bine ordonată.

Dacă A este o mulțime bine ordonată, putem aplica metoda inducției matematice pentru demonstrarea unei proprietăți $P(x)$, $x \in A$.

Exerciții

1. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că pentru orice număr natural n, sunt adevărate egalitățile:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = n\,\dfrac{4n^2-1}{3}$;

d) $2^2 + 6^2 + \ldots + (4n-2)^2 = \dfrac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

f) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)^2$;

g) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

h) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

i) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

j) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1}\,\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$;

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$;

c) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{(2n+1)}$.

d) $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dfrac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

3. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{7}{1 \cdot 8} + \dfrac{7}{8 \cdot 15} + \dfrac{7}{15 \cdot 22} + \ldots + \dfrac{7}{(7n-6)(7n+1)} + \dfrac{1}{7n+1} = 1$;

b) $\dfrac{1}{4 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 12} + \dfrac{1}{12 \cdot 16} + \ldots + \dfrac{1}{4n(4n+4)} + \dfrac{1}{16(n+1)} = \dfrac{1}{16}$.

4. Să se demonstreze că:

a) dacă $n \geqslant 5$, atunci $2^n < n^2$;

b) dacă $n \geqslant 10$, atunci $2^n < n^3$.

5. Să se demonstreze inegalitățile următoare;

a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, pentru $n \geqslant 2$;

b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$, pentru orice număr natural $n \geqslant 1$;

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, pentru orice $n > 1$;

d) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, pentru $n \geqslant 2$.

6. Să se calculeze suma următoare și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formula găsită:

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!,$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

7. Să se demonstraze că pentru $n \geqslant 2$ este adevărată inegalitatea:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

8. Să se calculeze produsul următor și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formula găsită:

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geqslant 2.$$

9. Să se demonstreze prin metoda inducției matematice inegalitatea (inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz):

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt numere reale oarecare.

10. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, avem;

a) $n^3 + 11n$ este divizibil cu 6;

b) $7^n - 1$ este divizibil cu 6;

c) $8^{2n-1} + 1$ este divizibil cu 7;

d) $10^n + 18n - 28$ este divizibil cu 27;

e) $9^{n+1} - 8n - 9$ este divizibil cu 16;

f) $72^n - 1$ este divizibil cu 48.

§ 2. Elemente de combinatorică

În practică, adesea, se ajunge la problema de a alege dintr-o mulțime oarecare de obiecte submulțimi de elemente care posedă anumite proprietăți, de a dispune elementele uneia sau ale mai multor mulțimi într-o anumită ordine ș.a.m.d. De asemenea, poate apărea problema determinării

numărului tuturor submulțimilor unei mulțimi, constituite după anumite reguli.

Pentru că în astfel de probleme este vorba de anumite combinații de obiecte, ele se numesc probleme combinatorii. Domeniul matematicii în care se studiază astfel de probleme se numește combinatorică. Combinatorica poate fi considerată ca o parte a teoriei mulțimilor, orice problemă de combinatorică putând fi redusă la o problemă despre mulțimi finite și aplicații.

Această ramură a matematicii are mare importanță pentru teoria probabilităților, cibernetică, logica matematică, teoria numerelor, precum și pentru alte ramuri ale științei și tehnicii. În continuare, vom face cunoștință cu unele probleme simple de combinatorică.

În cuprinsul acestui capitol avem de-a face numai cu mulțimi finite.

2.1. Mulțimi ordonate

Se consideră adesea mulțimi ale căror elemente sunt aranjate într-o ordine determinată. De exemplu, alfabetul este o mulțime ale cărei elemente (litere) sunt date într-o anumită ordine. Astfel cele 27 de litere ale alfabetului românesc sunt aranjate, de obicei, în următoarea ordine: *a* este prima (nu urmează după altă literă), *ă* este a doua (urmează după prima), *b* este a treia (urmează după a doua) ș.a.m.d. până la *z* care este ultima (după care nu mai urmează nici o literă). Elementele aceleiași mulțimi se pot da și într-o altă ordine. De exemplu, este posibil ca literele alfabetului să fie aranjate într-o ordine inversă celei dintâi, astfel: prima literă să fie socotită *z*, a doua să fie *x*, ș.a.m.d. până la ultima, a 27-a literă, *a*. Sunt, evident, și alte moduri de aranjare a literelor alfabetului.

Spunem că *o mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o mulțime ordonată*. Mai precis:

Fie A o mulțime (finită) care are n elemente. Mulțimea A se numește ordonată dacă fiecărui element al său i se asociază un anumit număr de la 1 la n, numit *rangul* elementului, astfel încît la elemente diferite ale lui A corespund numere diferite.

Această asociere exprimă, mai exact, tocmai ordinea elementelor mulțimii A. Astfel, ordinea este următoarea: elementul căruia i se asociază numărul 1, elementul căruia i se asociază numărul 2, ..., elementul căruia i se asociază numărul n.

Observăm că orice mulțime finită poate deveni o mulțime ordonată, adică se poate ordona. Această ordine se poate da, pur și simplu, numerotând elementele mulțimii. Mulțimea ordonată obținută o notăm cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, unde ordinea elementelor este dată de indici.

O mulțime ordonată este caracterizată prin elementele din care este formată și prin ordinea în care sunt considerate acestea.

În consecință, două mulțimi ordonate sunt diferite dacă ele se deosebesc fie prin elementele din care sunt formate, fie prin ordinea lor.

În exemplul de mai sus am considerat, așadar, două mulțimi ordonate diferite.

Un alt exemplu de mulțimi ordonate diferite este următorul: (1, 2, 3) și (2, 1, 3). Mulțimile au aceleași elemente, dar ordinea în care elementele sunt dispuse este diferită în cele două mulțimi. Astfel, în prima mulțime 1 este pe primul loc, 2 pe locul al doilea, iar 3 pe locul al treilea, în timp ce, în a doua mulțime 2 este pe primul loc, 1 pe al doilea, iar 3 pe al treilea.

2.2. Permutări

Fie A o mulțime (finită) cu n elemente. Această mulțime se poate ordona în mai multe moduri. Se obțin, astfel, mulțimi ordonate diferite, care se deosebesc între ele numai prin ordinea elementelor. ***Fiecare din mulțimile ordonate care se formează cu cele n elemente ale mulțimii A, se numește* permutare *a acestei mulțimi.***

Se mai spune că este o *permutare a elementelor sale* sau, încă, o *permutare de n elemente.*

Numărul permutărilor de n elemente se notează cu P_n și se citește „permutări de n". Avem:

1. O mulțime cu un singur element poate fi ordonată într-un singur mod, deci $P_1 = 1$.

2. O mulțime cu două elemente $A = \{a, b\}$ poate fi ordonată în două moduri. Se obțin două permutări:

$$(a, b) \text{ și } (b, a).$$

Deci $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

3. Fie o mulțime cu trei elemente $A = \{a, b, c\}$. Permutările acestei mulțimi sunt: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Rezultă $P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Ne propunem, în continuare, să găsim numărul permutărilor unei mulțimi date, adică numărul modurilor în care poate să fie ordonată o mulțime dată.

Pentru produsul primelor n numere naturale nenule se folosește, de obicei, notația $n!$ care se citește „n factorial":

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

În ceea ce privește numărul permutărilor, avem:

Teorema 2.2.1. **Oricare ar fi $n \geq 1$, număr natural, $P_n = n!$ (1)**

Demonstrație. Vom demonstra teorema prin metoda inducției matematice. Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (1).

1° $P(1)$ este adevărată, deoarece am observat mai înainte că $P_1 = 1 = 1!$.

2° Să arătăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Să ordonăm în toate modurile posibile o mulțime cu $k+1$ elemente. Oricare din cele $k+1$ elemente ale mulțimii poate ocupa ultimul loc, al $(k+1)$-lea. Se obțin astfel $k+1$ moduri diferite de a ocupa ultimul loc. Să considerăm unul din ele, în care un element ales al mulțimii va avea rangul $k+1$. Elementele rămase, care sunt în număr de k, trebuie să ocupe primele k locuri, iar aceasta se poate face în P_k moduri diferite. Se obțin, așadar, $(k+1)P_k$ moduri de a ordona o mulțime care are $k+1$ elemente. Deci $P_{k+1} = (k+1)P_k$. Dar cum $P(k)$ este adevărată, avem $P_k = k!$ de unde $P_{k+1} = (k+1)k! = (k+1)!$. Conform metodei inducției matematice teorema este demonstrată.

Convenim să considerăm că mulțimea vidă poate fi ordonată într-un singur mod adică $P_0 = 1$. Deci, definim $0! = 1$.

Exemple

1) Să dăm în tabelul următor valorile lui $n!$, pentru $1 \leqslant n \leqslant 10$

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

2) Câte numere diferite se pot forma din cifrele:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

astfel ca orice număr să conțină toate cifrele și doar o singură dată fiecare cifră?

Soluție. Din numărul mulțimilor ordonate care au ca elemente cele 10 cifre trebuie să scădem pe cele care au pe primul loc cifra 0.

Deci obținem

$$10! - 9! = 9 \cdot 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9^2 = 3\,265\,920$$

numere.

3) În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ astfel încât fiecare număr par să aibă rang par?

Soluție. Fiind n locuri de rang par, rezultă că numerele pare de la 1 la $2n$, care sunt tot în număr de n, se pot așeza pe locuri de rang par în $n!$ moduri. Fiecărui astfel de mod de aranjare a numerelor pare îi corespund $n!$ moduri de aranjare a numerelor impare pe locuri de rang impar. De aceea numărul total al permutărilor de tipul cerut este egal cu $n! \cdot n! = (n!)^2$.

2.3. Aranjamente

1. Fie dată o mulțime A cu n elemente. Dacă $m \leqslant n$, atunci se pot formă diferite mulțimi ordonate cu câte m elemente fiecare, în care intră numai elemente ale mulțimii A. De exemplu, din elementele mulțimii $\{a, b, c, d\}$ se pot constitui 12 mulțimi ordonate, având câte două elemente fiecare:

$$\begin{array}{lll} (a, b), & (a, c), & (a, d), \\ (b, a), & (b, c), & (b, d), \\ (c, a), & (c, b), & (c, d), \\ (d, a), & (d, b), & (d, c). \end{array}$$

Mulțimile ordonate care se formează cu elementele unei submulțimi oarecare a unei mulțimi finite A, se numesc *submulțimi ordonate* ale lui A, sau *aranjamente*. Mai precis:

Dacă A este o mulțime cu n elemente atunci submulțimile ordonate ale lui A, avînd fiecare cîte k elemente, unde $0 \leqslant k \leqslant n$, se numesc **aranjamente de n elemente luate câte k.**

Observăm că două aranjamente de n elemente luate câte k se deosebesc prin *natura* elementelor ori prin *ordinea* lor. Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k se notează A_n^k și se citește „aranjamente de n luate câte k".

Din exemplul de mai înainte rezultă:

$$A_4^2 = 12.$$

Ne propunem, în continuare, să găsim o formulă pentru calculul numărului A_n^k.

Observăm că $A_n^1 = n$.

Într-adevăr, un element din cele n elemente poate fi ales în n moduri, iar cu acest element ales se formează o singură mulțime ordonată.

Formula care exprimă A_n^k în funcție de n și k, este dată de următoarea teoremă.

Teorema 2.3.1. Dacă k și n sunt numere naturale astfel încât $0 < k < n$, atunci:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \qquad [1]$$

Demonstrație. Să considerăm mai întâi $0 < k < n$ și să arătăm $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$. Într-adevăr ca să repartizăm oricare $k+1$ elemente, luate din n elemente date, pe $k+1$ locuri, se pot lua mai întâi oricare k elemente și aranja pe primele k locuri. Aceasta se poate face în A_n^k moduri. În fiecare din aceste cazuri rămân $(n-k)$ elemente. Oricare din aceste elemente se poate pune pe al $(k+1)$-le loc. Astfel, în fiecare din cele A_n^k

moduri de aranjare a elementelor pe primele k locuri, obţinem $(n-k)$ posibilităţi prin care al $(k+1)$-lea loc este ocupat de unul din cele $(n-k)$ elemente rămase. Prin urmare, avem $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$.

Având în vedere că $A_n^1 = n$, deducem succesiv:

$$A_n^2 = n(n-1),\ A_n^3 = n(n-1)(n-2),$$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Să dăm o altă formă formulei (1). Produsul $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ se poate scrie sub forma:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)\ldots 2\cdot 1}$$

adică sub forma $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Deci

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Pentru $k = 0$ formula (2) dă

$$A_n^0 = 1.$$

Acest lucru este adevărat, deoarece orice mulţime conţine mulţimea vidă, despre care am convenit s-o considerăm ordonată într-un singur mod.

Pentru $k = n$ formula (2) dă

$$A_n^n = n! = P_n.$$

Aşadar formulele (1) şi (2) sunt adevărate pentru orice k, astfel încât $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exemple.

1) În câte moduri pot fi aşezaţi 4 elevi pe 25 de locuri?

Soluţie. Numărul căutat este egal cu

$$A_{25}^4 = 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22 = 303\,600.$$

2) Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată.

Soluţie. Cu 5 cifre se pot forma $A_5^5 = 5!$ aranjamente diferite. Dar aranjamentele care încep cu 0, în număr de A_4^4, dau numere de 4 cifre. Aşadar sunt

$$A_5^5 - A_4^4 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 96$$

numere cu 5 cifre. Numărul numerelor cu 4 cifre care se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4) este egal cu A_5^4, din care scădem numărul aranjamentelor care încep cu 0, care este egal cu A_4^3. Deci numere cu 4 cifre sunt în număr de

$$A_5^4 - A_4^3 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 - 4\cdot 3\cdot 2 = 96$$

În mod analog, numărul numerelor diferite de 3 cifre, 2 cifre şi o cifră va fi respectiv:

$$A_5^3 - A_4^2 = 48,\ A_5^2 - A_4^1 = 16 \text{ şi } 4.$$

Deci se pot forma 260 numere.

2. *Aplicaţie la numărul funcţiilor injective şi bijective*

Să notăm $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Să presupunem că B este o mulţime cu n elemente ($m \leqslant n$). Atunci fiecărei funcţii injective $f : N_m \to B$ îi corespunde o submulţime ordonată a lui B, care este formată din elementele $b_1 = f(1)$, $b_2 = (2)$, ..., $b_m = f(m)$ (toate aceste elemente sunt diferite între ele, după injectivitatea funcţiei f). Invers, fiecare submulţime ordonată, având m elemente, a lui B, defineşte o funcţie injectivă f de la N_m la B, prin care $f(k) = b_k$.

Este clar că în loc de N_m se poate lua orice mulţime A cu m elemente.

Astfel, *numărul funcţiilor injective definite pe o mulţime A cu m elemente cu valori într-o mulţime B cu n elemente ($m \leqslant n$), este egal cu numărul submulţimilor ordonate, având câte m elemente, ale lui B, adică cu* A_n^m.

Dacă $m = n$, adică A şi B au acelaşi număr n de elemente, atunci orice funcţie $f : A \to B$ care este injectivă, este neapărat bijectivă.

Rămâne de arătat că f este surjectivă. Să presupunem prin absurd că f nu este surjectivă. Deoarece f este injectivă, adică la elemente diferite din mulţimea A corespund prin f elemente diferite din mulţimea B rezultă că mulţimea $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ are n elemente. Deoarece f nu este surjectivă, există un element $b \in B$ astfel încât $f(a) \neq b$ pentru orice $a \in A$. Deci $b \notin f(A)$ şi astfel $f(A)$ are mai puţin de n elemente; contradicţie. Această contradicţie arată că f este neapărat surjectivă. Deci f este injectivă şi surjectivă, adică bijectivă.

Având în vedere cele de mai înainte, rezultă că *numărul funcţiilor bijective definite pe o mulţime A cu n elemente cu valori într-o mulţime B tot cu n elemente este egal cu* $A_n^n = P_n$, *adică* $n!$.

În particular, dacă $A = B$ rezultă că numărul funcţiilor bijective definite pe o mulţime cu n elemente cu valori în ea însăşi este egal cu numărul permutărilor mulţimii A, adică $P_n = n!$.

Din acest motiv, de obicei, o funcţie bijectivă definită pe o mulţime cu valori în ea însăşi se numeşte permutare a acestei mulţimi.

2.4. Combinări

1. Fie mulţimea $A = \{a, b, c\}$ şi să considerăm toate submulţimile sale. Acestea sunt:

1) mulţimea vidă: $\varnothing$;
2) submulţimi având fiecare câte un element: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$;
3) submulţimi având fiecare câte două elemente: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$;
4) mulţimea totală: $\{a, b, c\}$.

Aşadar mulţimea $A = \{a, b, c\}$ are opt submulţimi, dintre care: trei submulţimi cu câte un element, trei submulţimi cu câte două elemente, o submulţime cu trei elemente şi mulţimea vidă.

În continuare vom rezolva următoarea problemă:

Fiind dată o mulțime finită cu n elemente, să se calculeze numărul submulțimilor sale având fiecare câte k elemente.

Dacă A este o mulțime cu n elemente, atunci **submulțimile lui A având** *fiecare câte k elemente, unde $0 \leqslant k \leqslant n$, se numesc* **combinări de n elemente luate câte k**. Numărul combinărilor de n elemente luate câte k se notează C_n^k și se citește „combinări de n luate câte k"*.

Din exemplul de mai înainte rezultă:

$$C_3^0 = 1,\ C_3^1 = 3,\ C_3^2 = 3,\ C_3^3 = 1,$$

iar $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8 = 2^3$ (acesta este numărul tuturor submulțimilor mulțimii $\{a, b, c\}$).

Ne propunem în continuare să găsim o formulă pentru calculul numărului C_n^k.

Observăm că $C_n^0 = 1$ deoarece fiecare mulțime A are numai o submulțime fără nici un element și anume mulțimea vidă. Apoi, $C_n^1 = n$ deoarece o mulțime cu n elemente $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ are exact n submulțimi cu un singur element, adică submulțimile de forma $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a\}$. Formula care exprimă C_n^k în funcție de n și k, este dată de următoarea teoremă.

Teorema 2.4.1. Dacă k și n sunt numere naturale, astfel încât $0 \leqslant k \leqslant n$, atunci

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \qquad (1)$$

Demonstrație. Fie A o mulțime cu n elemente. Să considerăm toate submulțimile mulțimii A care au k elemente. Ordonăm fiecare dintre aceste submulțimi în toate modurile posibile. Obținem astfel, toate submulțimile ordonate ale lui A, care au câte k elemente. Numărul lor, după cum știm, este A_n^k. Dar cum numărul tuturor submulțimilor lui A având k elemente este egal cu C_n^k, iar fiecare din acestea se pot ordona în P_k moduri, rezultă că $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Din această egalitate rezultă că

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Înlocuind în această formulă expresiile $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $P_k = k!$, obținem

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

---

* Numărul C_n^k se mai notează $\binom{n}{k}$.

De *exemplu*,

$$C_{25}^{4} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 25 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,650.$$

Exemple

1) În câte moduri se poate alcătui din 9 persoane o comisie formată din 5 membri?

Soluție. Pentru a avea toate cazurile posibile trebuie să considerăm toate submulțimile formate din câte 5 elemente, ale unei mulțimi formate din 9 elemente. Numărul căutat este

$$C_{9}^{5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126.$$

2) La un turneu de șah au participat n șahiști, și fiecare 2 șahiști s-au întâlnit o dată. Câte partide s-au jucat în turneu?

Soluție. Numărul partidelor este egal cu numărul submulțimilor formate din câte două elemente ale unei mulțimi cu n elemente, adică

$$C_{n}^{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3) Să se găsească numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

Soluție. Vârfurile poligonului formează o mulțime de n puncte în plan, necoliniare câte 3. Numărul diagonalelor și al laturilor poligonului este egal cu numărul submulțimilor formate din câte două elemente ale unei mulțimi cu n elemente, adică

$$C_{n}^{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Scăzând cele n laturi din acest număr, obținem:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2},$$

care reprezintă numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

4) În câte puncte se intersectează diagonalele unui poligon convex cu n laturi, dacă oricare trei dintre ele nu sunt concurente?

Soluție. Fiecărui punct de intersecție a două diagonale îi corespund 4 vârfuri ale poligonului, iar la oricare 4 vârfuri ale poligonului le corespunde un punct de intersecție (punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului cu vârfurile în cele 4 puncte). De aceea numărul tuturor punctelor de intersecție este egal cu numărul posibilităților de a alege 4 vârfuri din cele n vârfuri, adică:

$$C_{n}^{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

2. *Câteva proprietăți ale numerelor* C_n^k

Numerele C_n^k au o serie de proprietăți importante. Ele exprimă diferite relații între submulțimile unei mulțimi. Aceste proprietăți se pot demonstra direct din formula pentru C_n^k. Mai instructive sunt însă demonstrațiile bazate pe raționamente cu mulțimi.

1° *Formula combinărilor complementare. Dacă* $0 \leqslant k \leqslant n$, *atunci* este *adevărată egalitatea:*

$$C_n = C_n^{n-k}. \tag{1}$$

Demonstrație. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k avem

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}.$$

Sensul acestei afirmații este următorul. Fie A o mulțime cu n elemente. Fiecărei submulțimi X cu k elemente a lui A îi asociem o submulțime bine determinată, cu $(n-k)$ elemente, a mulțimii A, și anume CX (complementara lui X). Prin această asociere, unei submulțimi cu $(n-k)$ elemente îi corespunde o singură submulțime cu k elemente. Așadar, numărul submultimilor cu k elemente ale lui A este egal cu numărul submulțimilor sale cu $(n-k)$ elemente. Această afirmație se exprimă, de astfel, prin egalitatea (1).

2° *Pentru orice număr natural $n \geqslant 0$ este adevărată egalitatea*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \qquad (2)$$

Demonstrație. Suma din membrul stâng al egalității reprezintă tocmai numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente. Egalitatea (2) rezultă din teorema următoare:

Teorema 2. 4. 2. **Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi formate din n elemente este egal cu 2^n.**

Demonstrație. Vom aplica metoda inducției matematice. Să notăm cu $P(n)$ afirmația teoremei.

1) Afirmația $P(n)$ este adevărată pentru $n =$, deoarece mulțimea vidă are o singură submulțime și anume ea însăși.

2) Să demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, adică din aceea că o mulțime formată din k elemente are 2^k submulțimi rezultă că o mulțime formată din $k+1$ elemente are 2^{k+1} submulțimi.

Fie o mulțime B formată din $k+1$ elemente:

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}\}$$

și fie următoarea submulțime a lui B:

$$B' = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

Cum $P(k)$ este adevărată, rezultă că B' are 2^k submulțimi. Din fiecare submulțime a lui B' se obține o nouă submulțime a lui B prin adăugarea elementului b_{k+1}, deci se obțin astfel, încă 2^k submulțimi ale lui B. În total sunt deci $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ submulțimi ale mulțimii B. Conform metodei inducției matematice teorema este demonstrată.

3° *Formula de recurență pentru calculul numărului de combinări. Pentru orice k și n astfel încât $0 \leqslant k < n$, este adevărată egalitatea:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \qquad (3)$$

Demonstrație. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k, avem

$$C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!},$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}.$$

Înlocuind aceste valori în partea din dreapta a formulei (3), obținem

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Egalitatea (3) este demonstrată.

Să dăm o altă demonstrație formulei (3) făcând un raționament cu mulțimi. Să considerăm un element oarecare a al unei mulțimi A, formată din n elemente și toate submulțimile mulțimii A, formate din câte k elemente. Numărul acestor submulțimi este egal cu C_n^k. Submulțimile cu k elemente ale lui A le împărțim în două clase (disjuncte): submulțimi care conțin pe a și submulțimi care nu conțin pe a. Numărul submulțimilor din prima clasă este egal cu C_{n-1}^{k-1}, deoarece fiecare astfel de submulțime se obține prin adăugarea elementului a la o submulțime oarecare cu $(k-1)$ elemente, a mulțimii A. Numărul submulțimilor din a doua clasă este egal cu C_{n-1}^k, deoarece fiecare astfel de submulțime este o submulțime cu k elemente, a mulțimii $A - \{a\}$. Deci:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

4° *Triunghiul lui Pascal**. Formula (3) a punctului precedent permite să calculăm C_n^k știind C_{n-1}^k și C_{n-1}^{k-1}. Cu ajutorul ei se pot calcula succesiv numerele C_n^k, mai întâi pentru $n = 0$, apoi pentru $n = 1$, pentru $n = 2$ ș.a.m.d. Valorile numerelor C_n^k le scriem sub forma unui tabel triunghiular care se numește *triunghiul lui Pascal*:

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$

În linia a $(n+1)$-a a tabelului sunt așezate în ordine numerele C_n^0, $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$. Avem $C_n^0 = C_n^n = 1$, iar numerele rămase se calculează cu ajutorul formulei de recurență.

Întrucât numerele C_{n-1}^{k-1} și C_{n-1}^k sunt dispuse în acest tabel în linia precedentă celei în care se găsește C_n^k, la stânga și la dreapta acestuia, atunci

* Blaise Pascal (1623–1662), matematician francez.

pentru a obține C_n^k adunăm numerele din linia precedentă care se găsesc la stânga și la dreapta sa. De exemplu, numărul 10 din linia a șasea se obține adunând numerele 4 și 6 din linia precedentă.

3. *O interpretare geometrică pentru numerele* C_n^k.

Fie numerele naturale k și n astfel încât $0 \leqslant k \leqslant n$. În continuare se va da o interpretare geometrică interesantă a numărului C_n^k.

Fie planul xOy și punctul $M(k, n-k)$. Notăm cu M' și M'', punctele de coordonate $(k, 0)$, respectiv $(0, n-k)$. Realizăm rețeaua din figura II.1, cu pătrate de latură 1 (adică, un caroiaj al dreptunghiului $OM'MM''$ cu pătrate de latură 1). Acestea sunt în număr de $k \cdot (n-k)$. Vârfurile celor $k \cdot (n-k)$ pătrate se numesc nodurile rețelei. Numim *drum pe rețea* o linie frântă care unește două noduri oarecare ale rețelei și este formată din laturi succesive ale pătratelor rețelei.

Se pune problema determinării numărului drumurilor pe rețea *minimale (cele mai scurte)* care unesc punctul $O(0, 0)$ cu punctul $M(k, n-k)$.

Se observă că un drum pe rețea minimal, care unește O cu M, este format din $k + (n-k) = n$ segmente (de lungime 1), dintre care k segmente orizontale și $(n-k)$ segmente verticale. Drumurile diferă între ele doar prin ordinea de succesiune a segmentelor orizontale și verticale. De aceea numărul tuturor acestor drumuri este egal cu numărul tuturor posibilităților prin care din n segmente se pot alege k segmente orizontale, adică C_n^k.

Remarcăm că n este suma coordonatelor punctului M.

S-ar putea considera numărul posibilităților de alegere a $(n-k)$ segmente verticale din cele n segmente și atunci obținem numărul C_n^{n-k}.

Astfel, am stabilit geometric formula combinărilor complementare: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Să demonstrăm în același fel formula de recurență pentru calculul numărului de combinări.

Să considerăm rețeaua din figura II.2, pe care figurăm punctele $M_1(k-1, n-k)$ și $M_2(k, n-k-1)$.

Rezultă că numărul tuturor drumurilor minimale care unesc $O(0, 0)$, cu $M(k, n-k)$ este C_n^k. Toate aceste drumuri le împărțim în două clase (disjuncte): drumuri care trec prin punctul M_1 și drumuri care trec prin punctul M_2. Cum suma coordonatelor fiecăruia din punctele M_1 și M_2 este $n-1$ rezultă că numărul drumurilor care trec prin M_1 este C_{n-1}^k, iar numărul drumurilor care trec prin M_2 este C_{n-1}^{k-1}, de unde rezultă

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

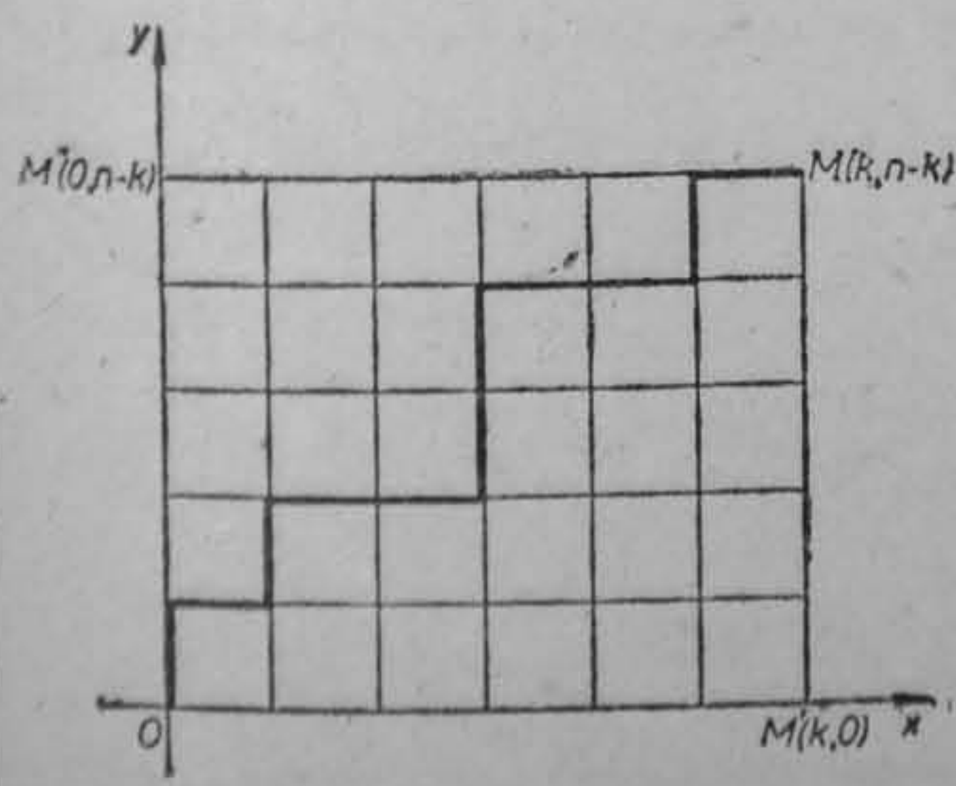


Fig. II. 1

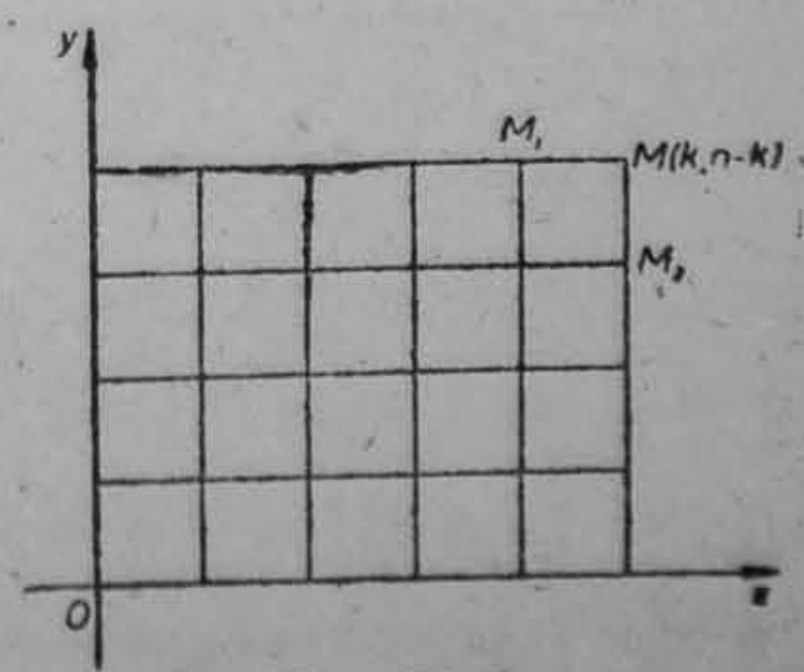


Fig. II. 2

Exerciţii

Permutări

1. Din elementele mulţimii A să se formeze toate permutările posibile, dacă:

a) $A = \{2\}$; c) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;

b) $A = \{4, 5\}$; d) $A = \{a, b, c, d\}$.

2. Să se simplifice expresiile:

a) $6! + 7!$; b) $9! - 8!$; c) $\frac{213}{210}$; d) $\frac{n!}{(n-2)!}$; e) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!}$; f) $\frac{1}{n!} - \frac{}{(n+2)!}$

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$; b) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$; c) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^2}{(n+2)!}$.

4. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$; b) $\frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} < 1\,000$.

5. În câte moduri se pot aşeza pe un raft patru cărţi?

6. Un tren de persoane are zece vagoane. În câte moduri pot fi aşezate vagoanele pentru formarea trenului?

7. În câte moduri poate fi ordonată mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$, astfel ca numerele 1, 2, 3 să stea la rând şi în ordine crescătoare?

8. Fie dată o mulţime A cu m elemente şi o mulţime B cu n elemente. Să să găsească numărul de permutări al mulţimii $A \cup B$, astfel încât primul element al unei astfel de permutări să fie din A, iar ultimul să fie din B, $A \cap B = \emptyset$.

9. Câte elemente trebuie să conţină o mulţime, astfel încât numărul permutărilor acestei mulţimi să fie cuprins între 500 şi 1 000?

10. Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele cu şase cifre astfel încît în fiecare număr să nu fie cifre identice. Câte numere se pot obţine?

11. În câte moduri pot fi aşezate n persoane la o masă circulară?

Aranjamente

12. Să se scrie toate aranjamentele de câte 4 elemente ale mulţimii $\{a, b, c, d, e\}$.

13. Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dat

14. O grupă de studenţi trebuie să programeze patru examene în timp de opt zile. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se va da în mod obligatoriu în ziua a opta?

15. Cei treizeci elevi ai unei clase au schimbat fotografii între ei. Câte fotografii au fost necesare?

16. Să se calculeze:

a) $\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$; b) $\frac{A_{n+k}^{k+3} + A_{n+k}^{k+2}}{A_{n+k}^{k+1} - A_{n+k}^{k}}$; c) $\frac{(2n+1)!\, A_{2n}^{k}}{A_{2n-1}^{k-1} \cdot (2n-k)!}$.

17. Să se afle n, dacă:

a) $A_n^5 = 18A_{n-1}^4$; b) $\frac{A_n^{10} - A_n^8}{A_n^8} = 109$; c) $\frac{(n+2)!}{A_n^k \cdot (n-k)!} = 132$.

18. Ştiind că numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k este egal cu de p ori numărul aranjamentelor de n elemente luate câte $k-2$, să se găsească n.

19. Să se scrie toate submulțimile mulțimii A și să se găsească numărul lor, dacă:

a) $A = \{3, 4\}$; b) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

20. În câte moduri, din 30 de elevi, poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

21. Fiind date n puncte, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare să se găsească numărul dreptelor care se pot duce unind punctele două câte două.

22. Câte numere de câte patru cifre se pot forma astfel încât în fiecare număr o cifră să fie mai mare decât precedenta? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decât precedenta?

23. În plan sunt date n puncte, din care în afară de k puncte care sunt situate pe aceeaș dreaptă, oricare trei puncte nu sunt colinare. Se cere să se afle:

a) Prin câte drepte se pot uni aceste puncte?

b) Câte triunghiuri diferite, cu vârfurile în aceste puncte, există?

24. În câte moduri se pot forma echipe din câte 4 elevi un profesor, dacă sunt 20 de elevi și 3 profesori?

25. La 9 clase trebuie repartizați 3 profesori de matematică fiecăruia repartizîndu-i-se câte 3 clase. În câte moduri se poate face repartizarea?

26. Să se calculeze:

a) C_{10}^{8}; c) C_{n+1}^{k+1}; e) C_{n-1}^{k+1};

b) C_{15}^{13}; d) $C_{100}^{0} + C_{100}^{99}$; f) $C_{10}^{9} + C_{10}^{8}$;

27. Să se afle n, dacă:

a) $C_{n}^{4} = \dfrac{5n(n-3)}{6}$; c) $C_{4n+9}^{4}\, {}^{n+1} = 5A_{4n+7}^{8}$;

b) $C_{n}^{3} + C_{n}^{4} = n(n-2)$; d) $C_{n+8}^{n+8} = 5A_{n+6}^{5}$.

28. Se dă o mulțime A care are n elemente. Împărțim toate submulțimile lui A în clase (disjuncte), punând în aceeași clasă toate submulțimile lui A care au același număr de elemente. Care din aceste clase este cea mai numeroasă?

29. Să se rezolve inecuațiile:

a) $C_{n}^{5} < C_{n}^{6}$; c) $C_{20}^{k-1} < C_{20}^{k}$;

b) $C_{n}^{5} > C_{n}^{7}$; d) $C_{16}^{k-2} > C_{16}^{k}$.

30. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} A_{x}^{y} = [illegible] \\ 6C_{x}^{y} - 5C + [illegible] \end{cases}$ b) $\begin{cases} xC_{n-2}^{k-1} + \dfrac{n-1}{k-1}\, y = \dfrac{k}{n-1} \\ xC_{n-2}^{k-2} - \dfrac{n-1}{k}\, y = \dfrac{k-1}{n-1} \end{cases}$

31. Să se deducă egalitățile:

a) $C_{n}^{k} = C_{n-2}^{k} + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$;

b) $C_{n}^{k} = C_{n-3}^{k} + 3C_{n-3}^{k-1} + 3C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}$;

c) $C_{9}^{9} + C_{10}^{9} + C_{11}^{9} + \ldots + C_{20}^{9} = C_{20}^{10}$.

32. Din 11 persoane, dintre care 7 bărbați și 4 femei, se formează o delegație alcătuită din 5 persoane dintre care cel puțin două femei. În câte moduri se poate forma această delegație?

§ 3. Binomul lui Newton și aplicații

3.1. Binomul lui Newton

Dacă a și b sunt numere, sunt bine cunoscute formulele:

$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

De asemenea, se calculează fără dificultate

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 \text{ și } (a+b)^5 = (a+b)^2(a+b)^3$$

și se obține

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Observăm că, coeficienții din membrii din dreapta ai acestor formule sunt egali cu numerele din linia corespunzătoare a triunghiului lui Pascal [vezi § 2, pct. 2.4).

Vom arăta că pentru orice număr natural n este adevărată formula

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n, \quad (1)$$

care se numește *formula lui Newton**. Membrul drept al egalității (1) se numește *dezvoltarea binomului la putere.*

Vom demonstra formula (1) prin metoda inducției matematice.

Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

1) $P(1)$ este adevărată, deoarece

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

2) Rămâne să arătăm că pentru orice număr natural $k \geqslant 1$, avem $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Fie deci adevărată $P(k)$, adică

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k b^k.$$

Să arătăm că este adevărată $P(k+1)$. Într-adevăr, avem

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b) = (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k b^k)(a+b) = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + \ldots + C_k^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_k^k a b^k + C_k^0 a^k b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_k^{m-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \ldots + (C_k^m + C_k^{m+1}) a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a b^k + C_k^k b^{k+1}.$$

Deoarece

$$C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0,\ C_k^0 + C_k^1 = C_{k+1}^1, \ldots, C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}, \ldots, C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k,\ C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1},$$

obținem:

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1} a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

---

* Isaac Newton, matematician și fizician englez, a trăit între anii 1643—1727.

Folosind metoda inducției matematice, urmează că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 1$. Formula lui Newton este astfel demonstrată.

Exemplu. $(a+b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a b^5 + C_6^6 b^6$.

Avem:

$$C_6^0 = 1 = C_6^6;\ C_6^1 = \frac{6}{1} = 6;\ C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15;\ C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

$C_6^4 = C_6^2 = 15$ (fiind combinări complementare).

$C_6 = C_6^1 = 6$ (fiind combinări complementare).

Deci:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Coeficienții $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ din formula lui Newton se numesc *coeficienți binomiali*. Aceștia sunt, evident, în număr de $n+1$.

Asupra formulei lui Newton facem câteva observații de bază.

1. În dezvoltarea $(a+b)^n$, după formula lui Newton, sunt $b+1$ termeni (numărul termenilor fiind egal cu numărul coeficienților binomiali $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$).

2. În formula lui Newton exponenții puterilor lui a descresc de la n la 0, iar exponenții puterilor lui b cresc de la 0 la n. Suma exponenților puterilor lui a și b în orice termen al dezvoltării este egală cu n, adică egală cu exponentul puterii binomului.

3. Coeficienții binomiali din dezvoltare egal depărtați de termenii extremi ai dezvoltării, sunt egali între ei, deoarece $C^m = C_n^{n-m}$ (fiind combinări complementare).

4. Dacă n este un număr par (adică $n = 2k$), atunci coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării (adică C_n^k) este cel mare. Dacă n este impar (adică $n = 2k+1$), atunci coeficienții binomiali ai celor doi termeni de la mojloc sunt egali între ei (adică $C_n^k = C_n^{k+1}$) și sunt cei mai mari.

5. Termenul $C_n^k a^{n-k} b^k$, adică al $(k+1)$-lea termen din egalitatea (1), se numește termenul de rang $k+1$ și se notează cu T_{k+1}. Așadar

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Termenul T_{k+1} se mai numește *termenul general al dezvoltării*, deoarece dând lui k valori de la 0 la n, găsim toți termenii dezvoltării.

De *exemplu*, $T_1 = C_n^0 a^n b^0 = C_n^0 a^n$ este primul termen, $T_2 = C_n^1 a^{n-1} b$ este al doilea termen, $T_3 = C_n^2 a^{n-2} b^2$ este al treilea termen etc.

Se poate stabili și o relație de recurență între termenii succesivi ai dezvoltării (1).

Având în vedere că

$$C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$$

rezultă că

$$T_{k+2} = C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k a^{n-k} b^k \frac{b}{a} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_{k+1}.$$

Deci

$$T_{k+2} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_{k+1}. \qquad (3)$$

Observaţie. Să se facă distincţie între *coeficientul unui termen al dezvoltării* după formula lui Newton şi *coeficientul binomial al aceluiaşi termen.* De *exemplu,* în dezvoltarea

$$(a \quad 2b)^4 = a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4$$

coeficientul celui de-al patrulea termen al dezvoltării este 32, iar coeficientul său binomial este $C_4^3 = 4$.

Să dăm în continuare câteva *exemple* şi *aplicaţii.*

1) Să se găsească termenul al cincilea al dezvoltării

$$(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})^{10}.$$

Soluţie. Termenul căutat îl găsim folosind formula (2)

$$T_5 = C_{10}^4 (\sqrt{x})^{10-4} (\sqrt[3]{x^2})^4 = 210 x^5 \sqrt[3]{x^2}.$$

2) Să se găsească rangul termenului care conţine pe x^7 din dezvoltarea

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{12}.$$

Soluţie. Scriem termenul general al dezvoltării

$$T_{k+1} = C_{12}^k (\sqrt[3]{x^2})^{12-k} \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^k.$$

Punem condiţia ca în T_{k+1} să apară x^7, adică $(\sqrt[3]{x^2})^{12-k} (\sqrt{x})^k = x^7$.

Deci $x^{\frac{2(12-k)}{3}} \cdot x^{\frac{k}{2}} = x^7$, de unde $\frac{2(12-k)}{3} + \frac{k}{2} = 7$, care dă $k = 6$.

3) Să se determine al 12-lea termen al dezvoltării $\left(x - \frac{1}{\sqrt{5x}}\right)^n$, dacă coeficientul binomial al celui de-al treilea termen este egal cu 105.

Soluţie. Coeficientul binomial al termenului al treilea este C_n^2. Avem $C_n^2 = 105$, adică $\frac{n(n-2)}{2} = 105$, de unde $n_1 = 15$ şi $n_2 = -14$. Cum n este pozitiv, rezultă că $n = 15$. Deci

$$T_{11} = (-1)^{10} C_{15}^{10} x^{11} \left(\frac{1}{\sqrt{5x}}\right)^{10} = -C_{15}^4 x^{11} \frac{1}{5^2 x^2} = -\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^2} x^9 = -\frac{273}{5} x^9.$$

4) Să se găsească rangul celui mai mare termen în dezvoltarea $(1 + 0{,}1)^{100}$.

Soluţie. După formula (3) rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{100-k}{k+1} \cdot \frac{0{,}1}{1} = \frac{100-k}{10(k+1)}$.

Avem că $\frac{100-k}{10(k+1)} \geqslant 1$ dacă şi numai dacă $k \leqslant 8\frac{2}{11}$.

Deci pentru $k \leqslant 8$ rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} > 1$, iar pentru $k \geqslant 9$ rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} < 1$. Aşadar termenii dezvoltării cresc până la T_{10} şi după aceea descresc, adică T_{10} este cel mai mare termen al dezvoltării.

3.2. Aplicații. Identități în calculul cu combinări

Numerele C_n^k au o serie de proprietăți interesante. Indicăm mai jos câteva dintre acestea și stabilim o serie de identități pe care le verifică coeficienții binomiali.

Amintim mai întâi următoarele formule:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{1}$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \tag{2}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n, \tag{3}$$

care au fost stabilite în paragraful 2.4 din acest capitol.

Observăm că egalitatea (3) se obține evident și din formula binomului lui Newton,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n,$$

pentru $a = b = 1$.

Dacă în formula binomului lui Newton se pune $a = 1$, $b = -1$, se obține egalitatea;

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \tag{4}$$

Pe baza egalităților (3) și (4) rezultă

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}. \tag{5}$$

Deci, *suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar este egală cu suma coeficienților bonomiali ai termenilor de rang par.*

Vom stabili în continuare alte câteva formule combinatorii importante. Uneori, pentru demonstrația anumitor egalități este util să se aibă în vedere interpretarea geometrică a numărului C_n^k, care a fost dată în paragraful 2.4 din acest capitol.

1. Să se demonstreze că

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}. \tag{6}$$

Demonstrație. Folosind egalitatea (2), scriem șirul următor de egalități

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},$$

$$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1},$$

$$C_k^k = C_{k-1}^{k-1} (= 1).$$

Adunând membru cu membru aceste egalități, după reducerea termenilor asemenea, obținem egalitatea (6).

2. Să se demonstreze că

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k. \tag{7}$$

Demonstrația 1. Toate submulțimile cu k elemente ale mulțimii

$$A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m\},$$

al caror număr este C_{n+m}, le împărțim în $k+1$ clase $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ astfel: T_i este formată din toate submulțimile lui A cu k elemente, în componența cărora intră exact i elemente cu indici $\leq n$. Fiecare submulțime din clasa T_i se poate obține, reunind o submulțime oarecare cu i elemente a mulțimii $\{a_1, \ldots, a_n\}$ cu o submulțime oarecare cu $(k-i)$ elemente a mulțimi $\{a_{n+1}, \ldots, a_{n+}\}$. Deci, T_i este formată din $C_n^i C_m^{k-i}$ submulțimi. Cum $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ sunt disjuncte două câte două, iar reuniunea tuturor este totalitatea submulțimilor, cu k elemente, ale mulțimii A, rezultă

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i}$$

Demonstrația 2. Să considerăm egalitatea

$$(1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^{n+m}.$$

Folosind formula binomului lui Newton, deducem coeficientul lui x^k din membrul drept al acestei egalități ca fiind C_m^k, iar coeficientul lui x^k din membrul stâng al egalității este

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0.$$

După cum se va argumenta în Capitolul IV al manualului, coeficienții lui x^k din cei doi membri sunt egali, de unde rezultă egalitatea (7).

Dacă în (7), $k = n = m$ și ținem seama de formula (1), rezultă

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n. \tag{8}$$

3. Să se demonstreze că

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right). \tag{9}$$

Demonstrație. Fie

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

o rădăcină cubică complexă a unității. Avem deci $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Punând în formula binomului lui Newton $a = 1$, $b = 1$, apoi $a = 1$, $b = \varepsilon$ și, în sfârșit $a = 1$, $b = \varepsilon^2$, obținem:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \ldots,$$

$$(1 + \varepsilon)^n = C_n^0 + \varepsilon C_n^1 + \varepsilon^2 C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon C_n^4 + \ldots$$

$$(1 + \varepsilon^2)^n = C_n^0 + \varepsilon^2 C_n^1 + \varepsilon C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon^2 C_n^4 + \ldots$$

Adunând, termen cu termen, aceste trei egalități și împărțind la 3, obținem în membrul drept $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$, iar în membrul stâng

$$\frac{1}{3}\left[2^n + (1 + \varepsilon)^n + (1 + \varepsilon^2)^n\right].$$

Ținând seama de faptul că

$$1 + \varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \text{ și}$$

$$1 + \varepsilon^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

obținem

$$\frac{1}{3}\left[2^n + (1 + \varepsilon)^n + (1 + \varepsilon^2)^n\right] = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right),$$

de unde rezultă egalitatea (9).

Lăsăm ca exercițiu demonstrarea următoarelor două egalități:

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right], \tag{9'}$$

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right]. \tag{9''}$$

4. *Aplicație. (Mica teoremă a lui Fermat).* Dacă p este un număr natural prim, iar n un număr natural oarecare, atunci $n^p - n$ se divide cu p.

Demonstrație. Într-adevăr, pentru $n = 0$, afirmația este adevărată. Să presupunem $k^p - k$ divizibil cu p și să demonstrăm că numărul $(k + 1)^p - (k + 1)$ este divizibil cu p. Pentru aceasta, considerăm diferența

$$(k + 1)^p - (k + 1) - (k^p - k).$$

Dezvoltând după formula lui Newton $(k+1)^p$, avem:

$$(k+1)^p - (k+1) - (k^p - k) = (k+1)^p - k^p - 1 =$$
$$= C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} k. \qquad (1)$$

Însă pentru $1 \leqslant j \leqslant p$ avem:

$$C_p^j = \frac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j}.$$

Întrucât numărul p este prim, el nu se divide cu nici unul din numerele $1, 2, \ldots, j$ de la numitor. De aceea C_p^j se divide cu p pentru $1 \leqslant j \leqslant p$. Dar atunci toţi termenii din membrul drept al egalităţii (1) se divid cu p şi deci membrul stâng se divide cu p. Dar cum am presupus că $k^p - k$ se divide cu p, atunci şi $(k+1)^p - (k+1)$ se divide cu p.

Conform metodei inducţiei matematice rezultă că $n^p - n$ se divide cu p, pentru orice număr natural n.

Observaţie. Dacă p este un număr natural prim, iar n un număr natural care nu este multiplu de p, atunci $n^{p-1} - 1$ se divide cu p. Acest enunţ este o variantă sub care se întâlneşte adesea teorema de mai înainte.

Exemple.

1) Deoarece 17 este număr prim, atunci $1979^{17} - 1979$ se divide cu 17.

2) Deoarece 97 este număr prim, iar 721 nu este multiplu de 97, atunci $721^{96} - 1$ se divide cu 97.

3.3. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale

Fie $k \geqslant 1$ un număr natural şi să notăm cu

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

În cele ce urmează ne propunem să evaluăm această sumă. Mai întâi vom calcula câteva sume particulare, cum sunt S_1, S_2, S_3, care ne oferă o idee de calcul pentru cazul general.

1. Se verifică uşor prin inducţie matematică următoarea formulă care dă suma primelor n numere naturale

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

2. Să calculăm acum

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,$$

adică suma pătratelor primelor n numere naturale.

Să considerăm formula

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$$

Făcând, succesiv, pe a egal cu $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, obţinem

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$
$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$
$$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Adunând aceste relații membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obține

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n + 1,$$

sau

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$

de unde

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3S_1 - (n+1).$$

Această formulă ne dă pe S_2 în funcție de S_1. Dar dacă înlocuim S_1 dat de formula (1), după efectuarea calculelor, se obține

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

3. Pentru a afla pe S_3,

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

(suma cuburilor primelor n numere naturale) considerăm formula

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1.$$

Făcând, succesiv, pe a egal cu 1, 2, 3, ..., $n-1$ n obținem

$$2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1,$$
$$3^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1,$$
$$4^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^4 = (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,$$
$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Adunând aceste relații membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obține

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n,$$

de unde

$$4S_3 = (n+1)^4 - 6S_2 - 4S_1 - (n+1).$$

Această formulă ne dă pe S_3 în funcție de S_1 și S_2. Înlocuind S_1 și S_2 date de formulele (1) și (2), se obține după efectuarea calculelor

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{3}$$

Observăm că $S_3 = S_1^2$.

4. Calea prin care am găsit pe S_2 și S_3 a fost aceeași. Ea poate fi urmată pentru găsirea lui S_k în general.

Folosim formula

$$(a+1)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k + C_{k+1}^2 a^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k a + C_{k+1}^{k+1}.$$

Făcând, succesiv, pe a egal cu 1, 2, 3, ..., $n-1$, n obținem

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + C_{k+1}^1 1^k + C_{k+1}^2 1^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 1 + C_{k+1}^{k+1},$$
$$3^{k+1} = 2^{k+1} + C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 2 + C_{k+1}^{k+1},$$
$$4^{k+1} = 3^{k+1} + C_{k+1}^1 3^k + C_{k+1}^2 3^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 3 + C_{k+1}^{k+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^{k+1} = (n-1)^{k+1} + C_{k+1}^1 (n-1)^k + C_{k+1}^2 (n-1)^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k (n-1) + C_{k+1}^{k+1},$$
$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k n + C_{k+1}^{k+1}.$$

Adunând aceste relații membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obține

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k S_1 + n. \tag{4}$$

Aceasta este o formulă de recurenţă, care dă pe S_k în funcţie de toate sumele precedente $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$.

Să determinăm, de exemplu, pe S_4. Pentru $k = 4$, găsim:

$$(n+1)^5 = 1 + C_5^1 S_4 + C_5^2 S_3 + C_5^3 S_2 + C_5^4 S_1 + n.$$

Dacă înlocuim pe S_1, S_2, S_4, date de formulele (1), (2), (3), obţinem după efectuarea calculelor:

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \qquad (5)$$

Exerciţii

1. Să se dezvolte după formula lui Newton binoamele la putere:

a) $(x^2 - a)^5$; c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^4$; e) $(\sqrt{3x} + \sqrt{y})^7$;

b) $(a - b)^5$; d) $(x + 2)^7$; f) $(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^8$.

2. Să se determine:

a) termenul al optuiea al dezvoltării $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$;

b) termenul al cincilea al dezvoltării $(\sqrt{2a} - \sqrt{ab})^7$;

c) termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$;

d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^9$.

3. Să se determine:

a) termenul din dezvoltarea $(\sqrt{x} + y)^9$ care îl conţine pe x^3;

b) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{12}$ care îl conţine pe a^4;

c) termenul în care nu apare x din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^m$.

4. Să se determine rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^8$, în care x şi y au puteri egale.

5. Să se determine n, dacă în dezvoltarea $(1 + x)^n$ coeficienţii lui x^5 şi x^{12} sunt egali.

6. Câţi termeni raţionali conţine dezvoltarea $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

7. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, suma coeficienţilor binomiali de rang par este egală cu 128. Să se găsească termenul care conţine pe a^3.

8. Să se determine m, n, p astfel încât în dezvoltarea $\left(x^m + \frac{1}{x^p}\right)^n$, termenii de rang 12 şi 24 să conţină pe n, respectiv x^5 şi, mai mult, această dezvoltare să aibă termen liber.

9. Să se găsească suma coeficienţilor dezvoltării $(7x^2 - 6y^3)^9$.

10. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{100}$.

11. Să se demonstreze egalitățile:

a) $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$;

b) $k + \frac{k^2 C_n^1}{2} + \frac{k^3 C_n^2}{3} + \ldots + \frac{k^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{(k+1)^{n+1} - 1}{n+1}$;

c) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

d) $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$;

e) $1 + C_n^1 \cos\alpha + C_n^2 \cos 2\alpha + \ldots + C_n^n \cos n\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}$,

$C_n^1 \sin\alpha + C_n^2 \sin 2\alpha + \ldots + C_n^n \sin n\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}$.

§ 4. Progresii aritmetice și progresii geometrice

4.1. Șiruri

1. *Noțiunea de șir.* Amintim că am notat prin **N** mulțimea numerelor naturale:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, \tag{1}$$

iar prin **N*** mulțimea numerelor naturale nenule:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots. \tag{2}$$

În mod obișnuit se spune că (1) și (2) reprezintă *șirul numerelor naturale*, respectiv *șirul numerelor naturale nenule*.

Să scriem în ordine descrescătoare fracțiile al căror numărător este egal cu 1:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots.$$

Am scris numai primele cinci fracții. Este evident că pe locul al șaselea se găsește fracția $\frac{1}{6}$, pe al zecelea se găsește fracția $\frac{1}{10}$, pe al cincizecilea stă $\frac{1}{50}$, pe al o sutănouălea stă $\frac{1}{109}$. În general, pentru orice număr de ordine n, se poate indica fracția cu numărătorul egal cu 1, corespunzătoare acestuia.

Astfel, între mulțimea numerelor naturale nenule și mulțimea fracțiilor cu numărătorul egal cu 1, se stabilește o corespondență. Să notăm această corespondență cu litera f. Obținem astfel o funcție f definită pe mulțimea **N*** a numerelor naturale nenule cu valori în mulțimea fracțiilor care au numărătorul egal cu 1. Mai mult, avem:

$$f(1) = \frac{1}{1}; f(2) = \frac{1}{2}, f(3) = \frac{1}{3}, \ldots, f(109) = \frac{1}{109}, \ldots$$

Definiția 4.1.1. O funcție definită pe mulțimea $\mathbf{N}^*$ a numerelor naturale nenule cu valori într-o mulțime E se numește șir de elemente ale mulțimii E.

Fie $f: \mathbf{N}^* \to E$ un șir de elemente ale mulțimii E. *Valorile funcției* f, *care corespund valorilor argumentului egale cu* 1, 2, 3 *ș.a.m.d. se numesc, de obicei, termenii șirului de rang, respectiv, egal cu* 1, 2, 3 *ș.a.m.d.* Scriem termenii șirului în ordinea crescătoare a rangurilor:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots .$$

Notăm primul termen al șirului cu a_1, al doilea cu a_2, al treilea cu a_3, ..., al n-lea cu a ș.a.m.d. și atunci șirul se scrie:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

În această notație $f(n) = a_n$. Șirul se va nota cu (a_n). Putem nota șirul folosind orice altă literă în locul literei a. De exemplu (b_n), (c_n) ș.a.m.d.

Remarcăm că într-un șir același număr poate apărea cu ranguri diferite. De *exemplu*

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$$

este un șir.

Între mulțimea $\mathbf{N}^*$ a numerelor naturale nenule și mulțimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale există o *funcție bijectivă*, dată prin

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & \ldots \end{array}$$

De aceea numerotarea termenilor unui șir se mai poate face începând cu zero.

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

Remarcăm că pentru fiecare număr real

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

se pun în evidență următoarele șiruri:

1) șirul: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$;

2) șirul aproximărilor zecimale prin lipsă:

$$a_0;\ a_0, a_1;\ a_0, a_1 a_2 \ldots;\ a_0 a_1 a_2 \ldots a_n, \ldots;$$

3) șirul aproximărilor zecimale prin adaos:

$$a_0 + 1;\ a_0, a_1 + \frac{1}{10};\ a_0, a_1 a_2 + \frac{1}{10^2};\ \ldots;\ a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n};\ \ldots$$

În continuare vom considera numai șiruri de numere reale; acestea vor fi numite, mai simplu, *șiruri*.

2. *Moduri de definire a unui șir*

Șirul este un caz particular de funcție, de aceea modurile de definire a unei funcții se aplică și pentru definirea unui șir.

1° *Șiruri definite descriptiv (prin descriere)*

De *exemplu*, şirul (d_n) definit prin:

$$d_1 = 1,\ d_2 = 11,\ d_3 = 111,\ \ldots,\ d_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\ ori},\ \ldots.$$

Acest şir se poate descrie astfel: fiecare termen al său se scrie cu ajutorul cifrei 1 şi numărul cifrelor este egal cu rangul termenului şirului.

2° *Şiruri definite cu ajutorul unei formule care permite să se găsească orice termen al său*

Fie, de exemplu, şirul (b_n) astfel că pentru fiecare n, b_n este dat de formula:

$$b_n = n^2 - n + 1.$$

Punând în formulă în loc de n, succesiv, valorile: 1, 2, 3, 4, ..., obţinem $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 7$, $b_4 = 13$ ş.a.m.d.

Formula care exprimă fiecare termen al şirului cu ajutorul rangului său n se numeşte formula termenului al n-lea (sau termenul general) al şirului.

3° *Modul recurent de definire a unui şir*

Să considerăm şirul (b_n) astfel că $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, pentru $n \geqslant 1$.

Cunoscând primii doi termeni b_1 şi b_2 ai şirului şi formula $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, putem să găsim orice termen al acestui şir:

$$b_3 = 1 + 2 = 3,\ b_4 = 2 + 3 = 5,\ b\ = 3 + 5 = 8 \text{ ş.a.m.d.}$$

O formulă care exprimă orice termen al şirului, de la un rang oarecare, prin precedenţii (unul sau mai mulţi) se numeşte *recurentă*.

Printr-un mod recurent de definire al unui şir, indicăm de obicei:

1. primul termen al şirului (sau câţiva din primii termeni);
2. formula care permite să se definească orice termen al şirului cu ajutorul termenilor precedenţi cunoscuţi.

Exemplu. Fie şirul (a_n) astfel încât $a_1 = 10$ şi $a_{n+1} = a_n - 5$, $n \geqslant 1$. Atunci

$$a_2 = a_1 - 5 = 5,$$
$$a_3 = a_2 - 5 = 0,$$
$$a_4 = a_3 - 5 = -5 \text{ ş.a.m.d.}$$

4.2. Progresii aritmetice

1. *Definiţia progresiei aritmetice*

Fie şirul (a_n), adică

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

astfel încât $a_1 = 3$ şi $a_{n+1} = a_n + 2$, pentru $n \geqslant 1$. Deci $a_1 = 3$, $a_2 = 3 + 2 = 5$, $a_3 = 5 + 2 = 7$, $a_4 = 7 + 2 = 9$ etc.

Se observă că fiecare termen al acestui şir, începând cu al doilea, se obţine prin adăugarea la termenul precedent a unui aceluiaşi număr şi anume 2.

Definiţia 4.2.1. Un şir de numere în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine din cel precedent prin adăugarea aceluiaşi număr, se numeşte *progresie aritmetică*.

Cu alte cuvinte, *un şir de numere*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a, \ldots$$

este o progresie aritmetică, dacă pentru orice $k \geq 1$, *avem*

$$a_{k+1} = a_k + r,$$

unde r *este un număr constant pentru şirul dat.*

Din definiţie rezultă că într-o progresie aritmetică diferenţa dintre orice termen şi predecesorul său este egală cu acelaşi număr r.

Numărul r se numeşte *raţia* progresiei aritmetice.

Progresia aritmetică (a_n) este complet determinată, dacă se cunosc primul termen a_1 şi raţia r.

Se spune că numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *sunt în progresie aritmetică, dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.*

Observaţie. Pentru a pune în evidenţă faptul că şirul $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ formează o progresie aritmetică se utilizează, adesea, scrierea

$$\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Exemple. 1) Dacă $a_1 = 0$, $r = 1$, atunci avem progresia

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

adică şirul numerelor naturale.

2) Dacă $a_1 = -2$ şi $r = -4$, atunci obţinem progresia

$$-2, -6, -10, -14, \ldots,$$

3) Dacă $a_1 = 1$, $r = 2$, atunci obţinem progresia

$$1, 3, 5, 7, \ldots,$$

adică şirul numerelor naturale impare.

O progresie aritmetică are următoarea proprietate importantă:

Teorema 4.2.2. Orice termen al unei progresii aritmetice

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \ldots,$$

începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui.

Cu alte cuvinte, *pentru orice* $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \qquad (1)$$

Demonstrație. Într-adevăr, pentru $n \geq 2$

$$a_n = a_{n-1} + r,$$

$$a_n = a_{n+1} - r.$$

Adunând aceste două egalități, deducem

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

de unde rezultă egalitatea (1).

Este adevărată și afirmația reciprocă a acesteia, adică:

Dacă un șir de numere are proprietatea că fiecare termen al său, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui, atunci acest șir este o progresie aritmetică.

Într-adevăr, să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui șir oarecare (a_n) are loc relația:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Atunci

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

de unde

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

sau

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Aceasta înseamnă că diferența dintre orice termen al șirului (a_n) și predecesorul său este egală cu același număr, și deci (a_n) este o progresie aritmetică.

Observație. Proprietatea semnalată mai înainte justifică denumirea de progresie aritmetică.

2. *Formula termenului general al unei progresii aritmetice*

Cunoscând primul termen și rația unei progresii aritmetice (a_n) se poate da o formulă care permite să se găsească orice termen al progresiei.

Fie a_1 primul termen al progresiei aritmetice și r rația sa.

Atunci, din definiția progresiei aritmetice

$$a_2 = a_1 + r,$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r,$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r \text{ ș.a.m.d.}$$

În general, avem:

Teorema 4.2.3. Termenul general al unei progresii aritmetice este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r. \qquad (1)$$

Demonstrație. Vom demonstra formula prin metoda inducției matematice. Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

1° Pentru $n = 1$, egalitatea (1) este evident adevărată.

2° Rămâne să arătăm că pentru orice număr natural k, avem $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Fie deci adevărată $P(k)$, adică

$$a_k = a_1 + (k-1)r.$$

Să arătăm că este adevărată $P(k+1)$. Într-adevăr, avem

$$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1)r + r = a_1 + kr.$$

Deci ambele etape ale metodei inducției matematice sunt verificate. Înseamnă că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n. Formula (1) este astfel demonstrată.

De exemplu, pentru progresia aritmetică

$$-10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10,\ \ldots,$$

avem

$$a_1 = -10;\ r = 5.$$

De aceea

$$a_{13} = a_1 + 12r = -10 + 60 = 50,$$

$$a_{55} + a_1 + 54r = -10 + 270 = 260$$

ș.a.m.d.

3. *Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice*

Ne propunem să găsim suma numerelor naturale de la 1 la 100, adică

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100.$$

Evident se poate efectua această sumă adunând termen cu termen numerele de la 1 la 100. Această soluție este destul de anevoioasă. Să procedăm de aceea în modul următor:

Scriem suma numerelor naturale de la 1 la 100, de două ori. În primul rând scriem termenii sumei în ordine crescătoare, iar în al doilea rând în ordine descrescătoare. Astfel:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100,$$
$$100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Se observă că suma numerelor așezate unul sub altul este aceeași:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 98 + 3 = 99 + 2 = 100 + 1.$$

Cum fiecare astfel de pereche de numere are suma egală cu 101 și cum numărul perechilor este 100, se obține

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Se poate proceda analog, pentru deducerea formulei care dă suma primilor n termeni ai oricărei progresii aritmetice.*

Fie (a_n) o progresie aritmetică de rație r și fie S_n suma primilor n termeni ai săi, adică

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sunt în progresie aritmetică.

Dăm mai întâi următoarea proprietate importantă a lor.

Teorema 4.2.4. Fie numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ în progresie aritmetică. Atunci

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Cu alte cuvinte, *suma oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme este egală cu suma numerelor extreme.*

Demonstrație. Dacă r este rația, atunci

$$a_k = a_1 + (k-1)r \text{ și } a_{n-k+1} = a_1 + (n-k)r,$$

de unde:

$$a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)r] + [a_1 + (n-k)r] = 2a_1 + (n-1)r.$$

Dar $a_1 + a_n = a_1 + [a_1 + (n-1)r] = 2a_1 + (n-1)r$.

Deci $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)r$.

Folosind această teoremă este ușor de calculat formula generală pentru suma S_n. Avem

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Adunînd aceste două egalități se obține:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Dar, conform teoremei precedente, avem

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} + \ldots$$

De aceea

$$2S_n = n(a_1 + a_n),$$

de unde

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \qquad (1)$$

---

* Se spune că Karl Friedrich Gauss (1777–1855), matematician german, unul dintre cei mai mari matematicieni ai tuturor timpurilor, pe vremea când era elev la școala primară l-a uimit pe profesorul său, deoarece a calculat mintal suma unui număr par de numere, pe care profesorul o considera o problemă anevoioasă. De fapt, elevul observase că numerele din sumă au proprietatea că suma termenilor egal depărtați de extreme este aceeași și a înmulțit aceasta cu jumătate din numărul termenilor.

Deci: *suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu produsul dintre semisuma termenilor extremi (ai sumei) și numărul termenilor sumei.*

În particular,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{(1 + 100)100}{2} = 5\,050.$$

Observație. Înlocuim în formula $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ termenul a_n al progresiei prin $a_1 + (n - 1)r$. Atunci

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n.$$

Așadar

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n. \qquad (2)$$

Am obținut astfel o formulă în care suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice se exprimă în funcție de primul termen, rație și numărul termenilor.

Exemplu. Să determinăm suma primilor 10 termeni ai progresiei aritmetice (a_n):

$$1, 4, 7, 10, \ldots,$$

Primul termen al progresiei este 1, iar rația este 3. Atunci al 10-lea termen al progresiei este

$$a_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 3 = 1 + 9 \cdot 3 = 28.$$

Deci

$$S_{10} = \frac{(1 + 28)10}{2} = 29 \cdot 5 = 145.$$

Putem aplica și formula (2) pentru calculul sumei S_{10}.

4.3. Progresii geometrice

1. *Definiția progresiei geometrice*

Fie șirul (b_n), adică

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots,$$

astfel încât $b_1 = 2$ și $b_{n+1} = 3 \cdot b_n$ pentru $n \geq 1$. Atunci $b_1 = 2$; $b_2 = 3 \cdot b_1 = 6$; $b_3 = 3 \cdot b_2 = 18$; $b_4 = 3 \cdot b_3 = 54$ ș.a.m.d.

Fiecare termen al acestui șir, începând cu al doilea, se obține prin înmulțirea termenului precedent cu un același număr ~~și~~ anume cu 3.

Definiția 4.3.1. **Un șir de numere al cărui prim termen este nenul, la fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin înmulțirea cu un același număr nenul, se numește progresie geometrică.**

Cu alte cuvinte, *un şir de numere*

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots \quad (b_1 \neq 0),$$

este o progresie geometrică dacă pentru orice $k \geq 1$, *avem*

$$b_{k+1} = k_k \cdot q,$$

unde $q \neq 0$ *este un număr constant, pentru şirul dat.*

Din definiţie rezultă că într-o progresie geometrică câtul dintre orice termen şi predecesorul său este egal cu acelaşi număr q.

Numărul q se numeşte *raţia* progresiei geometrice.

Progresia geometrică (b_n) este complet determinată, dacă se cunosc primul termen b_1 şi raţia q.

Se spune că numerele $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ *sunt în progresie geometrică dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.*

Observaţie. Pentru a pune în evidenţă faptul că şirul $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ formează o progresie geometrică se utilizează, adesea, scrierea

$$\div\, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

Exemple

1) Dacă $b_1 = 5$, $q = \frac{1}{3}$, atunci avem progresia

$$5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \ldots.$$

2) Dacă $b_1 = 3$, $q = -2$, atunci avem progresia

$$3, -6, 12, -24, \ldots.$$

Dacă raţia q a unei progresii geometrice este pozitivă, adică $q > 0$, atunci toţi termenii progresiei au acelaşi semn şi anume:

1° Dacă $b_1 > 0$, atunci toţi termenii sunt pozitivi.

2° Dacă $b_1 < 0$, atunci toţi termenii sunt negativi.

În cazul în care $q < 0$, termenii de rang impar ai progresiei au acelaşi semn ca şi primul termen, iar termenii de rang par ai progresiei au semn contrar semnului primului termen al progresiei. Deci, în acest caz, semnele termenilor progresiei alternează.

O progresie geometrică cu termeni pozitivi are următoarea proprietate importantă care, în particular, justifică denumirea de „progresie geometrică".

Teorema 4.3.2. Orice termen al unei progresii geometrice cu termeni pozitivi

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots,$$

Începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui.

Cu alte cuvinte, *pentru orice* $n \geq 2$,

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}. \qquad (1)$$

Demonstrație. Într-adevăr, pentru $n \geqslant 2$

$$b_n = b_{n-1}q,$$

$$b_n = \frac{b_{n+1}}{q}.$$

Înmulțind aceste două egalități, deducem

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1},$$

de unde rezultă egalitatea (1).

Este adevărată și afirmația reciprocă a acesteia:

Dacă un șir de numere cu termeni pozitivi are proprietatea că fiecare termen al său, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui, atunci acest șir este o progresie geometrică.

Într-adevăr, să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui șir oarecare (b_n) cu termeni pozitivi, are loc relația:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

Atunci

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1},$$

de unde

$$b_n b_n = b_{n-1}b_{n+1},$$

sau

$$b_n : b_{n-1} = b_{n+1} : b_n.$$

Așadar, câtul dintre orice termen al șirului (b_n) și predecesorul său este egal cu același număr. Deci (b_n) este o progresie geometrică.

2. *Formula termenului general al unei progresii geometrice*

Cunoscând primul termen și rația unei progresii geometrice (b_n) se poate da o formulă care permite să se găsească orice termen al progresiei.

Fie b_1 primul termen al progresiei geometrice și q rația sa. Atunci, din definiția progresiei geometrice, deducem:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3 \text{ ș.a.m.d.}$$

În general, avem

Teorema 4.3.3. **Termenul general al unei progresii geometrice este dat de formula:**

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \tag{1}$$

Demonstrație. Vom demonstra formula prin metoda inducției matematice. Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

1. Pentru $n = 1$, egalitatea este evident adevărată.
2. Fie acum $P(k)$ adevărată, adică

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}.$$

Atunci $b_{k+1} = b_k q = (b_1 q^{k-1})q = b_1 q^k$, deci, $P(k+1)$ este adevărată.

Aşadar $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Metoda inducţiei matematice ne asigură că formula (1) este adevărată pentru orice număr natural n.

Exemple. Pentru progresia geometrică

$$12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \ldots,$$

avem $b_1 = 12$, $q = -\frac{1}{2}$. De aceea

$$b_{10} = b_1 q^9 = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{(-2)^7} = -\frac{3}{128},$$

$$b_{101} = b_1 q^{100} = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^{200} = \frac{3}{2^{98}}$$

ş.a.m.d.

3. *Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice.*

Fie (b_n) o progresie geometrică, de raţie q şi fie

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n, \tag{1}$$

suma primilor n termeni ai săi.

Numerele $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$ sunt în progresie geometrică. Ca şi pentru numere în progresie aritmetică, pentru numerele $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$ care sunt în progresie geometrică, are loc o relaţie analoagă,

$$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n$$

adică *produsul oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme este egal cu produsul numerelor extreme.*

Pentru calculul sumei S_n distingem două cazuri:

1. Dacă raţia q a progresiei este egală cu 1, atunci $S_n = nb_1$.

2. Dacă raţia q a progresiei este diferită de 1, atunci procedăm în modul următor:

Înmulţim ambii membri ai egalităţii (1) cu q:

$$qS_n = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q.$$

Însă $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$, $b_3 q = b_4, \ldots, b_{n-1} q = b_n$, de aceea,

$$qS_n = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q. \tag{2}$$

Scăzând membru cu membru, egalitatea (1) din egalitatea (2) obţinem

$$qS_n - S_n = b_n q - b_1,$$

Deoarece $q \neq 1$,

$$S_n(q-1) = b_n q - b_1.$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}. \tag{3}$$

Observaţie. Dacă în formula $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$, unde $q \neq 1$, înlocuim pe b_n cu $b_1 q^{n-1}$, atunci obţinem o altă formulă a sumei primilor n termeni ai progresie geometrice:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \quad (q \neq 1). \tag{4}$$

Exemplu. Să găsim suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice (b_n):

$$1, 2, 4, 8, \ldots$$

Avem $b_1 = 1$, $q = 2$. Atunci, după formula (4), obținem

$$S_{10} = \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1\,024 - 1 = 1\,023.$$

Putem aplica și formula (3) pentru calculul sumei S_{10}, calculându-l mai întâi pe b_{10}.

Exerciții

Șiruri

1. Să se scrie primii cinci termeni ai șirului, cu termenul al n-lea dat de formula:

a) $a_n = 2^{-n}$; $\quad c_n = \dfrac{3n - 2}{2 + n}$; $\quad$ g) $d_n = (-1)^n$;

d) $x_n = 5 + 4n$; $\quad$ e) $x_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$; $\quad$ h) $a_n = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n + 2}$; $(n \geqslant 1)$;

c) $b_n = 10 - n^2$; $\quad$ f) $z_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} \cdot n\right)$; $\quad$ i) $b_n = (-1)^n \cdot 7 + \dfrac{1}{n}$.

2. Să se găsească formula termenului al n-lea $(n \geqslant 1)$ pentru fiecare din șirurile:

a) 1, 3, 5, 7, 9, ...; $\quad$ e) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots$;

b) 2, 4, 6, 8, 10, ...; $\quad$ f) tg 45°, tg 22°30′, tg 11°15′, ...;

c) 3, −3, 3, −3, 3, ...; $\quad$ g) $1 - \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots$;

d) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots$; $\quad$ h) 1, 9, 25, 49, 81, ...

3. Șirul (x_n), $n \geqslant 1$, are termenul general dat de formula $x_n = 6 - 4n$. Este termen al acestui șir numărul:

a) −102; $\quad$ b) −132; $\quad$ c) 100; $\quad$ d) 150?

În cazul în care răspunsul este afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

4. Este termen al șirului (a_n), $n \geqslant 1$, unde $a_n = n^2 - 17n$, numărul:

a) −30; $\quad$ b) −72; $\quad$ c) −100; $\quad$ d) −200?

În caz afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

5. Să se scrie primii 9 termeni ai șirului (a_n), $n \geqslant 1$, dacă:

a) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n - 1$; $\quad$ d) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n}$;

b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$; $\quad$ e) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$;

c) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = 2a_n$; $\quad$ f) $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$.

6. Un șir este definit prin formula de recurență

$$(n + 2)(n + 1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0$$

și prin $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Să se deducă termenul general.

Progresii aritmetice

7. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 7,\ r = 2$;

b) $a_1 = -3,\ r = 5$;

c) $a_1 = 1{,}3,\ a_2 = 0{,}3$;

d) $a_1 = \frac{2}{7},\ a_2 = \frac{1}{5}$.

8. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei aritmetice (b_n) dată astfel:

a) $b_1,\ b_2,\ 15,\ 21,\ 27, \ldots$;

b) $b_1,\ b_2,\ -9,\ -2,\ 5, \ldots$.

9. Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii aritmetice (c_n):

a) $c_3 = 7$ și $c_5 = 13$, să se găsească $c_9,\ c_2,\ c_{15}$;

b) $c_8 = 40$ și $c_{20} = -20$, să se găsească $c_{10},\ c_7,\ c_{19}$.

10. Într-o progresie aritmetică (a_n) se cunoaște a_1 și r. Să se găsească a_n, dacă:

a) $a_1 = -2,\ r = 0{,}5,\ n = 12$;

b) $a_1 = 3,\ r = -1{,}5,\ n = 19$;

c) $a_1 = -2{,}5,\ r = -2,\ n = 50$;

d) $a_1 = \frac{3}{7},\ r = \frac{1}{3},\ n = 25$.

11. Să se găsească primul termen a_1 al unei progresii aritmetice, dacă:

a) $a_{10} = 131,\ r = 12$;

b) $a_{52} = -125,\ r = -5$;

c) $a_{200} = 0,\ r = -3$;

d) $a_{44} = 13{,}5,\ r = 0{,}5$.

12. Să se găsească primul termen și rația unei progresii aritmetice, dacă:

a) $c_5 = 27,\ c_{27} = 60$;

b) $c_{47} = 74,\ c_{74} = 47$;

c) $c_{20} = 0,\ c_{60} = -92$;

d) $a_1 + a_7 = 42,\ a_{10} - a_3 = 21$;

e) $a_2 + a_4 = 16,\ a_1 a_3 = 28$;

f) $S_{10} = 8S_5,\ S_3 = -3$.

13. Șirul (y_n) este dat prin formula termenului al n-lea:

a) $y_n = 2n - 5$;

b) $y_n = 10 - 7n$.

Să se demonstreze că șirul (y_n) este o progresie aritmetică. Să se găsească primul termen al său și rația.

14. Să se găsească suma primilor 100 termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 10,\ a_{100} = 150$;

b) $a_1 = 5{,}5,\ a_{100} = 7{,}5$;

c) $a_1 = 2,\ r = -5$;

d) $a_1 = -1,\ r = 1$.

15. Cunoscând suma S_n a primilor n termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), să se găsească:

a) primii cinci termeni ai progresiei, dacă $S_n = \frac{n^2}{4} + n$;

b) primul termen și rația progresiei, dacă $S_n = 2n^2 + 3n$.

16. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$;

b) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 28) = 155$.

17. Să se găsească suma primilor douăzeci de termeni ai unei progresii aritmetice, dacă:

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$$

18. Este progresie aritmetică un șir, pentru care suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

a) $S_n = n^2 - 2n$;

b) $S_n = -4n^2 + 11$;

c) $S_n = 7n - 1$;

d) $S_n = n^2 - n + 31$

19. Într-o progresie aritmetică avem $S_{10} = 100$, $S_{20} = 900$. Să se găsească S_{30}.

20. Suma primilor n termeni ai unui şir oarecare (b_n) este dată de formula $S_n = n^2 - 2n + 5$. Să se găsească primii patru termeni ai acestui şir. Este acest şir o progresie aritmetică?

21. Să se demonstreze că numerele următoare sunt în progresie aritmetică:

a) $\dfrac{a}{x+1}$, $\dfrac{x+a-1}{2x}$, $\dfrac{x^2+a-1}{x(x+1)}$, $(x \neq -1,\ x \neq 0)$;

b) $(a^2 - 2ab - b^2)^2$, $(a^2 + b^2)^2$, $(a^2 + 2ab - b^2)^2$.

22. Să se demonstreze că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele următoare sunt în progresie aritmetică:

i) $a^2 - bc$, $b^2 - ca$, $c^2 - ab$;

ii) $b^2 + bc + c^2$, $c^2 + ca + a^2$, $a^2 + ab + b^2$.

Să se arate că dacă $a + b + c \neq 0$, atunci este adevărată şi reciproca.

23. Să se demonstreze că dacă a^2, b^2, c^2 sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele următoare sunt în progresie aritmetică:

i) $\dfrac{1}{b+c}$; $\dfrac{1}{c+a}$; $\dfrac{1}{a+b}$;

ii) $\dfrac{a}{b+c}$, $\dfrac{b}{c+a}$, $\dfrac{c}{a+b}$.

Să se studieze reciproca.

24. Să se determine x astfel încât următoarele numere să fie, separat, în progresie aritmetică:

i) $1 + x^2$, $(a + x)^2$, $(a^2 + x)^2$;

ii) $a^2 + x$, $ab + x$, $b^2 + x$;

iii) $a^2(b + x)$, $b^2(a + x)$, $x^2(a + b)$.

25. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, un şir de numere reale. Să se arate că acest şir este o progresie aritmetică, dacă şi numai dacă pentru orice n avem relaţia:

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}x_n} = \frac{n-1}{x_1x_n}.$$

Progresii geometrice

26. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice (b_n) dacă:

a) $b_1 = 6$, $q = 2$;

b) $b_2 = -10$, $b = \dfrac{1}{2}$;

c) $b_1 = -24$, $q = -0{,}5$;

d) $b_2 = 0{,}5$, $q = \sqrt{3}$.

27. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei geometrice (y_n), dată astfel:

a) $y_1, y_2, 24, 36, 54, \ldots$;

b) $y_1, y_2, 225, -135, 81, \ldots$

28. Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii geometrice (b_n):

a) $b_3 = 6$, $b_5 = 24$, să se găsească b_7, b_9, b_{10};

b) $b_5 = 10$, $b_8 = -10$, să se găsească b_6, b_{12}, b_8.

29. Este progresie aritmetică sau progresie geometrică șirul (a_n), dacă

a) $a_1 = 5$ și $a_{n+1} = 2a_n$;

b) $a_1 = 5$ și $a_{n+1} = 2 + a_n$;

c) $a_1 = -8$ și $a_{n+1} = \frac{1}{3} + a_n$;

d) $a_1 = -8$ și $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$?

În caz afirmativ să se indice rația.

30. Să se descrie formula termenului al n-lea al progresiei geometrice date prin:

a) $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 3b_n$;

b) $b_1 = 4$, $b_{n+1} = (-3)b_n$;

c) $b_1 = 9$, $b_{n+1} = 2b_n$;

d) $b_1 = 10$, $b_{n+1} = \frac{1}{5} b_n$.

31. Să se găsească primul termen și rația unei progresii geometrice, dacă:

a) $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4; \\ a_3 - a_1 = 8; \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_4 + a_1 = \frac{7}{16}; \\ a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}; \end{cases}$

c) $a_2 = 25$, $a_3 = 9$;

d) $a_4 = -12$, $a_7 = 23\frac{7}{16}$.

32. Să se calculeze sumele:

a) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{15}$;

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \ldots - \frac{1}{2^{14}}$;

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{13}}$;

d) $1 - 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{13}$;

e) $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$;

f) $x - x^2 + x^3 - \ldots + x^{17}$.

33. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} = 0$;

b) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{100} = 0$.

34. Fie (y_n) o progresie geometrică, astfel încât suma primilor n termeni ai săi este $S_n = 2(5^n - 1)$. Să se determine S_4, y_1, y_3.

35. Este progresie geometrică un șir, pentru care suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

a) $S_n = n^2 - 1$; b) $S_n = 2^n - 1$; c) $S_n = 3^n + 1$?

36. Într-o progresie geometrică avem $S_2 = 40$, $S_6 = 60$. Să se găsească S_9.

37. Să se determine x astfel încât numerele $a + x$, $b + x$, $c + x$ să fie în progresie geometrică.

38. Se dau două numere a și b. Să se determine numerele x, y, z astfel încât să fie satisfăcute simultan condițiile:

i) x, y, z să fie în progresie geometrică;

ii) x, $y + a$, z să fie în progresie aritmetică;

iii) x, $y + a$, $z + b$ să fie în progresie geometrică.

Caz particular: $a = 4$, $b = 32$.

39. Să se cerceteze dacă există numere în progresie geometrică $b_1, b_2, \ldots, b_n$, unde b_1 este un număr dat astfel încît trei termeni consecutivi verifică, oricare ar fi k, relația $b_k - 5b_{k-1} + 6b_{k-2} = 0$. Să se generalizeze considerînd relația $\alpha b_k + \beta b_{k-1} + \gamma b_{k-2} = 0$.

III Noţiuni de aritmetica numerelor întregi

§ 1. Teorema împărţirii cu rest a numerelor întregi

Ne reamintim din materia parcursă în clasele anterioare că oricare ar fi două numere naturale a şi b, cu b diferit de zero, există alte două numere naturale q şi r unice, cu proprietatea că $a = bq + r$ şi $0 \leqslant r < b$. Teorema care asigură existenţa şi unicitatea numerelor q şi r se numeşte *teorema împărţirii cu rest în mulţimea numerelor naturale.*

Această teoremă se extinde la mulţimea numerelor întregi în felul următor:

Teorema 1.1. Fie a şi b două numere întregi, cu b diferit de zero. Atunci există două numere întregi q şi r unice cu proprietăţile

$$a = bq + r \text{ şi } 0 \leqslant r < |b|. \qquad (1)$$

Egalitatea (1) se numeşte *formula împărţirii cu rest pentru numere întregi* iar numerele q şi r se numesc *câtul* şi respectiv *restul* împărţirii lui a la b.

Nu vom da demonstraţia acestei teoreme, în schimb vom arăta cum se procedează practic atunci când avem de împărţit două numere întregi a şi b, cu $b \neq 0$.

Evident că dacă $a = 0$, atunci câtul şi restul împărţirii lui a şi b sunt $q = r = 0$. Deci putem presupune că $a \neq 0$. Definim

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} +1, \text{ dacă } a > 0. \\ -1, \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$$

Numărul $\operatorname{sgn}(a)$ se numeşte *semnul lui a.*

Cu aceste notaţii avem clar că $|a| = a \operatorname{sgn}(a)$.

Vom efectua acum împărţirea numerelor naturale $|a|$ şi $|b|$ cu algoritmul de calcul cunoscut din clasele anterioare:

$$|a| = |b|q' + r' \text{ cu } q', r' \in \mathbf{N}, 0 \leqslant r' < |b|. \qquad (2)$$

Din (2) obţinem

$$a \operatorname{sgn}(a) = b \operatorname{sgn}(b) q' + r'$$

care înmulțită cu $\operatorname{sgn}(a)$, și ținând cont că $\operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(a) = 1$, ne dă

$$a = bq'' + r'' \tag{3}$$

unde $q'' = \operatorname{sgn}(a) \operatorname{sgn}(b) q'$ și $r'' = r' \operatorname{sgn}(a)$.

Dacă $r'' \geqslant 0$ atunci câtul și restul împărțirii lui a prin b sunt q'', respectiv r''. Dacă $r'' < 0$, atunci (3) se scrie astfel:

$a = bq'' + r'' = bq'' - |b| + |b| - r'' = bq'' - b \operatorname{sgn}(b) + (|b| - r'') = b(q'' - \operatorname{sgn}(b)) + (|b| - r'') = bq + r$, unde am notat $q = q'' - \operatorname{sgn}(b)$ și $r = |b| - r''$.

Cum $r'' < 0$ și $r' \geqslant 0$, atunci $\operatorname{sgn}(a) = -1$ și deci $r'' = -r'$. Pe de altă parte, cum $0 \leqslant r' < |b|$, rezultă clar că $0 \leqslant r < |b|$. Deci câtul și restul împărțirii lui a prin b sunt $q = q'' - \operatorname{sgn}(b)$ respectiv $r = |b| + r''$.

Exemple.

1) Să se efectueze împărțirea cu rest a lui -50 la 6.

Soluție. Vom efectua împărțirea cu rest a lui $|-50| = 50$ la $|6| = 6$. Vom avea $50 = 6 \cdot 8 + 2$. Înmulțind cu (-1) avem $-50 = 6 \cdot (-8) + (-2) = 6 \cdot (-8) - 6 + 6 + (-2) = 6 \cdot (-9) + 4$.

Deci câtul împărțirii lui -50 la 6 este $q = -9$ iar restul $r = 4$.

2) Să se efectueze împărțirea cu rest a lui -721 la -50.

Soluție. Avem $|-721| = 721$, $|-50| = 50$ și $721 = 50 \cdot 14 + 21$.

Rezultă că $-721 = (-50) \cdot 14 + (-21) = (-50) \cdot 14 - 50 + 50 + (-21) = (-50) \cdot 15 + 29$

Deci câtul împărțirii lui -721 la -50 este $q = 15$ iar restul $r = 29$.

Observație. Formula împărțirii cu rest pentru numere întregi se poate pune sub următoarea formă: dacă $a, b \in \mathbf{Z}$, cu $b \neq 0$, există $q_0, r_0 \in \mathbf{Z}$ astfel încât

$$a = bq_0 + r_0 \text{ și } |r_0| \leqslant \frac{|b|}{2} \tag{1'}$$

Într-adevăr, din (1), există $q, r \in \mathbf{Z}$ astfel încât $a = bq + r$ și $0 \leqslant r < |b|$. Dacă $0 \leqslant r < \frac{|b|}{2}$, atunci punem $q_0 = q$ și $r_0 = r$. Dacă $\frac{|b|}{2} < r < |b|$ atunci avem $a = bq + r = bq + |b| + r - |b| = b(q + \operatorname{sgn} b) + (r - |b|)$. Dacă notăm $q_0 = q + \operatorname{sgn} b$ și $r_0 = r - |b|$, atunci $|r_0| \leqslant \frac{|b|}{2}$ și $a = bq_0 + r_0$.

Să observăm că în relația (1'), q_0 și r_0 nu sunt unice. De *exemplu* $7 = 2 \cdot 3 + 1$ și $7 = 2 \cdot 4 + (-1)$.

Formula (1') este foarte utilă în multe aplicații. De exemplu să arătăm că dacă $n \in \mathbf{Z}$, atunci restul împărțirii lui n^2 la 7 este 0, 1, 2 sau 4. Într-adevăr, folosind egalitatea (1') n poate avea una din următoarele forme:

$$7k,\ 7k \pm 1,\ 7k \pm 2,\ 7k \pm 3,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Dacă $n = 7k$, atunci $n^2 = 49k^2 = 7(7k^2)$ și deci restul împărțirii lui n^2 la 7 este 0.

Dacă $n = 7k \pm 1$, atunci $n^2 = (7k \pm 1)^2 = 49k^2 \pm 14k + 1 = 7(7k^2 + 2k) + 1$ și deci în acest caz restul împărțirii lui n^2 la 7 este 1.

Dacă $n = 7k \pm 2$, atunci $n^2 = (7k \pm 2)^2 = 49k^2 \pm 28k + 4 = 7(7k^2 \pm 4k) + 4$ și deci restul împărțirii este 4.

Dacă $n = 7k \pm 3$, atunci $n^2 = (7k \pm 3)^2 = 49k^2 \pm 42k + 9 = 49k^2 \pm 42k + 7 + 2 = 7(7k^2 \pm 6k + 1) + 2$ și deci restul împărțirii lui n^2 la 7 este în acest caz egal cu 2.

Exerciții

1. Să se efectueze împărțirile cu rest ale următoarelor perechi de numere întregi:
   a) $-5\,437$ la 225;
   b) $8\,745$ la -319;
   c) $-2\,438$ la -18;
   d) $-84\,312$ la -36.
2. Să se găsească două numere naturale a căror sumă să fie 6613 și câtul împărțirii celui mai mare prin cel mai mic să fie 75. Este soluția unică?
3. Care este ultima cifră a numerelor $2\,156^{48}$, 425^{24}, 251^{148}, $5\,234^{129}$, $164^{21} + 453^{18}$, $17^{80} + 12^{60}$?
4. Fie n, a, b și c numere naturale nenule. Să se arate că pentru a găsi câtul împărțirii lui n la $a \cdot b \cdot c$ se poate proceda în felul următor: se împarte n la a, apoi câtul obținut se împarte la b și noul cât se împarte la c; câtul obținut la această ultimă împărțire este cel căutat.
5. Fie x și y două numere reale, cu $y \neq 0$. Să se arate că există două numere reale q și r cu proprietățile:
$$x = yq + r,\ q \in \mathbf{Z} \text{ și } 0 \leqslant r < |y|.$$
În plus, q și r sunt unice cu proprietățile de mai sus.
6. Fie a, b, c numere întregi, $c \neq 0$ și r_1 și r_2 resturile împărțirii lui a și b la c. Atunci restul împărțirii lui $a + b$ la c este același cu restul împărțirii lui $r_1 + r_2$ la c, iar restul împărțirii lui $a \cdot b$ la c este egal cu restul împărțirii lui $r_1 \cdot r_2$ la c.
7. Să se găsească cel mai mic număr natural care împărțit la -7 să dea restul 3 și împărțit la 11 să dea restul 2.
8. Dacă n este un număr întreg, atunci n^2 este de forma $4k$ sau $8k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$.
9. Să se determine restul împărțirii lui $1^n + 2^n + 4^n$ la 3 ($n \in \mathbf{N}$).

§ 2. Divizibilitatea numerelor întregi. Proprietăți

Definiția 2.1. Fie a și b două numere întregi. Spunem că b divide pe a (sau a este *divizibil* prin b, sau b este un *divizor* al lui a, sau a este un *multiplu* al lui b) dacă există un număr întreg c, astfel încît $a = bc$.

Pentru a scrie că b îl divide pe a, vom folosi notația $b \mid a$*.

Exemple

1) Fie $a \in \mathbf{Z}$; cum $a = 1 \cdot a = (-1) \cdot (-a)$, rezultă că ± 1, $\pm a$ sunt divizori ai lui a.
2) Dacă $a = 60$, divizorii lui 60 sunt: ± 1, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 10, ± 12, ± 15, ± 20, ± 30, ± 60.

* În unele manuale și culegeri de probleme se folosește și notația $a : b$, pentru a scrie că a este divizibil prin b.

Observaţie. Dacă $a \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, atunci numărul divizorilor lui a sunt în număr n finit.

Într-adevăr, dacă d este un divizor al lui a, există $b \in \mathbf{Z}$, astfel încât $0 = d \cdot b$. Rezultă că $|a| = |d| \cdot |b|$. Cum $b \neq 0$, atunci $|b| \geqslant 1$ şi deci $0 < |d| \leqslant a$. Prin urmare divizorii lui a sunt printre numerele $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm a$ şi sunt în număr finit (cel mult $2 \cdot |a|$).

Divizibilitatea numerelor întregi are următoarele proprietăţi:

1° este *reflexivă*, adică $a \mid a$, oricare ar fi întregul a.

Într-adevăr, avem $a = a \cdot 1$.

2° este *tranzitivă*, adică $a \mid b$ şi $b \mid c$ implică $a \mid c$.

Într-adevăr, din $a \mid b$ şi $b \mid c$ rezultă existenţa unor numere întregi k_1, k_2 cu proprietatea

$$b = ak_1, \; c = bk_2,$$

de unde obţinem $c = (ak_1)k_2 = a(k_1k_2)$ şi notând

$$k = k_1k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ avem } c = ak, \text{ adică } a \mid c.$$

3° Dacă a şi b sunt numere întregi cu proprietatea $a \mid b$ şi $b \mid a$, atunci $a = \pm b$ (adică $|a| = |b|$).

Într-adevăr, fie c_1, c_2 numere întregi astfel încât $b = ac_1$ şi $a = bc_2$. Atunci $b = bc_1c_2$ şi deci $b(1 - c_1c_2) = 0$. Rezultă că, fie $b = 0$, fie $c_1c_2 = 1$. În primul caz, din $b \mid a$ deducem $a = 0 = b$, iar în al doilea caz, deoarece $c_1, c_2 \in \mathbf{Z}$, vom avea $c_1 = c_2 = \pm 1$, prin urmare $a = \pm b$.

4° Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere întregi şi d este un număr întreg care divide pe fiecare a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci d divide orice combinaţie liniară de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, adică $d \mid \sum_{i=1}^{n} l_i a_i$, oricare ar fi $l_1, l_2, \ldots, l_n$ numere întregi.

Într-adevăr, există $k_1, k_2, \ldots, k_n$ numere întregi cu proprietatea $a_i = dk_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de unde rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i a_i = \sum_{i=1}^{n} d l_i k_i. \text{ Notând } k = \sum_{i=1}^{n} l_i k_i \in \mathbf{Z},$$

obţinem $\sum_{i=1}^{n} l_i a_i = dk$, adică $d \mid \sum_{i=1}^{n} l_i a_i$.

Exerciţii

1. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$ astfel încât $a + b = c$. Să se arate că dacă $d \in \mathbf{Z}$ divide două dintre numerele date, atunci el îl divide şi pe al treilea.
2. Să se găsească toate numerele întregi $a \in \mathbf{Z}$, care au exact $2 \cdot |a|$ divizori.
3. Dacă, $a, b \in \mathbf{Z}$ şi 3 nu divide nici pe a nici pe b, atunci 3 divide pe $a - b$ sau 3 divid pe $a + b$.
4. Să se arate că $1\,000^k - 1$ este divizibil cu 37, oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$.
5. Să se arate că dacă $p \in \mathbf{N}$, $p > 3$, are proprietatea că p şi $2p + 1$ nu sunt divizibile cu 3, atunci $4p + 1$ este divizibil cu 3.

6. Să se arate că numărul $9^{20} - 7^{20}$ este divizibil cu 10.

7. a) Să se arate că oricum ar fi date trei numere întregi, există două cu suma divizibilă cu 2.

b) Să se arate că oricum ar fi date 5 numere întregi, există 3 cu suma divizibilă cu 3.

c) Să se arate că oricum ar fi date 9 numere întregi, există 5 cu suma divizibilă cu 5.

8. Să se arate că dacă $n \in \mathbf{N}$, atunci $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

9. Să se găsească toate numerele întregi n cu proprietatea $n + 1 \mid n^2 + 1$.

10. Să se găsească toate numerele întregi n cu proprietatea $n - 3 \mid n^2 - 3$.

11. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{11} \in \mathbf{Z}$. Să se arate că există printre aceste numere întregi câteva cu suma divizibilă cu 10.

12. Să se arate că numărul $6^{20} - 5^{20}$ este divizibil cu 11.

§ 3. Cel mai mare divizor comun

Definiția 3.1. Se numește *divizor comun* al numerelor întregi a și b un număr întreg c cu proprietatea:

$$c \mid a \text{ și } c \mid b.$$

Vom numi un *cel mai mare divizor comun* (pe scurt c.m.m.d.c.) al numerelor întregi a și b, un număr întreg d care verifică următoarele condiții:

i) d este un divizor comun al lui a și b (adică $d \mid a$ și $d \mid b$)

ii) orice alt divizor comun d' al lui a și b divide neapărat și pe d (adică $d' \mid a$ și $d' \mid b$ implică $d' \mid d$).

Teorema 3.2. Fie a și b două numere întregi. Atunci există un c.m.m.d.c. al lui a și b.

Demonstrație. În cazul în care $a = b = 0$, c.m.m.d.c. este 0. Deci putem presupune, de exemplu, $b \neq 0$. Aplicînd teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi a și b, rezultă existența a două numere întregi q_1 și r_1 cu proprietatea că

$$a = bq_1 + r_1, \; 0 \leqslant r_1 < |b|. \tag{1}$$

Dacă $r_1 = 0$ atunci $b \mid a$ și c.m.m.d.c. al numerelor a și b este b. Într-adevăr, $b \mid b$ și $b \mid a$, iar dacă d' este divizor comun al lui a și b, în particular, satisface și $d' \mid b$. Deci b este un c.m.m.d.c. al lui a și b.

Dacă $r_1 \neq 0$, aplicăm teorema împărțirii cu rest numerelor b și r_1 și obținem numerele întregi q_2, r_2 satisfăcând

$$b = r_1 q_2 + r_2, \text{ cu } 0 \leqslant r_2 < r_1. \tag{2}$$

Repetând acest procedeu obținem numerele întregi $q_3, \ldots, q_m, \ldots$ și $r_3, \ldots, r_m, \ldots$ astfel încât

$$\begin{cases} r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ cu } 0 \leqslant r_3 < r_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{m-2} = r_{m-1} q_m + r_m, \text{ cu } 0 \leqslant r_m < r_{m-1}, \\ r_{m-1} = r_m q_{m+1} + r_{m+1}, \text{ cu } 0 \leqslant r_{m+1} < r_m, \end{cases} \tag{3}$$

Deoarece $r_1 > r_2 > \ldots > r_n \ldots$, există un număr natural n astfel încât $r_n \neq 0$ și $r_{n+1} = 0$.

Vom arăta că r_n este un c.m.m.d.c. al lui a și b.

Întrucât $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$, rezultă că $r_n | r_{n-1}$.

Din egalitatea $r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$ rezultă că $r_n | r_{n-2}$. În continuare, din egalitatea $r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1}$ și ținând cont că r_n divide pe r_{n-1} și pe r_{n-2}, rezultă că r_n divide pe r_{n-3}. În felul acesta, din aproape în aproape, ținând cont de egalitățile (3), obținem că r_n divide pe $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_2, r_1$. Apoi din egalitatea (2) rezultă că r_n divide pe b și deoarece r_n divide și pe r_1, obținem datorită relației (1) că r_n divide pe a. Prin urmare r_n este divizor comun al lui a și b.

Fie acum d' un număr întreg cu proprietatea că $d' | a$ și $d' | b$. Din egalitatea (1) vom avea

$r_1 = a - bq_1$ și deci $d' | r_1$.

Apoi din egalitatea (2) obținem

$r_2 = b - r_1 q_2$ și deoarece $d' | b$, $d' | r_1$, obținem că $d' | r_2$.

Folosind egalitățile (3) obținem, din aproape în aproape, că d' divide fiecare din numerele întregi $r_3, r_4, \ldots, r_{n-1}, r_n$. Așadar, în cazul în care b nu-l divide pe a avem că r_n, ultimul rest nenul din șirul de egalități (1), (2), (3), este un cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

Demonstrația acestei teoreme pune în evidență următoarea regulă de obținere a c.m.m.d.c. a două numere, care se numește *algoritmul lui Euclid*:

Pentru a obține c.m.m.d.c. a două numere întregi a și b, cu $b \neq 0$, împărțim pe a la b; dacă restul împărțirii r_1 este zero, atunci b este c.m.m.d.c.; dacă nu, împărțim pe b la restul împărțirii anterioare, r_1 și obținem restul r_2; apoi împărțim pe r_1 la r_2 și obținem un nou rest r_3 ș.a.m.d. Ultimul rest nenul este c.m.m.d.c. al celor două numere.

Observații. 1) Dacă d este un c.m.m.d.c. al numerelor întregi a și b, atunci și $-d$ este un c.m.m.d.c. al lui a și b. Dacă d' ar fi tot un c.m.m.d.c. al lui a și b, atunci vom avea $d | d'$ și $d' | d$, prin urmare $d' = \pm d$. Rezultă deci că există întotdeauna două și numai două numere întregi cu proprietatea celui mai mare divizor comun al numerelor a și b. Aceste două numere sunt egale în modul și de semn contrar. Acela dintre ele care este pozitiv îl vom nota cu (a, b). Se observă că prin algoritmul lui Euclid se obține tocmai (a, b).

2) Din definiția c.m.m.d.c. rezultă că

$$(a, b) = (b, a) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b) = (|a|, |b|).$$

Observația 2) ne permite ca pentru calcularea celui mai mare divizor comun a două numere întregi să ne mărginim la cazul numerelor naturale.

Exemplu. Să se găsească cel mai mare divizor comun al numerelor -810 și 315.

Soluție. Avem $(-810, 315) = (810, 315)$.

Vom aplica acum algoritmul lui Euclid:

1) $810 = 315 \cdot 2 + 180$
2) $315 = 180 \cdot 1 + 135$
3) $180 = 135 \cdot 1 + 45$
4) $135 = 45 \cdot 3 + 0$

În acest şir de împărţiri succesive ultimul rest nenul este 45, deci $(-810, 315) = 45$.

Din faptul că c.m.m.d.c. a două numere este unic, abstracţie făcând de semn, şi folosind egalităţile (1), (2) şi (3), avem:

Teorema 3.3. Dacă a şi b sunt două numere întregi şi d este un cel mai mare divizor comun al lor, atunci există două numere întregi, k şi l, astfel încît $d = ka + lb$.

Definiţia 3.3. Două numere întregi nenule a şi b se numesc *prime între ele* dacă 1 este c.m.m.d.c. al lor.

Observăm că a şi b sunt prime între ele dacă şi numai dacă ± 1 sunt singurii lor divizori comuni.

Exemplu. Numerele 57 şi 25 sunt prime între ele. Într-adevăr, folosind algoritmul lui Euclid, obţinem:

$57 = 25 \cdot 2 + 7$
$25 = 7 \cdot 3 + 4$
$7 = 4 \cdot 1 + 3$
$4 = 3 \cdot 1 + 1$
$3 = 1 \cdot 3 + 0$

şi deci $(57, 25) = 1$.

Observaţii. 1) Fie $a, b \in \mathbf{Z}$ şi $d = (a, b)$ astfel încît $d > 0$. Fie $a = da'$ şi $b = db'$. Atunci a' şi b' sunt prime între ele.

Într-adevăr, fie d' un divizor comun al numerelor a' şi b'. Atunci dd' este un divizor comun al lui a şi b. Deci dd' îl divide pe d, adică există un $d'' \in \mathbf{Z}$ astfel încât $d = dd'd''$. Deci $d'd'' = 1$ şi prin urmare $d' = \pm 1$, ceea ce înseamnă că a' şi b' sunt prime între ele.

2) Din teorema 3.3. obţinem că a este prim cu b dacă şi numai dacă există $k, l \in \mathbf{Z}$ astfel încît $1 = ka + lb$. Într-adevăr, dacă a este prim cu b, atunci $(a, b) = 1$ şi conform teoremei 3.3. obţinem $k, l \in \mathbf{Z}$ astfel încât $1 = ka + lb$. Reciproc, dacă $1 = ka + lb$ şi $d|a$, $d|b$, atunci $d|1$ şi deci $d = \pm 1$, adică singurii divizori comuni ai lui a şi b sunt ± 1.

Definiţia 3.5. Fie a şi b două numere întregi. Un număr întreg m se numeşte *un cel mai mic multiplu comun* (pe scurt c.m.m.m.c.) al numerelor a şi b, dacă verifică următoarele condiţii

i) m este un multiplu comun al lui a şi b (adică $a|m$ şi $b|m$),

ii) orice alt multiplu comun al lui a şi b este multiplu al lui m (adică dacă $a|m'$ şi $b|m'$, atunci $m|m'$).

Teorema care urmează ne asigură existenţa celui mai mic multiplu comun şi ne dă în acelaşi timp şi un procedeu de calcul.

Teorema 3.6. Fie a și b două numere întregi nenule. Dacă d este un c.m.m.d.c. al lui a și b, atunci $m = \frac{a \cdot b}{d}$ este un c.m.m.m.c. al lui a și b.

Exemplu. Să se calculeze c.m.m.m.c. al numerelor 4 020, −210.

Soluție. Pentru a calcula c.m.m.m.c. al numerelor 4 020 și −210 este suficient conform teoremei 3.6, să calculăm c.m.m.d.c. al numerelor 4 020 și |−210| cu algoritmul lui Euclid:

$$4\,020 = 210 \times 19 + 30$$
$$210 = 30 \times 7 + 0$$

Deci un c.m.m.m.c. al lui 4 020 și −210 este $\frac{4\,020 \times 210}{30} = 7 \times 4\,020 = 28\,140$.

Exerciții

1. Să se găsească prin algoritmul lui Euclid cel mai mare divizor comun al numerelor:
   a) −180; 756; *b)* −375; 360; −900;
   c) 0; 779; −399; 5 700; *d)* −3 724; 18 468;
   e) −540; 588; −576; *f)* 375; 645; −600; −1 515.
2. Să se găsească cel mai mic multiplu comun al numerelor următoare:
   a) −960; 1 200; b) 30 295; 36 354; c) 12 345; 4 565; −960.
3. Să se afle toate numerele prime cu 100 și mai mici în modul decât 50.
4. Se dau două numere întregi a și b nenule care au c.m.m.d.c. pe 5, iar câturile împărțirilor succesive din algoritmul lui Euclid sunt −1, 3, 2. Să se afle a și b.
5. Să se găsească două numere întregi a și b astfel încât $(a, b) = 3$ și $[a, b] = 72$. (C.m.m.m.c. al lui a și b se notează cu $[a, b]$.)
   Este soluția unică?
6. Să se arate că numerele $2k + 1$ și $9k + 4$ sunt prime între ele, oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$.
7. Să se găsească c.m.m.d.c. al numerelor $2k - 1$ și $9k + 4$ în funcție de numărul întreg k.
8. Să se arate că dacă a și b sunt numere întregi, d un c.m.m.d.c. al lor, iar $k, l \in \mathbf{Z}$, cu proprietatea că, dacă
   $$ka + lb = d, \text{ atunci } (k, l) = 1.$$
9. Să se arate că $(21n + 4, 14n + 3) = 1$, $n \in \mathbf{Z}$.
10. Să se arate că numerele de forma $F_k = 2^{2^k} + 1 (k = 0, 1, 2, \ldots)$ sunt prime două câte două.
11. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ avem $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 2$.

§ 4. Numere prime. Teorema de descompunere în factori primi

Definiția 4.1. Un număr natural $p \geq 2$ se numește *prim* dacă singurii săi divizori sunt ± 1 și $\pm p$.

Exemple

Numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 sunt numere prime. Verificarea acestui fapt se poate face efectuând împărțirea fiecăruia dintre numerele date la numerele naturale mai mici decât el.

Numărul 2 este singurul număr prim par.

În cele ce urmează vom da (fără demonstrație) două teoreme foarte importante în aritmetică.

Teorema 4.2. Un număr natural $p \geq 2$ este *prim* dacă și numai dacă oricare ar fi a și b numere întregi astfel încît p divide pe ab, să rezulte că p divide pe a sau p divide pe b.

Teorema 4.3. (Teorema fundamentală a aritmeticii). Oricare ar fi numărul întreg n, cu $|n| \geq 2$, există o descompunere a sa în produs de numere prime, adică există un număr finit de numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_m$, nu neapărat distincte, astfel încât

$$n = \pm p_1 p_2 \cdots p_m.$$

În plus, această descompunere este unică, în sensul că oricare altă descompunere în produs de factori primi diferă de ea doar prin ordinea factorilor.

Observație: În teorema 4.3, în reprezentarea numărului n ca produs de factori primi $p_1, p_2, \ldots, p_m$, este posibil ca unii dintre factori să fie egali între ei: p_1 poate să apară de α_1 ori, cu $\alpha_1 \geq 1$, p_2 de α_2 ori, cu $\alpha_2 \geq 1$, și în general p_k de α_k ori, cu $\alpha_k \geq 1$. Dacă numărul factorilor primi distincți este l, atunci vom avea:

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}, \text{ unde putem presupune } p_1 < p_2 < \ldots < p_l \quad (1)$$

Scrierea lui n în forma (1) se numește *descompunerea lui n în factori primi*. Teorema fundamentală a aritmeticii se mai numește *teorema de descompunere în factori primi*.

Exemplu. Numărul întreg $-5\,600$ se poate scrie ca produs de factori primi în felul următor: $-5\,600 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = -2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Aplicație. Să se arate că șirul numerelor prime este infinit.

Soluție. Să presupunem prin reducere la absurd că ar exista numai un număr finit de numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Fie $p = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Dar p admite conform teoremei 4.3 un divizor prim, fie acesta p_k. Pe de altă parte împărțirea lui p la p_k dă restul 1 deoarece

$$p = p_k q + 1, \; q \in \mathbf{N}.$$

Am ajuns deci la o contradicție. Presupunerea că mulțimea numerelor prime este finită este falsă, deci există o infinitate de numere prime.

Cu ajutorul teoremei fundamentale a aritmeticii putem da un alt procedeu de calcul al c.m.m.d.c. a două sau mai multor numere întregi.

Se scriu descompunerile acestor numere în produse de factori primi și c.m.m.d.c. al lor va fi produsul factorilor primi comuni acestor numere, fiecare ridicat la puterea cea mai mică la care apare în descompunerile respective.

Pentru a demonstra acest lucru este suficient să considerăm cazul în care avem două numere întregi a și b. Fie d numărul obținut prin procedeul descris. Atunci, din construcția lui d, rezultă evident că $d \mid a$

și $d|b$. Dacă $d'|a$ și $d'|b$ scriem descompunerea lui d' în factori primi. Folosind teorema 4.3 (partea de unicitate) rezultă imediat că d' divide pe d. Deci $d = (a, b)$.

Exemple

1) Fie $a = 360$ și $b = 240$. Avem $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ și $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ și deci $(360, 240) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

2) Fie $a = 72$, $b = 120$ și $c = 300$. Avem $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ și $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ și deci $(72, 120, 300) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Tot din teorema fundamentală a aritmeticii rezultă și un mod de calcul al celui mai mic multiplu comun a două sau a mai multor numere.

Se scriu descompunerile acestor numere în produse de factori primi și c.m.m.m.c. al lor va fi produsul factorilor primi care apar cel puțin într-una din descompuneri, luat fiecare la puterea cea mai mare la care apare în descompunerile respective.

De *exemplu*, fie numerele $a = 72$, $b = 120$ și $c = 300$. Deoarece $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ și $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, atunci $[72, 120, 300] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1\,800$.

În continuare vom face câteva observații asupra șirului numerelor prime.

Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ și nu este prim, atunci el admite un divizor prim $p \leqslant \sqrt{n}$.

Într-adevăr, cum n nu este prim, avem $n = a \cdot b$ cu $a, b > 1$. Evident, putem presupune că $a \leqslant b$. Atunci $a^2 \leqslant ab = n$, de unde $a \leqslant \sqrt{n}$. Dar din teorema fundamentală a aritmeticii a are un divizor prim p, care este la rândul său divizor al lui n și, mai mult, $p \leqslant a \leqslant \sqrt{n}$.

În concluzie, pentru a dovedi că un număr natural $n \geqslant 2$ este prim este suficient să verificăm că el nu are divizori primi mai mici decât $\sqrt{n}$.

De exemplu, fie $n = 97$. Cum $\sqrt{97} < 10$, avem de considerat numerele prime < 10, adică 2, 3, 5, 7. Se vede imediat că nici unul dintre aceste numere nu divide pe 97.

Ciurul lui Eratostene. Vom da în cele ce urmează o metodă de obținere a numerelor prime mai mici decât un număr dat $n \geqslant 2$. Această metodă este cunoscută încă din antichitate sub numele de *ciurul lui Eratostene*, după numele matematicianului grec care a dat-o. Considerăm mai întâi șirul tuturor numerelor naturale de la 2 la n. Apoi, deoarece 2 este primul număr prim p_1, vom înlătura din șir toate numerele mai mari decât p_1 și divizibile cu $p_1 = 2$. Primul dintre numerele rămase este $3 = p_2$. Acum vom înlătura din șir toate numerele mai mari decât p_2 și divizibile cu p_2. Primul număr rămas este $5 = p_3$. Să presupunem că după pasul k am aflat numărul prim p_k (al k-lea ca mărime între numerele prime). Vom înlătura din șir toate numerele prime mai mari decât p_k și prime cu p_k. Primul număr care nu a fost înlăturat va fi p_{k+1}, al $(k + 1)$-lea număr prim.

Acest procedeu se termină la pasul m, unde p_m este cel mai mare număr prim $\leqslant \sqrt{n}$.

Exerciții

1. Care dintre următoarele numere întregi sunt prime: 3 477, 2 003, 1 213, 2 099, 3 649, 847, 1 493, 2 027, 2 261, 6 689, 10 627.

2. Folosind teorema fundamentală a aritmeticii, să se găsească cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al următoarelor numere:
a) 319 și 407; b) 333 și 504; c) 27, 24 și 15; d) 24, 48, 64, 192; e) 325, 526, 169 și 1 014.

3. Să se determine cel mai mic număr natural, care are exact 20 de divizori întregi și cel mai mic număr natural care are exact 72 divizori întregi.

4. Să se găsească un număr natural care să aibă exact 15 divizori naturali și singurii săi divizori primi să fie 7 și 11.

5. Fie a și b numere întregi prime între ele. Să se arate că $a+b$ și $a-b$ sunt prime cu ab. Să se arate că, în plus, dacă a și b au parități diferite, atunci $a+b$ este prim cu $a-b$ cu a^3-b^3.

6. Dacă a și b sunt numere naturale nenule și suma lor este un număr prim, atunci a este prim cu b.

7. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}$ și $a \mid c$, $b \mid c$, $(a, b) = 1$, atunci $ab \mid c$.

8. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}$ au proprietatea că a este prim cu b și cu c, atunci a este prim cu bc.

9. Să se arate că dacă $b \mid ac$ atunci $b \mid (a, b)\,(c, b)$.

10. Să se arate că dacă d este un c.m.m.d.c. al numerelor a și b, atunci d^3 este un c.m.m.d.c. al lui a^3 și b^3. Reciproca este adevărată?

11. Fie $r \in \mathbf{Q}$ cu proprietatea că r^m este un număr întreg, $m \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că r este întreg.

12. Fie $a, b, m \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $(a, b) = 1$ și $\sqrt[m]{ab} \in \mathbf{N}$. Să se arate că $\sqrt[m]{a}, \sqrt[m]{b} \in \mathbf{N}$.

13. Să se arate că numerele de forma $8^n + 1$ nu sunt prime ($n \in \mathbf{N}^*$).

14. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n, cu proprietatea că $(n, 2^n - 1) > 1$. Să se găsească cel mai mic dintre ele.

15. Să se arate că nu există numere naturale prime n astfel încât $n \mid 2^n - 1$.

16. Să se arate că există numere întregi de forma 3^n, care scrise în bază zecimală au ultimele cifre 00001.

17. Să se arate că există numere întregi care au ultimele cifre 1978 și care să fie divizibile cu 1979.

IV Polinoame cu coeficienţi complecşi

§ 1. Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi

1.1. Definirea polinoamelor

Fie $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ mulţimea şirurilor (infinite) de numere complexe

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots),$$

care *au numai un număr finit de termeni* a_i, *nenuli*, adică există un număr natural m, astfel încât $a_i = 0$ pentru orice $i > m$.

De *exemplu*, şirurile $f = (0, -1, 2, 0, 0, \ldots)$; $g = (-1, i, 2, 0, 0, \ldots)$; $= (1+2i, 7, -100, 2, 0, 0, \ldots)$ sunt şiruri infinite care au un număr init de termeni nenuli. Într-adevăr, şirul $f = (0, -1, 2, 0, 0, \ldots)$ are numai 2 termeni nenuli; şirul $g = (-1, i, 2, 0, 0, \ldots)$ are 3 termeni nenuli, iar şirul $h = (1 + 2i, 7, -100, 2, 0, 0, \ldots)$ are 4 termeni nenuli. Deci aceste şiruri sunt elemente din mulţimea $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$.

Definim pe mulţimea $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ două operaţii algebrice: *adunarea* şi *înmulţirea*.

Fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ două elemente din mulţimea $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ atunci definim

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots) \text{ şi} \tag{1}$$

$$fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots), \tag{2}$$

unde

$$c_0 = a_0 b_0,$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \ldots + a_r b_0 = \sum_{i=0}^{r} a_i b_{r-i} = \sum_{i+j=r} a_i b_j.$$

Să observăm că $f + g$ şi fg aparţin mulţimii $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$. Într-adevăr, cum $f \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, există un număr natural m, astfel încât $a_i = 0$ pentru orice $i > m$. Cum $g \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, există un număr natural n, astfel încît $b_j = 0$ pentru orice $j > n$. În acest caz avem $a_k = 0$ şi $b_k = 0$ pentru orice $k > \max(m, n)$ şi deci $a_k + b_k = 0$ pentru orice $k > \max(m, n)$. Deci $f + g$ este un element din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$.

Fie $r > m + n$; atunci $r - m > n$. În acest caz $c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \ldots + a_m b_{r-m} + a_{m+1} b_{r-m-1} + \ldots + a_r b_0$. Cum $r - m > n$, atunci $b_r, b_{r-1}, \ldots, b_{r-m}$ sunt toți nuli. Pe de altă parte și numerele $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_r$ sunt nule și deci $c_r = 0$. În concluzie, pentru orice $r > m + n$ avem $c_r = 0$ și deci fg este de asemenea un element din $\mathbf{C}^{(N)}$.

Elementul $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$ se numește *suma* dintre f și g, iar operația prin care oricăror elemente f și g din mulțimea $\mathbf{C}^{(N)}$ se asociază suma lor, se numește *adunare*.

Elementul $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ se numește *produsul* dintre f și g, iar operația prin care elementelor f și g din mulțimea $\mathbf{C}^{(N)}$ se asociază produsul lor, se numește *înmulțire*.

Exemplu. Dacă $f = (-1, 2, 3, -5, 0, 0, \ldots)$ și $g = (1, 0, -1, 0, \ldots)$, atunci suma lor este $f + g = (0, 2, 2, -5, 0, 0, \ldots)$, iar produsul lor este $fg = (-1 \cdot 1, -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1, (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1, -1 \cdot 0 + 2(-1) + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 1, -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 1, (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot (-1), 0, 0, \ldots) = (-1, 2, 4, -7, -3, 5, 0, \ldots)$.

Definiție. Fiecare element al mulțimii $\mathbf{C}^{(N)}$, pe care sunt definite cele două operații precedente (1) și (2), se numește polinom. Dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ este un polinom, numerele $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se numesc coeficienții lui f.

Vom nota cu $\mathbf{C}'$ submulțimea lui $\mathbf{C}^{(N)}$ formată din toate șirurile de forma

$$(a, 0, 0, 0, \ldots), \text{ unde } a \in \mathbf{C}.$$

Funcția $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ definită prin egalitatea

$$\varphi(a) = (a, 0, 0, 0, \ldots)$$

este o funcție bijectivă. Mai mult, operațiile de adunare (1) și înmulțire (2) a polinoamelor ce aparțin mulțimii $\mathbf{C}'$ se transcriu astfel:

$$(a, 0, 0, \ldots) + (b, 0, 0, 0, \ldots) = (a + b, 0, 0, 0, \ldots) \text{ și} \quad (3)$$

$$(a, 0, 0, \ldots) \cdot (b, 0, 0, 0, \ldots) = (ab, 0, 0, 0, \ldots)$$

Relațiile (3) ne arată că adunarea și înmulțirea pe $\mathbf{C}'$ se fac după aceleași reguli ca adunarea și înmulțirea numerelor complexe. Din acest motiv rezultă că $\mathbf{C}'$ are aceleași proprietăți aritmetice ca mulțimea $\mathbf{C}$ a numerelor complexe. Acest *fapt ne permite să identificăm polinomul* $(a, 0, 0, \ldots)$ *cu numărul complex* a. Așadar punem $(a, 0, 0, \ldots) = a$. Datorită acestei identificări avem $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^{(N)}$. Polinoamele de forma $(a, 0, 0, \ldots) = a$ se numesc *polinoame constante*.

Observație. Definirea polinoamelor precum și operația de identificare a polinoamelor de forma $(a, 0, 0, \ldots)$ cu numărul a, ne reamintesc de modul cum am definit mulțimea numerelor complexe precum și de operația de identificare a numerelor complexe de forma $(a, 0)$ cu numărul real a (a se vedea manualul de Algebră clasa a IX-a).

1.2. Proprietăţile adunării polinoamelor

1° *Adunarea este comutativă*, adică oricare ar fi f şi g, din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, avem

$$f + g = g + f$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = b_0, b_1, b_2, \ldots)$, avem $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$ şi $g + f = (b_0 + a_0, b_1 + a_1, \ldots)$. Cum adunarea numerelor complexe este comutativă avem $a_i + b_i = b_i + a_i$ pentru orice $i \geq 0$. Deci $f + g = g + f$.

2° *Adunarea este asociativă*, adică oricare ar fi f, g şi h din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, avem

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, $h = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ atunci $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$ şi deci $(f + g) + h = (a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \ldots)$. Analog, obţinem că $f + (g + h) = (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \ldots)$. Cum operaţia de adunare a numerelor complexe este asociativă, avem $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$, pentru orice $i \geq 0$. Deci $(f + g) + h = f + (g + h)$.

3° *Element neutru*. Polinomul constant $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ este element neutru pentru adunarea polinoamelor, în sensul că oricare ar fi $f \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ avem

$$f + 0 = 0 + f = f.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, atunci $f + 0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots) + (0, 0, 0, \ldots) = (a_0 + 0, a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = f$. După proprietatea 1° avem şi $0 + f = f$.

4° *Orice polinom are un opus*, adică oricare ar fi $f \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ există un polinom, notat cu $-f$, astfel încât

$$f + (-f) = (-f) + f = 0.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, atunci $-f = (-a_0, -a_1, \ldots)$, deoarece $f + (-f) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) + (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots) = (a_0 + (-a_0), a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), \ldots) = (0, 0, 0, \ldots) = 0$. Conform proprietăţii 1° avem şi $(-f) + f = 0$.

De *exemplu*, dacă $f = (-1, 0, 2, 2, 0, 0, \ldots)$ este un polinom, atunci opusul său este $-f = (1, 0, -2, -2, 0, 0, \ldots)$.

Observaţie. Dacă f şi g sunt două polinoame, suma $f + (-g)$ se notează, simplu, prin $f - g$ şi se numeşte *diferenţa dintre* f şi g. Operaţia prin care oricăror două polinoame f şi g li se asociază diferenţa lor se numeşte *scădere*.

Dacă

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \text{ şi } g = (b_0, b_1, b_2, \ldots), \text{ atunci}$$
$$f - g = (a_0 - b_0, a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots).$$

De *exemplu*, dacă $f = (2, -3, -1, 0, 0, \ldots)$ şi $g = (-1, -1, -1, 2, 0, \ldots)$, atunci $f - g = (3, -2, 0, -2, 0, 0, \ldots)$.

1.3. Proprietăţile înmulţirii polinoamelor

1° *Înmulţirea este comutativă*, adică oricare ar fi f şi g din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, avem

$$fg = gf.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ şi $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, atunci notînd $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ şi $gf = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$ avem $c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \ldots + a_rb_0$ şi $d_r = b_0a_r + b_1a_{r-1} + \ldots + b_ra_0$. Cum adunarea şi înmulţirea numerelor complexe sunt comutative şi asociative, avem $c_r = d_r$ pentru orice $r \geqslant 0$ şi deci $fg = gf$.

2° *Înmulţirea este asociativă*, adică oricare ar fi f, g şi h din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, avem

$$(fg)h = f(gh).$$

Într-adevăr, fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ şi $h = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$. Să notăm $fg = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$ şi $(fg)h = (e_0, e_1, e_2, \ldots)$. Atunci $d_r = \sum\limits_{i+j=r} a_ib_j$ pentru orice $r \geqslant 0$ şi $e_n = \sum\limits_{r+k=n} d_rc_k$. Deci $e_n = \sum\limits_{r+k=n} \left(\sum\limits_{i+j=r} a_ib_j\right) c_k = \sum\limits_{i+j+k=n} a_ib_jc_k$.

Dacă notăm $gh = (d'_0, d'_1, d'_2, \ldots)$ şi $f(gh) = (e'_0, e'_1, e'_2, \ldots)$, în mod analog se obţine $d'_s = \sum\limits_{j+k=s} b_jc_k$ pentru orice $s \geqslant 0$ şi $e'_n = \sum\limits_{i+s=n} a_id'_s$. Deci, $e'_n = \sum\limits_{i+s=n} a_i \left(\sum\limits_{j+k=s} b_jc_k\right) = \sum\limits_{i+j+k=n} a_ib_jc_k$. Comparând, obţinem că $e_n = e'_n$ şi deci $f(gh) = (fg)h$.

3° *Element neutru*. Polinomul $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ este element neutru pentru înmulţire, adică oricare ar fi $f \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, avem

$$f \cdot 1 = 1 \cdot f = f.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, atunci $f \cdot 1 = (a_0, a_1, a_2, \ldots)(1, 0, 0, \ldots) = (a_0 \cdot 1, a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1, a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = f$.

După proprietatea 1° avem de asemenea $1 \cdot f = f$.

4° *Înmulţirea este distributivă faţă de adunare*, adică oricare ar fi polinoamele $f, g, h \in \mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, au loc relaţiile:

$$f(g + h) = fg + fh \text{ şi}$$
$$(f + g)h = fh + gh.$$

Într-adevăr, fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ şi $h = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$. Atunci $f(g + h) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)(b_0 + c_0, b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots) = (a_0(b_0 + c_0),$

$$a_0(b_1 + c_1) + a_1(b_0 + c_0), \ldots, \sum_{i=0}^{r} a_i(b_{r-i} + c_{r-i}), \ldots) = ((a_0b_0 + a_0c_0), (a_0b_1 + a_1b_0) +$$

$$+ (a_0c_1 + a_1c_0), \ldots, \sum_{i=0}^{r} a_ib_{r-i} + \sum_{i=0}^{r} a_ic_{r-i}, \ldots) = \left(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, \sum_{i=0}^{r} a_ib_{r-i}, \ldots\right) +$$

$$+ \left(a_0c_0, a_0c_1 + a_1c_0, \ldots, \sum_{i=0}^{r} a_ic_{r-i}, \ldots\right) = fg + fh.$$

5° *Dacă f şi g sunt polinoame nenule, atunci produsul lor este un polinom nenul* ($f \neq 0$ şi $g \neq 0 \Rightarrow fg \neq 0$).

Într-adevăr, fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ și $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$. Cum $f \neq 0$ există un termen $a_i \neq 0$. Fie m cel mai mare număr natural astfel încât $a_m \neq 0$. Rezultă că $a_i = 0$ pentru orice $i > m$. Analog pentru $g \neq 0$, fie n cel mai mare număr natural astfel încât $b_n \neq 0$. Rezultă că $b_j = 0$, oricare ar fi $j > n$. Să presupunem că $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$. Atunci $c_{m+n} = a_0 b_{m+n} + a_1 b_{m+n-1} + \ldots + a_m b_n + a_{m+1} b_{n-1} + \ldots + a_{m-n} b_0$. Cum $b_{m+n} = b_{m+n-1} = \ldots = b_{n+1} = 0$ și $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{m+n} = 0$, atunci $c_{m+n} = a_m b_n$. Cum $a_m \neq 0$ și $b_n \neq 0$, atunci $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$ și deci $fg \neq 0$.

6° *Simplificarea cu un factor nenul.* Dacă f, g, h, sunt polinoame astfel încât $fg = fh$ și $f \neq 0$, atunci $g = h$.

Într-adevăr, cum $fg = fh$, obținem $fg - fh = 0$ și deci $f(g - h) = 0$. Cum $f \neq 0$, din proprietatea 5° trebuie ca $g - h = 0$, adică $g = h$.

§ 2. Forma algebrică a polinoamelor

Notația $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ introdusă pentru polinoame nu este prea comodă în operațiile cu polinoame. De aceea vom folosi altă scriere pentru polinoame. Convenim să notăm polinomul $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ prin „X" și citim „*nedeterminata* X".

Înmulțirea polinoamelor ne dă:

$$X^2 = X \cdot X = (0, 1, 0, \ldots)(0, 1, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 1, 0, \ldots),$$
$$X^3 = X^2 \cdot X = (0, 1, 0, \ldots)(0, 0, 1, 0, \ldots) = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X^n = X \cdot X^{n-1} = (0, 1, 0, \ldots)(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{n-1 \text{ ori}}, 0, \ldots) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{n \text{ ori}}, 0, \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folosind acum adunarea și înmulțirea definite pe $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, pentru $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ putem scrie

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + (0, 0, a_2, 0, \ldots) + \ldots +$$
$$+ (0, 0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots) + \ldots = (a_0, 0, \ldots) + (a_1, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, \ldots) +$$
$$+ (a_2, 0, \ldots)(0, 0, 1, 0, \ldots) + \ldots + (a_i, 0, \ldots) \cdot (\underbrace{0, 0, \ldots 0, 1}_{i \text{ ori}}, 0, \ldots) =$$
$$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_i X^i + \ldots$$

(unde există doar un număr finit de termeni nenuli).

Deci

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_i X^i + \ldots = \sum_{i \geq 0} a_i X^i. \quad (1)$$

Cum $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ este un element din $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$, există un număr natural m astfel încât $a_i = 0$ pentru orice $i > m$. În acest caz (1) se scrie sub forma

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_m X^m = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i, \quad (1')$$

unde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt coeficienții polinomului f.

Polinoamele de forma aX^n unde $a \in \mathbf{C}$ şi n este un număr natural se numesc *monoame*. Din (1') rezultă că orice polinom nenul este *o sumă finită de monoame nenule*.

Datorită scrierii (1) sau (1') pentru polinoame, se adoptă pentru *mulţimea* $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$ *notaţia* $\mathbf{C}[X]$. În particular, avem incluziunea $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}[X]$. Datorită scrierii (1) sau (1') elementele din $\mathbf{C}[X]$ se mai numesc polinoame într-o singură nedeterminată cu coeficienţi complecşi. De asemenea, dacă $f \in \mathbf{C}[X]$ este un polinom, de multe ori este *util să scriem* $f = f(X)$.

În mulţimea $\mathbf{C}[X]$ distingem următoarele submulţimi importante:

$\mathbf{R}[X]$ = mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali,

$\mathbf{Q}[X]$ = mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali,

$\mathbf{Z}[X]$ = mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi.

Este clar că avem incluziunile

$$\mathbf{Z}[X] \subset \mathbf{Q}[X] \subset \mathbf{R}[X] \subset \mathbf{C}[X].$$

Exemple. 1) Polinomul $f = \sqrt{2} - 7X^2 + X^3$ este un polinom cu coeficienţi reali.

2) Polinomul $g = \frac{1}{3} - X + \frac{1}{7}X^4$ este un polinom cu coeficienţi raţionali.

3) Polinomul $h = 7 + X^2 - 8X^3$ este un polinom cu coeficienţi întregi.

Observaţii 1) Folosind scrierea (1) a polinoamelor, operaţiile de adunare şi înmulţire se transcriu astfel:

dacă $\quad f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_rX^r + \ldots$ şi $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_rX^r + \ldots$,

atunci

$$f + g = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \ldots + (a_r + b_r)X^r + \ldots, \tag{2}$$

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + \ldots \tag{3}$$
$$\ldots + (a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \ldots + a_rb_0)X^r + \ldots.$$

De *exemplu*, dacă $f = -1 + 2X + X^2$ şi $g = 1 - X$, atunci

$$f + g = (-1 + 2X + X^2) + (1 - X) = X + X^2 \text{ şi}$$

$$fg = (-1 + 2X + X^2) \cdot (1 - X) = -1 + 3X - X^2 - X^3.$$

2) Se observă din relaţiile (2) şi (3) că dacă f, g sunt polinoame cu coeficienţi reali (respectiv raţionali, întregi), atunci suma şi produsul lor este un polinom cu coeficienţi reali (respectiv raţionali, întregi).

3) În practică, ori de câte ori avem de înmulţit două polinoame este foarte comod să folosim proprietatea înmulţirii de a fi distributivă faţă de adunare. De exemplu, fie polinoamele $f = 1 + X + X^2$ şi $g = 1 - X$. Produsul lor se calculează astfel:

$$fg = (1 + X + X^2)(1 - X) = 1 - X + X - X^2 + X^2 - X^3 = 1 - X^3.$$

§ 3. Gradul unui polinom

Am văzut în paragraful precedent că orice polinom $f \in \mathbf{C}[X]$ este o sumă finită de monoame, adică

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n.$$

Se numește *gradul lui f, notat* prin *grad f, cel mai mare număr natural n astfel încât* $a_n \neq 0$. În acest caz a_n se numește coeficientul *dominant al polinomului f*. Numărul a_0 se numește *termenul liber al polinomului f*. De multe ori este foarte utilă și scrierea lui f sub forma $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, lucru întotdeauna posibil ținând seama că adunarea polinoamelor este comutativă.

Exemple

1) Polinomul $f = 1 - X$ are gradul 1, adică grad $f = 1$.
2) Polinomul $f = X + X^3 - X^5$ are gradul 5, adică grad $f = 5$.
3) Polinomul constant $f = a$ unde $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, are gradul 0, deci grad $f = 0$.

Pentru polinomul nul, 0, *gradul său se consideră ca fiind egal cu* $-\infty$ (se citește minus infinit).

Referitor la gradul sumei și produsului a două polinoame f și g au loc următoarele relații:

i)* grad $(f + g) \leqslant$ max (grad f, grad g);

ii) dacă f și g sunt polinoame nenule, atunci grad $(fg) =$ grad $f +$ grad g.

Într-adevăr, să presupunem că grad $f = m$ și grad $g = n$. Atunci f și g sunt de forma $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$ și $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$. Dacă $m > n$, atunci gradul sumei $f + g$ este m, deoarece termenul de grad maxim din $f + g$ este a_mX^m.

Dacă $m = n$, termenul de grad maxim din $f + g$ este $(a_m + b_m)X^m$ în cazul când $a_m + b_m \neq 0$ sau mai mic în cazul când $a_m + b_m = 0$.

Așadar, grad $(f + g) \leqslant$ max (grad f, grad g).

În produsul fg, termenul de grad maxim este monomul $(a_mX^m)(b_nX^n) = a_mb_nX^{m+n}$ (a se vedea proprietatea 5° din § 1). Cum f și g sunt polinoame nenule, atunci $a_m \neq 0$ și $b_n \neq 0$. Deci $a_mb_n \neq 0$ și în concluzie grad $(fg) = m + n =$ grad $f +$ grad g.

§ 4. Valoarea unui polinom. Funcția polinomială

Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom arbitrar și α un număr complex arbitrar. Atunci numărul

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n$$

se numește *valoarea polinomului f în* α.

Exemple

1) Fie polinomul $f = 2X^3 - 5X^2 + X - 7$. Valoarea lui f în 1 este $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 - 7 = -9$.

Valoarea lui f în -1 este $f(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) - 7 = -15$.

---

* Pentru ca i) să rămână adevărată și în cazul când lucrăm cu polinomul nul, convenim să punem $-\infty < a$, $-\infty + a = -\infty$ și $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ pentru orice număr natural a.

2) Fie polinomul $g = X^4 - iX + 1$. Valoarea lui g în i este $g(i) = i^4 - i \cdot i + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.

De asemenea valoarea lui g în $1 + i$ este

$$g(1 + i) = (1 + i)^4 - i(1 + i) + 1 = -4 - i + 1 + 1 = -2 - i.$$

Observaţie. Dacă f este un polinom cu coeficienţii reali (respectiv raţionali, întregi) şi a este un număr real (respectiv raţional, întreg), atunci valoarea polinomului f în a, $f(a)$ este un număr real (respectiv raţional, întreg).

Vom enunţa acum proprietăţile cele mai importante ale valorii unui polinom:

Dacă f şi g sunt două polinoame şi a un număr arbitrar atunci

i) $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$;

ii) $(fg)(a) = f(a)g(a)$;

iii) *Dacă f este un polinom cu coeficienţi reali şi z un număr complex, atunci*

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)},$$

unde $\bar{z}$ desemnează conjugatul lui z, iar $\overline{f(z)}$ conjugatul lui $f(z)$;

iv) *Dacă f este un polinom cu coeficienţi raţionali şi $a, b \in \mathbf{Q}$ astfel încât $\sqrt{b}$ nu este raţional, atunci $f(a \pm \sqrt{b})$ este* de forma $A \pm B\sqrt{b}$, *unde $A, B \in \mathbf{Q}$. Mai mult, dacă $f(a + \sqrt{b})$ este numărul $A + B\sqrt{b}$, atunci $f(a - \sqrt{b})$ este numărul $A - B\sqrt{b}$ şi reciproc.*

Primele două proprietăţi rezultă direct din definiţia sumei şi produsului a două polinoame.

Să demonstrăm proprietatea iii). Vom folosi proprietăţile conjugatului unui număr complex, adică:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Fie acum polinomul $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, unde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere reale. Atunci $f(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$, de unde $\overline{f(z)} = \bar{a}_0 + \overline{a_1z} + \ldots + \overline{a_nz^n} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_2\bar{z}^2 + \ldots + \bar{a}_n\bar{z}^n$. Cum $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt numere reale, adică $\bar{a}_0 = a_0$, $\bar{a}_1 = a_1$, $\ldots$, $\bar{a}_n = a_n$, atunci $\overline{f(z)} = a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + \ldots + a_n\bar{z}^n = a_0 + a_1\bar{z} + a_2(\bar{z})^2 + \ldots + a_n(\bar{z})^n$, ceea ce ne arată că $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

Demonstrăm proprietatea iv). Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom cu $a_0, a_1, \ldots, a_n$ numere raţionale. Avem:

$$f(a \pm \sqrt{b}) = a_0 + a_1(a \pm \sqrt{b}) + a_2(a \pm \sqrt{b})^2 + \ldots + a_n(a \pm \sqrt{b})^n.$$

Utilizând binomul lui Newton şi ţinând cont că pentru orice număr natural m, avem

$$(\sqrt{b})^{2m} = b^m \in \mathbf{Q} \text{ şi } (\pm\sqrt{b})^{2m+1} = \pm b^m\sqrt{b},$$

atunci rezultă că $f(a + \sqrt{b})$ este de forma $A + B\sqrt{b}$. În plus, dacă $f(a + \sqrt{b}) = A + B\sqrt{b}$, rezultă că $f(a - \sqrt{b}) = A - B\sqrt{b}$.

Exemple

1) Fie polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$.

Avem $f(1+i) = (1+i)^4 + (1+i)^2 + 1 = -4 + 2i + 1 = -3 + 2i$. Cum f este un polinom cu coeficienți reali rezultă conform proprietății iii) că $f(1-i) = -3 - 2i$.

2) Fie polinomul $g = X^4 + 2X^2 - 6$.

Avem $g(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^4 + 2(1+\sqrt{2})^2 - 6 = 17 + 12\sqrt{2} + 2(3+2\sqrt{2}) - 6 = 17 + 16\sqrt{2}$. Deoarece g este un polinom cu coeficienți raționali, atunci conform proprietății iv) rezultă că $g(1-\sqrt{2}) = 17 - 16\sqrt{2}$.

Definiție. Fie A, B două submulțimi ale lui $\mathbf{C}$. O funcție $f: A \to B$ se numește *polinomială* dacă există un polinom $P \in \mathbf{C}[X]$ astfel încât $f(a) = P(a)$, oricare ar fi $a \in A$.

Exemple 1) Funcția de gradul întâi

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$$

este o functe polinomială, deoarece există polinomul $P = aX + b$ astfel încât avem $f(\alpha) = P(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$.

2) Funcția de gradul al doilea

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbf{R} \text{ și } a \neq 0$$

este o funcție polinomială, deoarece există polinomul de gradul doi $P = aX^2 + bX + c$ pentru care avem $f(\alpha) = P(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$.

3) Funcția putere

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^n$$

este o funcție polinomială, deoarece există polinomul de gradul n, $P = X^n$ pentru care avem $f(\alpha) = P(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$.

Fiind dat un polinom arbitrar $f \in \mathbf{C}[X]$ putem să definim funcția $\tilde{f}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ prin egalitatea $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{C}$.

Funcția $\tilde{f}$ este polinomială și se numește *funcția polinomială asociată polinomului* f.

Exerciții

1. Să se calculeze $f + g$, dacă:
   a) $f = 1 + X^2 + X^4$ și $g = 1 + X^2 - X^3 - X^4$;
   b) $f = \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})X + X^3 - X^4$ și $g = \sqrt{2} + \sqrt{2}X + X^2 + 2X^3 - X^4$;
   c) $f = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5$ și $g = -1 + X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5$;
   d) $f = (1+i) + (1-i)X + iX^2 - iX^3$ și $g = -i + iX + (1-i)X^2 + (1+i)X^3$.
2. Să se calculeze produsul fg dacă:
   a) $f = (1+i) + X$ și $g = (1-i) - X$;
   b) $f = 1 - X + X^2 - X^3$ și $g = 1 + X$;
   c) $f = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4$ și $g = 1 + X$;
   d) $f = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n$ și $g = 1 - X$;
   e) $f = 2 - i + (3-i)X + X^2$ și $g = 2 + i + (3+i)X - iX^2$;
   f) $f = 1 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})X + X^2$ și $g = 1 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})X$.

3. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ un polinom cu coeficienți complecși. Notăm cu $\bar{f}$ polinomul $\bar{f} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1X + \bar{a}_2X^2 + \ldots + \bar{a}_nX^n$. Să se arate că polinoamele $f + \bar{f}$ și $f\bar{f}$ sunt cu coeficienți reali.

4. Un polinom $f \in \mathbf{C}[X]$ se zice inversabil dacă și numai dacă există $g \in \mathbf{C}[X]$ astfel încât $fg = 1$. Să se arate că f este inversabil $\Leftrightarrow f \in \mathbf{C}$ și $f \neq 0$.

5. Să se calculeze grad $(f + g)$ dacă:

a) $f = 1 + X + X^2$ și $g = 1 - X - X^2$;

b) $f = 1 - 3X^2 + 7X^5$ și $g = 1 + X + X^4 - 7X^5$;

c) $f = (1 + i) + (1 - i)X^2 + iX^4$ și $g = i + iX^2 - iX^4$.

6. În raport cu parametrul complex $m \in \mathbf{C}$ să se determine gradul următoarelor polinoame:

a) $f = (m^2 - 3m + 2)X^3 + (m^2 - 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 7$;

b) $f = (m^2 + 1)X^4 + (m^4 - 1)X^2 + 2iX + 1$.

7. Să se arate că pentru orice polinom f de gradul $n \geqslant 0$ și un număr natural $0 \leqslant k \leqslant n$ există un polinom g astfel încât grad $(f + g) = k$.

8. Fie polinomul $f = 1 - 2X + 3X^2 - 4X^3$. Să se calculeze $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(i)$; $f(-i)$; $f(1 + i)$; $f(1 - i)$; $f(1 + \sqrt{2})$; $f(1 - \sqrt{2})$.

9. Să se determine polinoamele de gradul al doilea $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$, astfel încât $f(1) = -2$; $f(2) = -1$ și $f(3) = 4$.

10. Fie funcția polinomială

$$f : [0, 1] \to [0, 1],\ f(x) = x^3 + ax + b,$$

unde $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că în mod necesar $a \leqslant 0$ și $b \geqslant 0$.

11. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ de gradul al doilea care satisfac condiția:

$$f(a^3) = (f(a))^3, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbf{R}.$$

12. Să se arate prin inducție după n că are loc egalitatea:

$$(X + 2X^2 + 3X^3 + \ldots + nX^n)(1 - X)^2 = nX^{n+2} - (n + 1)X^{n+1} + X.$$

§ 5. Împărțirea polinoamelor

5.1. Teorema împărțirii cu rest

Teorema 5.1.1. Fiind date două polinoame oarecare cu coeficienți complecși f și g cu $g \neq 0$, atunci există două polinoame cu coeficienți complecși q și r astfel încât

$$f = gq + r \text{ unde grad } r < \text{grad } g. \qquad (1)$$

În plus, polinoamele q și r sunt unice satisfăcând proprietatea (1).

În egalitatea (1) polinomul f se numește *deîmpărțit*, g *împărțitor*, q *cât* iar r, *rest*.

Demonstrație. Vom demonstra întâi partea de existență a formulei (1). Fie $n = \text{grad } f$ și $m = \text{grad } g$. Dacă $n < m$ atunci luăm $q = 0$ și $r = f$. Presupunem că $n \geqslant m$ și că f și g sunt de forma

$$f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n;\ g = b_0 + b_1X + \ldots + b_mX^m,$$

unde $a_n \neq 0$ și $b_m \neq 0$. Putem considera polinomul

$$f_1 = f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g. \tag{2}$$

În egalitatea (2) termenul de grad maxim a_nX^n al lui f se va reduce și deci grad $f_1 <$ grad f.

Să notăm $n_1 = \text{grad } f_1$. Atunci polinomul f_1 are forma

$$f_1 = a'_{n_1}X^{n_1} + a'_{n_1-1}X^{n_1-1} + \ldots + a'_0.$$

Dacă $n_1 < m$, atunci punând $q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}$ și $r = f_1$, din (2) obținem

$$f = gq + r \text{ unde grad } r = n_1 < m = \text{grad } g.$$

Dacă $n_1 \geqslant m$, repetăm din nou procedeul de coborâre a gradului, printr-o nouă scădere:

$$f_2 = f_1 - \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} g. \tag{3}$$

Dacă grad $f_2 = n_2$, atunci evident $n_2 < n_1 < m$. Repetând procedeul de coborâre a gradelor se obține un șir de polinoame $f_1, f_2, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots$ astfel încât

$$f_1 = f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g, \tag{4}$$

$$f_2 = f_1 - \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} g,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{p+1} = f_p - \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m} g,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde grad $f >$ grad $f_1 >$ grad $f_2 > \ldots >$ grad $f_p >$ grad $f_{p+1} > \ldots$, adică

$$n > n_1 > n_2 > \ldots > n_p > n_{p+1} > \ldots.$$

Cum m este număr natural, există p număr natural astfel încât $n_{p+1} < m$. Vom nota $r = f_{p+1}$. Adunând toate egalitățile (4) obținem

$$f_{p+1} = f - \left[\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} + \ldots + \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m}\right] g. \tag{5}$$

Dacă notăm polinomul din paranteză cu q:

$$q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} + \dots + \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m},$$

egalitatea (5) se scrie

$$f = gq + r \text{ unde grad } r = n_{p+1} < m = \text{grad } g. \tag{6}$$

Să trecem acum la *demonstrarea părţii de unicitate din teoremă*. Presupunem că mai există două polinoame q_1 şi r_1 astfel încât

$$f = gq_1 + r_1 \text{ cu grad } r_1 < \text{grad } g.$$

Atunci

$$f = gq + r = gq_1 + r_1, \tag{7}$$

de unde

$$g(q - q_1) = r_1 - r. \tag{7'}$$

Dacă $q - q_1 \neq 0$, atunci grad $g(q - q_1) \geqslant$ grad g. Pe de altă parte, cum grad $(r_1 - r) \leqslant$ max (grad r_1, grad r) $<$ grad g, obţinem o contradicţie. Deci trebuie ca $q - q_1 = 0$, adică $q = q_1$. Din egalitatea (7') obţinem în acest caz că $r_1 - r = 0$ şi deci $r_1 = r$.

Observaţii 1) Împărţirea cu rest necesită efectuarea celor patru operaţii aritmetice: adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea asupra coeficienţilor polinoamelor f şi g. Din aceste motive, dacă polinoamele f şi g au *coeficienţii numere reale (respectiv raţionale), atunci câtul q şi restul r sunt polinoame cu coeficienţi reali (respectiv raţionali)*. Din egalitatea (6) se vede că dacă polinoamele f şi g au coeficienţi numere întregi coeficientul termenului de grad maxim al lui g este ± 1, atunci câtul şi restul sunt polinoame cu coeficienţi întregi.

2) Egalităţile (2), (3), (4), (5) şi (6) se pot expune în tabelul de mai jos

$\overbrace{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0}^{f}$	$\overbrace{b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \dots + b_0}^{g}$
$-a_nX^n - \frac{a_nb_{m-1}}{b_m} X^{n-1} - \dots - \frac{a_nb_0}{b_m} X^{n-m}$	$\underbrace{\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} + \dots + \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m}}_{q}$
$f_1 = a'_{n_1} X^{n_1} + a'_{n_1-1} X^{n_1-1} + \dots + a'_0$	
$-a'_{n_1} X^{n_1} - \frac{a_{n_1}b_{m-1}}{b} X^{n_1-1} - \dots - \frac{a'_{n_1}b_0}{b_m} X^{n_1-m}$	
$f_2 = a^{(2)}_{n_2} X^{n_2} + a^{(2)}_{n_2-1} X^{n_2-1} + \dots + a^{(2)}_0$	
. . . . .	
$f_p = a^{(p)}_{n_p} X^{n_p} + \dots + a^{(p)}_0$	
$-a^{(p)}_{n_p} X^{n_p} - \dots\dots\dots - \frac{a^{(p)}_{n_p}b_0}{b_m} X^{n_p-m}$	
$f_{p+1} = \underbrace{a^{(p+1)}_{n_{p+1}} X^{n_{p+1}} + \dots + a^{(p+1)}_0}$	

Acest tabel ne redă tocmai regula de împărțire a polinoamelor cunoscută încă din algebra elementară și pe care o vom aplica în practică pentru obținerea câtului și restului împărțirii.

Exemplu. Fie polinoamele $f = 2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1$ și $g = X^2 - 3$. Să determinăm câtul și restul împărțirii lui f la g.

$$
\begin{array}{r|l}
\overbrace{2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1}^{f} & \overbrace{X^2 - 3}^{g} \\
\hline
-2X^5 \qquad + 6X^3 & \underbrace{2X^3 + X^2 + X + 3}_{q} \\
\hline
X^4 + X^3 - 8X + 1 & \\
-X^4 + 3X^2 & \\
\hline
X^3 + 3X^2 - 8X + 1 & \\
-X^3 \qquad + 3X & \\
\hline
3X^2 - 5X + 1 & \\
-3X^2 \qquad + 9 & \\
\hline
\underbrace{-5X + 10}_{r} &
\end{array}
$$

Deci câtul este $q = 2X^3 + X^2 + X + 3$ iar restul $r = -5X + 10$. Formula împărțirii cu rest se scrie în acest caz astfel:

$$2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1 = (X^2 - 3)(2X^3 + X^2 + X + 3) + (-5X + 10).$$

5.2. Împărțirea prin $X - a$. Schema lui Horner

Un caz foarte important în aplicații este împărțirea unui polinom $f \neq 0$ prin binomul $X - a$. Vom demonstra următoarea teoremă:

Teorema 5.2.1. Restul împărțirii unui polinom $f \neq 0$ prin binomul $X - a$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului f în a.

Demonstrație. Aplicând formula împărțirii cu rest pentru polinoamele f și $g = X - a$ obținem egalitatea:

$$f = (X - a)q + r, \text{ unde grad } r < \text{grad } (X - a) = 1. \qquad (1)$$

Deci grad $r \leqslant 0$, adică restul împărțirii este un număr complex.

Dacă în egalitatea (1) facem $X = a$, obținem egalitatea

$$f(a) = (a - a)q(q) + r(a),$$

de unde $f(a) = r(a)$. Cum r este un polinom constant atunci $r(a) = r$ și deci

$$r = f(a).$$

Această *teoremă ne ajută să găsim restul împărțirii unui polinom care are prin polinomul $X - a$ fără a mai face împărțirea.*

Exemple

1) Să se găsească restul împărțirii polinomului $f = X^3 - 2X^2 + X + 1$ prin binomul $X - 2$.

Conform teoremei de mai sus, restul împărțirii este $r = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 3$.

2) Să se găsească restul împărțirii polinomului $f = X^4 - 2iX^3 + 4X + 1 + 2i$ prin binomul $X + i$.

Conform teoremei de mai sus, restul este

$$r = f(-i) = (-i)^4 - 2i(-i)^3 + 4(-i) + 1 + 2i = 1 + 2 - 4i + 1 + 2i = 4 - 2i.$$

Teorema de mai sus are dezavantajul că nu ne spune nimic asupra câtului împărțirii polinomului f prin binomul $X - a$.

Vom indica acum un procedeu de aflare a câtului împărțirii polinomului f prin binomul $X - a$.

Să presupunem că f este un polinom de forma

$$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Dacă scriem formula împărțirii cu rest pentru polinoamele f și $X - a$ obținem egalitatea

$$f = (X - a)q + r. \qquad (2)$$

Cum grad $f = n$, atunci trebuie ca grad $q = n - 1$. Deci q este un polinom de forma

$$q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_0.$$

Egalitatea (2) devine în acest caz

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = (X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_0) + r.$$

Efectuând înmulțirea în partea dreaptă obținem

$$(X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_0) = b_{n-1}X^n + b_{n-2}X^{n-1} + \ldots +$$
$$+ b_0X - ab_{n-1}X^{n-1} - ab_{n-2}X^{n-2} - \ldots - ab_0 = b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} +$$
$$+ (b_{n-3} - ab_{n-2})X^{n-2} + \ldots + (b_0 - ab_1)X - ab_0.$$

Înlocuind în (2) obținem egalitatea

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} +$$
$$+ (b_{n-3} - ab_{n-2})X^{n-2} + \ldots + (b_0 - ab_1)X + (r - ab_0).$$

Din egalitatea celor două polinoame obținem că

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 = b_0 - ab_1, \\ a_0 = r - ab_0. \end{cases} \qquad (3)$$

Din egalităţile (3) obţinem succesiv

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_0 = a_1 + ab_1, \\ r = a_0 + ab_0. \end{cases} \tag{4}$$

Egalităţile (4) se trec în tabelul următor

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	.....	X^1	X^0
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	.....	a_1	a_0
a	a_n	$a_{n-1} + ab_{n-1}$	$a_{n-2} + ab_{n-2}$	.....	$a_1 + ab_1$	$a_0 + ab_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	.....	b_0	r

(5)

În rândul de sus al tabelului se scriu coeficienţii polinomului f, iar în rândul de jos coeficienţii $b_{n-1}, b_{n-1}, \dots, b_0$ ai câtului şi restul r.

Tabelul (5) poartă denumirea de *schema lui Horner*. Din schema lui Horner coeficienţii câtului se determină astfel: mai întâi coeficientul termenului de grad maxim $n-1$, b_{n-1} care este egal cu a_n, apoi coeficientul termenului de grad $n-2$, b_{n-2} care este egal cu $a_{n-1} + ab_{n-1}$, apoi coeficientul termenului de grad $n-3$, b_{n-3} care este egal cu $a_{n-2} + ab_{n-2}$ ş.a.m.d.

Exemple: 1) Utilizând schema lui Horner să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului

$$f = 2X^4 - 5X^3 - 8X + 1 \text{ prin binomul } X - 2.$$

Facem schema lui Horner

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	2	-5	0	-8	1
2	2	$-5+2\cdot 2 = -1$	$0 + 2(-1) = -2$	$-8+2(-2) = -12$	$1+2(-12) = -23$
	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Deci câtul şi restul împărţirii sunt:

$$q = 2X^3 - X^2 - 2X - 12 \text{ şi } r = -23.$$

2) Utilizând schema lui Horner, să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $= X^6 - X^5 + X^4 + 2X^3 - X^2 - 3$ prin binomul $X + 1$.

Facem schema lui Horner

	X^6	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	1	-1	1	2	-1	0	-3
-1	1	$-1+(-1)1=-2$	$1+(-1)(-2)=3$	$2+(-1)\cdot 3=-1$	$-1+(-1)\cdot(-1)=0$	$0+0=0$	-3
	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Deci câtul şi restul împărţirii sunt:

$$q = X^3 - 2X^2 + 3X^2 - X^2 \text{ şi } r = -3.$$

Observaţie. Schema lui Horner ne oferă nu numai un procedeu de obţinere a câtului împărţirii polinomului f prin binomul $X - a$, dar şi un procedeu de determinare a restului.

Exerciţii

1. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f prin binomul g dacă:
   a) $f = X^6 - X^5 - X^4 + X^3 - 2X^2 + 5X - 4$, $g = X^2 - 2X + 3$;
   b) $f = X^4 - 6X^3 - 8X^2 + 1$, $g = X^3 - X + 1$;
   c) $f = X^4 - 2X^2 + 2$; $g = X^2 - 2X + 2$;
   d) $f = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 6$, $g = X^2 - X^2 + 2X - 3$;
   e) $f = X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ $g = X^2 - 2X + 1$;
   f) $f = X^{22} - X^{17} + X^{10} + X^5 + 2X^2 + 2$, $g = X^2 + X + 1$.

2. Să se afle un polinom de gradul trei astfel încât împărţit la $X^2 - 3X$ dă restul $6X - 18$ şi împărţit la $X^2 - 5X + 8$ dă restul $2X - 7$.

3. Să se arate că dacă f şi g dau prin împărţirea lor la h resturile r_1, respectiv r_2, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, polinomul $\alpha f + \beta g$ dă prin împărţire la h restul $\alpha r_1 + \beta r_2$.

4. Ce condiţii trebuie să îndeplinească numerele m, p, q ca restul împărţirii polinomului $X^4 + pX^2 + q$ la polinomul $X^2 + mX + 1$ să fie zero?

5. Aplicând schema lui Horner să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f prin g dacă:
   a) $f = X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 6X + 1$, $g = X - 1$;
   b) $f = X^5 - X^5 + 3X^2 - 6X + 2$, $g = X + 1$;
   c) $f = X^5 - X^4 - 2X^3 + X^2 - X - 2$, $g = X - 2$;
   d) $f = X^5 - 2X^4 - X^3 + 2X^2 - 2$, $b = X + 2$;
   e) $f = X^5 - X^3 - X^4 + 6X - 1$, $g = X + \frac{1}{2}$;
   f) $f = 2X^3 + 8X^2 - 4X + 2$, $g = 2X + 1$;
   g) $f = 3X^4 + 2X^3 - 4X^2 + 6X + 6$, $g = 3X - 1$.

6. Să se afle un polinom de grad cât mai mic astfel încât împărţit la $X+1$ să dea restul -1 şi împărţit la $X - 1$ să dea restul 1.

7. Să se determine parametrul m astfel încât polinomul $f = 2X^4 - mX^3 + X^2 - 7$ împărţit la $X + 2$ să dea restul 4.

8. Să se determine parametrul m astfel încât polinomul $f = X^5 - mX^4 + (m^2 - 2)X^3 + mX^2 - 1$ împărţit la $X - 1$ să dea restul 7.

9. Să se determine parametrii a şi b astfel încât polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + 1$ împărţit la $X - 1$ să dea restul 1 şi împărţit la $X + 1$ să dea restul -5.

10. Să se determine un polinom $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ astfel încât împărţit în $X^2 - 3X + 1$ să dea restul $2X + 1$ şi împărţit la $X^2 - 1$ să dea restul $-2X + 2$.

§ 6. Divizibilitatea polinoamelor

6.1. Definiția relației de divizibilitate. Proprietăți

Definiția 6.1.1. Fie f și g două polinoame. Spunem că polinomul g *divide* polinomul f (sau este *divizibil* prin g, sau g este un *divizor al lui* f, sau încă f este *un multiplu al lui* g) dacă există un polinom h astfel încât

$$f = gh.$$

Când polinomul g divide polinomul f notăm simbolic $g \mid f$.

Exemplu. Să considerăm polinoamele $f = X^3 - 27$ și $g = X - 3$. Cum $X^3 - 27 = (X - 3)(X^2 + 3X + 9)$, rezultă că $g \mid f$.

Câteva proprietăți ale relației de divizibilitate a polinoamelor:

1° *Din teorema împărțirii cu rest rezultă că g divide pe f dacă și numai dacă restul împărțirii lui f la g este zero.*

2° *Dacă $g \mid f$ și $f \neq 0$ atunci grad $g \leqslant$ grad f.*

Într-adevăr, cum $g \mid f$ există un polinom h astfel încât $f = gh$. Deoarece $f \neq 0$, atunci grad f = grad g + grad h. Dar grad $h \geqslant 0$ și deci grad $g \leqslant$ grad f.

3° *Polinoamele de grad 0, adică constantele nenule, divid orice polinom.*

Într-adevăr, dacă $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ și f este un polinom oarecare putem scrie

$$f = \left(a\frac{1}{a}\right)f = a\left(\frac{1}{a}f\right) \text{ și deci } a \mid f.$$

4° *Dacă f este un polinom și $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ atunci $af \mid f$.*

Într-adevăr, $f = \left(\frac{1}{a}a\right)f = \frac{1}{a}(af)$ și deci $af \mid f$.

Dacă f este un polinom, divizorii de forma a și af unde $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ se numesc *divizori improprii* ai polinomului f. *Divizorii* care nu sunt improprii se numesc *divizori proprii*.

5° *Relația de divizibilitate:*

i) este **reflexivă,** *adică $f \mid f$* oricare ar fi polinomul f.

Într-adevăr, $f = f \cdot 1$.

ii) este **tranzitivă,** *adică dacă $h \mid g$ și $g \mid f$, atunci $h \mid f$.*

Într-adevăr, cum $h \mid g$, atunci există un polinom h_1 astfel încât $g = hh_1$. Cum $g \mid f$, există un polinom g_1 astfel încât $f = gg_1$. Înlocuind în această egalitate pe $g = hh_1$, obținem că $f = (hh_1)g_1 = h(h_1g_1)$ și deci $h \mid f$.

iii) *Dacă $g \mid f_1$ și $g \mid f_2$, iar h_1, h_2 sunt două polinoame arbitrare, atunci*

$$g \mid h_1f_1 + h_2f_2.$$

Într-adevăr, cum $g \mid f_1$, există polinomul g_1 astfel încât $f_1 = gg_1$; cum $g \mid f_2$, există polinomul g_2 astfel încât $f_2 = gg_2$. Dar atunci avem

$$h_1f_1 + h_2f_2 = h_1(gg_1) + h_2(gg_2) = g(h_1g_1 + h_2g_2) \text{ și deci } g \mid h_1f_1 + h_2f_2.$$

iv) *Dacă $g \mid f$ și $f \mid g$, atunci există $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ astfel încât*

$$f = ag.$$

Într-adevăr, cum $g \mid f$, există polinomul h_1 astfel încât

$$f = hg_1. \tag{1}$$

Cum $f \mid g$, există polinomul h_2 astfel încât

$$g = fh_2. \tag{2}$$

Dacă $g = 0$, atunci din egalitatea (1) obținem că $f = 0$. În acest caz putem alege $a = 1$.

Analog, dacă $f = 0$ din (2) rezultă că $g = 0$.

Putem presupune acum $f \neq 0$ și $g \neq 0$. Din (1) și (2) obținem

$$g = fh_2 = (gh_1)h_2 = g(h_1h_2).$$

Cum $g \neq 0$ atunci $h_1h_2 = 1$ și deci grad $(h_1h_2) = 0$, adică grad $h_1 +$ $+$ grad $h_2 = 0$. Cum grad $h_1 \geqslant 0$ și grad $h_2 \geqslant 0$, rezultă că grad $h_1 =$ $=$ grad $h_2 = 0$. Deci $h_1 = a \in \mathbb{C}$ cu $a \neq 0$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$f = ag \text{ cu } a \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

Două polinoame f și g pentru care $f \mid g$ și $g \mid f$ se numesc *asociate în divizibilitate* (sau, pe scurt, *asociate*).

Când polinoamele f și g sunt asociate notăm simbolic $f \overset{d}{\sim} g$.

Rezultă din proprietățile 5° *iv)* și 4° că, $f \overset{d}{\sim} g$ dacă și numai dacă există $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, astfel încât $f = ag$.

Exemple. 1) Polinoamele $f = X^2 + 1$ și $g = \frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{3}$ sunt asociate în divizibilitate deoarece $f = 3 \cdot g$.

2) Polinoamele $f = X^2 - X + 2$ și $g = 2X^2 - 2X + 4$ sunt asociate în divizibilitate deoarece $f = \frac{1}{2}g$.

6.2. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor

Definiția 6.2.1. Fie f și g două polinoame. Un polinom d se numește *un cel mai mare divizor comun* (pe scurt, *c.m.m.d.c.*) al polinoamelor f și g, dacă verifică următoarele condiții:
i) d este un divizor comun al lui f și g adică $d|f$ și $d|g$;
ii) orice alt divizor comun d' al lui f și g divide neapărat și polinomul d (adică dacă $d'|f$ și $d'|g$ atunci $d'|d$).

Teorema 6.2.2. Dacă f și g sunt două polinoame, atunci există un c.m.m.d.c. al lui f și g.

Demonstrație. În cazul $f = g = 0$, conform definiției 6.2.1, polinomul nul este un c.m.m.d.c. al lor. Așadar putem presupune că $f \neq 0$

Dacă $g = 0$, atunci f este un divizor comun al lui f și g deoarece $f = f \cdot 1$ și $g = f \cdot 0$. Dacă d' este un divizor comun al lui f și g, atunci d' este în particular un divizor al lui f. Deci f este un c.m.m.d.c. al lui f și g.

Să considerăm cazul când $g \neq 0$. Aplicând teorema împărțirii cu rest polinoamelor f și g, găsim două polinoame q_1, r_1, astfel încât

$$f = gq_1 + r_1, \text{ cu grad } r_1 < \text{grad } g. \tag{1}$$

Dacă $r_1 \neq 0$, aplicăm teorema împărțirii cu rest polinoamelor g și r_1 și obținem polinoamele q_2, r_2 astfel încât

$$g = r_1q_2 + r_2, \text{ cu grad } r_2 < \text{grad } r_1. \tag{2}$$

Repetând acest procedeu, obținem polinoamele $q_3, q_4, \ldots, q_n, \ldots$ și $r_3, r_4, \ldots, r_n, \ldots$, astfel încât

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2q_3 + r_3, \text{ cu grad } r_3 < \text{grad } r_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \text{ cu grad } r_n < \text{grad } r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + r_{n+1}, \text{ cu grad } r_{n+1} < \text{grad } r_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Cum grad $r_1 >$ grad $r_2 > \ldots >$ grad $r_n >$ grad $r_{n+1} > \ldots$, există un număr natural n astfel încât $r_n \neq 0$ și $r_{n+1} = 0$.

Vom arăta că r_n este un c.m.m.d.c. al lui f și g.

Cum $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$, rezultă că $r_n \mid r_{n-1}$. Acum, deoarece $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$, rezultă că $r_n \mid r_{n-2}$. În continuare folosind egalitatea $r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$ și ținând cont că $r_n \mid r_{n-1}$ și $r_n \mid r_{n-2}$, rezultă că $r_n \mid r_{n-3}$. Din aproape în aproape, ținând cont de egalitățile (3), rezultă că r_n divide polinoamele $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_2, r_1$. Din egalitatea (2) rezultă că $r_n \mid g$, iar din egalitatea (1) obținem $r_n \mid f$. Deci r_n este un divizor comun al polinoamelor f și g. Fie acum d un divizor comun al polinoamelor f și g. (Din (1) obținem $r_1 = f - gq_1$. Folosind proprietatea 5° iii) obținem $d \mid r_1$. Din egalitatea (2) obținem $r_2 = g - r_1q_1$. Cum $d \mid r_1$ și $d \mid g$, atunci $d \mid r_2$. Acum folosind egalitățile (3), din aproape în aproape, obținem că d divide polinoamele $r_3, r_4, \ldots, r_{n-1}, r_n$.

Așadar r_n (ultimul rest nenul) este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

Rezumând cele demonstrate în această teoremă putem enunța următoarea regulă de obținere a c.m.m.d.c a două polinoame care poartă numele de *algoritmul lui Euclid*: *Pentru a obține c.m.m.d.c. al două polinoame nenule f și g împărțim pe f la g (mai exact împărțim polinomul de grad mai mare la cel de grad mai mic). Dacă restul împărțirii este zero atunci g este c.m.m.d.c.; dacă nu, împărțim pe g la restul împărțirii, pe urmă împărțitorul celei de-a doua împărțiri la noul rest ș.a.m.d. Ultimul rest nenul este c.m.m.d.c. al celor două polinoame.*

Trebuie să facem observația că dacă polinoamele f și g sunt cu *coeficienți numere reale (respectiv, raționale), prin algoritmul lui Euclid obținem un c.m.m.d.c. al lui f și g care este un polinom cu coeficienți numere reale (respectiv raționale).*

Teorema 6.2.2 ne arată că fiind date două polinoame f și g există un c.m.m.d.c al lor. Mai mult, ne indică și un procedeu de obținere a acestui c.m.m.d.c.

Se pune întrebarea dacă c.m.m.d.c este unic determinat.

Acest lucru este lămurit de următoarea teoremă:

Teorema 6.2.3. Fie f, g două polinoame și d un c.m.m.d.c. al lui f și g. Atunci:

1° Dacă $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, atunci ad este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

2° Invers, dacă d' este un c.m.m.d.c. al lui f și g există un $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, astfel încât $d' = ad$.

Demonstrație 1° Cum $d \mid f$ și $ad \mid d$ (vezi proprietatea 4°), atunci din proprietatea de tranzitivitate a divizibilității obținem $ad \mid f$. Analog, obținem $ad \mid g$.

Fie d' un divizor comun al lui f și g. Atunci $d' \mid d$ (vezi definiția 6.21). Cum $d \mid ad$, atunci din tranzitivitatea divizibilității obținem $d' \mid ad$. Deci ad este un c.m.m.d.c. al lui f și g.

2° Presupunem că și d' este un c.m.m.d.c. al lui f și g. Cum d este un c.m.m.d.c. al lui f și g, din definiția 6.2.1 obținem $d' \mid d$. Schimbând rolurile lui d și d', tot din definiția 6.2.1 avem și $d \mid d'$.

Din proprietatea 5° și iv) deducem că există $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, astfel încât $d' = ad$.

Observații 1) Teorema 6.2.3 ne spune că c.m.m.d.c. a două polinoame f și g este *unic, abstracție făcând de un factor constant nenul.*

2) Teorema 6.2.3 ne ajută ca în calculele ce le facem pentru obținerea c.m.m.d.c. a două polinoame cu coeficienți întregi prin algoritmul lui Euclid, să evităm coeficienții fracționari. Mai precis, dacă la una din împărțiri primul termen al vreunui deîmpărțit parțial nu este divizibil prin primul termen al împărțitorului, se pot înmulți toți coeficienții deîmpărțitului cu un număr ales convenabil. De asemenea, dacă toți coeficienții vreunui deîmpărțit sau împărțitor sunt divizibili cu același număr, îi putem împărți cu acel număr.

Exemple. 1) Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$f = X^4 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4 \text{ și } g = X^3 + X^2 + X - 3.$$

Vom aplica algoritmul lui Euclid. Împărțim pe f la g

$$\begin{array}{r|l} X^4 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4 & X^3 + X^2 + X - 3 \\ \cline{2-2} -X^4 - X^3 - X^2 + 3X & X \\ \hline -3X^2 - X + 4 & \end{array}$$

Pentru a evita coeficienții fracționari, vom înmulți în prealabil pe g cu 3 și restul împărțirii cu -1. Împărțim acum împărțitorul la rest

$$\begin{array}{r|l} 3X^3 + 3X^2 + 3X - 9 & 3X^2 + X - 4 \\ \cline{2-2} -3X^3 - X^2 + 3X & X \\ \hline 2X^2 + 7X - 9 & \end{array}$$

Acum, pentru a evita din nou coeficienții fracționari vom înmulți $3X^2 + X - 4$ cu 2 și continuăm operația.

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 2X - 8 & 2X^2 + 7X - 9 \\ \cline{2-2} -6X^2 - 21X + 27 & 3 \\ \hline -19X + 19 & \end{array}$$

Am obținut restul $-19X + 19$. Pentru a evita din nou coeficienții fracționari împărțim pe $-19X + 19$ cu -19 și împărțim împărțitorul la rest

$$\begin{array}{r|l} 2X^2 + 7X - 9 & X - 1 \\ \cline{2-2} -2X^2 + 2X & 2X + 9 \\ \hline 9X - 9 & \\ -9X + 9 & \\ \hline - \quad - & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este polinomul $X - 1$ și deci $X - 1$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

2) Să se afle c.m.m.d.c. al polinoamelor

$$f = X^3 - 2X^2 + 6X - 5, \; g = X^2 - 1.$$

Prima împărțire din algoritmul lui Euclid:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 2X^2 + 6X - 5 & X^2 - 1 \\ \cline{2-2} -X^3 \qquad + X & X - 2 \\ \hline -2X^2 + 7X - 5 & \\ 2X^2 \qquad - 2 & \\ \hline 7X - 7 & \end{array}$$

A doua împărțire (împărțim $7X - 7$ cu 7):

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 1 & X - 1 \\ \cline{2-2} -X^2 + X & X + 1 \\ \hline X - 1 & \\ -X + 1 & \\ \hline - \quad - & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este $X - 1$. Deci $X - 1$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor date.

3) Să se afle c.m.m.d.c. al polinoamelor:

$$f = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5 \text{ și } g = X^5 + X^2 - X + 1$$

Prima împărțire din algoritmul lui Euclid:

$$\begin{array}{r|l} X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5 & X^5 + X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2} -X^6 \qquad - X^3 + X^2 - X & X \\ \hline 2X^5 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 & \end{array}$$

A doua împărțire (înmulțim $X^5 + X^2 - X + 1$ cu 2):

$$\begin{array}{r|l} 2X^5 + 2X^2 - 2X + 2 & 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 \\ \cline{2-2} -2X^5 + 5X^4 + 2X^3 - 7X^2 + 5X & X + \frac{5}{2} \\ \hline 5X^4 + 2X^3 - 5X^2 + 3X + 2 & \\ -5X^4 + \frac{25}{2}X^3 + 5X^2 - \frac{35}{2}X + \frac{25}{2} & \\ \hline \frac{29}{2}X^3 \qquad - \frac{29}{2}X + \frac{29}{2} & \end{array}$$

A treia împărțire $\left(\text{împărțim ultimul rest cu } \frac{29}{2}\right)$:

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 & X^3 - X + 1 \\ \cline{2-2} -2X^4 \qquad\quad + 2X^2 - 2X & 2X - 5 \\ \hline -5X^3 \qquad\quad + 5X - 5 & \\ 5X^3 \qquad\quad - 5X + 5 & \\ \hline - \qquad\quad - \qquad\quad - & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este $X^3 - X + 1$. Deci $X^3 - X + 1$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor date.

Teorema 6.2.4. Fie f și g două polinoame. Dacă d este un c.m.m.d.c. al lui f și g, atunci există polinoamele u și v astfel încât

$$d = uf + vg.$$

Demonstrație. Am văzut în demonstrația teoremei 6.2.2 că ultimul rest nenul din algoritmul lui Euclid este c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g. Deci dacă

$$\begin{array}{ll} (1) & f = gq_1 + r_1, \\ (2) & g = r_1q_2 + r_2, \\ (3) & r_1 = r_2q_3 + r_3, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ (n) & r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \\ (n+1) & r_{n-1} = r_nq_{n+1}, \end{array}$$

este șirul de egalități din algoritmul lui Euclid unde ultimul rest nenul este r_n, atunci r_n este c.m.m.d.c. al lui f și g.

Din (1) obținem că $r_1 = u_1f + v_1g$, unde $u_1 = 1$ și $v_1 = -q_1$.

Din (2) obținem că $r_2 = g - r_1q_2 = g - (u_1f + v_1g)q_2 = -(u_1q_2)f + (1 - v_1q_2)g = u_2f + v_2g$, unde $u_2 = -u_1q_2$ și $v_2 = 1 - v_1q_2$.

Continuând procedeul putem să presupunem că pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ am determinat polinoamele u_i, v_i, astfel încât

$$r_i = u_if + v_ig.$$

Din egalitatea (n) avem că $r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$. Cum $r_{n-2} = u_{n-2}f + v_{n-2}g$ și $r_{n-1} = u_{n-1}f + v_{n-1}g$, atunci $r_n = u_{n-2}f + v_{n-2}g - (u_{n-1}f + v_{n-1}g)q_n = (u_{n-2} - u_{n-1}q_n)f + (v_{n-2} - v_{n-1}q_n)g = u_nf + v_ng$, unde am notat $u_n = u_{n-2} - u_{n-1}q_n$ și $v_n = v_{n-2} - v_{n-1}q_n$.

Acum, dacă d este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g, din teorema 6.2.3 rezultă că există un $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ astfel încât $d = ar_n$. Deci $d = au_nf + av_ng = uf + vg$, unde $u = au_n$ și $v = av_n$.

Definiția 6.2.5. Fie f și g două polinoame. Spunem că f și g sunt *prime între ele* dacă 1 este c.m.m.d.c. al lui f și g.

Din teorema 6.2.3 rezultă că polinoamele f și g sunt prime între ele dacă singurii divizori comuni ai lui f și g sunt polinoamele constante nenule.

Exemple. 1) Polinoamele $f = X^4 + 1$ și $g = X^3 - 1$ sunt prime între ele. Într-adevăr, să calculăm c.m.m.d.c. al lui f și g folosind algoritmul lui Euclid:

Prima împărțire:

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 1 & X^3 - 1 \\ \cline{2-2} -X^4 + X & X \\ \hline X + 1 & \end{array}$$

A doua împărțire:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 1 & X + 1 \\ \cline{2-2} -X^3 - X^2 & X^2 - X + 1 \\ \cline{1-1} -X^2 - 1 & \\ X^2 + X & \\ \cline{1-1} X - 1 & \\ -X - 1 & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este -2 și deci 1 este un c.m.m.d.c. al lui f și g.

2) Polinoamele $f = X^2 + X + 1$ și $g = X^2 - X + 1$ sunt prime între ele. Într-adevăr, să calculăm c.m.m.d.c. al lui f și g

$$\begin{array}{r|l} X^2 + X + 1 & X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2} -X^2 + X - 1 & 1 \\ \cline{1-1} 2X & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^2 - 2X + 2 & 2X \\ \cline{2-2} -2X^2 & X - 1 \\ \cline{1-1} -2X + 2 & \\ 2X & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Ultimul rest nenul fiind 2, atunci c.m.m.d.c. al lui f și g este polinomul 1.

Observații. 1) Fie f și g două polinoame nenule și d un c.m.m.d.c. al lor. Atunci putem scrie $f = df'$ și $g = dg'$. Polinoamele f' și g' *sunt prime între ele.*

Într-adevăr, dacă d' este un c.m.m.d.c. al lui f' și g', atunci dd' este un divizor comun al polinoamelor f și g. Cum d este c.m.m.d.c. al lui f și g, atunci obținem că $dd' \mid d$. Deci există polinomul d'' astfel încât $d = dd'd''$. Prin urmare, $d'd'' = 1$ și deci d' este un polinom constant ceea ce ne arată că f' și g' sunt prime între ele.

2) Așa cum am definit cel mai mare divizor comun a două polinoame (a se vedea definiția 6.2.1) putem defini c.m.m.d.c. a unui număr finit de polinoame. Mai precis, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt n polinoame, atunci un polinom d se numește un c.m.m.d.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dacă verifică următoarele condiții:

i) $d \mid f_1$, $d \mid d_2$, $\ldots$, $d \mid f_n$;

ii) dacă d' este un polinom astfel încât $d' \mid f_1$, $d' \mid f_2$, $\ldots$, $d' \mid f_n$ atunci $d' \mid d$.

Fiind date polinoamele $f_1, f_2, \ldots, f_n$ un c.m.m.d.c. al lor se calculează astfel: se determină d_1 un c.mm.d.c. al polinoamelor f_1 și f_2, apoi se determină d_2 un c.m.m.d.c. al polinoamelor d_1 și f_3, apoi se determină d_3 un c.m.m.d.c. al polinoamelor d_2 și f_4 $\ldots$, apoi se determină d_{n-1} un c.m.m.d.c. al polinoamelor d_{n-2} și f_n. Polinomul $d = d_{n-1}$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

6.3. Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

Definiția 6.3.1. Fie f și g două polinoame. Un polinom m se numește un *cel mai mic multiplu comun* (pe scurt, *un c.m.m.m.c.*) al polinoamelor d și g dacă verifică următoarele condiții:

i) m este un multiplu al lui f și g, adică $f \mid m$ și $g \mid m$,

ii) orice alt multiplu comun m' al lui f și g este și multiplu al lui m (adică dacă $f \mid m'$ și $g \mid m'$ atunci $m \mid m'$).

Următoarea teoremă ne dă un procedeu de obținere a unui c.m.m.d.c. a două polinoame.

Teorema 6.3.2. Fie f şi g două polinoame dintre care cel puţin unul este nenul. Dacă d este un c.m.m.d.c. al lui f şi g, atunci polinomul $m = \frac{fg}{d}$ este un c.m.m.m.c. al lui f şi g $\left(\text{aici } \frac{fg}{d}\right.$ înseamnă câtul împărţirii polinomului fg prin $\left.d\right)$.

Demonstraţie. Cum $d \mid f$ şi $d \mid g$, există polinoamele f' şi g' astfel încât $f = df'$ şi $g = dg'$. În plus, polinoamele f' şi g' sunt prime între ele. Deci $m = f'g = fg'$, ceea ce arată că m este un multiplu comun al lui f şi g.

Fie m' un polinom astfel încât $f \mid m$ şi $g \mid m'$. Deci există polinoamele f_1 şi g_1 astfel încât $m' = ff_1$ şi $m' = gg_1$. Avem $m' = df'f_1$ şi $m' = dg'g_1$, de unde obţinem că $df'f_1 = dg'g_1$. Cum $d \neq 0$, atunci $f'f_1 = g'g_1$. Polinoamele f' şi g' fiind prime între ele, există polinoamele u şi v astfel încât $1 = uf' + vg'$. Înmulţind această egalitate cu g_1 (de exemplu), obţinem că $g_1 = ug_1f' + vg'g_1 = ug_1f' + vf'f_1 = f'(ug_1 + vf_1)$, ceea ce arată că $f' \mid g_1$. Deci există un polinom g_2, astfel încât $g_1 = f'g_2$. Cum $m' = gg'$ atunci $m' = gf'g_2 = mg_2$ şi deci $m \mid m'$. Deci polinomul $\frac{fg}{d}$ este un c.m.m.d.c. al lui f şi g.

Exemplu. Să se determine c.m.m.d.c. al polinoamelor

$$f = 2X^5 - 3X^4 - 5X^3 + X^2 + 6X + 3 \text{ şi } g = X^4 - X^3 - X^2 + 1.$$

Aflăm mai întâi c.m.m.d.c. al celor două polinoame folosind algoritmul lui Euclid. Prima împărţire:

$$\begin{array}{r|l}
2X^5 - 3X^4 - 5X^3 + X^2 + 6X + 3 & X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-2X^5 + 2X^4 + 2X^3 - 2X \qquad\qquad & 2X - 1 \\ \cline{1-1}
-X^4 - 3X^3 + X^2 + 4X + 3 & \\
X^4 - X^3 - X^2 + 1 & \\ \cline{1-1}
-4X^3 + 4X + 4 &
\end{array}$$

Restul $-4X^3 + 4X + 4$ îl împărţim cu -4 şi obţinem $X^3 - X - 1$

A doua împărţire:

$$\begin{array}{r|l}
X^4 - X^3 - X^2 + 1 & X^3 - X - 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 + X^2 + X \qquad & X - 1 \\ \cline{1-1}
-X^3 + X + 1 & \\
X^3 - X - 1 & \\ \cline{1-1}
- \quad - &
\end{array}$$

Ultimul rest nenul este $X^3 - X - 1$. Deci polinomul $d = X^3 - X - 1$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g. Cum $g = (X^3 - X - 1)(X - 1)$, atunci polinomul

$$m = \frac{fg}{d} = f\frac{g}{d} = f \cdot (X - 1) = (X - 1)(2X^5 - 3X^4 - 5X^3 + X^2 + 6X + 3) =$$
$$= 2X^6 - 5X^5 - 2X^4 + 6X^3 + 5X^2 - 3X - 3$$

este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g.

Observaţie. Aşa cum am definit c.m.m.m.c. a două polinoame (a se vedea definiţia 6.3.1) putem defini c.m.m.m.c. al unui număr finit de polinoame. Mai precis, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt n polinoame, atunci un polinom m se numeşte un c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$, dacă verifică următoarele condiţii:

i) $f_1 \mid m$, $f_2 \mid m$, ..., $f_n \mid m$,

ii) dacă m' este un polinom astfel încât $f_1 \mid m'$, $f_2 \mid m'$, ..., $f_n \mid m'$ atunci $m \mid m'$.

Teorema 6.3.2 nu se poate extinde la cazul când avem n polinoame $f_1, f_2, \ldots, f_n$ cu $n \geq 3$. În acest caz c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se calculează astfel: se determină un c.m.m.m.c. m_1 al polinoamelor f_1, f_2; apoi se determină un c.m.m.m.c. m_2 a polinoamelor m_1 și $f_3, \ldots$, în final, se determină un c.m.m.m.c. m_{n-1} al polinoamelor m_{n-2} și f_n. Polinomul $m = m_{n-1}$ este un c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Exerciții

1. Să se arate că polinomul
$X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 6X + 6$ se divide la $X - 1$; se cere câtul împărțirii.

2. Să se arate că polinomul
$X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ se divide la $X^2 - 2X + 1$; se cere câtul împărțirii.

3. Să se determine parametrul m, astfel încât polinomul $X^3 - 3X^2 + 6X - m$ să se dividă la $X - 2$.

4. Să se determine a, b, c, astfel încât polinomul $X^5 - 2X^4 + 18X^3 + aX^2 + bX + c$ să se dividă la $X^3 - 3X^2 + 10X - 9$.

5. Să se determine relațiile între numerele m, p, q, astfel încât polinomul $X^3 + pX + q$ să fie divizibil cu polinomul $X^2 + mX + 1$.

6. Să se determine a și b astfel încât polinomul $aX^4 + bX^3 - 3$ să fie divizibil cu $(X - 1)^2$.

7. Dacă un polinom f nu divide nici pe g_1 și nici pe g_2, rezultă de aici că f nu divide produsul g_1g_2?

8. Fie f, g_1, g_2 trei polinoame astfel încât $f \mid g_1g_2$. Dacă f și g_1 sunt prime între ele să se arate că $f \mid g_2$.

9. Dacă f este prim cu g și cu h, să se arate că f este prim cu produsul gh.

10. Folosind algoritmul lui Euclid, să se determine c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g dacă
a) $f = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$, $g = 3X^6 - 7X^4 + 3X^3 - 7X$;
b) $f = X^6 - X^5 - X^4 + 8X^3 - 5X^2 - 2X + 10$, $g = 3X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 2X - 2$;
c) $f = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5$, $g = X^6 + X^3 - X^2 + X$;
d) $f = X^6 + 3X^5 - 12X^4 - 52X^3 - 52X^2 - 12X$, $g = X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 22X - 12$;
e) $f = X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$, $g = X^5 - 3X^4 + X^3 - X^2 + 3X - 1$;
f) $f = X^5 - 10X^3 + X$, $g = X^4 - 4\sqrt{2}X^3 + 6X^2 + 4\sqrt{2}X + 1$;
g) $f = X^4 - 4X^3 + 1$, $g = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + X + 1$;
h) $f = X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + X - 1$, $g = X^4 - 2X^2 + 3X - 2$;
i) $f = X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 6X^3 - 5X^2 + X - 6$, $g = X^4 + 2X^3 + 3X^2 - 6X - 8$.

11. Dacă d este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g și h este un polinom nenul, să se arate că dh este un c.m.m.d.c. al polinoamelor fh și gh.

12. Să se determine A și B astfel încât polinomul $AX^{n+2} + BX^n + 2$ să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

13. Să se arate că polinoamele f și g sunt prime între ele, unde:
a) $f = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$, $g = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$;
b) $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$, $g = X^2 - 2X^2 + 1$;
c) $f = X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 12X^2 - 2X + 12$, $g = X^3 - 5X^2 - 3X + 17$.

§ 7. Rădăcinile polinoamelor. Ecuații algebrice

7.1. Rădăcinile polinoamelor. Teorema lui Bézout

Fie f un polinom nenul cu coeficienții complecși. Un număr complex, $a \in \mathbb{C}$ se numește *rădăcină a polinomului* f dacă $f(a) = 0$.

Exemple. 1) Să considerăm polinomul de gradul întâi

$$f = aX + b \ (a \neq 0). \text{ Se vede că } f\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$$

și deci $-\dfrac{b}{a}$ este rădăcină a polinomului $aX + b$.

2) Să considerăm polinomul $g = X^2 + 1$. Cum $g(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ și $g(-i) = (-i)^2 + 1 = 0$, rezultă că i și $-i$ sunt rădăcini ale polinomului $X^2 + 1$.

Teorema lui Bézout. Fie $f \neq 0$ un polinom nenul. Numărul $a \in \mathbb{C}$ este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă $X - a$ divide f.

Demonstrație. Dacă a este rădăcină a lui f adică $f(a) = 0$, atunci din teorema 5.2.1 rezultă că restul împărțirii lui f prin $X - a$ este zero și deci $X - a$ divide pe f.

Invers, dacă $X - a$ divide pe f, atunci există un polinom g astfel încât $f = (X - a)g$. Dar atunci $f(a) = (a - a)g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$ și deci a este rădăcină a lui f.

Aplicație

Să se găsească condiția ca polinoamele

$$f = aX^2 + bX + c \text{ și } g = a'X^2 + b'X + c'$$

să aibă o rădăcină comună.

Fie α o rădăcină comună a celor două polinoame. Atunci α este rădăcină și a polinomului

$$a'f - ag = a'(aX^2 + bX + c) - a(a'X^2 + b'X + c') = (a'b - ab')X + (a'c - ac').$$

Deci $(a'b - ab')\alpha + (a'c - ac') = 0$. Dacă $a'b - ab' \neq 0$ obținem că

$$\alpha = \frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}. \text{ Cum } f(\alpha) = 0, \text{ atunci}$$

$$a\left(\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}\right)^2 + b\,\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'} + c = 0$$

și făcând calculele obținem:

$$\boxed{(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0}$$

Dacă $a'b - ab' = 0$, atunci $a'c - ac' = 0$ și relația obținută este verificată și în acest caz.

7.2. Ecuații algebrice. Teorema lui D'Alembert-Gauss și teorema lui Abel-Ruffini

Se numește *ecuație algebrică* cu o singură necunoscută o ecuație de forma

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

unde f este un polinom nenul.

Dacă f este polinomul $f = a_0 + a_1X \ldots + a_nX^n (a_n \neq 0)$ atunci ecuația algebrică (1) se scrie:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0. \qquad (1')$$

Gradul polinomului f se numește *gradul ecuației algebrice* (1) sau (1') iar numerele complexe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se numesc *coeficienții ecuației algebrice* (1) sau (1').

Dacă coeficienții ecuației algebrice sunt numere reale (respectiv, raționale), atunci se zice că ecuația algebrică (1) sau (1') este cu coeficienții reali (respectiv, raționali). O ecuație care nu poate fi redusă la o ecuație algebrică folosind operațiile: adunare, înmulțire, ridicare la putere etc. se numește *transcendentă*.

Exemple. 1) Ecuația $x^3 - 3x + 7 = 0$ este o ecuație algebrică de gradul 3 cu coeficienți raționali.

2) Ecuația $\sqrt{3}\,x^4 - \sqrt[4]{2}\,x^2 + 7x - 1 = 0$ este o ecuație algebrică de gradul 4 cu coeficienți reali.

3) Ecuațiile $\sin x - 7x + 1 = 0$; $\log x = 3 - 2x$; $\sin x - \log x + 1 = 0$ sunt transcendente.

Să considerăm din nou ecuația algebrică

$$f(x) = 0. \qquad (1)$$

Numărul complex a se numește *soluția* sau *rădăcina ecuației* (1) dacă are loc egalitatea $f(a) = 0$. *Se vede că a este rădăcină a ecuației* (1) *dacă și numai dacă a este rădăcină a polinomului f.*

Determinarea rădăcinilor ecuației algebrice (1) este una dintre cele mai importante probleme ale matematicii și multă vreme a constituit obiectul principal al algebrei.

Încă din antichitate, matematicienii știau să determine rădăcinile ecuațiilor algebrice de gradul I și gradul II. În secolul al XVI-lea, în perioada Renașterii italiene, matematicienii italieni: Scipione del Ferro și Niccola Tartaglia au determinat formula de rezolvare pentru ecuația de gradul III, iar Ludovico Ferrari a determinat formula de rezolvare pentru ecuația de gradul IV. Acestea au fost publicate de Gerolamo Cardano în Ars Magna (1545).

Încercările ulterioare ale matematicienilor de a găsi formule de rezolvare pentru ecuațiile algebrice de grad mai mare decât patru au fost nadarnice. Problema a fost rezolvată (în sens negativ) de matematicianul norvegian H. Abel și matematicianul italian A. Ruffini la începutul secolului al XIX-lea. Mai exact, ei au demonstrat:

Teorema Abel-Ruffini. Ecuația algebrică generală* de grad mai mare decât patru nu poate fi rezolvată prin radicali (cu alte

* Prin ecuație algebrică generală de gradul n înțelegem o ecuație de forma (1') în care coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt „variabile".

cuvinte, nu există nici o formulă (expresie) cu radicali formată cu coeficienții ecuației, care să fie o rădăcină a ecuației).

Vom vedea că există totuși ecuații particulare de grad >4 pentru care putem să dăm formule de determinare a rădăcinilor lor (a se vedea § 8).

Teorema următoare are o mare importanță pentru algebră:

Teorema fundamentală a algebrei. Orice ecuație algebrică

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

de grad mai mare sau egal cu 1 și cu coeficienții complecși are cel puțin o rădăcină complexă.

Această teoremă mai poartă numele de teorema lui D'Alembert-Gauss.

Nu vom da demonstrațiile teoremei fundamentale a algebrei și a teoremei Abel-Ruffini deoarece depășesc cadrul manualului.

Trebuie să observăm că teorema fundamentală a algebrei are caracter existențial; nici o demonstrație a acestei teoreme nu ne indică vreun procedeu de obținere a rădăcinilor ecuațiilor algebrice. Acest lucru ne arată că nu există nici o contradicție între cele două teoreme enunțate mai înainte. În schimb teorema lui Abel-Ruffini ne spune că pentru ecuațiile de grad >4 nu se poate da un procedeu (formulă) de determinare a rădăcinilor sale (pentru ecuațiile algebrice de grad $\leqslant 4$, există formule de determinare a rădăcinilor lor).

Observație. Din clasele precedente am văzut că lărgirea noțiunii de număr a fost impusă printre altele de rezolvarea anumitor ecuații. De exemplu, introducerea numerelor întregi a fost impusă de faptul că nu orice ecuație cu coeficienți numere naturale are o rădăcină număr natural. De *exemplu*, ecuația $x + 1 = 0$ nu are nici o rădăcină număr natural.

În continuare introducerea numerelor raționale a fost impusă, de asemenea, de faptul că nu orice ecuație cu coeficienți întregi are o rădăcină număr întreg. De *exemplu*, ecuația $2x + 1 = 0$ nu are nici o rădăcină număr întreg.

Introducerea numerelor reale a fost impusă printre altele de faptul că nu orice ecuație cu coeficienții raționali are o rădăcină rațională. Nu avem de considerat decât ecuația $x^2 - 2 = 0$ care nu are nici o rădăcină rațională.

Am văzut în manualul de clasa a IX-a că introducerea numerelor complexe, în algebră, a fost impusă de faptul că nu orice ecuație cu coeficienții reali are o rădăcină reală. De *exemplu*, ecuația $x^2 + 1 = 0$ nu are nici o rădăcină reală.

Teorema lui d'Alembert—Gauss ne arată că procesul de lărgire pe această cale a noțiunii de număr se oprește la numerele complexe.

7.3. Rădăcini multiple

Am văzut că teorema lui Bézout spune că dacă a este o rădăcină a polinomului $f \neq 0$ atunci $X - a$ divide pe f. Acest lucru ne permite să definim noțiunea de rădăcină multiplă a unui polinom.

Definiția 7.3.1. Fie $f \neq 0$ un polinom nenul și $a \in \mathbf{C}$ o rădăcină a lui f. Numărul natural $m \geq 1$ cu proprietățile că $(X-a)^m$ divide pe f și $(X-a)^{m+1}$ nu divide pe f se numește *ordinul de multiplicitate al rădăcinii* a. Dacă $m = 1$, atunci a se numește *rădăcină simplă*, dacă $m \geq 2$, atunci a se numește *rădăcină multiplă* de ordinul m, dacă $m = 2, 3, \ldots$, atunci a se numește rădăcină *dublă*, *triplă*, ...

Exemple. 1) Polinomul $f = X^2 - 2X + 1$ are rădăcina $a = 1$ deoarece $f(1) = 0$. Cum $f = (X-1)^2$ atunci se vede că $a = 1$ este rădăcină dublă pentru polinomul f.

2) Polinomul $f = X^4 - 5X^3$ are rădăcina $a = 0$. Cum $X^3 | f$ și X^4 nu divide pe f, atunci $a = 0$ este o rădăcină triplă. De asemenea f are și rădăcina simplă $a = 5$.

Teorema 7.3.2. Fie $f \neq 0$ un polinom nenul. Dacă $a_1 a_2, \ldots, a_r$ sunt rădăcini ale lui f având ordinele de multiplicitate k_1, respectiv $k_2, \ldots$ respectiv k_r atunci polinomul $(X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2} \ldots (X-a_r)^{k_r}$ divide pe f.

Demonstrație. Vom face demonstrație prin inducție după r. Dacă $r = 1$, atunci faptul că $(X-a_1)^{k_1}$ divide pe f, rezultă din definiția 7.3.1. Presupunem afirmația adevărată pentru r și o vom demonstra pentru $r+1$.

Din ipoteza de inducție rezultă că polinomul $(X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2} \ldots (X-a_r)^{k_r}$ divide pe f, adică există polinomul g astfel încât $f = (X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2} \ldots (X-a_r)^{k_r} g$. Deoarece a_{r+1} este rădăcină multiplă de ordinul k_{r+1}, atunci $(X-a_{r+1})^{k_{r+1}}$ divide pe f adică există un polinom h astfel încât $f = (X-a_{r+1})^{k_{r+1}} h$. Rezultă atunci că

$$(X-a_{r+1})^{k_{r+1}} h = (X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2} \ldots (X-a_r)^{k_r} g. \tag{1}$$

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}$ sunt distincte între ele două câte două, deoarece în caz contrar, dacă am avea $a_i = a_j (i \neq j)$, atunci a_i ar avea ordinul de multiplicitate mai mare sau egal cu $k_i + k_j$.

În egalitatea (1) facem $X = a_{r+1}$ și atunci

$$(a_{r+1}-a_1)^{k_1}(a_{r+1}-a_2)^{k_2} \ldots (a_{r+1}-a_r)^{k_r} g(a_{r+1}) = 0,$$

de unde rezultă că $g(a_{r+1}) = 0$. Din teorema lui Bézout obținem că $X - a_{r+1}$ divide pe g, adică există polinomul g_1 astfel încât $g = (X-a_{r+1})g_1$. Înlocuind în egalitatea (1) obținem:

$$(X-a_{r+1})^{k_{r+1}} h = (X-a_1)^{k_1} \ldots (X-a_r)^{k_r}(X-a_{r+1})g_1$$

de unde rezultă că

$$(X-a_{r+1})^{k_{r+1}-1} h = (X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2} \ldots (X-a_r)^{k_r} g_1. \tag{2}$$

Dacă $k_{r+1} - 1 > 0$, în egalitatea (2) facem din nou $X = a_{r+1}$. Exact ca mai sus obținem că $g_1(a_{r+1}) = 0$ și deci aplicând din nou teorema lui Bézout obținem că: $g_1 = (X-a_{r+1})g_2$. Dar atunci $g = (X-a_{r+1})^2 g_2$. Înlocuind în (1) obținem:

$$(X-a_{r+1})^{k_{r+1}} h = (X-a_1)^{k_1} \ldots (X-a_r)^{k_r}(X-a_{r+1})^2 g_2,$$

rezultă că:

$$(X-a_{r+1})^{k_{r+1}-2} h = (X-a_1)^{k_1} \ldots (X-a_r)^{k_r} g_2.$$

Dacă $k_{r+1} - 2 > 0$ continuăm procedeul ca mai sus. După $k_{r+1} - 2$ paşi găsim un polinom g_{k_r+1} astfel încât $g = (X - a_{r+1})^{k_r+1} g_{k_r+1}$.

Cum $f = (X - a_1)^{k_1} \dots (X - a_r)^{k_r} g$ obţinem:

$$f = (X - a_1)^{k_1} \dots (X - a_r)^{k_r} (X - a_{r+1})^{k_r+1} g_{k_r+1} \text{ şi deci}$$

$(X - a_1)^{k_1}(X - a_2)^{k_2} \dots (X - a_{r+1})^{k_r+1}$ divide pe f.

Consecinţa 7.3.3. Orice polinom f de grad $n \geqslant 1$ are n rădăcini (nu neapărat distincte; o rădăcină se repetă de un număr de ori egal cu ordinul său de multiplicitate).

Demonstraţie. Din teorema fundamentală a algebrei, polinomul f are cel puţin o rădăcină. Fie $a_1, a_2, \dots, a_r$ toate rădăcinile lui f (luăm în considerare o rădăcină de atâtea ori cât este ordinul său). Din teorema 7.3.2, există un polinom $g \neq 0$ astfel încât $f = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_r)g$. Dacă grad $g \geqslant 1$ atunci aplicând din nou teorema fundamentală a algebrei obţinem că g are o rădăcină a_{r+1} care este evident rădăcină şi a lui f. Deci f ar avea $r + 1$ rădăcini, contradicţie. Deci trebuie ca grad $g = 0$ şi deci $g = a \in \mathbf{C}$. Atunci $f = a(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_r)$. Cum gradul polinomului $a(X - a_1) \cdot (X - a_2) \dots (X - a_r)$ este r, atunci trebuie ca $r = n$ şi deci f are n rădăcini.

Consecinţa 7.3.4. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ un polinom cu $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$. Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt rădăcinile lui f, atunci

$$f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n). \qquad (1)$$

În plus, descompunerea (1) a lui f în factori liniari este unică.

Demonstraţie. Din demonstraţia consecinţei 7.3.3. f se scrie:

$$f = a(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n) \text{ unde } a \in \mathbf{C},\ a \neq 0.$$

Cum coeficientul termenului de grad maxim al polinomului

$a(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$ este aX^n atunci trebuie ca

$$a = a_n \text{ şi deci } f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n).$$

Să demonstrăm unicitatea descompunerii (1). Presupunem că f mai admite şi descompunerea $f = b(X - y_1)(X - y_2) \dots (X - y_m)$, unde $b, y_1, y_2, \dots, y_m$ sunt numere complexe şi $b \neq 0$.

Cum gradul polinomului $b(X - y_1)(X - y_2) \dots (X - y_m)$ este m trebuie ca $m = n$. Termenul de grad maxim al polinomului $b(X - y_1)(X - y_2) \dots (X - y_n)$ este bX^n şi deci $b = a_n$. Deci $a_n(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n) = a_n(X - y_1)(X - y_2) \dots (X - y_n)$, sau (2) $(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n) = (X - y_1)(X - y_2) \dots (X - y_n)$.

Din egalitatea (2) prin înlocuirea lui X cu x_1, obţinem:

$$(x_1 - y_1)(x_1 - y_2) \dots (x_1 - y_n) = 0.$$

Deci trebuie ca unul din factori $x_1 - y_1, x_1 - y_2, \dots, x_1 - y_n$ să fie zero. Putem presupune că $x_1 - y_1 = 0$ şi deci $x_1 = y_1$. Înlocuind în egalitatea (2) obţinem:

$$(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n) = (X - x_1)(X - y_2) \dots (X - y_n).$$

Simplificând cu $X - x_1$ obţinem egalitatea

$$(X - x_2) \dots (X - x_n) = (X - y_2) \dots (X - y_n).$$

Înlocuim acum pe X cu x_2. Exact ca mai sus găsim că $x_2 = y_2$. Continuând procedeul găsim că $x_3 = y_3, \dots, x_n = y_n$.

Observaţie. Consecinţa 7.3.4 este foarte utilă în multe aplicaţii în care se cere aflarea c.m.m.d.c. a două polinoame f şi g care pot fi descompuse în factori liniari.

În acest caz c.m.m.d.c. al celor două polinoame este produsul factorilor comuni la puterea cea mai mică.

De exemplu, fie polinoamele:

$$f = (X-1)^4(X+2)^3(X-3)(X-4) \text{ şi } g = (X-1)^3(X+2)(X+6).$$

Un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g este polinomul $d = (X-1)^3(X+2)$.

Consecinţa 7.3.5. Dacă un polinom f de gradul n se anulează pentru $n+1$ valori distincte, atunci $f = 0$.

Demonstraţie. Presupunem că $f \neq 0$. Dacă $n = \text{grad } f = 0$ atunci $f = a \in \mathbb{C}$ şi $a \neq 0$. În acest caz f nu se anulează pentru nici o valoare. Dacă $n = \text{grad } f \geq 1$, atunci f are n rădăcini. Dar din ipoteză f are cel puţin $n+1$ rădăcini, contradicţie. Deci trebuie ca $f = 0$.

7.4. Relaţii între rădăcini şi coeficienţi (formulele lui Viète)

Teorema 7.4.1. Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom de grad n $(a_n \neq 0)$. Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt rădăcinile lui f, atunci:

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\[2ex] \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\[2ex] \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex] \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}\ldots \\[2ex] \ldots\alpha_n = (-1)^k\dfrac{a_{n-k}}{a_n}, \\[2ex] \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Invers, dacă numerele complexe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfac relaţiile (1), atunci $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt rădăcinile polinomului f.

(Numărul de termeni din sumele (1) este egal cu $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n$)

Demonstraţie. Am văzut în consecinţa 7.3.4 că f poate fi scris sub forma

$$(2)\quad f = a_n(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_n).$$

Dar

$$(3)\quad f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n.$$

Efectuând calculele în (2) și egalând coeficienții lui $X^k (0 \leqslant k \leqslant n)$ din (2) cu coeficienții lui X^k din (3) obținem formulele (1). De exemplu, coeficientul lui X^{n-1} din (2) este $-a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$. Deci trebuie ca $a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$, de unde obținem $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$. În continuare coeficientul lui X^{n-2} din (2) este $a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \quad + \alpha_{n-1}\alpha_n)$ care trebuie să fie egal cu coeficientul lui X^{n-2} din (3) care este a_{n-2}.

Deci $a_{n-2} = a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$, de unde obținem

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

În același mod se obțin și celelalte egalități din (1).

Invers, presupunem că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfac relațiile (1). Considerăm polinomul $g = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$. Făcând înmulțirile obținem:

$$g = X^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)X^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)X^{n-2} + \\ + \ldots + (-1)^n\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

Ținând cont de relațiile (1) deducem că:

$$g = X^n + \frac{a_{n-1}}{a} X^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} X^{n-2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} = \\ = \frac{1}{a_n}(a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0) = \frac{1}{a_n} f.$$

Din egalitatea $g = \frac{1}{a_n} f$ rezultă că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt rădăcini și pentru f.

Relațiile (1) se numesc *relațiile între rădăcinile și coeficienții polinomului* f sau *relațiile lui Viète*.

Dacă considerăm ecuația asociată

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{4}$$

atunci relațiile (1) se numesc și *relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației* (4).

Să scriem relațiile lui Viète pentru cazul când polinomul f are gradul 2 sau 3. Să presupunem că f este de gradul 2 adică f este de forma $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$.

În acest caz relațiile (1) se scriu astfel:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{-a_1}{a_2}, \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2}. \end{cases} \tag{5}$$

Dacă f este de gradul 3, adică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$,

atunci relațiile (1) se scriu astfel:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \dfrac{-a_2}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{+a_1}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \dfrac{-a_0}{a_3}. \end{cases}$$

Relațiile lui Viète sunt foarte utile în numeroase aplicații când se cere să se determine rădăcinile unui polinom (sau ecuații) și când se cunoaște o relație suplimentară între rădăcini.

Exemple

1) Fie polinomul $f = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$.
Să se determine rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale lui f știind că $x_1 + x_2 = x_3$.
Scriem relațiile lui Viète

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 29, \\ x_1x_2x_3 = 20. \end{cases} \tag{6}$$

Cum $x_1 + x_2 = x_3$ atunci din prima relație din (6) avem că

$$2x_3 = 10 \text{ și deci } \boxed{x_3 = 5}$$

Din $x_1x_2x_3 = 20$, obținem $x_1x_2 = 4$. Formăm sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1x_2 = 4, \end{cases}$$

care dă rădăcinile: $\boxed{x_1 = 1}$ și $\boxed{x_2 = 4}$.

2) Să se găsească relația între a, b, c știind că rădăcinile polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ sunt în progresie geometrică.
Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui f atunci avem relațiile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases} \tag{7}$$

Cum x_1, x_2, x_3 sunt în progresie geometrică atunci $x_2^2 = x_1x_3$.
Din relația a 3-a din (7) obținem:

$$x_2^3 = -c.$$

Cum $f(x_2) = 0$, atunci $x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ de unde rezultă că $ax_2^2 + bx_2 = 0$. Deci $x_2 = 0$ sau $x_2 = -\dfrac{b}{a}$. Dacă $x_2 = -\dfrac{b}{a}$ din $x_2^3 = -c$ obținem

$$\boxed{a^3c - b^3 = 0} \tag{8}$$

Dacă $x_2 = 0$, atunci $x_1x_3 = 0$ și din relația a doua din (7) obținem $b = 0$. Cum $x_2^3 = -c$, atunci $c = 0$. Dar se observă că relația (8) este îndeplinită pentru $b = c = 0$.

3) Fie polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX + c$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Notăm $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ $(n \geqslant 1)$. Să se determine în funcție de a, b, c, expresia S_n pentru $n = 1, 2, 3, 4$.

Pentru $n = 1$ avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a$.

Pentru $n = 2$, avem $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 - 2b$.

Presupunem că $n \geqslant 3$. Cum x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui f avem egalitățile:

$$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$$
$$x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0,$$
$$x_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c = 0.$$

Înmulțim prima egalitate cu x_1^{n-3}, a doua cu x_2^{n-3} și a treia cu x_3^{n-3}:

$$x_1^n + ax_1^{n-1} + bx_1^{n-2} + cx_1^{n-3} = 0,$$
$$x_2^n + ax_2^{n-1} + bx_2^{n-2} + cx_2^{n-3} = 0,$$
$$x_3^n + ax_3^{n-1} + bx_3^{n-2} + cx_3^{n-3} = 0,$$

care adunate dau:

$$\boxed{S_n + aS_{n-1} + bS_{n-2} + cS_{n-3} = 0} \qquad (9)$$

Dacă în această egalitate $n = 3$, obținem:

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0.$$

Cum $S_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 3$ obținem

$$S_3 = -aS_2 - bS_1 - 3c = -a(a^2 - 2b) + ab - 3c = -a^3 + 3ab - 3c.$$

În egalitatea (9) facem $n = 4$. Obținem
$S_4 + aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0$, de unde rezultă că $S_4 = -aS_3 - bS_2 - cS_1 = -a(-a^3 + 3ab - 3c) - b(a^2 - 2b) + ac = a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac$.

Relațiile lui Viète sunt folosite în numeroase probleme în care se cere să se determine ecuația, cunoscându-se relațiile între rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adică cunoscându-se numerele $s_1, s_2, \ldots, s_n$ date de relațiile:

$$\begin{cases} s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \\ s_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n. \end{cases} \qquad (10)$$

În acest caz ecuația care are ca rădăcini pe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este următoarea:

$$\boxed{x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n = 0} \qquad (11)$$

Într-adevăr, este clar că polinomul $g = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$ are ca rădăcini pe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Efectuând calculele și ținând cont de relațiile (10) obținem

$$g = X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n,$$

ceea ce arată că ecuația (11) are rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Exemple. 1) Fie ecuația $x^3 - 5x + 1 = 0$. Să se determine ecuația care are ca rădăcini dublul rădăcinilor ecuației date.

Să notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - 5x + 1 = 0$ și cu y_1, y_2, y_3 rădăcinile ecuației pe care vrem să o determinăm.

Avem $y_1 = 2x_1, y_2 = 2x_2, y_3 = 2x_3$. Atunci $y_1 + y_2 + y_3 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 0$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (2x_1)(2x_2) + (2x_1)(2x_3) + (2x_2)(2x_3) = 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4(-5) = -20$, $y_1y_2y_3 = 8$, $x_1x_2x_3 = -8$.

Aplicând formula (11) ecuația care are ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3 este

$$x^3 - 20x + 8 = 0.$$

2) Fie ecuația $x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0$. Să se determine ecuația care are ca rădăcini inversele rădăcinilor ecuației date.

Să notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 + 7x + 1$ și cu y_1, y_2, y_3 rădăcinile ecuației pe care vrem să o determinăm.

Avem

$$y_1 = \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{1}{x_2}, \quad y_3 = \frac{1}{x_3}.$$

Atunci

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -7,$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = -1,$$

$$y_1y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2x_3} = -1.$$

Ecuația de gradul 3 care are ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3 este următoarea:

$$x^3 + 7x^2 - x + 1 = 0.$$

Observații. 1) Presupunem că avem $f(x) = 0$, o ecuație algebrică de gradul n și vrem să deducem o altă ecuație algebrică de gradul n, $g(y) = 0$, ale cărei rădăcini y sunt legate de rădăcinile x ale ecuației $f(x) = 0$ printr-o relație dată $y = \varphi(x)$.

În cazul acesta se poate proceda astfel.

Din relațiile

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

se elimină x și ecuația care se obține în y este ecuația căutată. Ca exemplificare să considerăm din nou exemplul 2). Ecuația este $x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0$, iar relația dată este

$$y = \frac{1}{x}.$$

Din relațiile:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0, \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

eliminăm pe x. Avem $x = \dfrac{1}{y}$, care înlocuit în prima relație dă:

$$\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{7}{y} + 1 = 0,$$

de unde obținem ecuația $y^3 + 7y^2 - y + 1 = 0$.

2) Procedeul expus aici nu este recomandabil ori de câte ori este posibilă eliminarea lui y din relațiile:

$$\begin{cases} f(z) = 0, \\ y = \varphi(z), \end{cases}$$

În caz că această eliminare este dificilă se vor utiliza relațiile lui Viète.

Exerciții

1. Aplicând teorema lui Bézout să se determine parametrii a și b astfel încât polinomul $X^4 - 4X^3 + 4X^2 + aX + b$ să se dividă cu $X^2 - 4X + 3$. Să se determine apoi câtul împărțirii.
2. Să se determine rădăcinile polinomului $X^3 - 3X^2 + 2X + 6$ știind că are rădăcina $\alpha = -1$.
3. Să se determine parametrul m și apoi să se afle rădăciile polinomului $X^3 - 6X^2 + 8X + m$ știind că are rădăcina $\alpha = 2$.
4. Să se determine parametrii a și b știind că polinomul $X^4 - 5X^3 + 8X^2 + aX + b$ are rădăcina dublă $\alpha = 1$.
5. Să se determine ecuația de gradul cel mai mic care are ca rădăcini numerele 1, 2, -2.
6. Să se determine ecuația de gradul ce mai mic care are rădăcina triplă 1 și rădăcinile simple 2 și -3.
7. Să se găsească c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g:
   a) $f = (X-1)^5(X+1)^3(X-3)^2(X-4)$, $g = (X-1)^3(X+1)^2(X-4)^5$;
   b) $f = (X^2-1)^2(X^3-1)(X-2)$; $g = (X-1)^4(X-2)^5$;
   c) $f = (X^5-1)(X^3-1)(X+3)^2$; $g = (X^2+1)^2(X+3)^4(X-1)$.
8. Să se arate că două polinoame nenule f și g din $\mathbf{C}[X]$ sunt prime între ele dacă și numai dacă nu au nici o rădăcină comună.
9. Dacă $f, g \in \mathbf{C}[X]$ au același grad, atunci f și g au aceleași rădăcini dacă și numai dacă polinoamele f și g au coeficienți proporționali.
10. Aplicând teorema lui d'Alembert-Gauss să se arate că dacă $f \in \mathbf{C}[X]$ este un polinom de grad ≥ 2, atunci funcția polinomială asociată

$$\tilde{f}: \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ \tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$$

nu este injectivă, dar este surjectivă.
11. Fie f și g două polinoame din $\mathbf{C}[X]$. Să se arate că funcțiile polinomiale $\tilde{f}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ și $\tilde{g}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sunt egale dacă și numai dacă polinoamele f și g sunt egale.
12. Dacă $f(X)$ este un polinom arbitrar să se arate că $f(f(X)) - f(X)$ este divizibil prin $f(X) - X$.
13. Folosind teorema lui Bézout și teorema 7.3.2 să se arate că:
   a) Polinomul $(X+1)^{6n+1} + X^{6n+2}$ se divide la $X^2 + X + 1$;
   b) Polinomul $(X-1)^{n+2} - X^{2(n-1)}$ se divide la $X^2 - X + 1$;
   c) Polinomul $(X+1)^{3n+2} + X + 2$ se divide la $X^2 + 3X + 3$;
   d) Polinomul $(X^2+1)^{6n+2} + X^4 + 1$ se divide la $X^2 + X + 1$;
   e) Polinomul $X^{6n+5} + X^{3n+4} + 1$ se divide la $X^2 + X + 1$;
   f) Polinomul $(X+1)^{12n+1} + X^{3n+2}$ se divide la $X^2 + X + 1$.
14. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ având rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuația care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă
   a) $y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = 3x_2 + x_1 + x_3$, $y_3 = 3x_3 + x_1 + x_2$;
   b) $y_1 = \frac{1}{2}x_1$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2$; $y_3 = \frac{1}{2}x_3$;

c) $y_1 = -x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = -x_2 + x_1 + x_3$, $y_3 = -x_3 + x_1 + x_2$;

d) $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, $y_3 = x_3^2$;

e) $y_1 = x_1 + x_2x_3$, $y_2 = x_2 + x_1x_3$, $y_3 = x_3 + x_1x_2$.

15. Să se determine parametrul m astfel ca o rădăcină a ecuației $x^3 - 28x + m = 0$ să fie dublul altei rădăcini.

16. Să se determine λ astfel încât suma a două rădăcini ale ecuației $2x^3 - 4x^2 - 7x + \lambda = 0$ să fie egală cu 1.

17. Să se determine relația între p și q astfel încât rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 + px + q = 0$ să se găsească în relația $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. Dacă $q = p$ și $p \in R - \{0\}$, să se arate că condiția din enunț nu poate fi îndeplinită.

18. Să se rezolve ecuațiile algebrice

a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$,

b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$,

c) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$,

știind că suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două rădăcini.

19. Să se rezolve ecuațiile algebrice

$4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0$, $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$,

știind că rădăcinile sale sunt în progresie aritmetică.

20. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului

$$X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3,$$

să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ și $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

21. Fie ecuația $x^3 + 3x + 1 = 0$. Să se determine ecuația de gradul al treilea care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă:

a) $y_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_3 + x_1}{x_2}$, $y_3 = \frac{x_1 + x_2}{x_3}$;

b) $y_1 = \frac{x_1x_3}{x_1} + 1$, $y_2 = \frac{x_1x_3}{x_2} + 1$, $y_3 = \frac{x_1x_2}{x_3} + 1$;

c) $y_1 = 1 + \frac{1}{x_1^2}$, $y_2 = 1 + \frac{1}{x_2^2}$, $y_3 = 1 + \frac{1}{x_3^2}$.

22. Să se arate că 1 este o rădăcină dublă pentru polinomul

$$X^{3n} - nX^{n+2} + nX^{n-1} - 1.$$

23. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii 2 pentru polinomul

$$X^6 - 6X^5 + 12X^4 - 9X^3 + 6X^2 + 12X + 8.$$

24. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii -1 pentru polinomul $X^5 + 6X^4 + 14X^3 + 16X^2 + 9X + 2$ și apoi să se afle rădăcinile polinomului dat.

25. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinilor 1 și -1 pentru polinomul

$$X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1.$$

§ 8. Rezolvarea câtorva ecuații algebrice de grad superior

Sunt bine cunoscute formulele de determinare a rădăcinilor pentru ecuațiile de gradul I și gradul II. De asemenea se cunosc formule de rezolvare pentru ecuația de gradul III (numite *formulele lui Càrdano*) precum și pentru ecuația de gradul IV. Inconvenientul acestor formule (pentru ecuațiile de gradele III și IV) constă în aceea că sunt foarte complicate și nu au

nici o utilizare practică. Am văzut prin teorema lui Abel-Ruffini că pentru ecuația generală de grad $\geqslant 5$ nu se pot da formule de determinare a rădăcinilor prin radicali.

Ceea ce ne propunem în acest paragraf este de a arăta că există ecuații de grad $\geqslant 3$ pentru care se pot da formule de determinare a rădăcinilor lor.

Ecuații binome. Forma ecuațiilor binome este

$$x^n - a = 0 \ (a \in \mathbb{C},\ n \geqslant 1). \tag{1}$$

Rezolvarea acestor ecuații este făcută în manualul de Geometrie. Se procedează astfel: se scrie numărul a sub formă trigonometrică, $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Atunci soluțiile ecuației (1) sunt date de formula

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

unde $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Trebuie să observăm că rezolvarea ecuațiilor de gradele I și II se reduce la rezolvarea unor ecuații binome.

Ideea de rezolvare a ecuațiilor de grad $\geqslant 3$ este de a o reduce la rezolvarea succesivă a unui număr de ecuații simple (de regulă ecuații binome).

Ecuații bipătrate. Forma generală a ecuațiilor bipătrate este:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{2}$$

unde $a, b, c \in \mathbb{C}$ și $a \neq 0$.

Rezolvarea ecuației (2) se face astfel.

Se face substituția $x^2 = y$ și obținem ecuația de gradul doi

$$ay^2 + by + c = 0. \tag{3}$$

Ecuația (3) se numește *rezolventa* ecuației (2) și rădăcinile ei sunt:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ și } y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Din egalitatea $x^2 = y$ obținem ecuațiile

$$x^2 = y_1 \text{ și } x^2 = y_2.$$

Ecuația $x^2 = y_1$ are rădăcinile:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},\quad x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Ecuația $x^2 = y_2$ are rădăcinile

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},\quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

Numerele x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației (2).

Rădăcinile ecuației (2) pot fi cuprinse în formula

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}} \tag{4}$$

numită *formula de rezolvare* a ecuației bipătrate.

Observaţie. În formula de rezolvare a ecuaţiei bipătrate apar radicali de forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$. Aceşti radicali pot fi aduşi la o sumă sau diferenţă de radicali mai simpli utilizând formula

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \tag{5}$$

($A^2 \geqslant B$, $B \geqslant 0$) (această formulă se verifică direct prin ridicare la pătrat).

Exemple. 1) Să rezolvăm ecuaţia bipătrată

$$x^4 + 5x^2 - 6 = 0.$$

Facem substituţia $x^2 = y$ şi obţinem ecuaţia rezolvată

$$y^2 + 6y - 6 = 0$$

care are rădăcinile $y_1 = -6$ şi $y_2 = 1$.

Rădăcinile ecuaţiei bipătrate sunt:

$$x_1 = i\sqrt{6},\ x_2 = -i\sqrt{6},\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$$

2) Să rezolvăm ecuaţia bipătrată

$$x^4 - 3x^2 + 9 = 0.$$

Făcând substituţia $x^2 = y$ obţinem ecuaţia rezolvantă

$$y^2 - 3y + 9 = 0.$$

care are rădăcinile $y_1 = 4 + \sqrt{7}$ şi $y_2 = 4 - \sqrt{7}$.

Rădăcinile ecuaţiei bipătrate sunt:

$$x_1 = \sqrt{4+\sqrt{7}};\ x_2 = -\sqrt{4+\sqrt{7}};\ x_3 = \sqrt{4-\sqrt{7}};\ x_4 = -\sqrt{4-\sqrt{7}}.$$

Dar folosind formulele (5) de transformare a radicalilor dubli obţinem:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}$$

şi

$$\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-7}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-7}}{2}} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}.$$

Deci

$$x_1 = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}},\quad x_2 = -\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}},\quad x_3 = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}},\quad x_4 = -\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}.$$

Ecuaţii reciproce. O ecuaţie de forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,\ (a_n \neq 0).$$

având proprietatea $a_{n-i} = a_i$ oricare ar fi $i (0 \leqslant o \leqslant n)$, se numeşte *ecuaţie reciprocă de gradul n* (altfel spus, o ecuaţie este reciprocă dacă coeficienţii termenilor egal depărtaţi de extremi sunt egali).

Observaţie. Pe noi ne interesează numai rezolvarea ecuaţiilor reciproce de grad $\geqslant 3$. Dacă $n = 3$ obţinem forma generală a ecuaţiei reciproce de gradul 3:

$$ax^3 = cx^2 + bx + a = 0\ (a \neq 0).$$

Dacă $n = 4$, obţine forma generală a ecuaţiei reciproce de gradul 4:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0\ (a \neq 0).$$

Dacă $n = 5$, obţinem forma generală a ecuaţiei de gradul 5:

$$ax^4 + bx^4 + cx^2 + cx^2 + bx + a = 0\ (a \neq 0).$$

Să dăm câteva proprietăţi generale pentru ecuaţiile reciproce de gradul n:

1° *Dacă ecuaţia reciprocă are rădăcina n, atunci ea are şi rădăcina* $\frac{1}{n}$.

Într-adevăr, dacă $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ este o ecuaţie reciprocă având rădăcina α, atunci $a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$. Cum $\alpha \neq 0$ (în caz contrar, ar rezulta $a_0 = 0$ şi deci $a_i = 0$) putem să împărţim cu α^n şi obţinem relaţia

$$a_n + a_{n-1} \frac{1}{\alpha} + \ldots + a_2 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} + a_1 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + a_0 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0.$$

Ţinând cont de faptul că $a_i = a_{n-i}$ oricare ar fi i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ obţinem

$$a_n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \frac{1}{\alpha} + a_0 = 0$$

şi deci şi $\frac{1}{\alpha}$ este de asemenea rădăcină.

2° *Orice ecuaţie reciprocă de grad impar are rădăcina* $x = -1$.

Într-adevăr fie

$$f(x) = a_{2p+1} x^{2p+1} + a_{2p} x^{2p} + \ldots + a_{p+1} x^{p+1} + a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

o ecuaţie reciprocă de grad impar $n = 2p + 1$.

Înlocuind $x = -1$, obţinem în membrul stâng numărul

$$f(-1) = a_{3p+1} (-1)^{2p+1} + a_{2p} (-1)^{2p} + \ldots + a_{p+1} (-1)^{p+1} + a_p (-1)^p + \ldots + a_1(-1) + a_0 = -a_{2p+1} + a_{2p} + \ldots + a_{p+1} (-1)^{p+1} + a_p(-1)^p + \ldots + (-a_1) + a_0.$$

Cum $a_0 = a_{2p+1}$, $a_1 = a_{2p}$, $a_2 = a_{2p-1}$, ..., $a_p = a_{p+1}$, atunci grupând termenii egal depărtaţi de extremi obţinem

$$f(-1) = (a_0 - a_{2p+1}) + (a_{2p} - a_1) + (a_2 - a_{2p-1}) + \ldots + (-1)^p (a_p - a_{p+1}) = 0.$$

Rezultă că $x = -1$ este rădăcină pentru ecuaţia reciprocă de grad impar.

3° *Orice ecuaţie reciprocă de grad impar*

$$f(x) = a_{2p+1} x^{2p+1} + a_{2p} x^{2p} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

se reduce la rezolvarea ecuaţiei $x + 1 = 0$ şi a *unei ecuaţii reciproce de grad*

$$g(x) = b_{2p} x^{2p} + b_{2p-1} x^{2p-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0.$$

Într-adevăr, din 2° ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcina $a = -1$. Conform teoremei lui Bézout putem scrie

$$f(x) = (x + 1)\, g(x).$$

Presupunem că $g(x) = b_{2p} x^{2p} + b_{2p-1} x^{2p-1} + \ldots + b_1 x + b_0$. Deci

$$a_{2p+1} x^{2p+1} + a_{2p} x^{2p} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x + 1) \cdot (b_{2p} x^{2p} + b_{2p-1} x^{2p-1} + \ldots + b_1 x + b_0),$$

de unde obţinem

$$a_{2p+1} = b_{2p},\ a_0 = b_0,$$
$$a_{2p} = b_{2p} + b_{2p-2},\ a_1 = b_1 + b_0,$$
$$a_{2p-1} = b_{2p-1} + b_{2p-2},\ a_2 = b_2 + b_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cum $a_i = a_{2p+1-i}$, oricare ar fi i $(0 \leqslant i \leqslant 2p+1)$ obținem din primele egalități $b_0 = b_{2p}$. Cum $b_{2p} + b_{2p-1} = b_1 + b_0$ obținem $b_1 = b_{2p-1}$. Din următoarele egalități obținem că $b_2 = b_{2p-1}$.

Procedând la fel, din egalitățile următoare deducem în final că $b_i = b_{2p-i}$ oricare ar fi $0 \leqslant i \leqslant 2p$.

Deci ecuația $b_{2p}x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + \ldots + b_1x + b_0 = 0$ este reciprocă.

Rezolvarea ecuației reciproce de gradul III

Am văzut că forma generală a ecuației reciproce de gradul III este:

(1) $$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0).$$

Această ecuație are rădăcina $x = -1$. Atunci putem să scriem

$$(x+1)\,[ax^2 + (b-a)\,x + a] = 0.$$

Ecuația (1) admite rădăcinile

$$x_1 = -1 \text{ și } x_2, x_3 \text{ date de ecuația } ax^2 + (b-a)x + a = 0.$$

Exemplu. Să rezolvăm ecuația $2x^3 + x^2 + x + 2 = 0$. Această ecuație este o ecuație reciprocă de gradul III. Ea se scr

$$(x+1)(2x^2 - x + 2) = 0$$

care are rădăcinile $x_1 = -1$ și x_2, x_3 care sunt rădăcinile ecuației $2x^2 - x + 2 = 0$, adică

$$x_2 = \frac{1 + i\sqrt{15}}{4}, \quad x_3 = \frac{1 - i\sqrt{15}}{4}.$$

Rezolvarea ecuației reciproce de gradul IV

Am văzut că forma generală a ecuației reciproce de gradul IV este:

(1) $$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad (a \neq 0).$$

Cum $a \neq 0$, ecuația (1) nu admite ca rădăcină pe $x = 0$. În (1) împărțim cu x^2 și obținem ecuația

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

sau grupând termenii în mod convenabil avem:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Facem substituția $y = x + \frac{1}{x}$. Cum $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ obținem ecuația în y

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0 \text{ sau } (2)\ ay^2 + by + c - 2a = 0.$$

Ecuația (2) se numește *rezolventa ecuației* (1).

Dacă y_1, y_2 sunt rădăcinile ecuației (2) atunci obținem două ecuații:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \text{ și } x + \frac{1}{x} = y_2$$

sau

$$(3)\ x^2 - y_1x + 1 = 0$$

și

$$(4)\ x^2 - y_2x + 1 = 0.$$

Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației (3) și x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației (4) atunci x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile ecuației (1).

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Această ecuație este o ecuație reciprocă de gradul IV. Împărțim cu x^2 și obținem:

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

sau

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Notăm $y = x + \frac{1}{x}$. Cum $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ obținem ecuația

$$6(y^2 - 2) + 5y - 38 = 0$$

sau

$$6y^2 + 5y - 50 = 0,$$

care are rădăcinile $y_1 = -\frac{10}{3}$ și $y_2 = \frac{5}{2}$.

Avem ecuațiile:

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \text{ și } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

Prima ecuație are rădăcinile

$$x_1 = -3, \; x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Ecuația a doua are rădăcinile $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

Deci $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$ sunt rădăcinile ecuației date.

Rezolvarea ecuației reciproce de gradul V

Forma generală a ecuației de gradul V este

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Deoarece această ecuație este de grad impar, din proprietatea 3° rezolvarea acestei ecuații se reduce la rezolvarea ecuației $x + 1 = 0$ și a unei ecuații reciproce de gradul IV.

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0.$$

Această ecuație este o ecuație reciprocă de gradul V.

Deoarece este de grad impar această ecuație admite soluția $x = -1$.

Putem scrie:

$$6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = (x + 1)(6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6).$$

Deci obținem ecuația reciprocă de gradul IV:

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Împărțind cu x^2 obținem:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

Facem substituția $y = x + \frac{1}{x}$. Obținem ecuația de gradul II

$$6y^2 - 5y - 50 = 0 \text{ care are soluțiile } y_1 = -\frac{5}{2},\ y_2 = \frac{10}{3}.$$

Din ecuația $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ obținem $x_2 = -2,\ x_3 = -\frac{1}{2}$.

Din ecuația $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ obținem $x_4 = 3,\ x_5 = \frac{1}{3}$.

Deci ecuația dată are rădăcinile

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = 3,\ x_5 = \frac{1}{3}.$$

Observații. 1) Am văzut că ecuația reciprocă de gradul IV se reduce la rezolvarea unor ecuații de gradul II, făcând substituția $x + \frac{1}{x} = y$. Se poate arăta (exercițiul 10), folosind binomul lui Newton, că orice ecuție reciprocă de gradul $n = 2p$ se reduce, folosind aceeași substituție $x + \frac{1}{x} = y$, la rezolvarea unei ecuații de gradul p și a p ecuații de gradul II.

2) *În unele manuale mai vechi sunt numite ecuații reciproce și ecuațiile de forma*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

avînd proprietatea următoare:

$$a_i = -a_{n-i} \text{ oricare ar fi } i,\ 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Se observă imediat că dacă $n = 2p$ (număr par) atunci din $a_p = -a_{2p-p}$ obținem $a_p = -a_p$ și deci $a_p = 0$.

Orice ecuație reciprocă de tipul (1) are ca rădăcină pe $x = 1$. Atunci, conform teoremei lui Bézout putem scrie:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - 1)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) \text{ sau}$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - b_{n-1}) x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2}) x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (b_0 - b_1) x - b_0$$

de unde obținem egalitățile:

$$a_n = b_{n-1},\ a_0 = -b_0,$$
$$a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1},\ a_1 = b_0 - b_1,$$
$$a_{n-2} = b_{n-3} - b_{n-2},\ a_2 = b_1 - b_2.$$

Din prima egalitate, cum $a_0 = -a_n$, obținem $b_0 = b_{n-1}$.
Din a doua egalitate, cum $a_1 = -a_{n-1}$, obținem $b_1 = b_{n-2}$.
Din a treia egalitate, cum $a_2 = -a_{n-2}$, obținem $b_2 = b_{n-3}$.
Continuând astfel obținem că $b_i = b_{(n-1)-i}$ oricare ar fi i, $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, ceea ce ne arată că ecuația

$$b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

este o ecuație reciprocă.
În concluzie orice ecuație

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

avînd proprietatea că $a_i = -a_{n-i} (0 \leqslant i \leqslant n)$, *se reduce la rezolvarea unei ecuații reciproce de gradul* $n - 1$.

Exerciţii

1. Să se rezolve ecuaţiile bipătrate

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; b) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;

c) $x^4 - (1+\sqrt{2})x^2 + \sqrt{2} = 0$; d) $x^4 - 4x + 1 = 0$;

e) $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$; f) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;

g) $32x^4 - 12x^2 + 1 = 0$; h) $x^4 - 1 = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 40$; b) $\sqrt{2x^2 + 7x^2 - 5} = x^2 + x$;

c) $\sqrt{x^2 + 3} = 4 - 2x^2$; d) $x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5$.

3. Să se determine ecuaţia de gradul IV, având ca rădăcini:

a) $x_1 = -4,\ x_2 = 4,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$;

d) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{1}{6},\ x_4 = \frac{1}{6}$;

c) $x_1 = -3i,\ x_2 = 3i,\ x_3 = -2i,\ x_4 = 2i$;

d) $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -5,\ x_4 = 5$.

4. Să se determine natura rădăcinilor ecuaţiilor:

a) $x^4 - 2(m-2)x^2 - m^2 = 0$; b) $4x^4 + mx^2 + 9 = 0$;

c) $mx^4 + 4x^2 + 1 = 0$; d) $m^4x^4 - 2(2m^2+3)x^2 + 1 = 0$;

e) $3x^4 - 5mx^2 - 2m^2 = 0$; f) $x^2(2x^2+5) - m(x^2+3) = 3$.

5. Să se rezolve ecuaţia

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

şi apoi să se aplice formula pentru cazurile particulare

a) $x^6 + 15x^3 - 16 = 0$; b) $x^6 + 2x^3 - 3 = 0$;

c) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$; d) $x^6 + 12x^2 - 13 = 0$.

6. Să se rezolve ecuaţiile de gradul III:

a) $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$; b) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$;

c) $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$; d) $2x^3 - x^2 + x - 2 = 0$;

e) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$; f) $3x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0$;

g) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; h) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$.

7. Să se determine relaţia între a şi b astfel încât ecuaţia reciprocă de gradul III $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ ($a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$) să aibă:

i) două rădăcini egale,

ii) toate rădăcinile reale,

iii) două rădăcini complexe.

8. Să se rezolve ecuaţiile reciproce de gradul IV;

a) $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$;

b) $x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1 = 0$;

c) $4x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 4 = 0$;

d) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$;

e) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$;

f) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$;

g) $x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 1 = 0$.

9. Să se determine numărul real a astfel încât ecuația:

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0,$$

să aibă toate rădăcinile reale.

10. Să se arate că orice ecuație reciprocă de gradul $n = 2p$ se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul p și a p ecuații de gradul doi.

11. Să se rezolve ecuațiile reciproce de gradul V:

a) $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0$;

b) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

c) $5x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x + 5 = 0$.

§ 9. Polinoame cu coeficienți reali

Teorema 9.1. Fie f un polinom nenul cu coeficienți reali. Dacă $\alpha = a + ib$, $(b \neq 0)$ este o rădăcină complexă a lui f, atunci:
1° $\bar{\alpha} = a - ib$ este de asemenea o rădăcină a lui f,
2° α și $\bar{\alpha}$ au același ordin de multiplicitate.

Demonstrație. 1° Am văzut în §4 (proprietatea iii) că $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$. Cum $f(\alpha) = 0$, atunci $f(\bar{\alpha}) = 0$ și deci $\bar{\alpha}$ este o rădăcină a lui f.

2° Presupunem că m este ordinul de multiplicitate al lui α. Rezultă că există un polinom g astfel încât $f = (X - \alpha)^m g$ și $g(\alpha) \neq 0$. Cum $b \neq 0$, atunci $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Cum $f(\bar{\alpha}) = 0$, atunci $(\bar{\alpha} - \alpha)^m g(\bar{\alpha}) = 0$ de unde obținem că $g(\bar{\alpha}) = 0$. Din teorema lui Bézout obținem că există un polinom g_1 astfel încât
$g = (X - \bar{\alpha})g_1$. Deci $f = (X - \alpha)^m g = (X - \alpha)^m (X - \bar{\alpha})g_1 = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})(X - \alpha)^{m-1}g_1 = [X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha}](X - \alpha)^{m-1}g_1$. Cum $\alpha + \bar{\alpha} = 2a$ și $\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$ atunci $f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - \alpha)^{m-1}g_1$. Cum polinomul $X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ are coeficienți reali deducem că polinomul $f_1 = (X - \alpha)^{m-1}g_1$ are coeficienți reali. Putem să scriem

$$f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)f_1.$$

Dacă $m > 1$ continuăm procedeul cu polinomul f_1. Cum f_1 are rădăcina α atunci exact ca mai sus există un polinom g_2 astfel încât $f_1 = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - \alpha)^{m-2}g_2$. Deci $f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - \alpha)^{m-2}g_2$ și polinomul $f_2 = (X - \bar{\alpha})^{m-2}g_2$ are coeficienți reali. Dacă $m > 2$ atunci α este rădăcină pentru f_2 și continuăm procedeul cu f_2.

În felul acesta după m pași obținem un polinom h cu coeficienți reali astfel încât

$$f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^m h = (X - \alpha)^m (X - \bar{\alpha})^m h.$$

Din această egalitate rezultă că $(X - \bar{\alpha})^m | f$. De asemenea $(X - \bar{\alpha})^{m+1}$ nu divide pe f, deoarece în caz contrar am avea că $h(\alpha) = 0$. Cum h are coeficienți reali atunci $\alpha = \bar{\alpha}$ este de asemenea o rădăcină a lui h și deci $X - \alpha | h$. Dar atunci $(X - \alpha)^{m+1} | f$ ceea ce contrazice faptul că α are ordinul de multiplicitate m.

În concluzie α este o rădăcină cu ordinul de multiplicitate m. Această teoremă este foarte utilă în multe aplicații când se cere determinarea rădăcinilor unui polinom (ecuații algebrice) și când se cunoaște o rădăcină complexă a sa.

Exemple

1) Să se determine rădăcinile polinomului

$f = X^4 - 3X^3 - X^2 + 9X - 18$, știind că admite rădăcina $\alpha_1 = 1 + i\sqrt{2}$.

Conform teoremei 9.1 polinomul va avea ca rădăcină şi pe $\alpha_2 = 1 - i\sqrt{2}$, deci se va divide cu

$$(X - 1 - i\sqrt{2})(X - 1 + i\sqrt{2}) = X^2 - 2X + 3.$$

Efectuând împărţirea lui f prin $X^2 - 2X + 3$ se obţine descompunerea

$$f = (X^2 - 2X + 3)(X^2 - X - 6).$$

Polinomul $g = X^2 - X - 6$ are rădăcinile $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = 3$.

2) Să se arate că polinomul $f = (1 + X)^{6k+1} - (1 + X)^{6k+2} - 1$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$.

Rădăcinile lui $X^2 + X + 1$ sunt $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ şi $\beta = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Pentru a arăta că f se divide cu $X^2 + X + 1 = (X - \alpha)(X - \beta)$ trebuie să arătăm că $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Dar cum $\beta = \bar{\alpha}$ este suficient să dovedim că $f(\alpha) = 0$. Într-adevăr

$$f(\alpha) = (1 + \alpha)^{6k+1} - (1 + \alpha)^{6k+2} - 1.$$

Dar $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ şi deci $1 + \alpha = -\alpha^2$. Obţinem atunci $f(\alpha) = (-\alpha^2)^{6k+1} - (-\alpha^2)^{6k+2} - 1 = -\alpha^{12k+2} - \alpha^{12k+4} - 1 = -(\alpha^3)^{4k} \cdot \alpha^2 - (\alpha^3)^{4k} \cdot \alpha^4 - 1$.

Cum $\alpha^3 = 1$ avem că $f(\alpha) = -\alpha^2 - \alpha^4 - 1 = -\alpha^2 - \alpha \cdot \alpha^3 - 1 = -\alpha^2 - \alpha - 1 = -(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$.

Deci $f(\alpha) = 0$, ceea ce trebuia dovedit.

3) Fie polinomul $f = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + mX + 1$. Să se determine m ştiind că admite ca rădăcină pe i şi apoi să se găsească celelalte rădăcini.

Cum i este rădăcină trebuie să avem că $f(i) = 0$. Deci $i^6 + i^5 + 3i^4 + 2i^3 + 3i^2 + mi + 1 = 0$ de unde obţinem că $-1 + i + 3 - 2i - 3 + mi + 1 = 0$ sau $(m - 1)i = 0$ şi deci $m = 1$. Cum f are ca rădăcină pe i rezultă că are ca rădăcină pe şi $-i$. Deci f se divide cu produsul $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$. Deci $f = (X^2 + 1)(X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1)$.

Ecuaţia $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ este o ecuaţie reciprocă de gradul IV. Împărţim cu x^2 şi obţinem

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Notăm $y = x + \frac{1}{x}$; obţinem ecuaţia de gradul II în y:

$$y^2 + y = 0$$

care are rădăcinile $y_1 = 0$ şi $y_2 = -1$.

Ecuaţia $x + \frac{1}{x} = 0$ are rădăcinile $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

Ecuaţia $x + \frac{1}{x} = -1$ are rădăcinile $x_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Deci polinomul are ca rădăcini:

$$x_1 = i,\ x_2 = -i,\ x_3 = i,\ x_4 = -i,\ x_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Rădăcinile i şi $-i$ sunt duble.

În continuare vom da câteva consecinţe ale teoremei 9.1.

Consecința 9.2. Orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe (care nu sunt numere reale).

Din această consecință rezultă imediat:

Consecința 9.3. Orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.

Teorema 9.4. Orice polinom $f = a_0 + a_1 X + \dots + a X^n$ de grad ≥ 1 cu coeficienți reali este un produs de polinoame de gradul I sau gradul II cu coeficienți reali, adică poate fi scris sub forma

$$(1)\ f = a_n(X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_p)^{k_p}(X^2 + b_1 X + c_1)^{r_1} \dots$$
$$\dots (X^2 + b_s X + c_s)^{r_s} \text{ unde } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbf{R} \text{ și } b_1^2 - 4c_1 < 0,$$
$$\dots b_s^2 - 4c_s < 0.$$

Demonstrație. Conform consecinței 7.3.4 f are descompunerea (2) $f = a_n(X - \alpha_1)^{k_1}(X - \alpha_2)^{k_2} \dots (X - \alpha_n)^{k_n}$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sunt rădăcinile lui f. Presupunem că $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sunt toate rădăcinile reale ale lui f. Rădăcinile $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$ sunt complexe. Luăm rădăcina α_{p+1} care are ordinul de multiplicitate k_{p+1}. Cum $\bar{\alpha}_{p+1}$ este o rădăcină a lui f, există o rădăcină $\alpha_{p+i} (i \geq 2)$ astfel încât $\alpha_{p+i} = \bar{\alpha}_{p+1}$. După teorema 9.1 avem $k_{p+1} = k_{p+1}$. În descompunerea (2) grupăm factorul $(X - \alpha_{p+1})^{k_{p+1}}$ cu factorul

$$(X - \alpha_{p+i})^{k_{p+i}} = (X - \bar{\alpha}_{p+1})^{k_{p+1}}.$$

Notăm $r_1 = k_{p+1}$, $b_1 = -(\alpha_{p+1} + \bar{\alpha}_{p+1})$ și $c_1 = \alpha_{p+1} \cdot \alpha_{p+i}$.
Atunci în descompunerea (2) apare factorul

$(X - \alpha_{p+1})^{k_{p+1}}(X - \bar{\alpha}_{p+1})^{k_{p+1}} = (X^2 + b_1 X + c_1)^{r_1}$, unde $b_1, c_1 \in \mathbf{R}$. Dacă în continuare procedăm la fel cu toate rădăcinile complexe ale lui f descompunerea (2) a lui f se scrie sub forma (1).

Exerciții

1. Să se arate că dacă $a \neq b$, polinomul $f = aX^n + X^2 + bX + 1$ nu are rădăcinile de 1.
2. Să se determine a și b și apoi să se rezolve ecuația
$$x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0,\ a, b \in \mathbf{R},$$
știind că $1 + 2i$ este rădăcină a ecuației.
3. Fie ecuația
$$x^4 + (2a + 1)x^2 + 2(a + 1)^2x^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbf{R} \text{ cu } a \geq 0.$$ Să se arate că această ecuație admite cel mult două rădăcini reale.
4. Să se determine rădăcinile polinomului
$$f = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$$
știind că admite rădăcina i.
5. Să se rezolve ecuația
$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2 = 0$$
știind că admite rădăcina $1 + i$.
6. Să se rezolve ecuația
$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$$
știind că admite rădăcina $2 - i$.

7. Fie ecuația

$$x^4 - \alpha x^3 - \alpha x + 1 = 0 \text{ cu } \alpha \in \mathbf{R} \text{ și } |\alpha| < 1.$$

Să se arate că toate rădăcinile sunt de modul 1.

8. Să se determine m și n și apoi să se rezolve ecuația

$$x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$$

știind că admite rădăcina $1 + i$.

9. Știind că polinomul $f = 3X^4 - 5X^3 + 3X^2 + 4X + 2$ are rădăcina $1 + i$, să se găsească celelalte rădăcini și să se descompună polinomul f în produs de polinoame de gradul I și II cu coeficienți reali.

10. Să se descompună polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$ în factori cu coeficienți reali.

11. Să se descompună în factori cu coeficienți reali polinomul $X^4 + 1$.

12. Fie f și g două polinoame nenule cu coeficienți reali. Dacă polinomul $f(X^3) + Xg(X^3)$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$, atunci f și g au rădăcina 1.

13. Fie f și g două polinoame nenule cu coeficienți reali. Dacă polinomul $f(X^3) = X^n g(X^3)$, este divizibil cu $X^2 + X + 1$, unde n este un număr natural care nu este divizibil cu 3, atunci f și g au rădăcina 1.

14. Să se determine polinoamele cu coeficienți reali de gradul cel mai mic care au ca rădăcini:

a) rădăcina dublă 2 și rădăcina simplă $1 + i$,

b) rădăcina dublă i și rădăcina dublă $2 - i$,

c) rădăcina triplă $-1 - i$ și rădăcinile simple 1 și $-i$.

15. Să se rezolve ecuația

$$(x + i)^n + (x - i)^n = 0$$

și să se arate că are toate rădăcinile reale.

16. Să se arate că polinomul

$$X^{4a} + X^{4b+1} + X^{4c+2} + X^{4d+3}$$

a, b, c, d fiind numere naturale, este divizibil prin $X^3 + X^2 + X + 1$.

§ 10. Polinoame cu coeficienți raționali și polinoame cu coeficienți întregi

Teorema 10.1. Fie f un polinom nenul cu coeficienți raționali și $a+\sqrt{b}$ (cu $a, b \in \mathbf{Q}$, $b > 0$ și $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$) o rădăcină a lui f. Atunci:

1° $a - \sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină a lui f;

2° $a + \sqrt{b}$ și $a - \sqrt{b}$ au același ordin de multiplicitate

Demonstrație. 1°. Conform proprietății iv) din § 4, avem $f(a \pm \sqrt{b}) = A \pm B\sqrt{b}$. Însă $f(a + \sqrt{b}) = 0$, deci $A + B\sqrt{b} = 0$. Dacă $B \neq 0$ atunci $\sqrt{b} = -\dfrac{A}{B} \in \mathbf{Q}$. Dar $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$; deci trebuie ca $B = 0$. Cum $A + B\sqrt{b} = 0$ obținem că $A = 0$. În acest caz $f(a - \sqrt{b}) = A - B\sqrt{b} = 0$, și deci $a - \sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină a lui f.

2° Presupunem că $a + \sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f având ordinul de multiplicitate m. Deci

$$f = [X - (a + \sqrt{b})]^m g \text{ și } g(a + \sqrt{b}) \neq 0.$$

Cum $a-\sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f avem $f(a-\sqrt{b})=0$ şi deci

$$[a-\sqrt{b}-(a+\sqrt{b})^m]g(a-\sqrt{b})=0$$

sau

$$(-2\sqrt{b})^m g(a-\sqrt{b})=0.$$

Cum $b\neq 0$, atunci trebuie ca $g(a-\sqrt{b})=0$.

Din teorema lui Bézout putem scrie $g=[X-(a-\sqrt{b})]g_1$, şi deci $f=[X-(a+\sqrt{b})]^m(X-(a-\sqrt{b})]^m g_1=[X^2-2aX+a^2-b]\cdot[X-(a+\sqrt{b})]^{m-1}g_1$.

Cum $X^2-2aX+a^2-b$ este un polinom cu coeficienţi raţionali, rezultă că polinomul $f_1=[X-(a+\sqrt{b})]^{m-1}g_1$ are coeficienţi raţionali. În continuare se procedează exact ca în teorema 9.1.

Se obţine că $a-\sqrt{b}$ este o rădăcină având ordinul de multiplicitate m.

Observaţii. 1) Teorema 10.1 se aplică numai atunci când polinomul cu coeficienţi raţionali are o *rădăcină pătratică*, adică un număr real de forma $a\pm\sqrt{b}$ unde $b>0$ şi $\sqrt{b}$ nu este un număr raţional.

2) Teorema 10.1 nu mai este adevărată când polinomul f nu are coeficienţi raţionali.

De exemplu, polinomul $f=X^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})X+(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)$ are coeficienţi nu toţi numere raţionale. Rădăcinile lui f sunt $1+\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}-1$. Se observă că f nu are şi rădăcina $1-\sqrt{2}$.

Exemple. 1) Să se găsească rădăcinile polinomului $f=X^4-4X^3+X^2+6X+2$ ştiind că admite rădăcina $1-\sqrt{2}$. Din teorema 10.1 rezultă că f are şi rădăcina $1+\sqrt{2}$. Deci f se divide cu produsul $[X-(1-\sqrt{2})][X-(1+\sqrt{2})]=X^2-2X-1$. Efectuând împărţirea lui f cu X^2-2X-1, f se scrie

$$f=(X^2-2X-1)(X^2-2X-2).$$

Rădăcinile lui $g=X^2-2X-2$ sunt $1-\sqrt{3}$ şi $1+\sqrt{3}$. Deci f are rădăcinile $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

2) Să se determine un polinom f cu coeficienţi raţionali de gradul cel mai mic care admite ca rădăcini pe $3+i$ şi $1-\sqrt{2}$. Într-adevăr, acest polinom trebuie să aibă şi rădăcinile $3-i$ şi $1+\sqrt{2}$. Atunci f se divide cu produsul

$$[X-(3+i)][X-(3-i)][X-(1-\sqrt{2})][X-(1+\sqrt{2})]=$$
$$=(X^2-6X+10)(X^2-2X-1)=X^4-8X^3+21X^2-14X-10.$$

Deoarece ultimul polinom are coeficienţi raţionali, rezultă că $f=X^4-8X^3+21X^2-14X-10$.

Teorema 10.2. Fie $f=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n$ un polinom de gradul $n(n\geq 1)$ cu coeficienţi întregi. Dacă $\alpha=\frac{p}{q}$ (p, q numere prime între ele) este o rădăcină raţională a lui f atunci:

1° p divide termenul liber a_0;

2° b divide coeficientul termenului de grad maxim a_n.

Demonstraţie. Cum $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$, avem

$$a_0+a_1\frac{p}{q}+a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+\ldots+a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n=0. \quad (1)$$

Înmulțind (1) cu q^n, obținem

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0,$$

de unde obținem

$$(2) \qquad a_0q^n = p(-a_1q^{n-1} - a_2pq^{n-2} - \ldots - a_np^{n-1})$$

și

$$(3) \qquad a_np^n = q(-a_0q^{n-1} - a_1pq^{n-2} - \ldots - a_{n-1}p^{n-1}).$$

Din (2) rezultă că $p \mid a_0q^n$. Cum p și q sunt prime între ele, atunci p și q^n sunt prime între ele și deci trebuie ca p să dividă pe a_0.

Analog din (3) rezultă că $q \mid a_np^n$. Cum p și q sunt prime între ele obținem că q divide pe a_n.

Consecința 10.3. Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, un polinom cu coeficienți întregi. Dacă $\alpha = p$ este o rădăcină întreagă a lui f atunci p este un divizor al termenului liber a_0.

Demonstrație. Cum $\alpha = p = \frac{p}{1}$ atunci aplicând teorema 10,2 se obține că $p \mid a_0$.

Exemple. 1) Să se determine rădăcinile polinomului

$$f = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 8X + 4.$$

Mai întâi încercăm să vedem dacă f are rădăcini întregi. Acestea, dacă există, se găsesc printre divizorii lui 4 care sunt ± 1, ± 2, ± 4.

Se vede că

$$f(1) = 6 \text{ și } f(-1) = -6;$$

$$f(2) = 0 \text{ și } f(-2) = 6;$$

$$f(4) = 84 \text{ și } f(-4) = 276.$$

Deci 2 și -2 sunt rădăcini pentru f. Înseamnă că f se divide cu $(X-2)(X+2) = X^2-4$. Polinomul f se scrie

$$f = (X^2 - 4)(X^2 - 2X - 1).$$

Rădăcinile lui $X^2 - 2X - 1$ sunt $1 - \sqrt{2}$ și $1 + \sqrt{2}$. Deci polinomul f are rădăcinile: $= 2$, 3, $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$.

2) Să se determine rădăcinile polinomului

$$f = 6X^4 - 17X^3 - X^2 + 8X - 2.$$

Divizorii lui 2 sunt ± 1, ± 2, iar divizorii lui 6 sunt ± 1, ± 2, ± 3 și ± 6.

Conform teoremei 10.2 f poate avea rădăcinile fracționare:

$$\pm 1, \ \pm 2, \ \pm \frac{1}{2}, \ \pm \frac{2}{3}, \ \pm \frac{1}{6}, \ \pm \frac{2}{3}$$

Avem

$$f(1) = -6;\ f(-1) = 12;\ f(2) = -30;\ f(-2) = 210;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0;\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{3};\ f\left(\frac{1}{3}\right) = 0;\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{110}{27};\ f\left(\frac{1}{0}\right) = -\frac{83}{108};$$

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{59}{18};\ f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{26}{27};\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{9}.$$

Rezultă că f are rădăcinile $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$. Deci f se divide cu produsul $(2X - 1)(3X - 1)$.

Efectuând împărțirea obținem că $f = (2X - 1)(3X - 1)(X^2 - 2X - 2)$.

Rădăcinile polinomului $X^2 - 2X - 2$ sunt $1 - \sqrt{3}$ și $1 + \sqrt{3}$. Deci f are rădăcinile: 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $1 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$.

Exerciții

1. Să se rezolve ecuația $2x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0$, știind că admite rădăcina $1 + \sqrt{2}$.
2. Să se rezolve ecuația $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$, știind că admite rădăcina $1 - \sqrt{3}$.
3. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^5 - 3X^4 - 19X^3 + 19X^2 - 80X - 50$ știind că una din rădăcinile lui este $3 + 1$ iar alta este $1 - \sqrt{2}$.
4. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^4 - 5X^3 + X^2 + 6$ știind că admite rădăcina $3 + \sqrt{3}$.
5. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^5 + 3X^4 + X^3 - 5X^2 - 6X - 2$ știind că admite rădăcina $\sqrt{2}$.
6. Să se afle rădăcinile raționale ale următoarelor polinoame:
   a) $X^3 + 3X - 14$;
   b) $X^4 - X^3 - 12X^2 + 6X + 36$;
   c) $X^5 + 7X^4 + 18X^3 + 22X^2 + 13X + 3$;
   d) $X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 14X^2 + 12X + 3$;
   e) $X^5 + 3X^4 + 5X^3 - 50X^2 - 36X + 72$;
   f) $6X^4 - 43X^3 + 107X^2 - 108X + 36$.
7. Fie f un polinom nenul cu coeficienți întregi. Dacă $a = \frac{p}{q}$ este o fracție rațională ireductibilă, rădăcină a lui f, atunci $p - q$ divide pe $f(1)$.

Răspunsuri şi Indicaţii

Capitolul I

§ 1.

1. a) $3^{\frac{5}{6}}$; b) $\sqrt[15]{6^7}$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$; d) egale; e) egale; f) $2^{-\sqrt{3}}$; g) $5^{\sqrt{5}}$; h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$. **2.** a) $2^{-1-\sqrt{3}}$; b) $(3 \cdot 2^{20})^{\sqrt{3}}$; c) 5^{-5}; d) $2^{\frac{-\sqrt{3}}{4}}$. **3.** a) $x \geqslant 6$; b) $x \leqslant -2$; c) $x > -7$; d) $x < 1$; e) $x > -8$; f) $x < 8$; g) $x < \frac{1}{8}$; h) $x < -10$; i) $x > -21$. **4.** a) $m > n$; b) $m > n$; c) $m \leqslant n$; d) $m \geqslant n$. **5.** mai mari decât 1; b); d); e); mai mici decât 1: a); c); f) **6.** a) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{2}}$; b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$; d) $(\sqrt{5})^{\sqrt{3}-2}$. **7.** dacă $0 < a < 1$, atunci $x < 0$; dacă $a > 1$, atunci $x > 0$. **8.** a) pentru $a > 1$, da; pentru $0 < a < 1$, nu; b) da; c) da; d) nu.

§ 2.

1. a) $x < 1$; b) $-1 < x < 1$; c) $x \in \mathbf{R}$; d) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$; e) $x \in (2, 3)$; f) $x \in \mathbf{R}$; g) $x > 1$; h) $x > 1$; i) $0 < x < 1$. **2.** a) $\log_2 5$; b) $\log_3 10$; c) $\log_5 1/2$; d) 3. **3.** a) $x > 4$; b) $0 < x \leqslant \frac{5}{2}$; c) $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$; d) $x \in (1, 5]$. **5.** a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) -2; f) 2; g) 1; h) -1. **6.** a) $-0{,}15490$; b) $0{,}28170$; c) $1{,}54407$; d) $2{,}24304$; e) $1{,}19458$. **7.** a) $E = \log_7 8$; b) $E = \log_2 3$; c) $\frac{1}{2}$. **8.** a) $\log_a E = 2\log_a 41 + \frac{1}{13}(\log_a 41 + 5\log_a 37)$; b) $\log_a E = 3\log_a 31 + \frac{1}{7}(\log_a 41 + 4\log_a 33) - 2\log_a 17 - \frac{1}{8}(2\log_a 23 + \log_a 29)$;

c) $\log_a E = 2\log_a a + \frac{1}{5}(\log_a a + 3\log_a b + \log_a c)$. **9.** $x = \frac{12}{5}$; b) $x = \frac{7^2 6^3}{5^4}$;

c) $\alpha = \frac{a^2(a+b)^3}{(a-b)^4}$; d) $x = \sqrt[4]{\frac{(a-b)\sqrt[3]{3ab^2}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}\sqrt{2a}(a+b)^2}}$.

§ 3.

1. 0; 1; 2; 3; −2; −1; −4; 1; 2. **2.** 0,778; 1,176; 1,505; 1,477; 2,921.

§ 4.

1. a) 3; b) 5; c) −3; d) $-\frac{1}{2}$; e) 2; f) $\frac{4}{3}$; g) −4; h) $\frac{2}{3}$. **2.** a) $\frac{5}{2}$; b) 3; c) $\frac{5}{2}$; d) $x_1 = 7$, $x_2 = -1$; e) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. **3.** a) 4; b) 1; c) 3; d) 1; e) 2; **4.** a) 35; b) $\frac{17}{13}$; c) 24. **5.** a) 2; b) 1; c) 3; d) 4; e) $x_1 = \log_5 3$, $x_2 = \log_3 \frac{5}{4}$; f) 0; g) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; h) 0; i) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. **6.** a) 1; b) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{7}{5}$; c) 0; d) 0; e) 4. **7.** a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) 5; d) 4. **8.** a) 4; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 2. **9.** a) $x_1 = 10$; $x_2 = 10^{-4}$; b) $x_1 = \sqrt[3]{10}$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; c) $x_1 = 10^{\frac{1}{3}}$, $x_2 = 10^{-\frac{1}{6}}$; d) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{7}{4}}$. **10.** 100. **11.** $x_1 = 2^{\frac{1}{4}}$; $x_2 = 2^4$. **12.** a) $x_1 = 5$, $y_1 = 2$ sau $x_2 = 2$, $y_2 = 5$; b) (2, 1); c) (100, 10); d) (4, 2); e) $x_1 = 4$, $y_1 = 10$ sau $x_2 = 10$, $y_2 = 4$; f) (1, 1). **13.** a) $x \in (-3, -2) \cup (3, +\infty)$; b) $0{,}01 \leqslant x \leqslant 10\,000$; c) $x \leqslant -4$. **14.** a) $0 < x < 3$; b) $2 \leqslant x \leqslant 4$. **15.** Împărţind cu 5^x obţinem inecuaţia: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$; funcţia $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ este strict descrescătoare şi $f(2) = 1$ deci $f(x) > 1$ pentru $x < 2$. **16.** a) pentru $0 < a < 1$, $0 < x \leqslant a$; pentru $a > 1$, $x \geqslant a$; b) pentru $0 < a < 1$, $x > 5$; pentru $a > 1$, $0 < x < 5$.

Capitolul II

§ 1.

6. $S_1 = 1 \cdot 1! = 1$, $S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$, $S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$, $S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$. Examinând aceste rezultate, se observă că avem: $S_1 = 2! - 1$, $S_2 = 3! - 1$, $S_3 =$

$= 4! - 1$, $S_4 = 5! - 1$) Formulăm următoarea ipoteză: Pentru orice $n \geqslant 1$, are loc $S_n = (n+1)! - 1$. Aceasta se demonstrează prin inducție matematică. **8.** Avem $P_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $P_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3}$, $P_4 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{8}$. Observăm că $P_2 = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$, $P_3 = \frac{3+1}{2 \cdot 3}$, $P_4 = \frac{4+1}{2 \cdot 4}$. Atunci, în general, formulăm următoarea ipoteză: Pentru orice $n \geqslant 2$, avem $P_n = \frac{n+1}{2n}$. Aceasta se demonstrează prin inducție matematică.

§ 2.

1. a) (2). b) (4, 5), (5, 4); c) (α, β, γ), (α, γ, β), (β, α, γ), (β, γ, α), (γ, α, β), (γ, β, α). **2.** a) 5 760; b) 322 560; d) $n(n-1)$; e) $(n-3)(n-4)$; f) $\frac{n^2 + 3n + 1}{(n+2)!}$. **3.** a) $n = 7$; b) $n = 6$; c) $n = 2$.

4. a) $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **5.** $4! = 24$.

6. $10! = 3\,628\,800$. **8.** Dacă fixăm un element din A (pe primul loc) și un element din B (pe ultimul loc) obținem $(m + n - 2)!$ posibilități de a ordona celelalte elemente. Dar cum A are m elemente, iar B are n elemente rezultă că sunt mn posibilități de așezare a unui element din A pe primul loc și a unui element din B pe ultimul loc. Deci numărul permutărilor este $mn(m + n - 2)!$. **9.** Dacă n este numărul de elemente al mulțimii, atunci $500 \leqslant n! \leqslant 1\,000$, de unde $n = 6$. **10.** $6! - 5! = 600$. **11.** $(n-1)!$ **13.** 48. **14.** $A_8^4 = 1\,680$ moduri; dacă unul din examene trebuie dat în ziua a 8-a, atunci avem $4 \cdot A_7^3 = 840$ moduri. **15.** $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$. **16.** a) $(n-4)^2$; b) $n(n-1)$; c) $2nA_{2n+1}^{k+1}$.

17. a) $n \in \{9, 10\}$; b) 19; c) $n = 10$. **18.** Trebuie să avem $A_n^k = pA_n^{k-2}$. Rezultă că problema este posibilă dacă numărul p este produsul a două numere naturale consecutive, adică $p = m(m+1)$. Apoi, se deduce că $n = k + m - 1$. **19.** a) $\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{3, 4\}$. **20.** $C_{30}^3 = 4\,060$. **21.** $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. **22.** $C_9^4 = 126$; $C_{10}^4 = 210$. **23.** a) $C_n^2 - C_k^2 + 1$; b) $C_n^3 - C_k^3$. **24.** $C_{20}^4 \cdot C_2^1 = 14\,535$. **25.** $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1\,680$. **26.** a) 45; b) 560; c) $C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)n \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots (k+1)}$; d) 101; e) $C_{n-k}^{k+1} = \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-2k}{1 \cdot 2 \ldots (k+1)}$; f) 90. **27.** a) 6; b) 5; c) 4; d) 17. **28.** O clasă oarecare conține C_n^k submulțimi. Așadar se cere să determinăm care din numerele $C_n^0, C_n^k, \ldots, C_n$ este cel mai mare. Deoarece $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$, avem $C_n^{k-1} < C_n^k$, dacă

$\frac{n-k+1}{k} > 1$, de unde $k < \frac{n+1}{2}$; iar $C_n^{k-1} > C_n^{k-1}$, dacă $\frac{n-k+1}{2} < 1$, de unde $k > \frac{n+1}{2}$. Dacă $n = 2m$ este număr par, atunci C_{2m}^m este cel mai mare dintre numerele C_{2m}^k. Dacă $n = 2m+1$ este un număr impar, $C_{2m+1}^m = C_{2m+1}^{m+1}$ este cel mai mare. **29.** a) $n > 11$; b) $7 \leqslant n < 12$; c) $1 \leqslant k \leqslant 10$; d) $k > 9$. **32.** $C_7^3C_4^2 + C_7^2C_4^3 + C_7^1C_4^1$.

§ 3.

1. a) $x^{12} - 6ax^{10} + 15a^2x^8 - 20a^3x^6 + 15a^4x^4 - 6a^5x^2 + a^6$; b) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$; c) $a^2 - 4a\sqrt{ab} + 6ab - 4b\sqrt{ab} + b^2$; d) $x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$. **2.** a) $-330x$; b) $70\sqrt{2}a^3b^2\sqrt{a}$; c) $-20xy\sqrt{xy}$; d) $126a^2b\sqrt{a}\sqrt[3]{b}$, $-126a^2b^2\sqrt[3]{b^2}$.

3. a) $k = 3$; b) $\frac{286}{3^7}a^4$; c) $k = 6$.

4. $k = 9$. **5.** $n = 17$. **6.** 26. **7.** $70a^3$. **8.** Din dezvoltare, avem $nm - (m+p)k = 0$, $nm - 11(m+p) = 1$, $nm - 23(m+p) = 5$. Scăzând prima ecuaţie din celelalte două şi făcând câtul se obţine $\frac{k-11}{k-23} = \frac{1}{5}$, de unde $k = 8$. Apoi, $m + p = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{8}{3m}$ şi deoarece n este întreg pozitiv, avem $n = 8l$, cu l întreg pozitiv ş.a.m.d.

9. Punem $x^2 = y^3 = 1$. Atunci dezvoltând după formula binomului lui Newton şi înlocuind x^2 şi y^3 prin 1, obţinem suma căutată a coeficienţilor. Astfel suma coeficienţilor este egală cu $(7-6)^8 = 1$. **10.** a) 51; b) 26.

11. a) Deoarece $\frac{n+1}{k+1}C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$, atunci $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$; b) În dezvoltarea $(1+x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1x + C_{n+1}^2x^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}$ care se poate scrie: $\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0x + \frac{C_n^1}{2}x^2 + \frac{C_n^2}{3}x^3 + \ldots + \frac{C_n^n}{1+n}x^{n+1}$, pentru $x = 1$ se obţine a) şi pentru $x = k$ se obţine b); c) Se foloseşte egalitatea: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$; d) Se foloseşte aceeaşi egalitate ca la punctul c); e) Dacă S_1 este prima sumă, iar S_2 cea de-a doua se calculează $S_1 + iS_2$.

§ 4.

3. a) Numărul -102 este al 27-lea termen al şirului; b) nu este; c) nu este; d) nu este. **4.** b) în şir termenul al 8-lea şi termenul al 9-lea sunt egali cu -72; c) nu este. **5.** d) $3, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}$; e) $-1, 1, 0, 1, 1, 2$;

f) 3, 1, 2, −1, 3, −4. **6.** $a_{2k-1} = 0$, $a_{2k} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2k-1)} \cdot \frac{1}{k}$ $(k \geq 1)$.

8. a) $b_1 = 3$, $b_2 = 9$; b) $b_1 = -23$, $b_2 = -16$. **9.** a) $c_9 = 25$, $c_2 = 4$, $c_{15} = 43$; b) $c_{16} = 0$, $c_7 = 45$, $c_{19} = -15$. **10.** a) $a_{12} = 3{,}5$; b) $a_{18} = -24$; c) $a_{30} = -100{,}5$; d) $a_{25} = 8\frac{3}{7}$. **11.** a) 23; b) 130. **12.** a) $c_1 = 21$, $r = 1{,}5$; b) $c_1 = 120$, $r = -1$; c) $c_1 = 38$, $r = -2$; e) sau $a_1 = 2$, $r = 3$, sau $a_1 = 14$, $r = -3$. **13.** a) $y_1 = -3$, $r = 2$. **14.** a) 8 000; b) 650; c) −24 550; d) 4 850. **15.** a) $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$. **16.** a) 55; b) 1. **17.** 100; **19.** 2 500. **21.** a) Dacă α, β, γ sunt trei numere, atunci ele sunt în progresie aritmetică dacă $\alpha + \gamma = 2\beta$. Avem $\frac{a}{x+1} + \frac{x^2 + a - 1}{x(x+1)} = 2\frac{x + a - 1}{2x}$; b) vezi indicaţia de la a). **22.** vezi indicaţia de la problema precedentă. **23.** vezi indicaţia de la problema 21; i) este adevărată şi reciproca; ii) dacă $a + b + c \neq 0$ este adevărată şi reciproca.

25. Se face inducţie matematică după n. **28.** $b_7 = 96$, $b_9 = 384$, $b_{10} = -768$ sau $b_7 = 96$, $b_9 = 384$, $b_{10} = -768$; b) $b_8 = -10$, $b_{12} = -10$, $b_3 = 10$. **31.** a) $a_1 = 1$, $q = -3$; b) $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$; c) $a_1 = \frac{5^7}{3^8}$, $c_1 = 0{,}6$ sau $a_1 = -\frac{5^7}{3^5}$, $q_1 = -0{,}6$. **32.** d) 2 731; e) $\frac{x^{101} - 1}{x - 1}$, dacă $x \neq 1$; 101, dacă $x = 1$. **33.** a) Ecuaţia devine $\frac{x^{100} - 1}{x - 1} = 0$ cu $x \neq 1$; b) Ecuaţia devine $\frac{x^{101} - 1}{x - 1} = 0$ cu $x \neq 1$. **34.** $y_1 = 8$, $y_2 = 40$, $S_5 = 1\,248$

35. a) nu este; b) este; c) nu este. **37.** $x = \frac{b^2 - ac}{a + c - 2b}$, dacă $a + c - 2b \neq 0$.

38. Numerele x, y, z rezultă din sistemul: $xz = y^2$, $x + z = 2(y + a)$, $x(z + b) = (y + a)^2$.

Capitolul III

§ 1.

1. a) câtul −25, restul 188; b) −27, 132; c) 136. 10; d) −2 342, 0 **2.** 87 şi 6 525; soluţia este unică. **3.** 6, 5, 1, 4, 13, 7 **6.** Se ţine cont de unicitatea împărţirii cu rest. **7.** 24. **8.** Dacă n este par atunci n^2 este de forma $4k$; dacă n este impar atunci n^2 este de forma $8k + 1$ (în particular fiind şi de forma $4k' + 1$, cu $k' = 2k$); nu există numere pătrate perfecte care să dea restul 2 sau 3 prin împărţirea la 4

§ 2.

2. ± 1, ± 2. **3.** Rezultă $a = 3k \pm 1$, $b = 3k' \pm 1$ şi se analizează toate cazurile. **4.** $1\,000 = 999 + 1 = 27 \cdot 37 + 1 = 37p + 1$. Din formula binomului lui Newton rezultă $1\,000^k - 1 = (37p + 1)^k - 1 = 37l$, $l \in \mathbf{N}$. **5.** $p = 3k - 1$. **6.** $9^{20} - 7^{20}$ are ultima cifră 0. **8.** Avem $(n + 1)^n = n^n + C_n^1 n^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2} \cdot n^2 + C_n^{n-1} \cdot n + 1 = n^2 \cdot k + 1$, $k \in \mathbf{N}$. **9.** Din $(n + 1) \mid (n + 1)^2$ rezultă că $(n + 1) \mid n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1$ deci $(n + 1) \mid 2n$. Dar $(n + 1) \mid 2(n + 1)$, deci $(n + 1) \mid 2n + 2 - 2n$. Prin urmare $(n + 1) \mid 2$, adică $n \in \{-3, -2, 0, 1\}$. **10.** $n^3 - n = (n - 3)(n^2 + 3n + 9) + 24$; deci $n - 3$ este divizor al lui 24; adică $n - 3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$.

§ 3.

1. a) 4; b) 15; c) 19; d) 76; e) 12; f) 15. **4.** $a = -25$, $b = 35$. **5.** $a = 24$, $b = 9$ sau $a = 72$, $b = 3$. **6.** Dacă $d \mid 2k + 1$ şi $d \mid 9k + 4$ atunci $d \mid 9(2k + 1) - 2(9k + 4)$ deci $d \mid 1$. **7.** Pentru $k = 17l + 9$, c.m.m.d.c. este 17, în rest numerele sunt prime între ele. **8.** Dacă $(k, l) = d'$ atunci $d'd \mid ka$ şi $d'd \mid lb$, deci $d'd \mid d$, adică $d' = \pm 1$.

§ 4.

3. 48 şi respectiv 1 260. **4.** $7^4 \cdot 11^2$. **5.** Fie p un număr prim, cu $p \mid ab$. Atunci $p \mid a$ sau $p \mid b$; dacă $p \mid a$ şi $p \mid a + b$ atunci $p \mid b$, absurd. Celelalte situaţii se tratează analog. Dacă a şi b au parităţi diferite atunci $a + b$ şi $a - b$ sunt impare şi dacă $p \mid a \pm b$, atunci $p \mid a + b + a - b$, deci $p \mid 2a$, adică $p \mid a$. Prin urmare $p \mid a + b - a$, absurd.

6. Dacă $d \mid a$ şi $d \mid b$, atunci $d \mid a + b$, deci $d = \pm 1$.

7. Avem $[a, b] = \dfrac{a + b}{(a, b)} = a \cdot b$. Deci $ab \mid c$, deoarece c este multiplu comun pentru a şi b. **8.** Dacă $p \mid a$ şi $p \mid bc$, cu p prim atunci $p \mid b$ sau $p \mid c$, absurd.

9. Avem $\dfrac{b}{(a, b)} \Big| \dfrac{ac}{(a, b)}$, deci $\dfrac{b}{(a, b)} \Big| \dfrac{a}{(a, b)} \cdot c$, dar $\dfrac{b}{(a, b)}$ este prim cu $\dfrac{a}{(a, b)}$, deci $\dfrac{b}{(a, b)} \Big| c$. Prin urmare, $b \mid (a, b)c$. Rezultă că $\dfrac{b}{(b, c)} \Big| (a, b) \cdot \dfrac{c}{(b, c)}$. Dar $\dfrac{b}{(b, c)}$ este prim cu $\dfrac{c}{(b, c)}$, deci $\dfrac{b}{(b, c)} \Big| (a, b)$, adică $b \mid (a, b) \cdot (b, c)$. **10.** Rezultă din descompunerea în factori primi a lui a şi b.

11. Din teorema de descompunere în factori primi. **12.** Din teorema de descompunere în factori primi aplicată lui a şi b.

13. $8^n + 1 = (2^n)^3 + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$.

14. Dacă $n = p(p-1)$ cu p prim, $p \neq 2$, atunci $2^{p(p-1)} - 1 = (2^{p-1} - 1)k$, și din teorema lui Fermat avem $p \mid 2^{p-1} - 1$. De exemplu $(6, 2^6 - 1) = (6,63) = 3$. **16.** Trebuie să avem $3^n = 10^5 k + 1$. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ considerăm restul împărțirii lui 3^n la 10^5. Putem obține doar 10^5 resturi distincte, deci există $n_1 > n_2$, astfel încît $10^5 \mid (3^{n_1} - 3^{n_2})$, deci $10^5 \mid 3^{n_2}(3^{n_1 - n_2} - 1)$ și deoarece $(10^n, 3^{n_2}) = 1$, rezultă $10^5 \mid 3^{n_1 - n_2} - 1$, adică $3^{n_1 - n_2} - 1 = 10^5 k$. **17.** Deoarece 10^5 și $1\,979$ sunt prime între ele rezultă că există $k, l \in \mathbf{N}^*$ astfel încât:

$$10^5 \cdot k - 1\,979 l = 1, \text{ deci}$$
$$10^5 \cdot k + 1\,978 = 1\,978 + 1\,979 l + 1, \text{ deci}$$
$$10^5 \cdot k + 1\,978 = 1\,979\,(l + 1).$$

Capitolul IV

§ 1 — § 4

3. $f + \bar{f} = (a_0 + \bar{a}_0) + (a_1 + \bar{a}_1)X + \ldots + (a_n + \bar{a}_n)X^n$; numerele $a_0 + \bar{a}_0$, $a_1 + \bar{a}_1$, ..., $a_n + \bar{a}_n$ sunt reale; $f\bar{f} = a_0\bar{a}_0 + (a_0\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_0)X + (a_0\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_0)X^2 + \ldots + a_n\bar{a}_n X^{2n}$, numerele $a_0\bar{a}_0$, $a_0\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_0$, $a_0\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_0$, ..., $a_n\bar{a}_n$ sunt reale.

4. grad $(fg) = 0 \Rightarrow$ grad f + grad $g = 0 \Rightarrow f \in \mathbf{C}$.

6. a) $m = 1 \Rightarrow$ grad $f = 0$; $m = 2 \Rightarrow$ grad $f = 2$; $m \neq 1,2 \Rightarrow$ grad $f = 3$ b) $m = \pm i \Rightarrow$ grad $f = 1$; $m \neq \pm i \Rightarrow$ grad $f = 4$; **7.** Dacă $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k + \ldots + a_nX^n$; dacă $a_k \neq 0$ luăm $g = -a_{k+1}X^{k+1} - \ldots - a_nX^n$; dacă $a_k = 0$ luăm $g = X^k - a_{k+1}X^{k+1} - \ldots - a_nX^n$. **9.** $f = 1 - 5X + 2X^2$. **10.** $f(0) \geqslant 0 \Rightarrow b \geqslant 0$; $f(1) \leqslant 1 \Rightarrow a \leqslant 1$; **11.** $f(X) = X^2$.

§ 5.

1. a) $q = X^4 + X^3 - 2X^2 - 6X - 8$; $r = 7X + 20$; b) $q = X - 6$; $r = -7X^2 - 7X + 7$; c) $q = X^2 + 2X$; $r = -4X + 2$; d) $q = X^2 - X$; $r = X^2 + 2X - 6$; e) $q = X^5 - X^4 - X^3 + X^2 + X - 1$; $r = 0$; f) $q = X^{20} - X^{19} + X^{17} - X^{16} - X^{15} + 2X^{14} - X^{13} - X^{12} + 2X^{11} - X^{10} - X^9 + 3X^8 - 2X^7 - X^6 + 3X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 2X + 2$; $r = 0$.

2. Se scrie $f = (X^2 - 5X + 8)q + 2X - 7$. Cum $f(0) = -15$ și $f(3) = 3$ se obține $i = X^3 - 6X^2 + 15X - 15$. **3.** Se aplică unicitatea formulei împărțirii cu rest. **4.** $m = 0$, $c = p - 1$. **5.** a) $q = X^3 - 2X^2 - 4X - 10$; $r = -9$; b) $q = X^5 - 2X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 5$; $r = 7$; c) $q = X^4 + X^3 + X + 1$; $r = 0$; d) $q = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 12X + 24$; $r = -50$;

e) $q = X^5 - \frac{3}{2}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{8}X^2 - \frac{1}{16}X + \frac{193}{32}$; $r = -\frac{257}{64}$; f) $q = X^2 + \frac{7}{2}X - \frac{15}{4}$; $r = \frac{23}{4}$; g) $q = X^3 + \frac{5}{3}X^2 - \frac{7}{9}X + \frac{47}{27}$; $r = \frac{209}{27}$.

6. $f = X$. **7.** $m = -\frac{65}{8}$. **8.** $m = \pm 3$. **9.** $a = 3$, $b = 2$. **10.** $X^4 - 2X^3 - X^2 + 2$.

§ 6.

3. $m = 8$. **4.** $a = -32$, $b = 101$, $c = -99$. **5.** $p = 1 - q^2$, $m = -q$. **6.** $a = -9$, $b = 12$. **7.** În general, nu. **8** și **9.** se aplică teorema 6.2.4. **10.** a) $X^3 + 1$; b) $X^2 - 2X + 2$; c) $X^3 - X + 1$; d) $X + 3$; e) $X^2 + X + 1$; f) $X^2 - 2\sqrt{2}X - 1$; g) 1; h) 1; i) 1. **11.** Se aplică teorema 6.2.4. **12.** $A = n$, $B = -2 - n$, **13.** Se arată că c.m.m.d.c. este 1.

§ 7.

1. Se scrie $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$; $a = -4$, $b = 3$. **2.** -1, $2 \pm i\sqrt{2}$.

3. $m = 0$; 0, 2, 4. **4.** $a = -5$, $b = 1$. **5.** $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. **6.** $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6 = 0$. **7.** a) $(X - 1)^3(X + 1)^2(X - 4)$; b) $(X - 1)^3(X - 2)$; c) $(X^2 + 1)(X - 1)(X + 3)^2$.

8. Se folosește teorema 6.2.4 și teorema D'Alembert-Gauss. **9.** Se aplică consecința 7.3.4. **11.** A se vedea exercițiul 9. **12.** Dacă $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ atunci $f(f(X)) - f(X) = (a_nf^n - a_nX^n) + (a_{n-1}f^{n-1} - a_{n-1}X^{n-1}) + \ldots + a_1(f - X)$ Se ține cont că $f^k - X^k$ se divide cu $f - X$ oricare ar fi $1 \leqslant k \leqslant n$. **13.** a) Dacă α este o rădăcină a lui $X^2 + X + 1$ avem $\alpha^3 = 1$ și $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Dar $(\alpha + 1)^{6n+1} + \alpha^{6n+2} = (-\alpha^2)^{6n+1} + (\alpha^{6n})\alpha^2 = -\alpha^2 + \alpha^2 = 0$. În continuare se aplică teorema 7.2.3. b), d), e) și f) se fac ca exercițiul a). c) $(X + 1)^{3n+2} + X + 2 = (X + 1)^2[(X + 1)^3]^n + X + 2 = (X^2 + 2X + 1)[X(X^2 + 3X + 3) + 1]^n + X + 2 = [(X^2 + 3X + 3) - X - 2][X(X^2 + 3X + 3) + 1]^n + X + 2$. Se dezvoltă apoi paranteza $[X(X^2 + 3X + 3) + 1]^n$ după binomul lui Newton.

14. a) Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y - a}{2}$ în ecuația dată Obținem $\left(\frac{y - a}{2}\right)^3 + a\left(\frac{y - a}{2}\right)^2 + b\left(\frac{y - a}{2}\right) + c = 0$.

b) În ecuația dată se face schimbarea de variabilă $x = 2y$. Ecuația căutată este $8y^3 + 4ay^2 + 2by + c = 0$; c) Din egalitățile $y = x^2$ și $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ eliminăm pe x. Obținem $y(y + b)^2 - (ay + c)^2 = 0$.

15. $m = \pm 48$. **16.** $\lambda = 6$. **17.** $q^3 + pq + q = 0$. **18.** a) $1 \pm \sqrt{3}$, $1 \pm i\sqrt{2}$; b) $1 \pm 2i$, $-2 \pm i$; c) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}$. **19.** $+\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ şi $-1, 1, 3$.

20. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_1^2 - 2a_2$; $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 2a_2^2 - 4a_1a_3$.

23. 3. **24.** $-1, -1, -1, -1, -2$. **25.** 1 are ordinul de multiplicitate 2; -1 are ordinul de multiplicitate 3.

§ 8.

1. a) $\pm 3, \pm 1$; b) $\pm 4, \pm 1$; c) ± 1; $\pm\sqrt[4]{2}$; d) $\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; e) $\pm\sqrt{3+\sqrt{3}}$; $\pm\sqrt{3-\sqrt{3}}$; f) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; g) $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$; h) $\pm i$, ± 1.

2. a) ± 6; ± 2; b) $\pm\sqrt{5}$, ± 1; c) ± 1; $\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$; d) ± 2; $\pm i\sqrt{12}$.

3. a) $x^4 - 25x^3 + 144 = 0$; b) $x^4 - \frac{5}{18}x^2 + \frac{1}{144} = 0$; c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$; d) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

4. a) se discută rădăcinile ecuaţiei rezolvente $y^2 - 2(m-4)y - m^2 = 0$. Ecuaţia dată are 2 rădăcini reale şi 2 complexe; b) dacă $-12 < m < \infty$ ecuaţia are 4 rădăcini complexe; dacă $m \leqslant -12$ ecuaţia are 4 rădăcini reale; c) dacă $m > 0$ ecuaţia are 4 rădăcini complexe; dacă $m < 0$ ecuaţia are 2 rădăcini reale şi 2 complexe; d) ecuaţia are 4 rădăcini reale oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$; e) are 2 rădăcini reale şi 2 complexe; f) rădăcinile ecuaţiei rezolvente sunt -3 şi $\frac{m+1}{2}$. Dacă $m \leqslant -1$ ecuaţia are 4 rădăcini complexe; dacă $m > -1$ ecuaţia are 2 rădăcini reale şi 2 complexe.

5. Se face substituţia $x^n = y$. **6.** a) $-1, -5, -\frac{1}{5}$; b) -1; $-1 \pm i\frac{\sqrt{15}}{4}$; c) $1, 5, \frac{1}{5}$; d) $1, \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$; e) $-1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; f) $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{35}}{6}$; g) $-1, \pm i$; h) $-1, \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4}$. **7.** i) $b = 3a$ sau $b = -a$; ii) $(b-3a)(a+b) \geqslant 0$; iii) $(b-3a)(a+b) < 0$. **8.** a) $-2, -\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$;

b] $2 \pm i\sqrt{3}, \frac{-5 \pm 2\sqrt{3}}{2}$; c) $1 \pm i\sqrt{3}, \frac{-8 \pm i\sqrt{55}}{16}$; d) $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

e] $-1, -1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; f) $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, -2 \pm \sqrt{3}$; g) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, -3 \pm 2\sqrt{2}$.

9. Ecuaţia rezolventă este $y^2 + 2y + a - 2 = 0$. Se pune condiţia ca această ecuaţie să aibă ambele rădăcini aparţinând intervalului $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$. **10.** Fie ecuaţia reciprocă $a_{2p}x^{2p} + a_{2p-1}x^{2p-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. O împărţim cu x^p şi obţinem (1) $a_{2p}x^p + \frac{a_0}{x^p} + a_{2p-1}x^{p-1} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + a_{2p-2}x^{p-2} + \frac{a_2}{x^{p-2}} + \ldots = 0$. Facem substituţia $x + \frac{1}{x} = y$. După binomul lui Newton avem $y^k = x^k + \frac{1}{x^k} + C_k^1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + C_k^1\left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right) + \ldots$.

Dând valori lui $k = 1, 2, \ldots, p$ se determină $x^k + \frac{1}{x^k}$ în raport cu $y^k, y^{k-1}, y^{k-2}, \ldots$ Ecuaţia (1) se transformă într-o ecuaţie de gradul p în nedeterminata y. **11.** a) $-1, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, b) $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$,

c] $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{5}, \frac{2 \pm i\sqrt{21}}{6}$.

§ 9.

1. $f(\pm i) = (b - a)i$. **2.** $a = 57$, $b = -80$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm i\sqrt{39}}{2}$, $x_{3,4} = 1 \pm 2i$.

3. Reducere la absurd. Rezultă că toate rădăcinile sunt reale. Dar $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le 4} x_ix_j \Leftrightarrow (2a + 1)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (2a + 2)^2$, absurd. **4.** $f = (X^2 + 1)(X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1) = (X^2 + 1)^2(X^2 + X + 1)$, i şi $-i$ rădăcini duble şi $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

5. $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + X + 1)$ deci $1 \pm i$ şi $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **6.** $f = (X^2 - 4X + 5)(X^2 + 1)$, deci $2 \pm i$ şi $\pm i$. **7.** Se demonstrează că există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $f = (X^2 - 2\cos aX + 1)(X^2 - 2\cos bX + 1)$, $\cos a$ şi $\cos b$

sunt rădăcinile ecuației $2x^2 - \alpha x - 1 = 0$ adică $\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 8}}{4}$ și ținând cont că $|\alpha| < 1$ avem $\sqrt{\alpha^2 + 8} < 3$. Rădăcinile lui f sunt $\cos a \pm i \sin a$ și $\cos b \pm i \sin b$. **8.** $f = X^2(X^2 - 2X + 2) + X(X^2 - 2X + 2) + mX^2 + n$, $m = n = 0$; $1 \pm i$, 0 și -1. **9.** $f = (X^2 - 2X + 2)(3X^2 + X - 1) = 3(X^2 - 2X + 2)\left(X + \frac{1 - \sqrt{13}}{6}\right)\left(X - \frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right) \cdot 1 \pm i, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

10. $f = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 - X + 1) \cdot (X^2 + X + 1)$. **11.** $f = X^4 + 2X^2 + 1 - (\sqrt{2}X)^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

12. Dacă α este o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$, atunci cum $X^2 + X + 1 \mid f(X^3) + Xg(X^3)$ avem $f(1) + \alpha g(1) = 0 \Rightarrow f(1) = g(1) = 0$.

13. Se face la fel ca 12. **14.** a) $f = (X - 2)^2(X^2 - 2X + 2)$; b) $f = (X^3 + 1)^2(X^2 - 4X + 5)^2$; c) $f = (X^2 + 2X + 2)^3(X^2 - 1)$. **15.** $\left(\frac{x + i}{x - i}\right)^n = -1 = \cos \pi + i \sin \pi \Rightarrow \frac{x + i}{x - i} = \cos \frac{(2k + 1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n - 1) \Rightarrow \frac{x}{-i} = \frac{1 + \cos \frac{(2k + 1)\pi}{n} + \sin \frac{(2k + 1)\pi}{n}}{1 - \cos \frac{(2k + 1)\pi}{n} - i \sin \frac{(2k + 1)\pi}{n}} \Rightarrow x = \operatorname{ctg} \frac{(2k + 1)}{2n}\pi$.

16. $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X + i)(X - i)$ și se aplică teorema lui Bézout.

§ 10.

1. $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, -1, 1, $\frac{1}{2}$. **2.** $1 \pm \sqrt{3}$, $\pm i$. **3.** $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, $3 - i$, $3 + i$, -5. **4.** $3 - \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\pm\sqrt{2}$, -1 de 3 ori. **6.** a) $2, 3$; c) -3, -1 de 4 ori; d) -2 de 3 ori; e) $1, -2, 2, -3, -6$; f) $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$. **7.** Se scrie $f(1) - f\left(\frac{p}{q}\right) = a_1\left(1 - \frac{p}{q}\right) + a_2\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) + \ldots + a_n\left(1 - \frac{p^n}{q^n}\right) \Rightarrow p - q \mid q^n f(1) \Rightarrow p - q \mid f(1)$.

Bibliografie

1. Coloţoară I., Dragomir A., *Elemente de algebră superioară*, manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
2. Fadeev D., Sominski I., *Culegere de probleme de algebră superioară* (trad. din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1954.
3. Kocetkov E. E., Kocetkova E. C., *Algebră şi funcţii elementare* (în limba rusă), vol. 2, Moscova, 1974.
4. Kolmogorov A. N. ş.a., *Algebră şi elemente de analiză* (în limba rusă), manual pentru clasa a IX-a, Moscova, 1977.
5. Năstăsescu C., Niţă C., Brandiburu M., Joiţa D., *Exerciţii şi probleme de algebră* (pentru clasele IX–XII), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
6. Novoselov S. I., *Curs special de algebră elementară* (trad. din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.

Cuprins

Capitolul I. **Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică** 3

§ 1. Funcţia exponenţială 3

1.1. Puteri cu exponent raţional (recapitulare) 3

1.2. Puteri cu exponent real oarecare 4

1.3. Funcţia exponenţială 7

1.4. Graficul funcţiei exponenţiale 9

Exerciţii 11

§ 2. Logaritmi 12

2.1. Definiţia logaritmului unui număr pozitiv 12

2.2. Funcţia logaritmică 13

2.3. Proprietăţile logaritmilor 15

2.4. Schimbarea bazei logaritmului aceluiaşi număr 17

2.5. Operaţia de logaritmare a unei expresii 17

Exerciţii 19

§ 3. Logaritmi zecimali 20

3.1. Logaritmi zecimali şi proprietăţile lor 20

3.2. Tabele de logaritmi cu 5 zecimale 22

3.3. Operaţii cu logaritmi 25

Exerciţii 28

§ 4. Ecuaţii exponenţiale şi ecuaţii logaritmice 28

4.1. Ecuaţii exponenţiale 28

4.2. Ecuaţii logaritmice 31

4.3. Sisteme de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice 32

4.4. Inecuaţii logaritmice şi exponenţiale 33

Exerciţii 34

Capitolul II. **Inducţie matematică. Combinatorică** 36

§ 1. Inducţia matematică 36

1.1. Noţiunile de deducţie şi de inducţie 36

1.2. Metoda inducţiei matematice 38

1.3. O variantă a metodei inducţiei matematice 43

Exerciţii 45

§ 2. Elemente de combinatorică 46
2.1. Mulțimi ordonate 47
2.2. Permutări 48
2.3. Aranjamente 50
2.4. Combinări 52
Exerciții 58

§ 3. Binomul lui Newton și aplicații 60
3.1. Binomul lui Newton 60
3.2. Aplicații. Identități în calculul cu combinări 63
3.3. Suma puterilor asemenea ale primelor n numere naturale 65
Exerciții 67

§ 4. Progresii aritmetice și progresii geometrice 68
4.1. Șiruri 68
4.2. Progresii aritmetice 70
4.3. Progresii geometrice 73
Exerciții 79

Capitolul III. **Noțiuni de aritmetica numerelor întregi** 83
§ 1. Teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi 83
Exerciții 85
§ 2. Divizibilitatea numerelor întregi. Proprietăți 85
Exerciții 86
§ 3. Cel mai mare divizor comun 87
Exerciții 90
§ 4. Numere prime. Teorema de descompunere în factori primi 90
Exerciții 93

Capitolul IV. **Polinoame cu coeficienți complecși** 94
§ 1. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți complecși 94
1.1. Definirea polinoamelor 94
1.2. Proprietățile adunării polinoamelor 96
1.3. Proprietățile înmulțirii polinoamelor 97
§ 2. Forma algebrică a polinoamelor 98
§ 3. Gradul unui polinom 99
§ 4. Valoarea unui polinom. Funcția polinomială 100
Exerciții 102
§ 5. Împărțirea polinoamelor 103
5.1. Teorema împărțirii cu rest 103
5.2. Împărțirea prin $X - a$. Schema lui Horner 106
Exerciții 109

§ 6. Divizibilitatea polinoamelor 110
6.1. Definiția relației de divizibilitate. Proprietăți 110
6.2. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor 111
6.3. Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor 116
Exerciții 118

§ 7. Rădăcinile polinoamelor. Ecuații algebrice 119
7.1. Rădăcinile polinoamelor. Teorema lui Bézout 119
7.2. Ecuații algebrice. Teorema lui D'Alembert-Gauss și teorema lui Abel-Ruffini 119
7.3. Rădăcini multiple 121
7.4. Relații între rădăcini și coeficienți (formulele lui Viète) 124
Exerciții 129

§ 8. Rezolvarea câtorva ecuații algebrice de grad superior 130
Exerciții 137

§ 9. Polinoame cu coeficienți reali 138
Exerciții 140

§ 10. Polinoame cu coeficienți raționali și polinoame cu coeficienți întregi . . 141
Exerciții 144

Răspunsuri și indicații 145

Bibliografie 156

Coli de tipar: 10
Format: 61×86/16
Bun de tipar: 13.II.1995
Nr. plan: 41240

Tiparul executat la:
Imprimeria „ARDEALUL" Cluj
B-dul 21 Decembrie nr. 146
România
Comanda nr. 519

Lei 880
ISBN 973-30-3034-1

EDITURA DIDACTICA ŞI PEDAGOGICĂ, R.A.
BUCUREŞTI, 1995