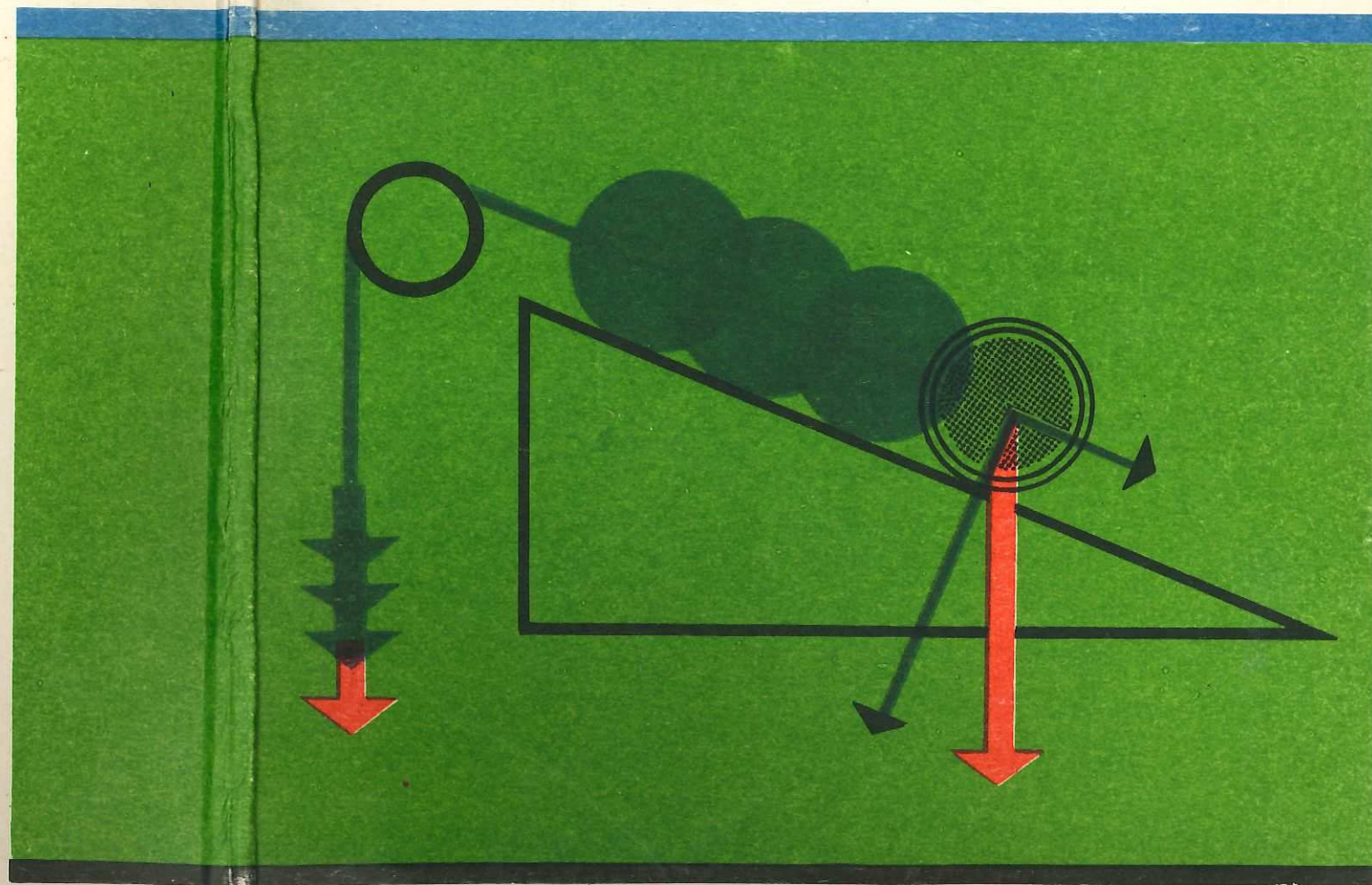


MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

MECANICA

Manual pentru clasa a X-a
licee industriale cu profil de mecanică.



ISBN 973-30-0277-1

Lei 5,25

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1989

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMINTULUI

prof. univ. dr. ing. **DUMITRU BOIANGIU**

ing. DAN HORVATH, prof. gr. II

MECANICA

Manual pentru clasa a X-a
licee industriale cu profil de mecanică



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

Manualul constituie reeditarea ediției revizuite în anul 1980, conform programei școlare aprobate de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 3448/1979

MECANICA

Referenți: ing. Ion Paraschiv, prof. gr. I
ing. Romeo Perju, prof. gr. I



ISBN 273-30-0277-1

Redactor: ing. Alexandru Nicolae
Tehnoredactor: Ion Mirea
Grafician: Dan Vucicovici



NOȚIUNI INTRODUCTIVE

În conformitate cu prevederile documentelor Congresului al XIII-lea al P.C.R., în etapa actuală și în viitor se va asigura dezvoltarea intensivă a tuturor ramurilor industriale, industria constituind factorul dinamizator al întregii economii naționale. Această dezvoltare se va realiza îndeosebi prin modernizarea mijloacelor de muncă și a structurii producției, ridicarea nivelului tehnic al acestora, introducerea continuă și aplicarea largă a tehnologiilor avansate.

În vederea utilizării corespunzătoare a mașinilor și instalațiilor trebuie ca acestea să fie bine cunoscute atât în ce privește modul de funcționare cât și în ce privește modul cum sînt construite.

Studierea mecanismelor, dispozitivelor, mașinilor și instalațiilor — folosite în procesul de producție — necesită cunoștințe despre mișcarea mecanică a elementelor lor componente, despre comportarea acestora sub acțiunea sarcinilor, precum și despre rolul lor funcțional.

Obiectul mecanicii. *Mecanica* este un capitol al fizicii, deci face parte din științele naturii, și studiază manifestări și însușiri ale materiei.

Materia este o noțiune primară cuprinzătoare care se referă atât la diversele ei forme de manifestare în natură cât și la formele superioare de manifestare (ale materiei) cum sînt formele sociale.

Existența materiei este caracterizată de *mișcare*, care se prezintă sub diverse forme: mișcări moleculare, mișcări interatomice, unde electromagnetice, reacții chimice, curent electric, activitatea celulei organice, viața organismelor superioare, gîndirea, viața socială etc.

Mecanica studiază una din cele mai simple forme de mișcare și anume *mișcarea mecanică*, prin aceasta înțelegîndu-se deplasarea, adică schimbarea pozițiilor în spațiu și timp a corpurilor în raport cu anumite repere de referință.

Mecanica clasică se bazează pe principiile stabilite de I. Newton.

1.1. NOȚIUNI ȘI PRINCIPII FUNDAMENTALE ALE MECANICII

Mecanica are la bază noțiuni și principii fundamentale care sintetizează proprietățile principale ale corpurilor întîlnite în natură.

Noțiunile fundamentale ale mecanicii sînt: spațiul, timpul și masa.

În strînsă legătură cu noțiunea de masă este noțiunea de *forță* (acționează asupra masei). Forța ($\vec{F}$) se reprezintă grafic cu ajutorul vectorului, caracterizat prin următoarele elemente (fig. 1):

- direcție (dreapta xx);
- sens (indicat de săgeată);
- modul (OA sau F);
- punct de aplicație (O).

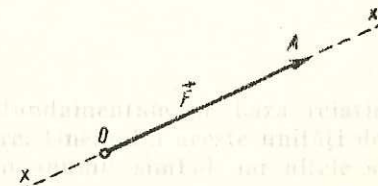


Fig. 1. Reprezentarea unui vector (forță).

Principiile fundamentale ale mecanicii sînt: principiul inerției, principiul acțiunii forțelor și principiul acțiunii și reacțiunii.

Principiul inerției. Un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atît timp cît nu intervine vreo forță care să-i modifice această stare.

Principiul acțiunii forțelor. Acceleratia unui corp este proporțională cu forța aplicată și este îndreptată în direcția și în sensul în care acționează forța.

Efectul unei forțe asupra unui corp este independent de viteza corpului, precum și de efectul altor forțe.

S-a constatat că între forța care acționează asupra corpului și accelerația imprimată acestuia există un raport constant, care a fost numit masă m . Se poate scrie:

$$\frac{\vec{F}_1}{a_1} = \frac{\vec{F}_2}{a_2} = \frac{\vec{F}_3}{a_3} = \dots = m$$

sau

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

în care:

$\vec{F}$ este forța;

$\vec{a}$ — accelerația;

m — masa.

Principiul acțiunii și reacțiunii. La orice acțiune corespunde întotdeauna o reacțiune de valoare egală și de sens contrar sau acțiunile reciproce a două corpuri materiale sînt întotdeauna egale și îndreptate în sensuri contrare.

Pentru a înțelege acest principiu se ia următorul exemplu (fig. 2): pe o masă B este așezat un cilindru A ; acesta acționează asupra mesei B cu forța $\vec{F}$.

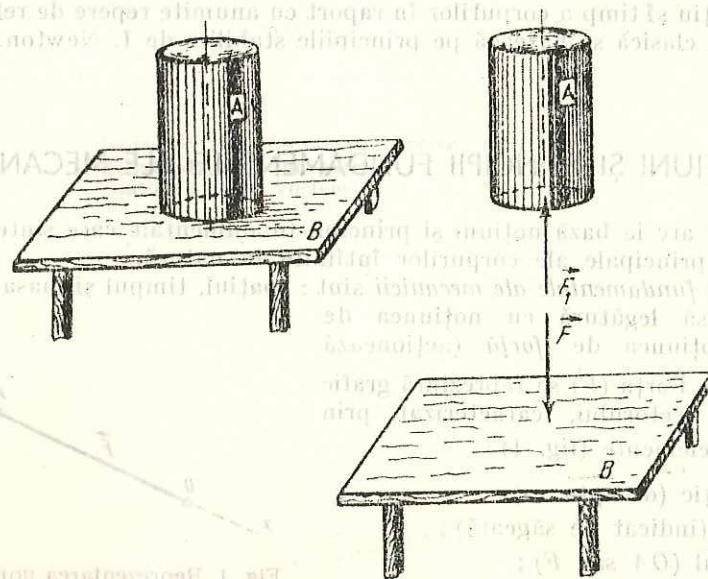


Fig. 2. Exemplificarea principiului egalității acțiunii și reacțiunii.

căreia i se mai poate spune acțiunea corpului (cilindrului) A asupra corpului (mesei) B . La rîndul ei, masa B exercită asupra cilindrului o forță $\vec{F}_1$, care se numește *reacțiunea* corpului B asupra corpului A . Forța de acțiune $\vec{F}$ este egală cu forța denumită reacțiune $\vec{F}_1$. Dacă se scoate masa de sub cilindru și se introduce în locul ei forța $\vec{F}_1$ cilindrul continuă să fie în echilibru, ca și cum s-ar sprijini de masă; de asemenea, dacă se scoate cilindrul de pe masă și se introduce în locul său forța $\vec{F}$, masa răspunde cu reacțiunea $\vec{F}_1$.

1.2. PĂRȚILE MECANICII

Mecanica cuprinde trei părți distincte și anume: statica, cinematica, dinamica.

— *Statica* studiază echilibrul corpurilor aflate sub acțiunea forțelor.

— *Cinematica* se ocupă de mișcarea corpurilor, independent de forțele care acționează asupra acestora și fără a ține seama de masele lor.

— *Dinamica* studiază mișcarea corpurilor materiale, ținînd seama de forțele care acționează asupra lor și de influența maselor acestor corpuri.

1.3. UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Pentru a măsura o mărime fizică, ea trebuie comparată cu o mărime de aceeași natură, considerată ca unitate. Deci a măsura înseamnă a vedea de cîte ori se cuprinde unitatea de măsură în mărimea de măsurat. Dacă se notează cu A o mărime oarecare și cu a unitatea de măsură, atunci raportul $\frac{A}{a} = n$ se numește *valoarea numerică* a acelei mărimi. Pentru a măsura, se folosesc, de regulă, instrumente de măsurare iar rezultatul se exprimă printr-un număr urmat de specificarea unității alese. În marea majoritatea a țărilor din lume se folosește Sistemul Internațional de unități de măsură (S.I.) care cuprinde trei clase de unități:

- unități fundamentale;
- unități derivate;
- unități suplimentare.

În S.I. pentru mărimile mecanice se folosesc ca unități fundamentale:

- unitatea de lungime — metrul;
- unitatea de masă — kilogramul;
- unitatea de timp — secunda.

Unitățile derivate se deduc din cele fundamentale pe baza relațiilor stabilite între mărimile fizice corespunzătoare. Unele din aceste unități derivate au căpătat denumiri speciale și au un anumit simbol, iar altele sînt exprimate pe baza unităților fundamentale.

Unitățile S.I., suplimentare se referă la măsurarea unghiurilor plan și solid.

1.4. ECUAȚII DE DIMENSIUNI

O mărime fizică oarecare se exprimă într-un sistem fizic cu ajutorul mărimilor fundamentale. Astfel, viteza unui punct mobil se obține împărțind spațiul la timp. Unitatea de măsură a vitezei este deci egală cu unitatea de măsură a spațiului împărțită la unitatea de măsură a timpului. Se poate scrie:

$$[v] = \left[\frac{L}{T} \right] = [L T^{-1}].$$

Această expresie poartă numele de *ecuația de dimensiuni a vitezei*.

Ecuația de dimensiuni a forței se deduce din ecuația fundamentală a mecanicii $F = ma$, din care rezultă:

$$[F] = [MLT^{-2}].$$

Omogenitatea formulelor

Pentru a verifica omogenitatea unei formule se scriu ecuațiile de dimensiuni pentru fiecare termen în parte; pentru ca formula respectivă să fie corectă, trebuie ca ambele părți ale egalității să aibă aceleași dimensiuni.

2

STATICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Statika studiază condițiile de echilibru ale sistemelor de forțe și transformarea sistemelor de forțe aplicate corpurilor în sisteme echivalente, care să aibă același efect asupra corpurilor asupra cărora acționează.

Forțele se măsoară cu aparate speciale. Cel mai simplu aparat pentru măsurarea forțelor este dinamometrul (fig. 3). La acest aparat, modulul unei forțe este măsurat cu ajutorul deformației unui resort AB , care, în anumite limite, este proporțională cu forța aplicată.

În cazul punctului material, sistemul de forțe ce acționează asupra sa devine un sistem de forțe concurente.

Pentru transformarea sistemelor de forțe aplicate corpurilor în sisteme echivalente se folosește regula paralelogramului (regula triunghiului) și poligonul forțelor.

2.1. REGULA PARALELOGRAMULUI

În cazul a două forțe concurente $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, sistemul mecanic echivalent este o forță ale cărei modul, direcție și sens sînt reprezentate de *diagonala paralelogramului forțelor* (fig. 4, a); din acest paralelogram se poate reține *triunghiul forțelor* (fig. 4, b), care se obține punînd cap la cap cei doi vectori $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ (prin transformarea unuia în echipolentul său) și unind originea primului vector cu vîrfurile celui de-al doilea. Ordinea în care se iau cei doi vectori este indiferentă.

Laturile triunghiului astfel obținut reprezintă, la scara aleasă convenabil, forțele respective. În baza relațiilor cunoscute din trigonometrie (fig. 4, b), se poate scrie:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta$$

și

$$\frac{R}{\sin(F_1F_2)} = \frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1}.$$

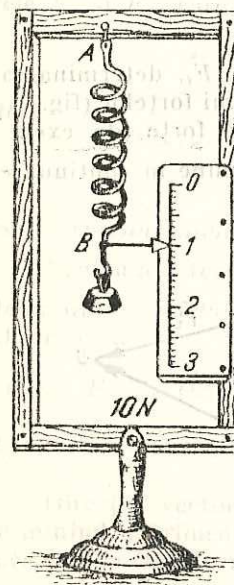


Fig. 3. Dinamometrul.

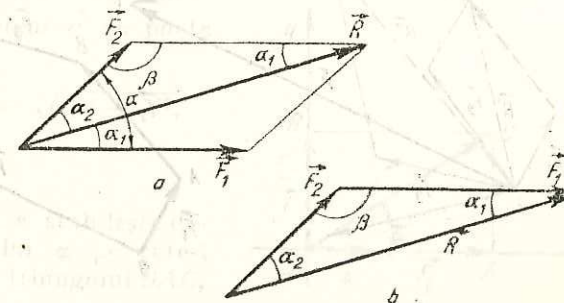


Fig. 4. Compușarea a două forțe concurente.

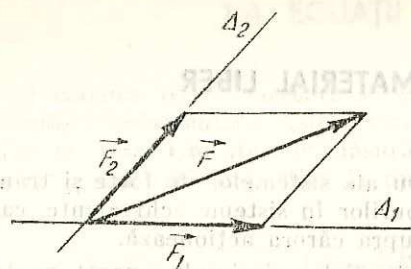


Fig. 5. Descompunerea unei forțe după două direcții.

Se observă că $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = \alpha + \beta = \pi$ și deci :

$$\beta = \pi - \alpha.$$

de unde :

$$\cos \beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin \beta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$$

Cele două relații de mai înainte devin :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha.$$

$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1}.$$

Cu ajutorul acestor expresii se pot stabili relațiile existente între modulul rezultantei, modulele forțelor componente și valorile unghiurilor formate de direcțiile acestor vectori.

Paralelogramul forțelor poate fi folosit atât la compunerea a două forțe, cât și la descompunerea unei forțe $\vec{F}$ după două direcții date Δ_1 și Δ_2 , concurente în același punct cu forța dată. Notînd componentele cu $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ (fig. 5) se poate scrie :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1.$$

2.2. POLIGONUL FORȚELOR

Dacă se consideră un sistem de forțe concurente, $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$, determinarea sistemului echivalent se face tot cu ajutorul paralelogramului forțelor (fig. 6).

Se compun cu ajutorul regulii paralelogramului două forțe (de exemplu $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$) și se obține o primă rezultantă $\vec{R}'$ care se compune în continuare

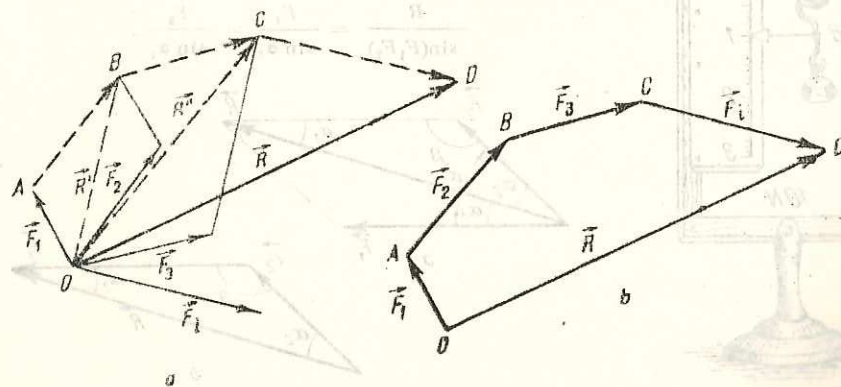


Fig. 6. Poligonul forțelor.

cu forța $\vec{F}_3$ și se obține rezultanta $\vec{R}''$; se continuă acest mod de lucru pînă la introducerea ultimei forțe, cînd se obține rezultanta întregului sistem. Ordinea în care sînt luați vectorii-forță în această operație de compunere este indiferentă. Se observă că în figura 6 iese în evidență un poligon OABCD ale cărui laturi reprezintă forțele din sistem și rezultanta lor. Acest poligon poartă numele de *poligonul forțelor*. Pentru construcția lui se pun cap la cap vectorii echipolenți cu vectorii-forțe concurente din sistem într-o ordine oarecare și se unește originea primului vector cu vîrfurile ultimului vector echipolent pentru a se obține rezultanta sistemului. Rezultanta are același efect asupra punctului material ca și sistemul de forțe concurente luat în discuție.

2.3. MULTIPLICAREA UNUI VECTOR CU O MĂRIME SCALARĂ

Dacă un vector $\vec{F}_1$ este multiplicat cu o mărime scalară λ , va rezulta un vector $\vec{F}_2$ al cărui modul este de λ ori mai mare. Se poate scrie : $\vec{F}_2 = \lambda \vec{F}_1$.

Dacă vectorul are modulul egal cu unitatea se numește *versor*.

2.4. EXPRESIA ANALITICĂ A UNUI VECTOR ÎN PLAN

Se consideră un sistem de axe Ox, Oy determinate de versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ (fig. 7). Un vector $\vec{F}$, reprezentat prin segmentul OC , care are punctul de aplicație în O , poate fi descompus după direcțiile celor două axe în componentele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, care au mărimile : $OA = X$ și $OB = Y$. Se poate deci scrie

$$\vec{F}_1 = \vec{OA} = X\vec{i} \text{ și } \vec{F}_2 = \vec{OB} = Y\vec{j},$$

deci :

$$\vec{F} = \vec{OC} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

este expresia analitică a unui vector în plan.

Pentru a determina mărimea vectorului $\vec{F}$ denumită și modulul vectorului $\vec{F}$ se poate observa că :

$$OC = F = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\text{deci : } F = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Direcția vectorului $\vec{F}$ se stabilește determinînd mărimea unghiului α pe care-l face cu axa Ox . Rezultă, din triunghiul OAC , că $\tan \alpha = \frac{Y}{X}$.

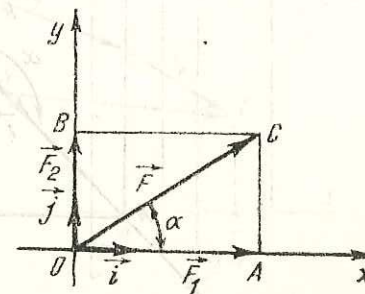


Fig. 7. Descompunerea unei forțe după două axe rectangulare.

2.5. EXPRESIA ANALITICĂ A UNUI VECTOR ÎN SPAȚIU. REGULA PARALELIPIPEDULUI

Se consideră un sistem de referință triortogonal drept, format din axele Ox , Oy , Oz , ce au drept versori pe $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, (fig. 8). În originea O acționează o forță $\vec{F}$, reprezentată prin vectorul $\vec{OC'}$. Acesta se descompune după două direcții în $\vec{OO'}$ și $\vec{OC}$, astfel că se obține :

$$\vec{OC'} = \vec{OC} + \vec{OO'}.$$

Vectorul $\vec{OC}$ din planul xOy se poate, la rândul său, descompune după direcțiile axelor Ox și Oy , astfel că se obține :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OO'}.$$

Notindu-se $OA = X$; $OB = Y$ și $OO' = Z$, proiecțiile pe cele trei axe, se obține expresia analitică a vectorului $\vec{F} = \vec{OC'}$ în spațiu sub forma :

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

Modulul vectorului $\vec{F}$ se determină observând că :

$$F = \sqrt{OC^2 + OO'^2} = \sqrt{OA^2 + OB^2 + OO'^2}.$$

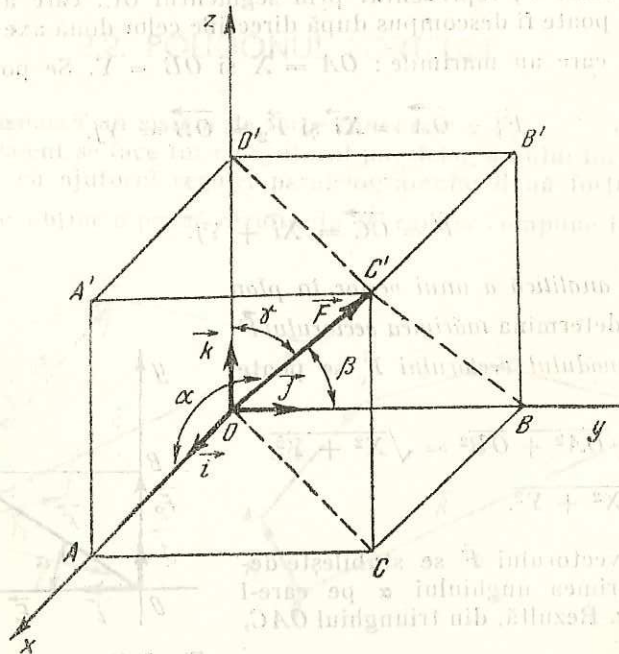


Fig. 8. Descompunerea unei forțe după trei axe rectangulare.

Deci,

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Pentru a se stabili direcția vectorului $\vec{F}$ este necesar să se calculeze unghiurile α , β , γ dintre direcția vectorului $\vec{F}$ și cele trei axe Ox , Oy și Oz .

Pentru a se determina, de exemplu, unghiul β se poate trasa dreapta BC' . Se observă că făcând parte din planul determinat de fața laterală $BCC'B'$, dreapta BC' este perpendiculară pe axa Oy . Se formează astfel triunghiul dreptunghic OBC' (fig. 9), a cărui ipotenuză este $OC' = F$ și are cateta $OB = Y$.

Rezultă :

$$Y = F \cos \beta \text{ sau } \cos \beta = \frac{Y}{F}$$

și în mod asemănător :

$$\cos \alpha = \frac{X}{F} \text{ și } \cos \gamma = \frac{Z}{F},$$

care poartă numele de *cosinusuri directoare*.

Se observă că există relația :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

2.6. TEOREMA PROIECȚIILOR

Se consideră poligonul $ABCDE$ din figura 10, care reprezintă însumarea grafică a unui sistem de vectori concurenți.

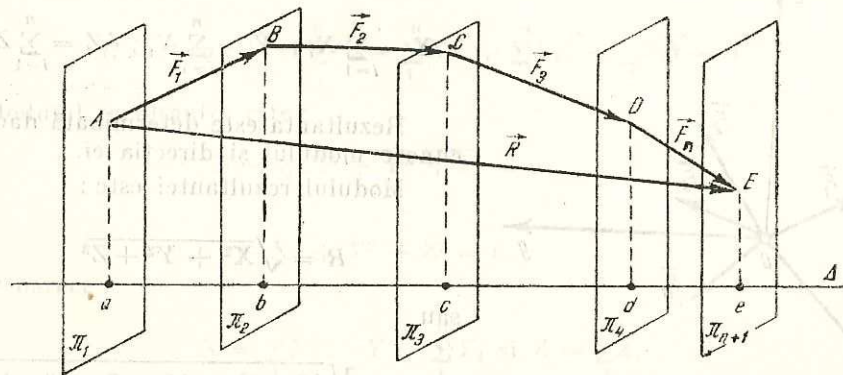


Fig. 10. Însumarea grafică a unui sistem de vectori concurenți (teorema proiecțiilor).

Considerându-se o axă Δ oarecare și un număr de n plane π_n perpendiculare pe această axă, care trec prin punctele A, B, C, D, E segmentele $ab, bc, cd, \dots$ reprezintă proiecțiile forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ pe axa Δ , iar ae — proiecția rezultantei $\vec{R}$ pe aceeași axă.

Se observă că: $ae = ab + bc + cd + de + \dots$ și se poate enunța teorema proiecțiilor: *proiecția rezultantei unui sistem de forțe concurente pe o axă Δ este egală cu suma algebrică a proiecțiilor forțelor componente pe aceeași axă.*

2.7. COMPUNEREA UNUI SISTEM DE FORȚE CONCURENTE PE CALE ANALITICĂ

Se consideră în spațiu un sistem de forțe concurente (fig. 11) în originea O a sistemului de axe Ox, Oy, Oz cu versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ și se propune a se determina, prin calcul, rezultanta.

Fiecare forță în parte se poate exprima sub forma:

$$\vec{F}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$$

$$\vec{F}_n = X_n\vec{i} + Y_n\vec{j} + Z_n\vec{k}$$

În baza teoremei proiecțiilor rezultă:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n X_i\vec{i} + \sum_{i=1}^n Y_i\vec{j} + \sum_{i=1}^n Z_i\vec{k}, \text{ unde } i \text{ are valori de la } 1 \dots n,$$

sau:

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},$$

unde:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i; \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Rezultanta este determinată dacă se cunosc modulul și direcția ei.

Modulul rezultantei este:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

sau

$$R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^2}.$$

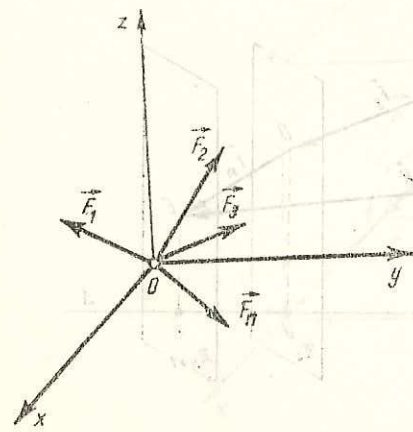


Fig. 11. Sistem de vectori concurenți.

Direcția rezultantei devine cunoscută prin determinarea cosinusurilor directoare:

$$\cos \alpha = \frac{X}{R} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{R}$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{R} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{R}$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{R} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{R}.$$

În cazul unui sistem de forțe concurente în plan, expresia analitică a rezultantei devine:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n X_i\vec{i} + \sum_{i=1}^n Y_i\vec{j} = X\vec{i} + Y\vec{j},$$

modulul ei calculându-se cu relația

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

iar direcția cu relația:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}.$$

2.8. ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Un punct material asupra căruia acționează un sistem de forțe concurente date, care nu este supus la nici o îngrădire a posibilităților de deplasare este un *punct material liber*.

Un punct material liber este în echilibru dacă rezultanta forțelor ce acționează asupra lui este nulă:

$$\vec{R} = 0 \text{ sau } \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n X_i\vec{i} + \sum_{i=1}^n Y_i\vec{j} + \sum_{i=1}^n Z_i\vec{k} = 0.$$

Modulul rezultantei este:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0.$$

deci

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Deoarece:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i; \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad \text{și } Z = \sum_{i=1}^n Z_i,$$

sînt mărimi scalare pozitive sau negative, pătratele lor sînt mărimi pozitive.

Rezultă că rezultanta este nulă numai dacă :

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_1^n X_i = 0 \\ Y &= \sum_1^n Y_i = 0 \\ Z &= \sum_1^n Z_i = 0 \end{aligned} \right\} \text{— în spațiu ;}$$

sau

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_1^n X_i = 0 \\ Y &= \sum_1^n Y_i = 0 \end{aligned} \right\} \text{— în plan.}$$

Acste trei ecuații, în cazul forțelor concurente în spațiu, respectiv două ecuații, în cazul forțelor concurente în plan, reprezintă condițiile de echilibru al punctului material liber.

În cazul rezolvării pe cale grafică, rezultanta trebuie să fie nulă deci poligonul forțelor trebuie să se închidă, adică vârful vectorului echipolent ultimei forțe trebuie să coincidă cu originea vectorului primei forțe din poligon.

INTREBĂRI RECAPITULATIVE

1. Ce se înțelege prin sistem de forțe concurente în plan ?
2. Ce se înțelege prin triunghiul forțelor ? Dar prin poligonul forțelor ?
3. Care sînt relațiile pentru determinarea rezultantei a două forțe concurente și a unghiurilor dintre rezultantă și componentele ei ?
4. În ce constă metoda analitică pentru compunerea unui sistem de forțe concurente ?
5. Care este condiția de echilibru în cazul unui sistem de forțe concurente (grafic și analitic) ?
6. Cum se determină modulul rezultantei unui sistem de forțe concurente ?
7. Cum se determină direcția rezultantei unui sistem de forțe coplanare ?

3

STATICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI

3.1. FORȚE ACTIVE ȘI FORȚE DE LEGĂTURĂ

Un punct material asupra căruia acționează un sistem de forțe concurente, dar care este supus la o restricție oarecare, este un punct material supus la legături. Prin această restricție se înțelege că punctul material este obligat să se afle permanent pe o suprafață sau pe o linie curbă dată.

Punctul material și suprafața sau linia de legătură se interacționează prin forțe de interacțiune, care poartă numele de *forțe de legătură* sau *reacțiuni*. Rezultă că asupra punctului material supus legăturii acționează două categorii de forțe, și anume :

— *forțele active* denumite și *forțe date* (de exemplu, forța gravitațională, forța exercitată de un electromagnet, presiunea aburului, forța musculară etc.) ;

— *forțele de legătură* denumite și *reacțiuni* (punctul material acționează asupra legăturii geometrice, care la rîndul ei acționează asupra punctului).

În figura 12, *a* este reprezentat un corp material care datorită forței gravitaționale (greutății) $\vec{G}$ este obligat să se afle în contact permanent cu un plan înclinat. Legătura în acest caz o constituie planul înclinat. În figura 12, *b* se arată o mărgea montată pe un inel de sîrmă, acționată de forțele $\vec{G}$ și $\vec{T}$. Inelul, care are forma de cerc, reprezintă legătura punctului material (mărgeaua), deoarece el trebuie să fie permanent pe cerc.

3.2. AXIOMA LEGĂTURILOR

Pentru a se studia mai ușor echilibrul sau mișcarea unui punct material supus la legături, acesta se transformă într-un punct material liber. Acest lucru este posibil, dacă în locul legăturii se introduce forța de legătură corespunzătoare.

Orice legătură geometrică a unui punct material poate fi înlocuită cu o forță de legătură. Se obține astfel un punct material echivalent liber, asupra căruia acționează un sistem de forțe format din forțele active $\vec{F}_a$ și forțele de legătură $\vec{F}_{lg}$.

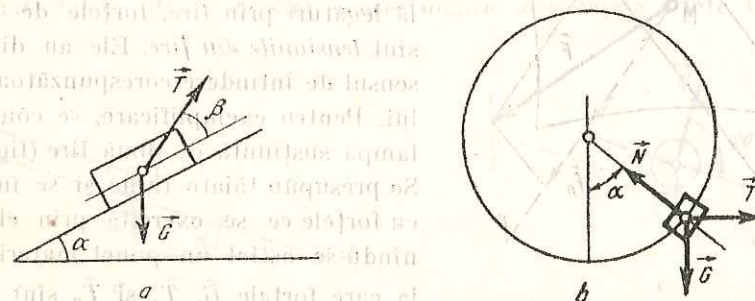


Fig. 12. Exemple de punct material supus la legături.

3.3. STATICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI FĂRĂ FRECARÉ

În cazul echilibrului, rezultanta sistemului trebuie să fie nulă :

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_a + \sum \vec{F}_{leg} = 0.$$

Pentru a se cunoaște cum se introduce în calcul forța de legătură, se poate lua în considerare un punct material ce se sprijină pe o suprafață S oarecare (fig. 13,) în punctul M . Planul π este tangent în punctul M la suprafață, iar dreapta nn' este normală la acest plan în punctul M . Pentru simplificare se poate face ipoteza că suprafața este perfect netedă (lucie), deci nu apar frecări.

Asupra punctului M acționează o forță dată $\vec{F}$ și o forță de legătură $\vec{N}$, necunoscută ca mărime, direcție și sens. Forța $\vec{F}$ poate fi înlocuită prin componentele sale $\vec{F}_n$ și $\vec{F}_t$, după direcția normalei nn' și a planului tangent π . Dacă suprafața este netedă, este absolut necesar ca $F_t = 0$ pentru ca punctul să nu alunece pe suprafață. Rezultă că pentru echilibru trebuie ca $\vec{F}_n + \vec{N} = 0$. De aici se deduce că forța de legătură are direcția normalei comune la linia sau suprafața de contact, iar modulul și sensul ei sînt necunoscute.

Pentru determinarea modulului și sensului forței de legătură, se scrie ecuația de echilibru sub formă vectorială :

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_a + \vec{N} = 0.$$

Prin proiectarea acesteia pe cele trei axe, se obțin trei ecuații scalare :

$$\sum X_a + N_x = 0 ;$$

$$\sum Y_a + N_y = 0 ;$$

$$\sum Z_a + N_z = 0.$$

Acestea reprezintă condițiile de echilibru pentru punctul material supus la legături fără frecare.

În cazul punctului material supus la legături prin fire, forțele de legătură sînt *tensiunile din fire*. Ele au direcția și sensul de întindere corespunzătoare firului. Pentru exemplificare, se consideră o lampă susținută de două fire (fig. 14, a). Se presupun tăiate firele și se înlocuiesc cu forțele ce se exercită prin ele, obținîndu-se astfel un punct material liber, la care forțele $\vec{G}$, $\vec{T}_1$ și $\vec{T}_2$ sînt în echilibru (fig. 14, b).

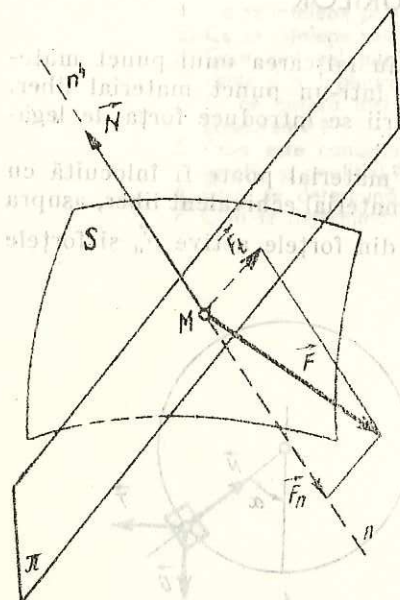


Fig. 13. Determinarea direcției forței de legătură.

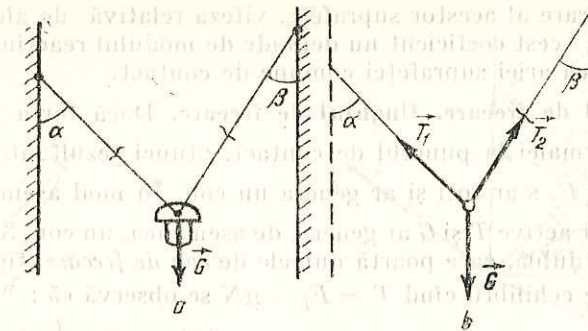


Fig. 14. Exemplificarea modului de introducere a forțelor de legătură.

În figura 15, a este indicat cazul unui punct material acționat de forța gravitațională G , sprijinit pe un plan înclinat și susținut de un fir paralel cu planul. În figura 15, b se arată modul în care acest punct material supus la legături este transformat într-un punct material echivalent liber, asupra căruia acționează forța activă $\vec{G}$ și forțele de legătură $\vec{N}$ și $\vec{T}$.

3.4. STATICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARÉ

3.4.1. **Frecarea cu alunecare.** Dacă suprafața sau curba de sprijin ce constituie legătura geometrică a punctului material prezintă asperități, atunci în suprafață apare o forță de rezistență, tangentă la suprafață, ce are direcția mișcării și sensul contrar tendinței de mișcare ; aceasta poartă numele de *forță de frecare cu alunecare* și este o forță de legătură tangențială.

Modulul forței de frecare este limitat. Forța de frecare se produce conform legilor lui Coulomb, care au fost stabilite experimental.

Dacă se consideră un punct material rezemat pe o suprafață și acționat de o forță activă $\vec{T}$, atunci în planul tangent la suprafață, apare o reacțiune tangențială $\vec{F}_f$. La echilibru valoarea acesteia este $F_f \leq \mu N$, iar în cazul cînd punctul se află în mișcare este dată de relația $F_f = \mu N$. În această relație N este modulul reacțiunii normale, iar μ — un coeficient adimensional ce poartă numele de *coeficient de frecare*. Valoarea lui μ depinde de : natura materialelor din care sînt confecționate suprafețele aflate în contact,

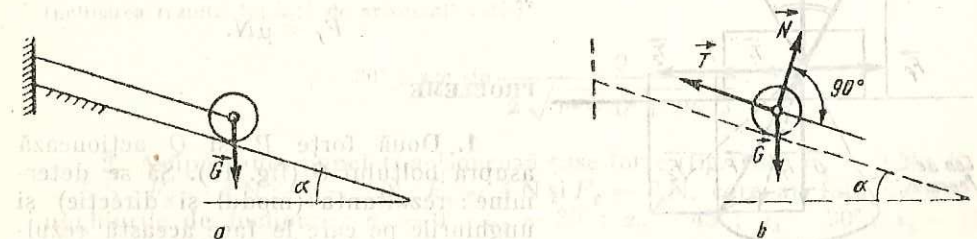


Fig. 15. Exemplificarea modului de aplicare a axiomei legăturilor.

gradul de prelucrare al acestor suprafețe, viteza relativă de alunecare dintre cele două solide. Acest coeficient nu depinde de modulul reacțiunii normale N și nici de mărimea ariei suprafeței comune de contact.

3.4.2. Conul de frecare. Unghiul de frecare. Dacă forța activă $\vec{T}$ s-ar roti în jurul normalei la punctul de contact, atunci rezultanta $\vec{R}$ a forțelor de legătură $\vec{N}$ și $\vec{F}_f$ s-ar roti și ar genera un con. În mod asemănător, rezultanta $\vec{F}$ a forțelor active $\vec{T}$ și $\vec{G}$ ar genera, de asemenea, un con. Se obține astfel un con cu pînză dublă, care poartă numele de *con de frecare* (fig. 16).

La limita de echilibru cînd $T = F_f = \mu N$ se observă că :

$$F_f = \mu N = N \operatorname{tg} \rho ; \text{ rezultă } \mu = \operatorname{tg} \rho .$$

Unghiul ρ poartă numele de *unghi de frecare*.

Se poate observa că dacă asupra punctului acționează o forță activă rezultantă $\vec{F}_1$ aflată în interiorul conului de frecare, atunci componenta $\vec{T}_1 \leq \vec{F}_{f \max}$ și punctul material este în echilibru.

Dacă acționează o forță $\vec{F}_2$ aflată în afara conului de frecare, rezultă $T_2 > F_{f \max}$ și punctul material se pune în mișcare.

Rezultă că pentru echilibru este necesar ca suportul rezultantei forțelor active să fie în interiorul conului de frecare.

3.4.3. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare. În cazul legăturii cu frecare, în ecuațiile de echilibru este necesar să se introducă și forța de frecare. Trebuie avut în vedere, în plus, că la echilibru trebuie respectată și inegalitatea :

$$|\vec{F}_f| \leq \mu |\vec{N}| .$$

Se obțin o ecuație vectorială și o inegalitate :

$$\sum \vec{F}_a + \vec{N} + \vec{F}_f = 0 ;$$

$$F_f \leq \mu N .$$

Proiectate pe cele trei axe de coordonate, condițiile de echilibru devin :

$$\sum X_a + \sum X_{leg} + F_{fx} = 0 ;$$

$$\sum Y_a + \sum Y_{leg} + F_{fy} = 0 ;$$

$$\sum Z_a + \sum Z_{leg} + F_{fz} = 0 ,$$

și :

$$F_f < \mu N .$$

PROBLEME

1. Două forțe $\vec{P}$ și $\vec{Q}$ acționează asupra bolțului O (fig. 17). Să se determine : rezultanta (modul și direcție) și unghiurile pe care le face această rezultantă cu forțele $\vec{P}$ și $\vec{Q}$.

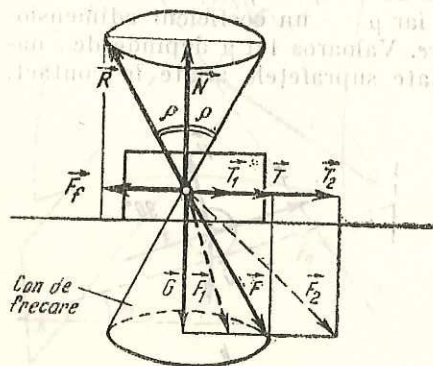


Fig. 16. Conul de frecare.

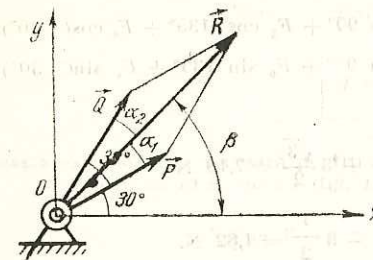


Fig. 17. Determinarea rezultantei și unghiurilor.

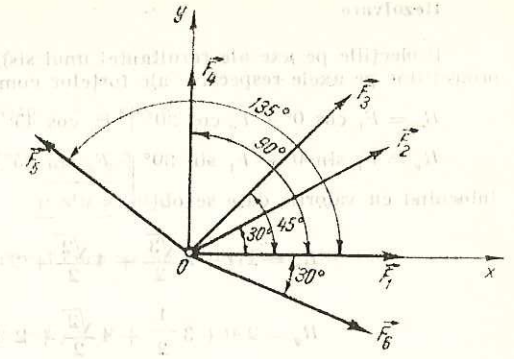


Fig. 18. Direcțiile și unghiurile forțelor date.

Rezolvare

Folosind regula paralelogramului forțelor și relațiile corespunzătoare, se obțin :

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 30^\circ ;$$

$$\frac{P}{\sin \alpha_2} = \frac{Q}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin 30^\circ} ,$$

de unde : $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + PQ\sqrt{3}}$;

$$\sin \alpha_1 = \frac{Q \sin 30^\circ}{R} = \frac{Q}{2\sqrt{P^2 + Q^2 + PQ\sqrt{3}}} ;$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{P \sin 30^\circ}{R} = \frac{P}{2\sqrt{P^2 + Q^2 + PQ\sqrt{3}}} ,$$

deci :

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{Q}{2\sqrt{P^2 + Q^2 + PQ\sqrt{3}}} ,$$

$$\alpha_2 = \arcsin \frac{P}{2\sqrt{P^2 + Q^2 + PQ\sqrt{3}}} .$$

Inclinarea rezultantei față de orizontală este :

$$\beta = 30^\circ + \arcsin \frac{Q}{2\sqrt{P^2 + Q^2 + PQ\sqrt{3}}} .$$

2. Asupra unui punct O acționează șase forțe (fig. 18) : $F_1 = 2 \text{ N}$; $F_2 = 3 \text{ N}$; $F_3 = 4 \text{ N}$; $F_4 = 2 \text{ N}$; $F_5 = 4 \text{ N}$ și $F_6 = 3 \text{ N}$, care au față de axa Ox unghiurile de înclinare : $\alpha_1 = 0^\circ$; $\alpha_2 = 30^\circ$; $\alpha_3 = 45^\circ$; $\alpha_4 = 90^\circ$; $\alpha_5 = 135^\circ$ și $\alpha_6 = -30^\circ$ (fig. 18).

Să se determine modulul și direcția rezultantei.

Rezolvare

Proiecțiile pe axe ale rezultantei unui sistem de forțe concurente sînt egale cu sumele proiecțiilor pe axele respective ale forțelor componente:

$$R_x = F_1 \cos 0^\circ + F_2 \cos 30^\circ + F_3 \cos 45^\circ + F_4 \cos 90^\circ + F_5 \cos 135^\circ + F_6 \cos(-30^\circ);$$

$$R_y = F_1 \sin 0^\circ + F_2 \sin 30^\circ + F_3 \sin 45^\circ + F_4 \sin 90^\circ + F_5 \sin 135^\circ + F_6 \sin(-30^\circ).$$

Înlocuind cu valorile date se obțin:

$$R_x = 2 \cdot 1 + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot 0 - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 7,19 \text{ N}$$

$$R_y = 2 \cdot 0 + 3 \frac{1}{2} + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot 1 + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \frac{1}{2} = 4,82 \text{ N}.$$

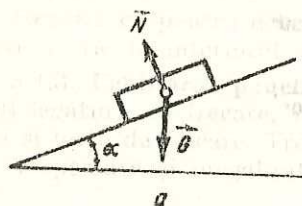
Modulul rezultantei este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{7,19^2 + 4,82^2} = 8,65 \text{ N}.$$

Direcția rezultantei este dată de relația:

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{4,82}{7,19} = 0,67,$$

$$\alpha = 33^\circ 50'.$$



3. Pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală (fig. 19, a) se află un corp supus forței gravitaționale G , care este tras cu o forță orizontală T . Să se afle pentru ce valori ale forței T corpul stă în echilibru, dacă se cunoaște coeficientul de frecare μ .

Rezolvare

Se desface corpul de legătura sa cu planul și se reprezintă forțele active G și T , forța de legătură N normală la plan și forța de frecare F_f tangențială la plan, avînd sensul contrar tendinței de mișcare. Rezultă două cazuri:

— corpul tinde să se deplaseze în sus pe plan și, în acest caz, forța de frecare F_f are sensul în josul planului (fig. 19, b);

— corpul tinde să se deplaseze în jos pe plan și în acest caz, forța de frecare F_f are sensul în sus pe direcția planului (fig. 19, c).

Se aleg drept axe ale sistemului de referință direcția planului și normala la plan.

Deoarece corpul poate fi considerat ca un punct material, el va fi acționat de un sistem de forțe concurente.

Condițiile de echilibru, ținîndu-se seama și de legile frecării, sînt:

— Pentru primul caz (fig. 19, b):

$$\sum X = T \cos \alpha - G \sin \alpha - F_f = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = N - G \cos \alpha - T \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$F_f \leq \mu N. \quad (3)$$

Fig. 19. Cazurile pentru care corpul stă în echilibru.

Înlocuind, rezultă:

$$T \cos \alpha - G \sin \alpha \leq \mu(G \cos \alpha + T \sin \alpha);$$

$$T(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \leq G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha);$$

$$T \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}.$$

Acasta este condiția necesară pentru ca respectivul corp să nu se deplaseze în sus.

— Pentru cazul al doilea (fig. 19, c):

$$\sum X = T \cos \alpha - G \sin \alpha + F_f = 0$$

$$\sum Y = N - G \cos \alpha - T \sin \alpha = 0$$

$$F_f \leq \mu N.$$

În mod asemănător se obține condiția necesară pentru a nu se deplasa corpul în jos

$$G \sin \alpha - T \cos \alpha \leq \mu(G \cos \alpha + T \sin \alpha);$$

$$G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq T(\cos \alpha + \mu \sin \alpha),$$

rezultînd

$$T \geq G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Pentru echilibrul corpului este necesar să fie îndeplinite ambele condiții, adică:

$$G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq T \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}.$$

Acastă expresie se poate scrie mai simplu dacă se notează: $\mu = \tan \rho$ și se împart numărătorul și numitorul cu $\cos \alpha$. Se obține:

$$G \frac{\tan \alpha - \tan \rho}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \rho} \leq T \leq G \frac{\tan \alpha + \tan \rho}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \rho}.$$

Condiția de echilibru a corpului se mai poate scrie sub forma:

$$G \tan(\alpha - \rho) \leq T \leq G \tan(\alpha + \rho).$$

Condiția de autofrenare. În foarte multe situații este necesar ca respectivul corp să stea în echilibru pe un plan înclinat fără să se acționeze asupra lui (de exemplu, la rampele de încărcare și descărcare). Aceasta înseamnă că $T = 0$ și deci:

$$G \tan(\alpha - \rho) \leq 0,$$

de unde:

$$\alpha \leq \rho.$$

Condiția de autofrenare arată că unghiul de înclinare α al planului trebuie să fie mai mic decât unghiul de frecare ρ .

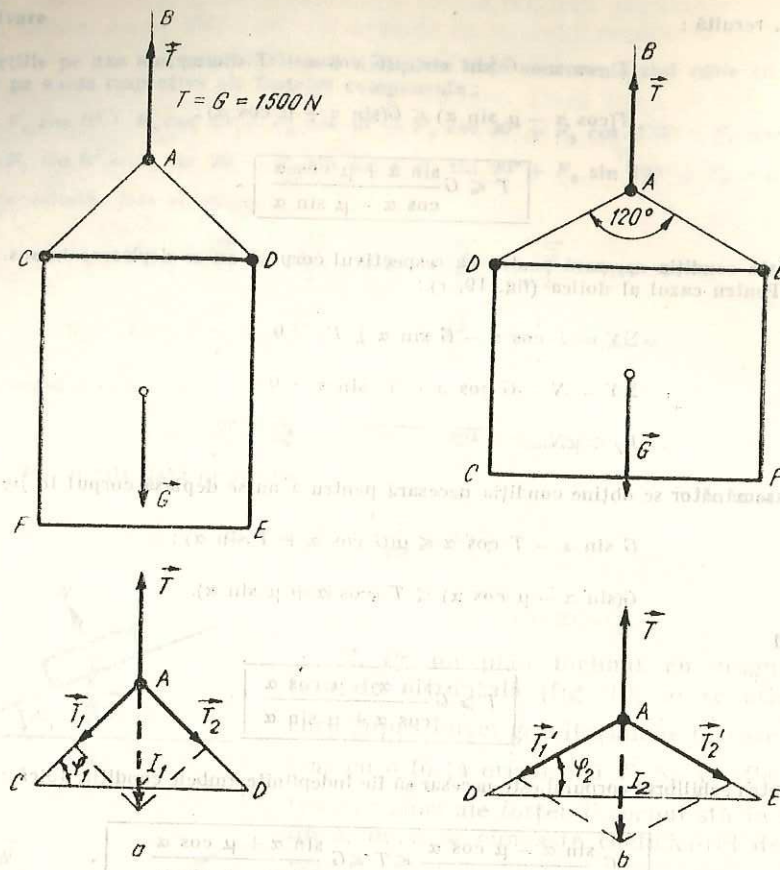


Fig. 20. Solicitarea cablului.

4. Un container de secțiune dreptunghiulară, acționat de forța gravitațională (greutatea) $G = 1500 \text{ N}$ este ridicat cu o macara care prinde un ochi de cablu lung de 5 m ce poate fi legat de capetele uneia din laturi în două moduri (fig. 20). Să se stabilească în care din cele două cazuri cablul este mai solicitat. Laturile containerului au dimensiunile: $CD = 2,5\sqrt{2} \text{ m}$ și $DE = 2,5\sqrt{3} \text{ m}$.

Rezolvare

În primul caz (fig. 20, a). În cablul AB tensiunea este de 1500 N. Din $\triangle ACD$ se obține $AC = 2,5 \text{ m}$, apoi

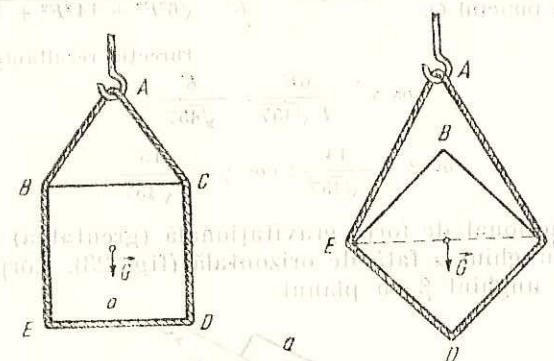
$$\cos \alpha_1 = \frac{CD}{2AG} = \frac{2,5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ deci } \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Din condițiile de echilibru se obțin:

$$-T_1 \cos \frac{\pi}{4} + T_2 \cos \frac{\pi}{4} = 0;$$

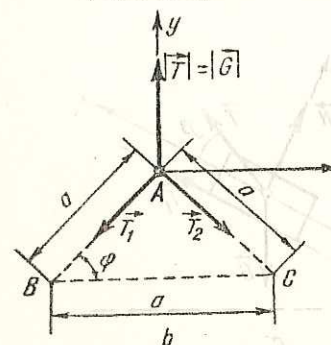
$-2T_1 \sin \frac{\pi}{4} + 1500 = 0;$
 $T_1 = T_2 = \frac{1500}{2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1500}{\sqrt{2}}.$
 În al doilea caz (fig. 20, b). Din figură rezultă $\varphi_2 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, deci $\cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 Din ecuațiile de echilibru se obțin:
 $-T'_1 \cos \frac{\pi}{6} + T'_2 \cos \frac{\pi}{6} = 0;$
 $-2T'_1 \sin \frac{\pi}{6} + 1500 = 0;$
 $T'_1 = T'_2 = 1500 \text{ N}.$
 Cablul este mai solicitat în cazul al doilea, deoarece $T' > T$.
 5. Un bloc cubic de latură a acționat de forța gravitațională (greutatea) G este ridicat cu o macara, fiind prins pe un ochi de cablu de lungimea $5a$ care îl susține în unul din cele două situații arătate (fig. 21). Să se stabilească în care situație cablul este mai solicitat.

Răspuns. Cablul este mai solicitat în primul caz.



Soluție

În prima situație



Soluție

În a doua situație

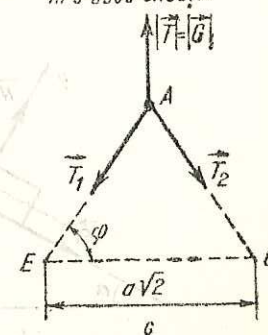


Fig. 21. Solicitarea cablului.

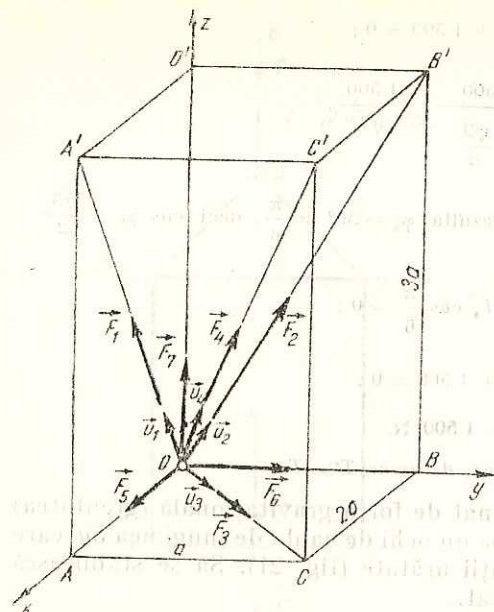


Fig. 22. Acțiunea sistemului de forțe aplicate în punctul O.

6. Asupra punctului O din colțul unui paralelipiped (fig. 22) ce are laturile a , $2a$, $3a$, acționează un sistem de forțe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ și $\vec{F}_5$, $\vec{F}_6$ și $\vec{F}_7$ după direcțiile OA' , OB' , OC' , OA , OB , OC , OO' . Se cunosc modulele forțelor:

$$F_1 = F\sqrt{10}; F_2 = 2F\sqrt{13};$$

$$F_3 = 3F\sqrt{5}; F_4 = F\sqrt{14};$$

$$F_5 = F; F_6 = 2F; F_7 = 3F.$$

Să se determine rezultanta (modul, direcție și sens).

Răspuns

Expresia analitică a rezultantei:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^7 \vec{F}_i = 6F\vec{i} + 14F\vec{j} + 15F\vec{k}.$$

Modulul rezultantei:

$$R = \sqrt{6^2F^2 + 14^2F^2 + 15^2F^2} = F\sqrt{457}.$$

Direcția rezultantei:

$$\cos \alpha = \frac{6F}{F\sqrt{457}} = \frac{6}{\sqrt{457}};$$

$$\cos \beta = \frac{14}{\sqrt{457}}; \cos \gamma = \frac{15}{\sqrt{457}}.$$

7. Un corp acționat de forța gravitațională (greutatea) $\vec{G}$ se află pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală (fig. 23). Corpul este tras cu un cablu ce face unghiul β cu planul.

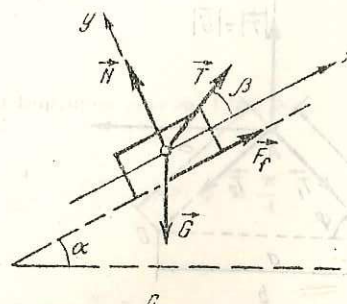
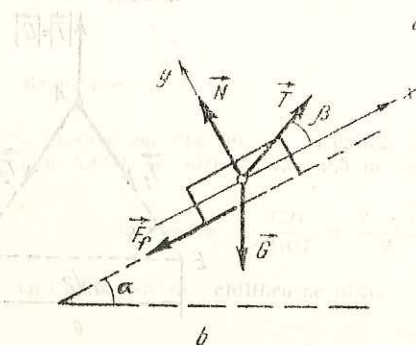
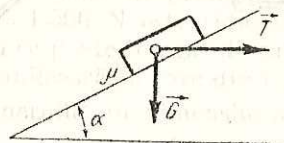


Fig. 23. Determinarea tensiunii din cablu pentru cazul de echilibru.

Dacă se cunoaște coeficientul de frecare μ între corp și plan, să se determine între ce limite trebuie să se afle tensiunea din cablu, astfel încât corpul să stea în echilibru.

Răspuns

$$G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq T \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

INTREBARI RECAPITULATIVE

1. Ce se înțelege prin punct material supus la legături?
2. Ce se înțelege prin forță de legătură?
3. În ce constă axioma legăturilor? La ce se folosește?
4. Care este condiția de echilibru, pentru punctul material supus la legături (vectorial și analitic)?
5. Care sînt legile de producere a forței de frecare de alunecare?
6. Cum se studiază echilibrul punctului material supus la legături cu frecare?
7. Care este semnificația conului de frecare?

STATICA SOLIDULUI RIGID

4.1. GENERALITĂȚI

Solid rigid este corpul care se caracterizează prin faptul că nu se deformează sub acțiunea forțelor. Se consideră un solid rigid (fig. 24) asupra căruia acționează două forțe $\vec{F}$ egale, de sensuri contrare, situate pe același suport,

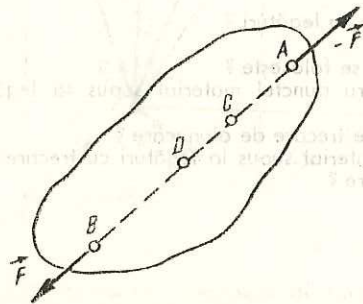


Fig. 24. Caracterul de vector alunecător al forței ce acționează asupra unui solid rigid.

având punctele de aplicație A și B. Este evident că distanțele AB și CD rămân neschimbate, dacă forțele se deplasează pe suportul lor, în punctele C și D.

Forța poate fi deplasată de-a lungul suportului sau fără ca efectul forței asupra corpului să se modifice. Se poate deci trage concluzia că vectorul forță are, în cazul solidului rigid, proprietatea de vector alunecător.

În aplicațiile practice curente, solidul rigid este acționat simultan de mai multe forțe. Dacă suportii acestor forțe se întâlnesc într-un punct, atunci se

poate spune că asupra solidului rigid acționează un *sistem de forțe concurente*. Dacă suportii forțelor ce acționează asupra solidului rigid nu se întâlnesc într-un punct și formează un sistem de drepte cu direcții oarecare, atunci se spune că asupra lui acționează un *sistem de forțe oarecare*.

Problema principală ce se pune este de a înlocui un astfel de sistem de forțe cu un sistem mecanic mai simplu, care să aibă însă același efect asupra solidului rigid.

4.2. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE CONCURENTE CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA UNUI SOLID RIGID

Forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (fig. 25) ce acționează asupra solidului rigid în punctele 1, 2, ..., n au suportii concurenți în punctul O. Ținându-se seama de caracterul de vectori alunecători al acestor forțe, vectorii pot fi deplasați de-a lungul suporturilor în punctul O, astfel că vor forma un sistem de forțe concurente în O. Acest sistem poate fi înlocuit cu rezultanta sa, dată de relația :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_{ix} \vec{i} + \sum_{i=1}^n F_{iy} \vec{j} + \sum_{i=1}^n F_{iz} \vec{k}.$$

Rezultanta astfel obținută are modulul, direcția și sensul bine determinate și poate înlocui sistemul de forțe $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ dat.

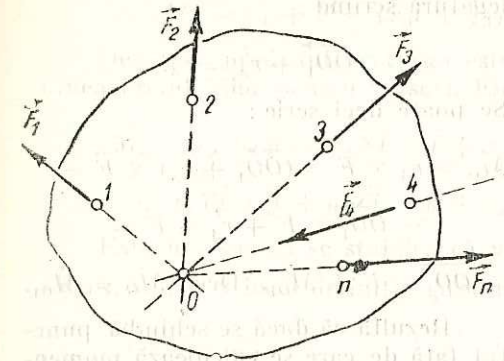


Fig. 25. Sistem de forțe concurente ce acționează asupra unui solid rigid.

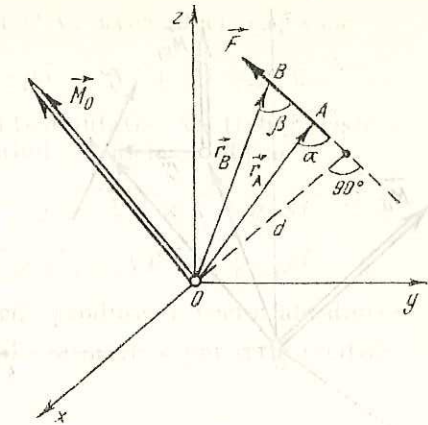


Fig. 26. Momentul unei forțe în raport cu un punct.

4.3. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE OARECARE

Pentru reducerea unui sistem de forțe oarecare este necesar ca în prealabil să se stabilească anumite noțiuni pregătitoare de bază și anumite operații de echivalență.

Noțiunile de bază sînt necesare : momentul unei forțe în raport cu un punct, momentul unei forțe în raport cu o axă și cuplul de forțe.

4.3.1. **Momentul unei forțe în raport cu un punct.** Prin definiție, *momentul unei forțe în raport cu un punct O* (fig. 26) este egal cu produsul vectorial dintre vectorul de poziție al unui punct oarecare A de pe suportul forței față de O și vectorul forță :

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{r}_B \times \vec{F}.$$

Momentul $\vec{M}_O$ este un vector care are punctul de aplicație în O, perpendicular pe planul format de acest punct și suportul forței $\vec{F}$ și are sensul dat de regula burghiului.

Modulul momentului unei forțe în raport cu un punct este dat de relația :

$$M_O = r_A \cdot F \cdot \sin \alpha = r_B \cdot F \cdot \sin \beta = F \cdot d,$$

deoarece

$$r_A \sin \alpha = r_B \sin \beta = d.$$

Deci, *modulul momentului unei forțe în raport cu un punct este egal cu produsul dintre modulul forței și distanța de la punctul O la suportul forței.*

Momentul unei forțe în raport cu un punct este un vector legat (fig. 27) de acest punct. În baza definiției date, expresiile momentelor forței $\vec{F}$ față de punctele O și O_1 sînt :

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F};$$

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{r}'_A \times \vec{F}.$$

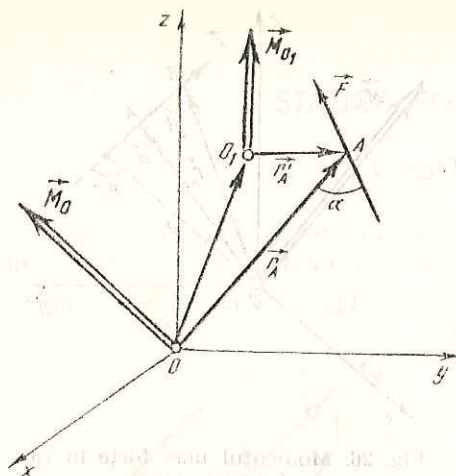


Fig. 27. Proprietatea de vector legat a momentului unei forțe în raport cu un punct.

Expresia analitică a momentului unei forțe în raport cu un punct (fig. 28). Expresia analitică a vectorului de poziție al punctului A de pe suportul forței $\vec{F}$ este:

$$\vec{r}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k},$$

unde x_A , y_A și z_A sunt coordonatele punctului A, respectiv proiecțiile vectorului de poziție $\vec{r}_A$ pe cele trei axe:

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — versorii axelor de coordonate.

Expresia forței $\vec{F}$ poate fi scrisă, de asemenea, sub forma:

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},$$

unde:

X , Y , Z sunt proiecțiile forței $\vec{F}$ pe cele trei axe.

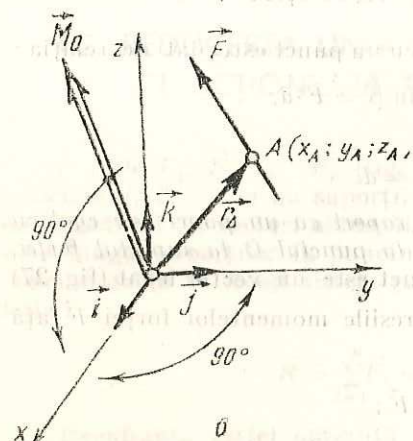


Fig. 28. Momentul unei forțe în raport cu un punct (a) și în raport cu o dreaptă (b).

Se observă că între aceste două expresii se poate obține o relație de legătură scriind:

$$\vec{OO}_1 + \vec{r}_A = \vec{r}_A.$$

Se poate deci scrie:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{r}_A \times \vec{F} = (\vec{OO}_1 + \vec{r}_A) \times \vec{F} = \\ &= \vec{OO}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_A \times \vec{F} = \end{aligned}$$

$$= \vec{OO}_1 \times \vec{F} + \vec{M}_{O1}. \text{ Deci } \vec{M}_O \neq \vec{M}_{O1}.$$

Rezultă că dacă se schimbă punctul față de care se calculează momentul unei forțe atunci acesta își modifică modulul, direcția și sensul. Această proprietate arată că momentul unei forțe în raport cu un punct este un vector legat.

Momentul forței $\vec{F}$ față de originea O va avea, deci, expresia:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} = (x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}) \times (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}).$$

Deoarece produsul vectorial este anticomutativ, va trebui păstrată ordinea înmulțirilor pentru versori. Efectuând calculele se obține:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{r}_A \times \vec{F} = x_A X \vec{i} \times \vec{i} + x_A Y \vec{i} \times \vec{j} + x_A Z \vec{i} \times \vec{k} + y_A X \vec{j} \times \vec{i} + \\ &+ y_A Y \vec{j} \times \vec{j} + y_A Z \vec{j} \times \vec{k} + z_A X \vec{k} \times \vec{i} + z_A Y \vec{k} \times \vec{j} + z_A Z \vec{k} \times \vec{k}. \end{aligned}$$

Este necesar să se stabilească valorile produselor vectoriale dintre versorii $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. În baza definiției produsului vectorial se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}; & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}; \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}; & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}; \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}; \\ \vec{i} \times \vec{i} &= 0; & \vec{j} \times \vec{j} &= 0; & \vec{k} \times \vec{k} &= 0. \end{aligned}$$

Înlocuind aceste rezultate în expresia momentului forței $\vec{F}$ în raport cu punctul O se obține:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{i}(y_A Z - z_A Y) - \vec{j}(x_A Z - z_A X) + \vec{k}(x_A Y - y_A X) = \\ &= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \end{aligned}$$

unde s-a notat:

$$M_x = y_A Z - z_A Y; \quad M_y = -x_A Z + z_A X;$$

și

$$M_z = x_A Y - y_A X$$

componentele vectorului moment $\vec{M}_O$ după cele trei axe ale sistemului de referință.

4.3.2. **Momentul unei forțe în raport cu o axă.** Prin definiție, momentul unei forțe $\vec{F}$ în raport cu o axă este egal cu proiecția pe această axă a momentului forței $\vec{F}$ stabilit în raport cu un punct oarecare de pe axă (fig. 28, a).

În raport cu un punct oarecare O_1 de pe axa Δ expresia momentului forței $\vec{F}$ este $\vec{M}_{O1} = \vec{r}_A \times \vec{F}$.

Proiecția M_Δ a acestui vector pe axa Δ , a cărei direcție este determinată de versorul $\vec{u}$, se exprimă sub forma:

$$M_\Delta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{M}_{O1}}{u} = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{r}_A \times \vec{F})}{u}.$$

Observație: Momentul unei forțe în raport cu o axă paralelă cu ea este nul.

4.3.3. **Cuplul de forțe.** Două forțe paralele, egale și de sensuri contrare, ce acționează asupra unui solid rigid, formează un *cuplu de forțe* (fig. 29).

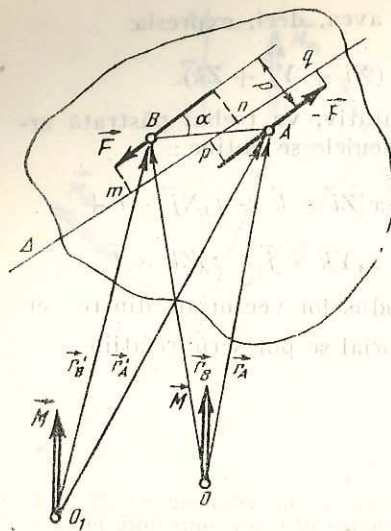


Fig. 29. Cuplu de forțe.

Deoarece

Se observă că suma algebrică a proiecțiilor forțelor pe o direcție oarecare Δ este nulă, cele două proiecții fiind egale și de sensuri contrare. Rezultă că *rezultanta unui cuplu de forțe este nulă*.

Efectul cuplului de forțe nu este însă nul, iar modulul său se măsoară prin *momentul cuplului*.

Expresia momentului cuplului de forțe în raport cu un punct oarecare O (fig. 29) este :

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times (-\vec{F}) = \\ &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F},\end{aligned}$$

$\vec{r}_A$ și $\vec{r}_B$ fiind vectorii de poziție ai unor puncte oarecare de pe suportii celor două forțe.

Modulul momentului cuplului este :

$$M_O = AB \cdot F \cdot \sin \alpha.$$

$$AB \cdot \sin \alpha = d,$$

unde d este distanța dintre cele două forțe, momentul M_O devine :

$$M_O = F \cdot d.$$

Momentul cuplului de forțe este un vector perpendicular pe planul forțelor, iar sensul său se stabilește cu regula burghiului.

Momentul cuplului de forțe este un vector liber adică are aceeași direcție, mărime și sens, indiferent față de ce punct se determină. El poate fi deplasat în orice punct al solidului rigid și produce același efect.

Dacă se stabilește momentul cuplului în raport cu alt punct O_1 expresia sa va fi :

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{r}_B' \times \vec{F} + \vec{r}_A' \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_B' - \vec{r}_A') \times \vec{F},$$

$\vec{r}_A'$ și $\vec{r}_B'$ fiind vectorii de poziție ai punctelor A și B față de O_1 . Rezultă că $\vec{M}_{O_1} = \vec{AB} \times \vec{F}$ și deci $\vec{M}_O = \vec{M}_{O_1}$.

4.3.4. Operații de echivalență (fig. 30). În cazul unui solid rigid acționat de un sistem de forțe oarecare pentru înlocuirea acestui sistem de forțe cu un sistem mecanic echivalent mai simplu, care să producă același efect asupra solidului rigid, este necesar să se cunoască anumite *operații de echivalență* simple.

Astfel :

1) Dacă asupra unui solid rigid acționează un sistem de forțe oarecare $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i$ și una sau mai multe forțe este deplasată de-a lungul suportului său (ex. $\vec{F}$ din A în A' , fig. 30, a), efectul întregului sistem de forțe asupra rigidului nu se modifică.

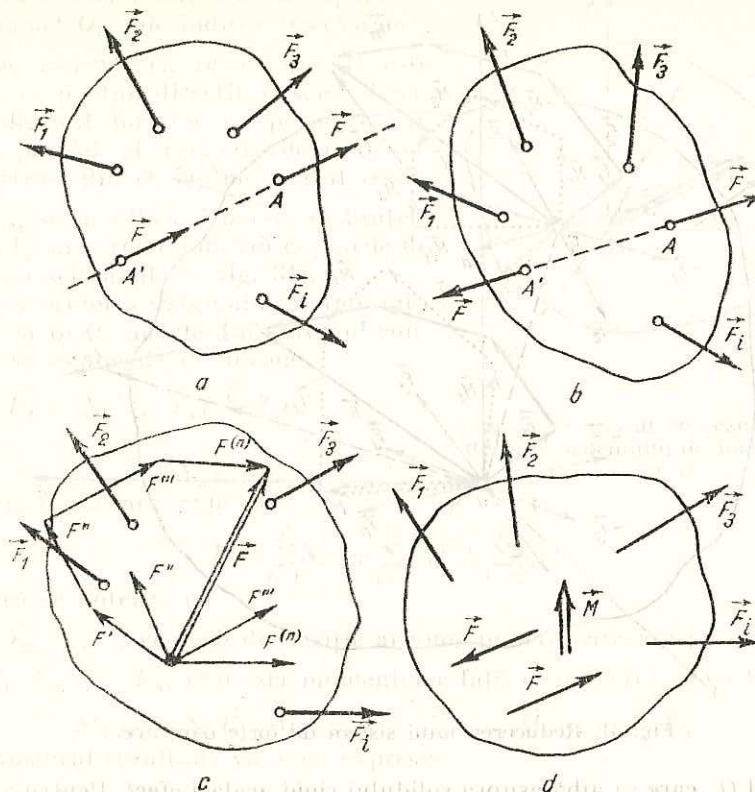


Fig. 30. Operații de echivalență.

2) Dacă asupra unui solid rigid acționează un sistem de forțe oarecare $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i$ și dacă se adaugă, sau se scot, două forțe egale, pe același suport și de sens contrar (ex. forțele $\vec{F}$ în A și A' , fig. 30, b), efectul întregului sistem de forțe asupra solidului rigid nu se modifică.

3) Dacă în cazul unui sistem de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \vec{F}', \vec{F}'', \dots, \vec{F}^{(n)}$ ce acționează asupra unui solid rigid (fig. 30, c) există un grup de forțe concurente (ex. $\vec{F}', \vec{F}'', \dots, \vec{F}^{(n)}$), acesta poate fi înlocuit prin rezultanta sa $\vec{F}$ fără ca efectul întregului sistem de forțe să se modifice.

Reciproc, o forță oarecare din sistem poate fi înlocuită prin componentele sale fără ca efectul întregului sistem de forțe asupra solidului rigid să se modifice.

4) Dacă în cadrul unui sistem de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \vec{F}$ care acționează asupra unui solid rigid există un cuplu de forțe $\vec{F}$ (fig. 30, d), acesta poate fi înlocuit, fie printr-un cuplu de forțe echivalent, fie prin momentul cuplului, $\vec{M}$, fără ca efectul întregului sistem de forțe asupra solidului rigid să se modifice.

4.3.5. Reducerea unui sistem de forțe oarecare ce acționează asupra unui solid rigid în raport cu un punct O . Prin această operație se înțelege înlocuirea întregului sistem de forțe oarecare cu un sistem mecanic echivalent, aplicat

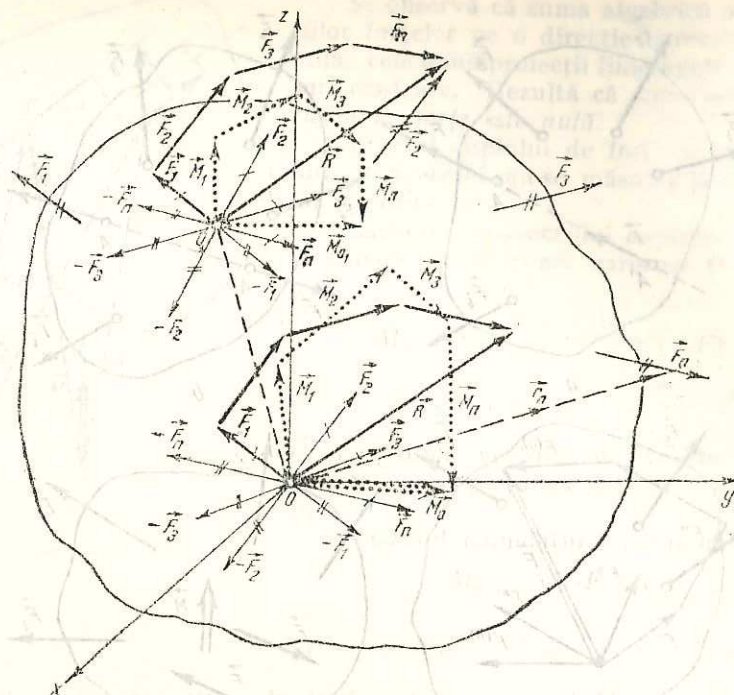


Fig. 31. Reducerea unui sistem de forțe oarecare.

în punctul O , care să aibă asupra solidului rigid același efect. Pentru a realiza această reducere se vor utiliza operațiile de echivalență.

Dacă în punctul O (fig. 31) sînt aplicate cîte două forțe egale, de sensuri contrare și de aceeași direcție cu forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ din sistemul dat, efectul întregului sistem de forțe asupra solidului rigid nu se modifică. Se observă însă că se obține un sistem de forțe echivalente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ concurente în O (însemnate cu $/$) și un număr de cupluri de forțe, formate din sistemul de forțe inițial și forțele aplicate în O luate în sens contrar (însemnate cu $\backslash$).

Sistemul de forțe echivalente concurente în O se poate înlocui prin rezultanta lor $\vec{R}$ ce se poate obține cu ajutorul poligonului forțelor. Cuplurile de forțe $\vec{F}_1\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\vec{F}_n$ se pot înlocui prin *momentele cuplurilor*. Deoarece aceste momente ale cuplurilor sînt vectori liberi se pot aduce tot în punctul O astfel că formează, de asemenea, un sistem de vectori concurenți care se poate înlocui prin rezultanta lor care se construiește cu ajutorul poligonului vectorilor.

Rezultă că sistemul de forțe oarecare dat, ce acționează asupra solidului rigid, este echivalent cu sistemul mecanic format din cei doi vectori:

$\vec{R}$ — rezultanta forțelor;

$\vec{M}_O$ — rezultanta momentelor cuplurilor.

Acești doi vectori $\vec{R}, \vec{M}_O$ formează un sistem mecanic al cărui efect asupra solidului rigid este echivalent cu cel al sistemului de forțe oarecare dat. Acest sistem poartă numele de *torsor* (fig. 32).

Dacă se face reducerea în raport cu un alt punct O_1 , folosindu-se aceeași metodă, se observă că rezultanta $\vec{R}$ este aceeași, ca modul, direcție și sens, deoarece poligonul forțelor ce pornește din O_1 este paralel și are laturile egale cu cel construit din O , iar momentul resultant $\vec{M}_{O_1}$ se modifică deoarece distanțele și planele în care acționează cuplurile de forțe s-au schimbat (v. fig. 31).

Dacă originea sistemului de referință $Oxyz$ se ia în O , forțele din sistemul concurent au expresiile de forma:

$$\vec{F}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$$

$$\vec{F}_n = X_n\vec{i} + Y_n\vec{j} + Z_n\vec{k}$$

Rezultanta are expresia:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n X_i\vec{i} + \sum_{i=1}^n Y_i\vec{j} + \sum_{i=1}^n Z_i\vec{k}$$

Dacă se notează cu:

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ vectorii de poziție ai unor puncte oarecare pe suportii forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, expresia momentelor față de punctul O va fi:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1; \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, \dots, \vec{M}_n = \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

Momentul resultant va avea expresia:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

În raport cu punctul O_1 aceleași puncte de pe suportii forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ vor avea vectorii de poziție $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_n$ iar expresia momentelor față de O_1 va fi:

$$\vec{M}'_1 = \vec{r}'_1 \times \vec{F}_1; \vec{M}'_2 = \vec{r}'_2 \times \vec{F}_2, \dots, \vec{M}'_n = \vec{r}'_n \times \vec{F}_n$$

Momentul resultant va avea expresia:

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}_i$$

Se observă că se poate stabili o relație între $\vec{M}_O$ și $\vec{M}_{O_1}$, folosindu-se relația existentă între vectorii de poziție față de O și O_1 ai punctelor de pe suportii forțelor:

$$\vec{r}_i = \vec{OO}_1 + \vec{r}'_i$$

deci

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{OO}_1 + \vec{r}'_i) \times \vec{F}_i = \vec{OO}_1 \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}_i$$

$$\text{Rezultă că: } \vec{M}_O = \vec{OO}_1 \times \vec{R} + \vec{M}_{O_1}$$

$$\text{Deci: } \vec{M}_O \neq \vec{M}_{O_1}$$

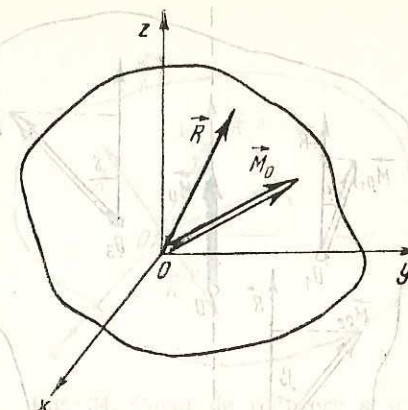


Fig. 32. Torsorul ce rezultă din reducerea sistemului de forțe în punctul O .

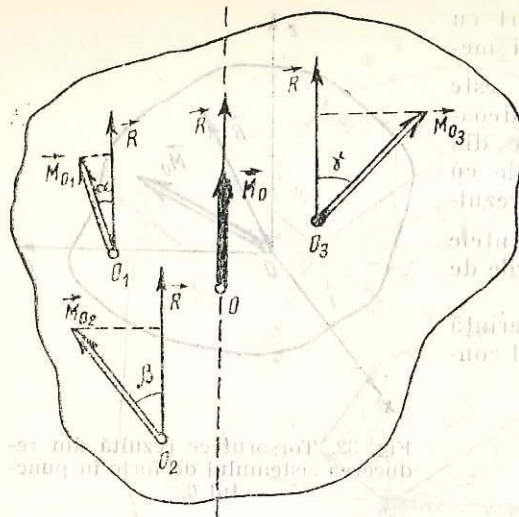


Fig. 33. Modul de reducere a sistemului de forțe față de diferite puncte.

Pentru a demonstra că proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei este o constantă, se folosește relația cunoscută

$$\vec{M}_O = \vec{OO}_1 \times \vec{R} + \vec{M}_{O1},$$

căreia i se aplică relația cu care se determină proiecția unui vector pe alt vector (sau pe o dreaptă Δ)

$$M_\Delta = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R}.$$

Se obține:

$$\frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R} = \frac{(\vec{OO}_1 \times \vec{R}) \cdot \vec{R}}{R} + \frac{\vec{M}_{O1} \cdot \vec{R}}{R}.$$

Deoarece produsul mixt este nul, avînd doi vectori identici, rezultă:

$$\frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R} = \frac{\vec{M}_{O1} \cdot \vec{R}}{R} = \text{constant}.$$

4.3.6. Cazurile de reducere a unui sistem de forțe oarecare ce acționează asupra unui solid rigid. În cazul reducerii, în raport cu originea O , a unui sistem de forțe oarecare, în cazul cel mai general, se obține torsorul $\vec{R}, \vec{M}_O$. Se pot întîlni însă următoarele situații particulare:

- 1) $\vec{R} \neq 0; \vec{M}_O = 0$ — sistemul se reduce la o rezultantă ce trece prin O (originea axelor);
- 2) $\vec{R} = 0; \vec{M}_O \neq 0$ — sistemul se reduce la un cuplu de forțe;
- 3) $\vec{R} = 0; \vec{M}_O = 0$ — sistemul de forțe se află în echilibru.

Proiecția momentului rezultat pe direcția forței rezultante este constantă indiferent care este punctul față de care se face reducerea sistemului de forțe oarecare ce acționează asupra solidului rigid.

În concluzie, mărimile invariante ale unui sistem de forțe oarecare ce acționează asupra unui solid rigid sînt rezultanta și proiecția momentului rezultat pe direcția rezultantei.

În figura 33 se arată modul de reducere a unui sistem de forțe oarecare, ce acționează asupra unui solid rigid, în raport cu diferite puncte ale corpului.

Într-adevăr: dacă: $\vec{R} = 0$ și $\vec{M}_O = 0$ torsorul de reducere în raport cu punctul O este nul, atunci el este nul în raport cu orice alt punct. Acest lucru rezultă din relația stabilită mai înainte.

4) $R \neq 0$ și $M_O \neq 0$ — se pot întîlni două cazuri.

Sistemul se reduce la o rezultantă ce nu trece prin O (fig. 34); pentru a-l reduce în raport cu punctul O se introduce în origine două forțe $\vec{R}$ egale, de sensuri contrare, pe același suport, paralele cu forța rezultantă $\vec{R}$. Sistemul se reduce astfel la o rezultantă ce trece prin origine și un

cuplu al cărui moment $\vec{M}_O$ este perpendicular pe planul forțelor $\vec{R}$. Această proprietate se recunoaște scriind că produsul scalar $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$.

Rezultă deci pentru $\vec{R} \neq 0$ și $\vec{M}_O \neq 0$, că:

— dacă $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ — sistemul se reduce la o rezultantă unică ce nu trece prin origine;

— dacă $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$ — sistemul se reduce la un sistem echivalent mecanic, format dintr-o forță rezultantă $\vec{R}$ și un cuplu de moment $\vec{M}_O$, deci un torsor.

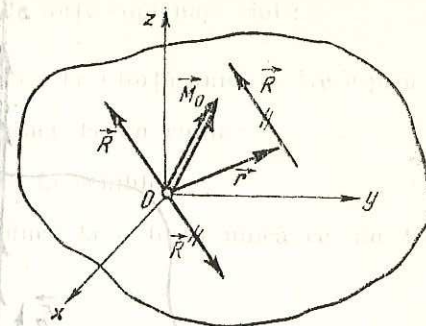


Fig. 34. Cazul de reducere a unui sistem de forțe la o rezultantă ce nu trece prin origine.

4.4. CAZURI PARTICULARE DE SISTEME DE FORȚE

4.4.1. Sistem de forțe coplanare. Un sistem de forțe coplanare are suportii tuturor forțelor în același plan (fig. 35).

Se alege pentru simplificare, ca plan al suportilor forțelor, planul xOy . Expresiile forțelor din sistem nu vor avea componente după axa Oz , deci vor fi de forma:

$$\vec{F}_1 = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j}$$

$$\vec{F}_n = X_n \vec{i} + Y_n \vec{j}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n X_i \vec{i} + \sum_{i=1}^n Y_i \vec{j} = X \vec{i} + Y \vec{j}.$$

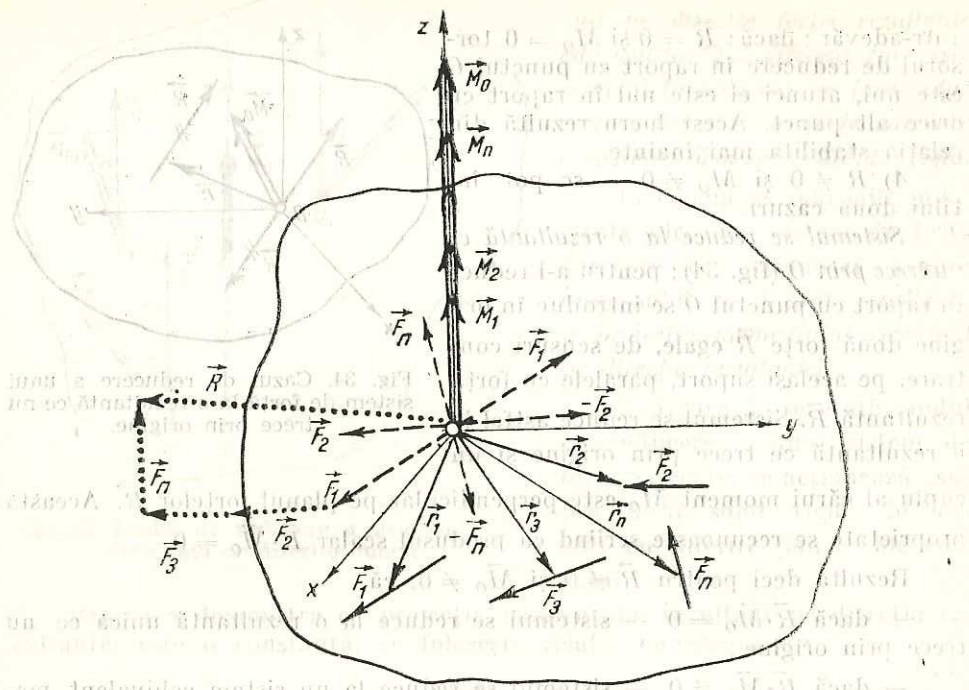


Fig. 35. Reducerea unui sistem de forțe coplanare.

Momentele forțelor în raport cu originea O vor fi vectori perpendiculari pe planul xOy dirijați după axa Oz , deoarece suportii forțelor și vectorii de poziție se află în același plan. Se scriu relațiile :

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = M_1 \vec{k}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = M_2 \vec{k}$$

$$\vec{M}_n = \vec{r}_n \times \vec{F}_n = M_n \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = M_O \vec{k}$$

Momentul rezultat în raport cu originea O va avea direcția axei Oz , iar mărimea va fi egală cu suma algebrică a momentelor forțelor din sistem în raport cu același punct.

În cazul sistemelor de forțe coplanare ce acționează asupra unui solid rigid acestea se reduc, în raport cu un punct O , la un sistem mecanic $\vec{R}$ și $\vec{M}_O$ în care elementele sînt perpendiculare între ele, $\vec{R} \perp \vec{M}_O$, adică $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$. Rezultă că un sistem de forțe coplanare nu se reduce niciodată la un torsesor.

Cazurile de reducere a unui sistem de forțe coplanare sînt :

$\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_O = 0$ — sistemul se reduce la o forță unică ce trece prin O ;

$\vec{R} = 0$; $\vec{M}_O \neq 0$ — sistemul se reduce la un cuplu;

$\vec{R} = 0$; $\vec{M}_O = 0$ — sistemul se află în echilibru;

$\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_O \neq 0$ — sistemul se reduce la o forță unică ce nu trece prin origine.

Calculul grafic. Poligonul forțelor și poligonul funicular. Se consideră un sistem de forțe coplanare ce acționează asupra unui solid rigid (fig. 36). În figură forțele și distanțele sînt reprezentate la scară.

Modulul, direcția și sensul rezultantei forțelor se pot determina construind poligonul forțelor. Prin această construcție nu se poate determina, însă, suportul rezultantei. În acest scop se folosesc construcții auxiliare. Se construiește, alături de solidul rigid acționat de sistemul de forțe dat (fig. 36, a), poligonul forțelor, așezîndu-se cap la cap $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ etc., egale, paralele și de același sens cu forțele sistemului. Dacă se unește originea primei forțe cu vîrfurile ultimei forțe din acest poligon se obține rezultanta ca modul, direcție și sens. Se alege un punct oarecare O , ce se numește *pol*, alături de poligonul forțelor și se duc razele polare, OA, OB, OC, OD, OE ce unesc *polul* O cu originea și, respectiv, cu vîrfurile forțelor din poligon. Figura obținută poartă numele de *diagrama polară*. Se poate observa că, prin această construcție, forțele din poligon se descompun după regula triunghiului în două

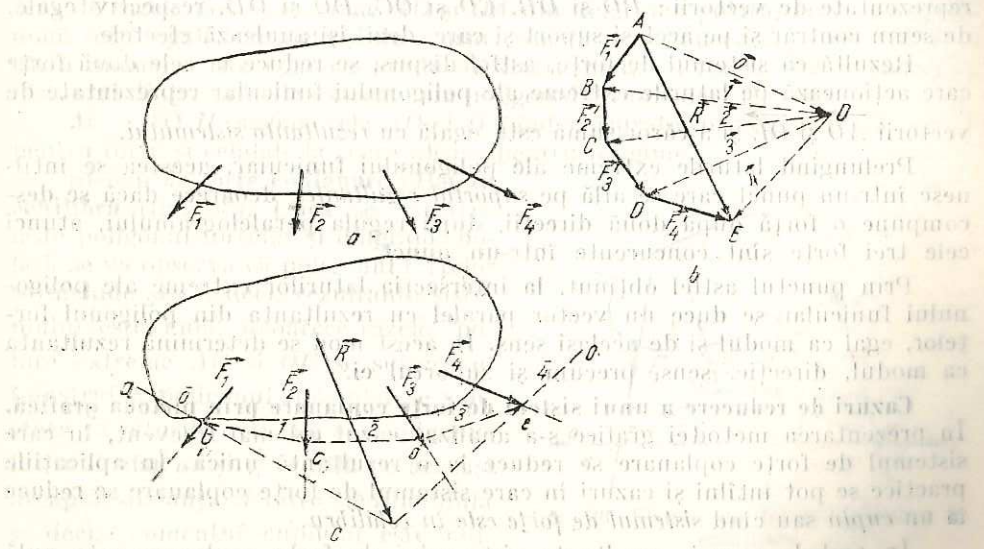


Fig. 36. Calculul grafic. Poligonul forțelor, poligonul funicular.

componente, care au modulul și direcția razelor polare corespunzătoare punctului de aplicație și vârfulu forței respective (fig. 36, b). Astfel, se obține:

$$\vec{F}_1 = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{0} + \vec{1}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{BO} + \vec{OC} = -\vec{1} + \vec{2}$$

$$\vec{F}_3 = \vec{CO} + \vec{OD} = -\vec{2} + \vec{3}$$

$$\vec{F}_4 = \vec{DO} + \vec{OE} = -\vec{3} + \vec{4}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{AO} + \vec{OE} = \vec{0} + \vec{4}, \text{ unde } \vec{0} = \vec{AO}.$$

Vectorul rezultat din poligonul forțelor este egal cu suma vectorilor reprezentați de razele polare extreme. Pentru a determina suportul rezultantei se construiește poligonul funicular (fig. 36, c). În acest scop se ia un punct oarecare b pe suportul forței $\vec{F}_1$ și se duc din el două drepte paralele la razele polare $\vec{AO}$ și $\vec{OB}$ (adică $\vec{0}$ și $\vec{1}$) din diagrama polară. Prin această construcție se poate considera că s-a înlocuit forța $\vec{F}_1$ prin componentele sale reprezentate de vectorii $\vec{AO}$ și $\vec{OB}$. Din punctul c de intersecție dintre paralela la raza polară $\vec{OB}$ și suportul forței $\vec{F}_2$ se duce o paralelă la raza polară $\vec{OC}$. În mod asemănător se poate considera că s-a înlocuit forța $\vec{F}_2$ prin componentele sale reprezentate de vectorii $\vec{BO}$ și $\vec{OC}$.

Continuând construcția, în același fel, se obțin laturile ab, bc, cd, de, eo , paralele cu razele polare $\vec{0}, \vec{1}, \vec{2}, \vec{3}, \vec{4}$, care formează un *poligon funicular*. Prin această construcție, forțele sistemului dat au fost înlocuite prin componentele lor care acționează pe direcțiile laturilor poligonului funicular. Se observă că pe direcția laturilor bc, cd și de acționează perechile de forțe reprezentate de vectorii: $\vec{BO}$ și $\vec{OB}$, $\vec{CO}$ și $\vec{OC}$, $\vec{DO}$ și $\vec{OD}$, respectiv egale, de semn contrar și pe același suport și care, deci, își anulează efectele.

Rezultă că sistemul de forțe, astfel dispus, se reduce la cele două forțe care acționează pe laturile extreme ale poligonului funicular reprezentate de vectorii $\vec{AO}$ și $\vec{OE}$ și a căror sumă este egală cu *rezultanta sistemului*.

Prelungind laturile extreme ale poligonului funicular, acestea se întâlnesc într-un punct care se află pe *suportul rezultantei*, deoarece dacă se descompune o forță după două direcții, după regula paralelogramului, atunci cele trei forțe sînt concurente într-un punct.

Prin punctul astfel obținut, la intersecția laturilor extreme ale poligonului funicular se duce un vector paralel cu rezultanta din poligonul forțelor, egal ca modul și de același sens. În acest mod se determină rezultanta ca modul, direcție, sens, precum și suportul ei.

Cazuri de reducere a unui sistem de forțe coplanare prin metoda grafică. În prezentarea metodei grafice s-a analizat cazul cel mai frecvent, în care sistemul de forțe coplanare se reduce la o rezultantă unică. În aplicațiile practice se pot întâlni și cazuri în care sistemul de forțe coplanare se reduce la un *cuplu* sau cînd *sistemul de forțe este în echilibru*.

În ambele cazuri, rezultanta sistemului de forțe coplanare este nulă (poligonul forțelor trebuie să se închidă).

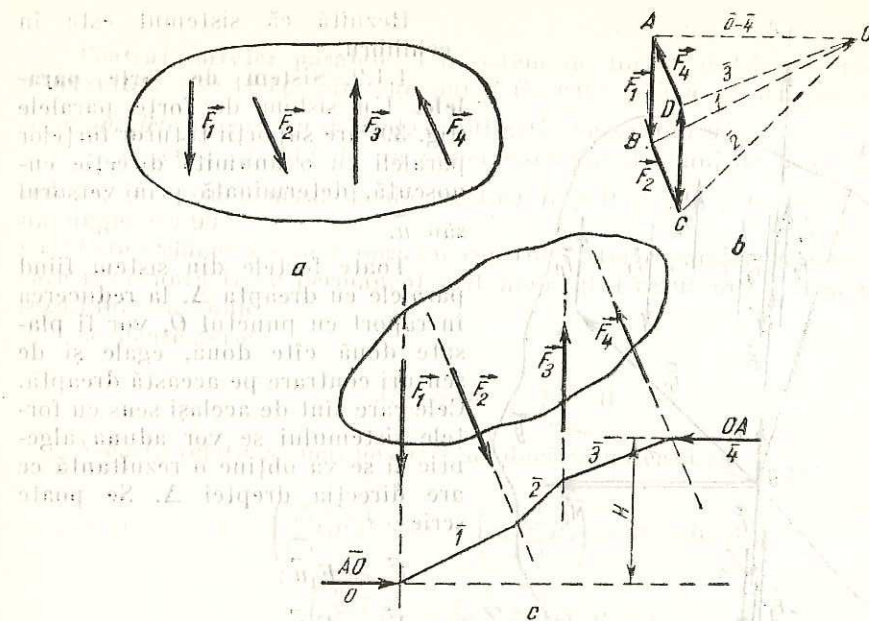


Fig. 37. Sistem de forțe coplanare echivalent cu un cuplu.

Sistem de forțe coplanare care se reduce la un cuplu (fig. 37, a). Se construiește poligonul forțelor și se constată că vârful ultimei forțe coincide cu originea primei forțe, astfel că poligonul forțelor se închide și deci rezultanta sistemului este nulă. Se alege un pol oarecare și se trasează razele polare OA, OB, OC, OD și OA notate cu $\vec{0}, \vec{1}, \vec{2}, \vec{3}, \vec{4}$ și se constată că razele polare extreme sînt suprapuse (fig. 37, b).

Se construiește poligonul funicular (fig. 37, c) și se constată că laturile extreme ale poligonului funicular sînt paralele și nesuprapuse. Deoarece pe laturile extreme acționează forțele reprezentate ca mărime, direcție și sens de razele polare extreme AO și OA din diagrama polară, deci reprezintă două forțe egale, paralele și de sensuri contrare, ele au ca efect un cuplu al cărui moment este egal cu produsul dintre modulul forței AO și mărimea distanței dintre laturile extreme ale poligonului funicular. Rezultă:

$M = AO \cdot H$, segmentele AO și H fiind măsurate, primul la scara aleasă pentru forțe și celălalt la scara aleasă pentru lungime.

Sistem de forțe coplanare aflat în echilibru (fig. 38). Dacă se construiește poligonul forțelor și diagrama polară se va observa că poligonul forțelor se închide și că, deci, rezultanta sistemului este nulă, deoarece razele polare extreme AO și OE se suprapun. Construind poligonul funicular se constată că laturile extreme ale poligonului funicular ab și ef se află pe aceeași dreaptă, distanța H între ele fiind nulă și deci, momentul cuplului este nul.

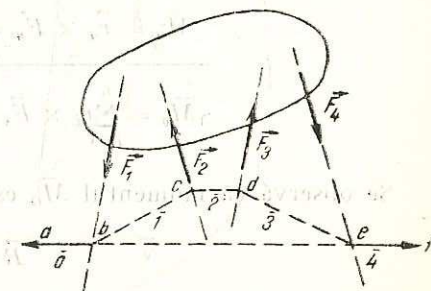


Fig. 38. Sistem de forțe coplanare în echilibru.

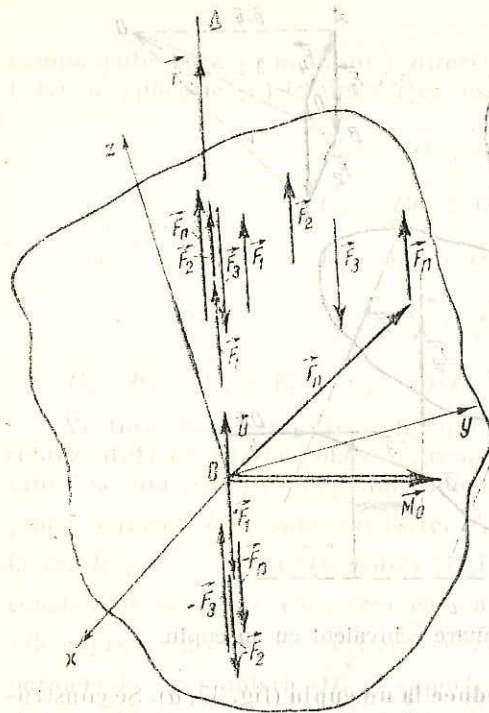


Fig. 39. Reducerea unui sistem de forțe paralele.

Momentele cuplurilor de forțe $\vec{F}_i$ în raport cu punctul O vor fi vectori perpendiculari pe direcția Δ deci, perpendiculari pe versorul $\vec{u}$ deci, se vor afla într-un plan perpendicular pe axa Δ ce trece prin O .

Se scriu momentele cuplurilor de forțe:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_1 \times F_1 \vec{u} = F_1 \vec{r}_1 \times \vec{u}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times F_2 \vec{u} = F_2 \vec{r}_2 \times \vec{u}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\vec{M}_n = \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{r}_n \times F_n \vec{u} = F_n \vec{r}_n \times \vec{u}$$

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times F_i \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i \right) \times \vec{u}$$

Se observă că momentul $\vec{M}_o$ este perpendicular pe rezultanta $\vec{R}$ și că :

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_o = 0.$$

Se ajunge la concluzia că în cazul unui sistem de forțe paralele sistemul nu se reduce niciodată la un torsor.

Rezultă că sistemul este în echilibru.

4.4.2. Sistem de forțe paralele. Un sistem de forțe paralele (fig. 39) are suportii tuturor forțelor paraleli cu o anumită direcție cunoscută, determinată prin versorul său $\vec{u}$.

Toate forțele din sistem fiind paralele cu dreapta Δ , la reducerea în raport cu punctul O , vor fi plasate două câte două, egale și de sensuri contrare pe această dreaptă. Cele care sînt de același sens cu forțele sistemului se vor aduna algebric și se va obține o rezultantă ce are direcția dreptei Δ . Se poate scrie :

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{u};$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \vec{u};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\vec{F}_n = F_n \vec{u}.$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \vec{u} = R \vec{u}.$$

Centrul forțelor paralele. Un sistem de forțe paralele are proprietatea că rezultanta sa trece printr-un punct fix care poartă numele de *centrul forțelor paralele* și care nu depinde de direcția versorului $\vec{u}$.

Se observă că față de un punct oarecare sistemul de forțe paralele se reduce, în cazul general, la doi vectori $\vec{R} \neq 0$ și $\vec{M}_o \neq 0$ care fac între ei un unghi de 90° . Este evident că în raport cu centrul forțelor paralele C (fig. 40), prin care rezultanta trece permanent atît momentul rezultantei cît și momentul rezultant sînt nule.

Se poate scrie:

$$\vec{M}_o = -\vec{OC} \times \vec{R} = 0.$$

Această relație se mai poate scrie, dacă se notează $\vec{OC} = \vec{\rho}_c$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i \right) \times \vec{u} - \left(\vec{\rho}_c \sum_{i=1}^n F_i \right) \times \vec{u} = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i - \vec{\rho}_c \sum_{i=1}^n F_i \right) \times \vec{u} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i - \vec{\rho}_c \sum_{i=1}^n F_i = 0$$

$$\vec{\rho}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} + \lambda \vec{u}.$$

Deoarece s-a ales punctul C ca punct oarecare pe suportul rezultantei se introduce vectorul $\lambda \vec{u}$, unde λ este o mărime scalară oarecare, pentru a stabili direcția rezultantei.

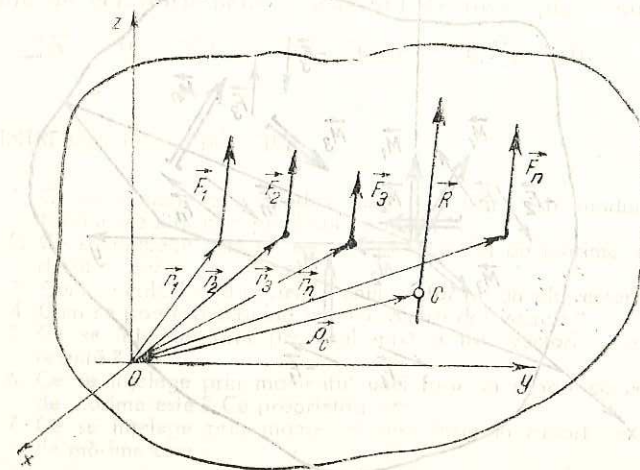


Fig. 40. Determinarea centrului forțelor paralele.

8. Ce se înțelege prin cuplul de forțe? Ce proprietăți are momentul cuplului de forțe?
9. Care sînt operațiile de echivalență? La ce se folosesc?
10. La ce se reduce un sistem de vectori oarecare ce acționează asupra unui solid rigid?
11. Care sînt cazurile de reducere posibile ale unui sistem de forțe?
12. Care sînt mărimile invariante (constante) ale unui sistem de forțe?
13. Care sînt condițiile de echilibru pentru un solid rigid liber acționat de un sistem de forțe?
14. Ce se înțelege prin sistem de forțe coplanare? Care sînt cazurile de reducere? Care sînt condițiile de echilibru?
15. Ce se înțelege prin sistem de forțe paralele? Ce se înțelege prin centru forțelor paralele?

4.6. ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID SUPUS LA LEGĂTURI

Un solid rigid, care este obligat să se afle permanent în contact cu o anumită suprafață, linie sau punct este un solid rigid supus la legături.

Între solidul rigid și legătură apar forțe de interacțiune ce poartă numele de *forțe de legătură* sau *reacțiuni*. Solidul rigid acționează asupra legăturii iar legătura acționează la rîndul ei asupra solidului rigid.

Pentru a putea studia echilibrul unui solid rigid supus la legături acesta se va transforma într-un corp liber, în baza *axiomei legăturilor*.

4.6.1. Axioma legăturilor. Pentru a studia echilibrul sau mișcarea unui solid rigid supus la legături acesta se transformă într-un solid rigid liber. În acest scop solidul rigid se izolează, se desface de legături. Se obține astfel un solid rigid liber asupra căruia acționează un sistem de forțe format din *forțele active* denumite și *forțe date* și *forțele de legătură* denumite și *reacțiuni*.

În cazul echilibrului, taylorul de reducere în raport cu un punct oarecare al sistemului de forțe, astfel obținut, trebuie să fie nul, adică :

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_{active} + \sum \vec{F}_{leg} = 0$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_{O \text{ Active}} + \sum \vec{M}_{O \text{ Fleg}} = 0.$$

Acest sistem de ecuații, scrise vectorial, echivalează cu un sistem de *trei ecuații*, în cazul sistemelor de forțe plane sau *sase ecuații scalare*, în cazul sistemelor de forțe oarecare în spațiu, obținute prin proiecția pe cele trei axe a ecuațiilor vectoriale.

Pentru forțele plane rezultă :

$$\sum X_{active} + \sum X_{leg} = 0;$$

$$\sum Y_{active} + \sum Y_{leg} = 0$$

$$\sum M_{O \text{ Active}} + \sum M_{O \text{ Fleg}} = 0.$$

Pentru forțele spațiale rezultă :

$$\begin{aligned} \sum X_{active} + \sum X_{leg} &= 0 & \sum M_{x \text{ Active}} + \sum M_{x \text{ Fleg}} &= 0 \\ \sum Y_{active} + \sum Y_{leg} &= 0 & \sum M_{y \text{ Active}} + \sum M_{y \text{ Fleg}} &= 0 \\ \sum Z_{active} + \sum Z_{leg} &= 0 & \sum M_{z \text{ Active}} + \sum M_{z \text{ Fleg}} &= 0 \end{aligned}$$

4.6.2. Legăturile solidului rigid. Pentru a putea aplica axioma legăturilor este necesar să se cunoască legăturile solidului rigid și modul cum se înlocuiesc.

Legăturile solidului rigid sînt : reazemul simplu, articulația, încastrarea, legături prin fire.

4.6.2.1. Reazemul simplu. Se consideră două corpuri (solide rigide) în echilibru, în care corpul 1 se sprijină pe corpul 2 (fig. 42, a).

Corpul 1 este acționat de un sistem de forțe oarecare $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i$. El se sprijină în punctul I pe corpul 2, acest punct situîndu-se în planul tangent T , comun la suprafețele aflate în contact. Se consideră cele două suprafețe aflate în contact perfect netede, astfel că nu apar rezistențe datorită frecării.

Aplicînd axioma legăturilor, se izolează corpul 1 și sistemul de forțe active $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i$ se înlocuiește cu taylorul de reducere în I echivalent lui, format din rezultanta $\vec{R}$ și momentul resultant $\vec{M}_I$.

Elementele taylorului

$\vec{R}, \vec{M}_I$, se pot înlocui prin componentele lor după direcțiile normalei nn' și planului T :

$$\vec{R}_t; \vec{R}_n \text{ și } \vec{M}_t; \vec{M}_n$$

Se observă că dacă :

$\vec{M}_t \neq 0$ — corpul s-ar rostogoli pe planul T ;

$\vec{M}_n \neq 0$ — corpul s-ar roti în jurul axei nn' ;

$\vec{R}_t \neq 0$ — corpul ar aluneca pe planul T ;

$\vec{R}_n \neq 0$ — planul T ar susține corpul, planul acționînd asupra corpului.

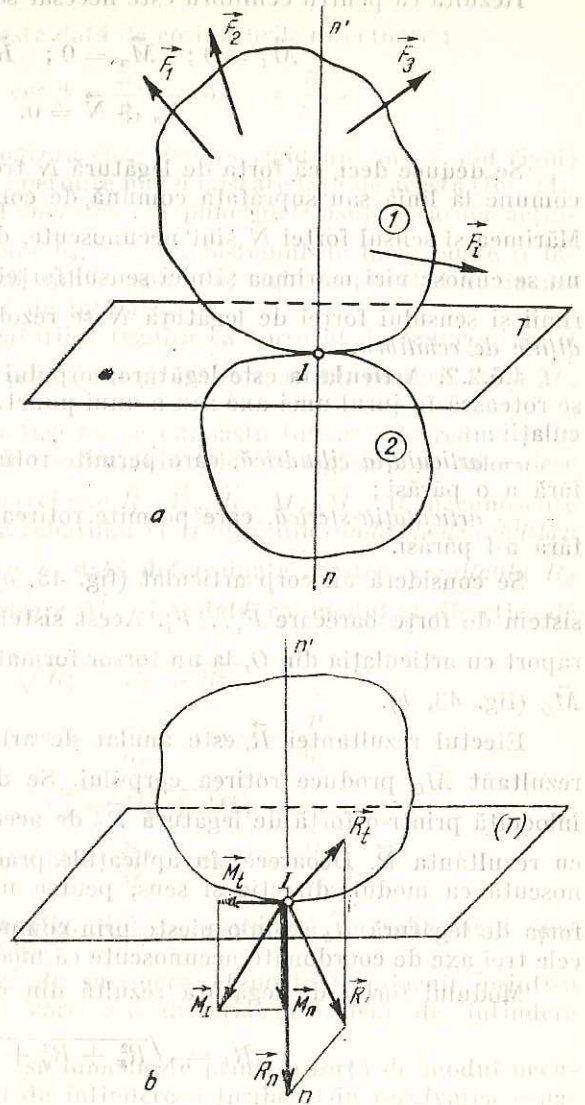


Fig. 42. Reazemul simplu.

Rezultă că pentru echilibru este necesar să se respecte relațiile :

$$\vec{M}_t = 0; \quad \vec{M}_n = 0; \quad \vec{R}_t = 0 \text{ și}$$

$$\vec{R}_n + \vec{N} = 0.$$

Se deduce deci, că forța de legătură $\vec{N}$ trebuie să aibă direcția normalei comune la linia sau suprafața comună de contact dintre cele două corpuri. Mărimea și sensul forței $\vec{N}$ sînt necunoscute, de cele mai multe ori, deoarece nu se cunosc nici mărimea și nici sensul forței $\vec{R}_n$. Pentru determinarea măririi și sensului forței de legătură $\vec{N}$ se rezolvă ecuațiile ce constituie condițiile de echilibru.

4.6.2.2. **Articulația** este legătura corpului (solid rigid) care îi permite să se rotească în jurul unei axe sau a unui punct. Se disting două feluri de articulații :

- *articulația cilindrică*, care permite rotirea corpului în jurul unei axe, fără a o părăsi;
- *articulația sferică*, care permite rotirea corpului în jurul unui punct, fără a-l părăsi.

Se consideră un corp articulat (fig. 43, a) în punctul O acționat de un sistem de forțe oarecare $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i$. Acest sistem de forțe se poate reduce, în raport cu articulația din O , la un torsesor format din rezultanta $\vec{R}$ și momentul $\vec{M}_O$ (fig. 43, b).

Efectul rezultantei $\vec{R}$ este anulat de articulație, în schimb momentul resultant $\vec{M}_O$ produce rotirea corpului. Se deduce că articulația poate fi înlocuită printr-o forță de legătură $\vec{R}_k$ de aceeași direcție și de sens contrar cu rezultanta $\vec{R}$. Deoarece, în aplicațiile practice, rezultanta $\vec{R}$ este necunoscută ca modul, direcție și sens, pentru ușurarea rezolvării problemelor forța de legătură $\vec{R}_k$ se înlocuiește prin componentele sale $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ după cele trei axe de coordonate necunoscute ca modul și sens.

Modulul forței de legătură rezultă din relația :

$$R_k = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

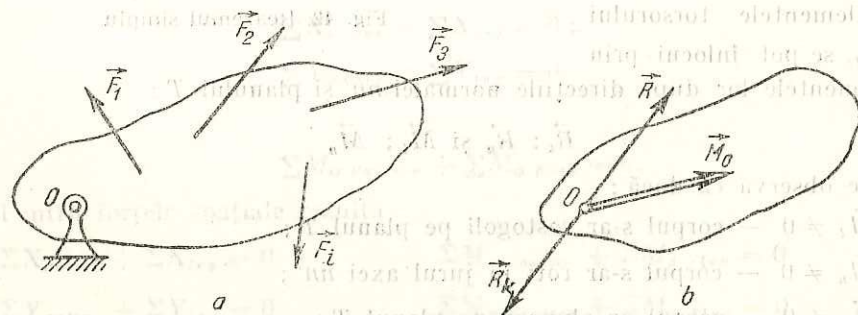


Fig. 43. Articulația.

Direcția forței de legătură este dată de cosinusurile directoare :

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R_k}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R_k}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R_k}.$$

4.6.2.3. **Încăstrarea** este legătura care fixează rigid un corp (solid rigid) de un alt corp (solid rigid) și nu-i permite nici o mișcare față de acesta (fig. 44).

Se consideră un solid rigid încăstrat în punctul O asupra căruia acționează un sistem de forțe oarecare $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i$. Sistemul de forțe poate fi înlocuit printr-un torsesor echivalent aplicat solidului rigid în punctul de încăstrare, al cărui efect este anulat de încăstrare.

Dacă se aplică axioma legăturilor rezultă că torsesorul de reducere în O va trebui anulat de torsesorul forțelor de legătură format din vectorii $\vec{R}_k$ și $\vec{M}_b$ (fig. 44, b).

Deoarece în aplicațiile practice nu se cunoaște torsesorul de reducere în punctul de încăstrare, elementele torsesorului forțelor de legătură se înlocuiesc prin componentele lor după cele trei axe $\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z, \vec{M}_x, \vec{M}_y, \vec{M}_z$ necunoscute ca modul și sens. Din rezolvarea ecuațiilor ce rezultă din condițiile de echilibru se determină aceste componente. O dată determinate acestea, rezultanta $\vec{R}_k$ și momentul resultant din încăstrare $\vec{M}_b$ sînt date ca modul și direcție, de relațiile :

$$R_k = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R_k}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R_k}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R_k};$$

$$M_b = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$\cos \alpha' = \frac{M_x}{M_b}; \quad \cos \beta' = \frac{M_y}{M_b}; \quad \cos \gamma' = \frac{M_z}{M_b}.$$

4.6.2.4. **Legături prin fire** (fig. 45). Se consideră un solid rigid susținut de fire (cabluri, lanțuri etc.).

Dacă se secționează un fir de susținere, el poate fi înlocuit printr-o forță de mărime necunoscută, care are direcția și sensul de întindere a firului.

Rezultă că *legătura prin fir* se înlocuiește printr-o forță de modul necunoscut ce are direcția și sensul de întindere a firului. Din rezolvarea ecuațiilor ce constituie condițiile de echilibru se determină aceste necunoscute.

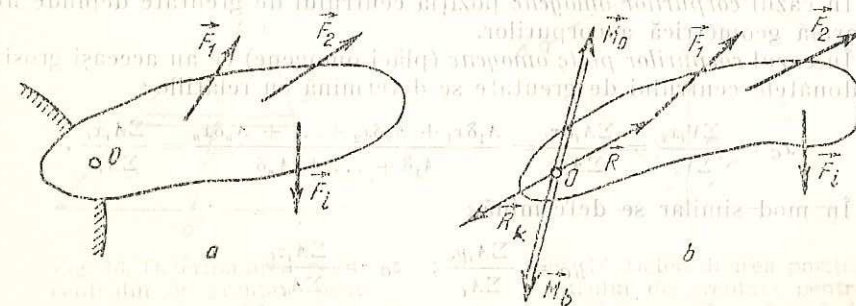


Fig. 44. Încăstrarea.

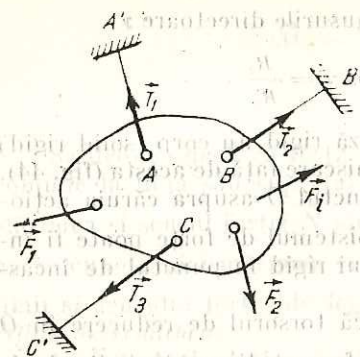


Fig. 45. Legături prin fire.

4.7. CENTRE DE GREUTATE

4.7.1. Generalități. În studiul mecanicii corpului solid intervin noțiunile de densitate și de forță gravitațională (greutate) specifică.

Legătura între densitatea ρ și forța gravitațională specifică γ ale unui corp este:

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{M \cdot g}{V} = \rho g, \text{ unde:}$$

g este accelerația gravitațională.

Se numește *centru de greutate* al unui sistem de puncte materiale, punctul de aplicație al rezultantei tuturor forțelor paralele ce reprezintă forța gravitațională a particulelor din care este alcătuit corpul respectiv.

4.7.2. Determinarea centrului de greutate. Poziția centrului de greutate al unui corp se poate determina prin calcul.

Se consideră un corp oarecare, care se poate împărți în mai multe porțiuni ale căror forțe gravitaționale $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \dots, \vec{G}_n$ și centre de greutate $C_1, C_2, \dots, C_n$, în raport cu un sistem de referință dat, sînt cunoscute. *Centrul forțelor paralele care coincide cu centrul de greutate* are coordonatele:

$$x_c = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i}, \quad y_c = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i}, \quad z_c = \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i}.$$

În aceste relații x_i, y_i, z_i sînt coordonatele centrelor de greutate ale porțiunilor acționate de forțele gravitaționale G_i presupuse cunoscute ($i = 1 \dots n$).

În cazul corpurilor omogene, forța gravitațională specifică fiind aceeași în fiecare porțiune de corp, expresia forței gravitaționale a unei porțiuni de corp este: $G_i = V_i \gamma = V_i \rho g$.

Coordonatele centrului de greutate se pot scrie sub forma:

$$x_c = \frac{\sum V_i \gamma x_i}{\sum G_i} = \frac{\sum V_i \rho g x_i}{\sum V_i \rho g} = \frac{\rho g \sum V_i x_i}{\rho g \sum V_i} = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i}.$$

În mod asemănător:

$$y_c = \frac{\sum V_i y_i}{\sum V_i}; \quad z_c = \frac{\sum V_i z_i}{\sum V_i}.$$

În cazul corpurilor omogene poziția centrului de greutate depinde numai de forma geometrică a corpurilor.

În cazul corpurilor plate omogene (plăci omogene) ce au aceeași grosime δ coordonatele centrului de greutate se determină cu relațiile:

$$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i} = \frac{\sum A_i \delta x_i}{\sum A_i \delta} = \frac{A_1 \delta x_1 + A_2 \delta x_2 + \dots + A_n \delta x_n}{A_1 \delta + \dots + A_n \delta} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}.$$

În mod similar se determină:

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}; \quad z_c = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i}$$

unde:

A_i ($i = 1 \dots n$) sînt ariile suprafețelor părților componente.

În cazul barelor omogene, de aceeași arie a secțiunii A , se folosesc relațiile:

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i}; \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i}; \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i}$$

unde l_i ($i = 1 \dots n$) reprezintă lungimea barelor componente.

Corpurî omogene simetrice. În cazul corpurilor omogene care au un plan, o axă sau un centru de simetrie, centrul de greutate se găsește în planul, axa sau centrul de simetrie respectiv.

4.7.2.1. Poziția centrului de greutate în cazul unor corpurî omogene simple. O bară omogenă dreaptă, de secțiune constantă, are centrul de greutate la mijlocul său, acesta fiind un centru de simetrie.

O placă dreptunghiulară de grosime constantă, avînd două axe de simetrie, are centrul de greutate la intersecția lor care coincide cu intersecția diagonalelor.

Orice corp omogen sau placă omogenă de grosime constantă sau bară omogenă de secțiune constantă (pătrat, romb, cerc, elipsă, sferă, cilindru circular drept etc.) au centrul de greutate în centrele de simetrie.

Centrul de greutate al unei plăci omogene de grosime constantă în formă de triunghi oarecare. Pentru a se determina centrul de greutate al unui triunghi se împarte acesta în fișii foarte subțiri, paralele cu una din baze, de exemplu AC (fig. 46).

Pentru oricare din aceste fișii, centrul de greutate respectiv se va afla la mijlocul ei. Rezultă că centrul de greutate al întregii plăci se va afla pe mediana BB' . Dacă se împarte triunghiul în fișii paralele cu laturile BA , respectiv cu BC , se ajunge în mod similar ca centrul de greutate să se afle și pe medianele AA' și CC' .

Deoarece se știe că cele trei mediane se întîlnesc într-un punct, rezultă că centrul de greutate coincide cu punctul de intersecție al celor trei mediane.

Centrul de greutate al unei bare omogene de secțiune constantă în formă de arc de cerc (fig. 47). Raza cercului este r iar unghiul la centru este 2α , măsurat în radiani. Deoarece arcul AB admite o axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă. Distanța de la centrul cercului O la centrul de greutate este dată de relația:

$$OC = \frac{r \sin \alpha}{\alpha},$$

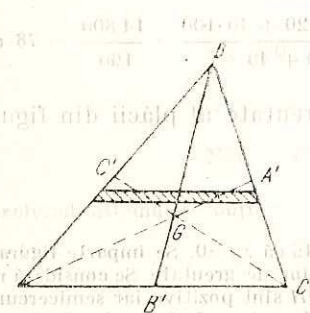


Fig. 46. Determinarea poziției centrului de greutate pentru placa triunghiulară.

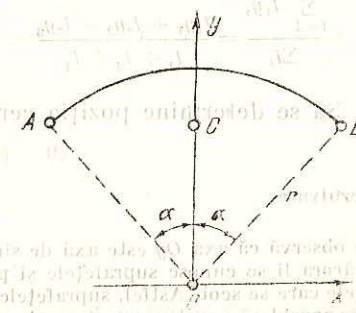


Fig. 47. Determinarea poziției centrului de greutate pentru o bară omogenă în formă de arc de cerc.

unde :

α este jumătatea din unghiul la centru ;
 r — raza cercului.

Centrul de greutate al unei plăci omogene de forma unui sector circular.
 Raza sectorului este r și unghiul la centru este 2α , măsurat în radiani.

Centrul de greutate al plăcii se află pe axa de simetrie la distanță :

$$OC = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

4.7.2.2. **Corpuri compuse.** În foarte multe aplicații practice este necesar să se determine centrul de greutate pentru corpuri omogene compuse.

Pentru astfel de corpuri se procedează în modul următor :

- se stabilește un sistem de referință ;
- se împarte corpul în părți componente ale căror volume, suprafețe sau lungimi, precum și pozițiile centrelor de greutate respective sînt cunoscute ;
- se aplică relațiile determinate pentru coordonatele centrelor de greutate.

PROBLEME

1. Să se determine centrul de greutate pentru bara cotită, ale cărei dimensiuni sînt date în figura 48.

Rezolvare

Se alege un sistem de referință xAy . Se împarte baza în trei părți AB, BC, CD ale căror centre de greutate sînt G_1, G_2 și G_3 . Aplicîndu-se relațiile pentru centrul de greutate, se obțin :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^3 l_i x_i}{\sum l_i} = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{120 \cdot 0 + 30 \cdot 15 + 40 \cdot 30}{120 + 30 + 40} = \frac{1650}{190} = 8,7 \text{ cm ;}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^3 l_i y_i}{\sum l_i} = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{120 \cdot 60 + 30 \cdot 120 + 40 \cdot 100}{120 + 30 + 40} = \frac{14800}{190} = 78 \text{ cm.}$$

2. Să se determine poziția centrului de greutate al plăcii din figura 49.

Rezolvare

Se observă că axa Oy este axă de simetrie și rezultă că $x_G = 0$. Se împarte figura în elemente cărora li se cunosc suprafețele și pozițiile centrelor de greutate. Se consideră negative suprafețele care se scot. Astfel, suprafețele $ABCD$ și CDH sînt pozitive, iar semicercurile GIE și DJF se consideră negative. Se împarte deci suprafața în patru părți : un dreptunghi $ACDB$, un semicerc GHD pozitive și cele două semicercuri GIE și DJF negative. Folosind relația :

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

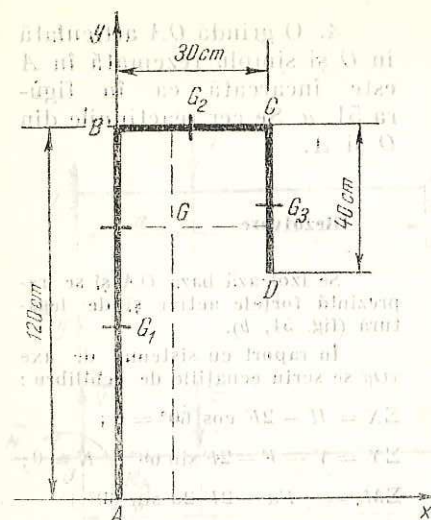


Fig. 48. Bară cotită.

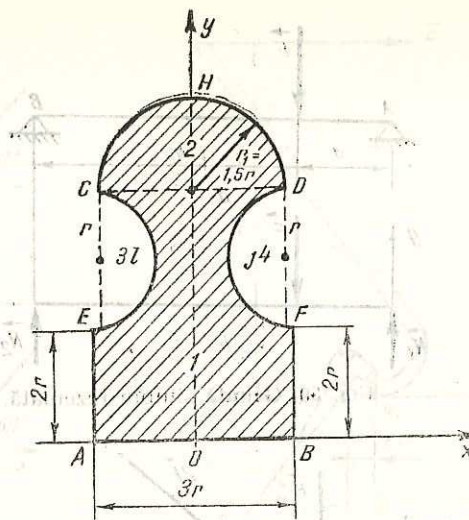


Fig. 49. Determinarea centrului de greutate.

se obține

$$y_G = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 - y_3 A_3 - y_4 A_4}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4} = \frac{2r \cdot 12r^2 + \left(4r + \frac{2}{3} \cdot 1,5r \cdot \frac{2}{\pi}\right) \cdot \frac{\pi 1,5^2 r^2}{2} - 3r \cdot \frac{\pi r^2}{2} - 3r \cdot \frac{\pi r^2}{2}}{12r^2 + \frac{\pi 1,5^2 r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}}$$

3. O grindă simplu rezemată la capete este încărcată cu o forță $\vec{F}$ ce se află la distanțele a și b de cele două capete (fig. 50, a).

Să se determine reacțiunile.

Rezolvare

Se izolează grinda de legături și se reprezintă forța activă și reacțiunile din reazeme (fig. 50, b).

Se alege ca sistem de referință axa barei și normala în A la bară. Ecuațiile de echilibru sînt :

$$\sum X = 0 ;$$

$$\sum Y = N_1 - F + N_2 = 0 ;$$

$$\sum M_A = F \cdot a - N_2(a + b) = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obțin :

$$N_1 = \frac{Fb}{a + b},$$

$$N_2 = \frac{Fa}{a + b}.$$

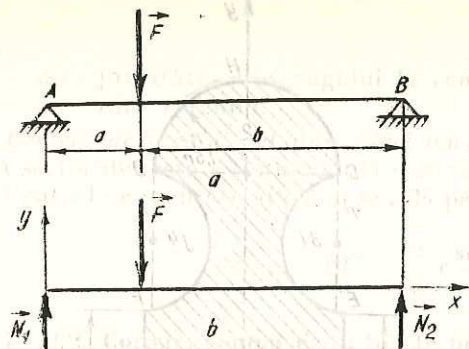


Fig. 50. Grindă simplu rezemată.

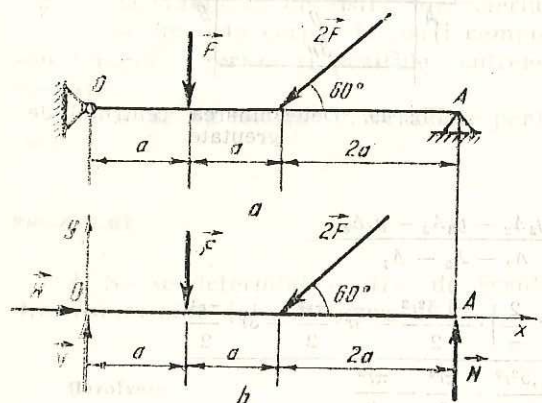


Fig. 51. Grindă articulată la un capăt și simplu rezemată la celălalt.

Încăstrarea se înlocuiește prin componentele H și V după cele două direcții ale forței din încăstrare și prin momentul $M_{inc} = M_b$ care, fiind un vector perpendicular pe planul forțelor, se reprezintă prin săgeata curbă din figură.

În raport cu sistemul de referință xOy se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\Sigma X = H - 2F \cos 60^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = V - F - 2F \sin 60^\circ = 0$$

$$\Sigma M_O = M_b - F \cdot a - 2F \cdot 3a \sin 60^\circ = 0.$$

Se rezolvă sistemul și se obțin necunoscutele H , V și M_{inc} .

6. O gheară de smulgere pentru cui se folosește pentru scoaterea unui cui din planșeu (fig. 53). Dacă forța ce se opune la scoaterea cuiului este de 24 N, ce forță orizontală F trebuie aplicată ghearei pentru a smulge cuiul cînd se cunosc distanțele și unghiul θ indicate în figură.

Răspuns

$$F = \frac{b \cdot N \cos 15^\circ}{a}$$

4. O grindă OA articulată în O și simplu rezemată în A este încărcată ca în figura 51, a . Se cer reacțiunile din O și A .

Rezolvare

Se izolează baza OA și se reprezintă forțele active și de legătură (fig. 51, b).

În raport cu sistemul de axe xOy se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\Sigma X = H - 2F \cos 60^\circ = 0 ;$$

$$\Sigma Y = V - F - 2F \sin 60^\circ + N = 0 ;$$

$$\Sigma M_O = -Fa - 2F \cdot 2a \sin 60^\circ + N \cdot 4a = 0.$$

Se rezolvă sistemul și se obțin necunoscutele H , V și N .

5. O grindă încăstrată în capătul O este încărcată ca în figura 52, a . Să se determine reacțiunile de încăstrare.

Rezolvare

Se izolează bara OA și se reprezintă forțele active și de legătură (fig. 52, b).

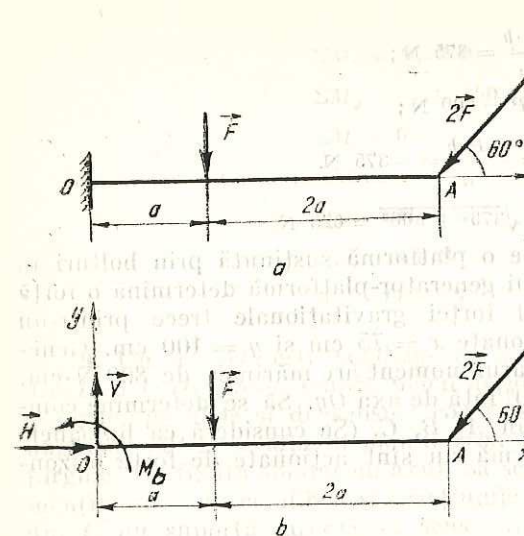


Fig. 52. Grindă încăstrată la un capăt.

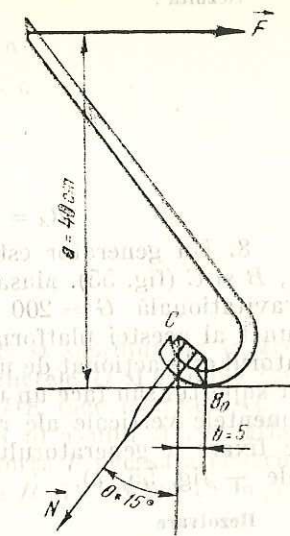


Fig. 53. Scoaterea cuiului din planșeu.

7. Un guseu ABC este prins în punctele A și B de un perete prin două buloane (fig. 54, a). Bulonul din B poate culisa de-a lungul unui canal vertical. În punctul C al guseului acționează forța P . Să se determine reacțiunile cunoscîndu-se

$$P = 500 \text{ N} ; AB = 20 \text{ cm} ; BC = 15 \text{ cm (fig. 54, b).}$$

Rezolvare

Se izolează guseul și se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\Sigma X = N_B + H_A = 0$$

$$\Sigma Y = V_A - P = 0$$

$$\Sigma M_B = -P \cdot b + H_A \cdot a = 0$$

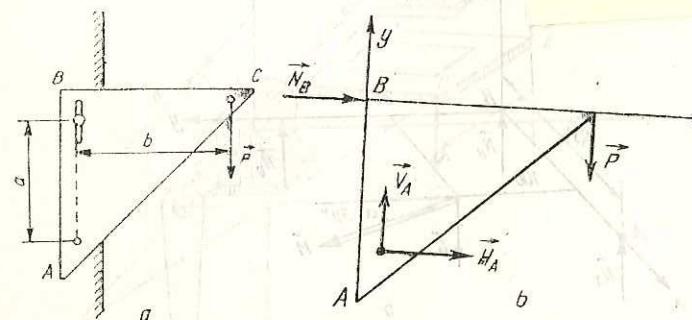


Fig. 54. Determinarea reacțiunilor.

Rezultă :

$$H_A = \frac{P \cdot b}{a} = 375 \text{ N};$$

$$V_A = P = 500 \text{ N};$$

$$N_B = -H_A = -\frac{P \cdot b}{a} = -375 \text{ N}.$$

$$R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2} = \sqrt{375^2 + 500^2} = 625 \text{ N}.$$

8. Un generator este montat pe o platformă susținută prin bolțuri în A, B și C (fig. 55). Masa ansamblului generator-platformă determină o forță gravitațională $G = 200 \text{ N}$. Suportul forței gravitaționale trece printr-un punct al acestei platforme de coordonate $x = 75 \text{ cm}$ și $y = 100 \text{ cm}$. Generatorul este acționat de un cuplu al cărui moment are mărimea de $800 \text{ N}\cdot\text{cm}$, iar suportul său face un unghi $\alpha = 30^\circ$ față de axa Oy . Să se determine componentele verticale ale reacțiunilor în A, B, C. (Se consideră că buloanele de fixare a generatorului pe platformă nu sînt acționate de forțe orizontale — fig. 55, b).

Rezolvare

Momentul cuplului este $\vec{M} = 800 \sin 30^\circ \vec{i} + 800 \cos 30^\circ \vec{j} = 400\vec{i} + 684\vec{j}$.

Ecuatiile de echilibru pentru ansamblul platformă-generator sînt :

$$\Sigma X = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Sigma Z = -G + N_A + N_B + N_C = 0$$

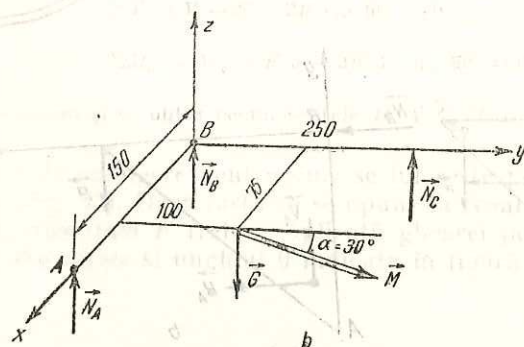
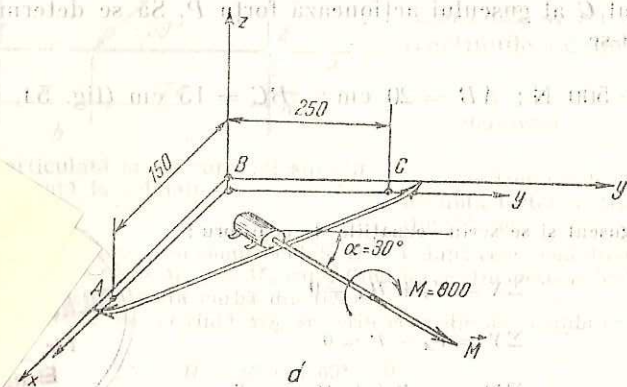


Fig. 55. Generator montat pe o platformă.

$$\Sigma M_x = N_C \cdot 250 - G \cdot 100 + 400 = 0$$

$$\Sigma M_y = -N_A \cdot 150 + G \cdot 75 + 684 = 0$$

$$\Sigma M_z = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obține :

$$N_A = 104,56 \text{ N}$$

$$N_C = 78,4 \text{ N}$$

$$N_B = 17,04 \text{ N}.$$

9. Un ax AC este solidizat cu o placă FGDE și susținut de lagărele din B și C (fig. 56). Asupra plăcii acționează în punctele D și E două forțe Q egale, paralele și de sensuri contrare. Dreapta DE face cu axul AC un unghi de 30° și se află în planul xOy . În capătul A al axului AC se află o pîrghie AH fixată solidar cu axul. Să se determine forța P necesară pentru a menține axul în echilibru și reacțiunile din lagărele B și C știind că lagărul din C nu suportă sarcină în sens axial.

Rezolvare

Forțele Q formează un cuplu al cărui moment este un vector perpendicular pe planul forțelor și se află în planul xOy . Valoarea momentului cuplului este $M = Qc$. Expresia analitică a momentului cuplului este :

$M = Qc \cos 30^\circ \vec{i} + Qc \sin 30^\circ \vec{j}$; fiind un vector liber acest moment se plasează în originea axelor. Se izolează ansamblul format de ax și placă și din ecuațiile de echilibru se obțin :

$$\Sigma X = P - H_R + H_C = 0;$$

$$\Sigma M_x = V_C \cdot b + Qc \cos 30^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = N_B = 0;$$

$$\Sigma M_y = Pd + Qc \sin 30^\circ = 0$$

$$\Sigma Z = V_B + V_C + Q - Q = 0;$$

$$\Sigma M_z = -H_C \cdot b + Pa = 0.$$

Rezolvînd sistemul se determină necunoscutele.

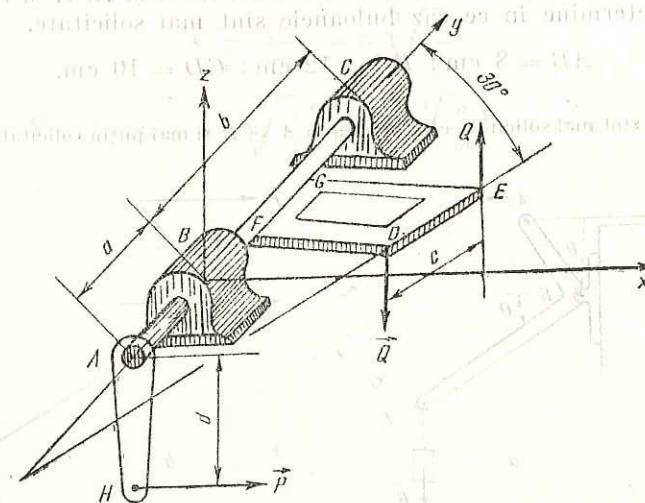


Fig. 56. Ax solidarizat cu o placă.

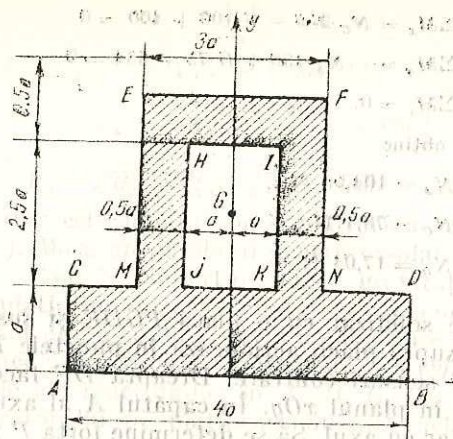


Fig. 57. Determinarea centrului de greutate.

10. Să se determine centrul de greutate al plăcii hașurate din figura 57.

Soluție. Deoarece axa Oy este axă de simetrie, avem $x_G = 0$. Se împarte placa în trei părți și anume: două suprafețe pozitive $ABCD$ și $EFMN$ și o suprafață negativă $HIJK$.

11. Un corp acționat de forța gravitațională G trebuie menținut în echilibru cu ajutorul unei pîrghii cotite în unghi drept în poziția din figura 58, a , cu un cablu orizontal ce acționează în A . Să se determine tensiunea din cablu și reacțiunea din articulația B dacă se cunosc G , a , b și θ (fig. 58, b).

Răspuns $T = \frac{G \cdot a}{b \cdot \sin \theta}$; $H = G \cdot \cos \theta$; $V = G \cdot \sin \theta$.

12. Un sistem de scripeti este fixat de o placă de susținere ca în figura 59. Cablul din scripete este acționat la capete cu câte o forță $T_1 = T_2 = 100$ N. Placa de susținere se prinde în două buloane, fie A și B , A și C sau C și D . Să se determine în ce caz buloanele sînt mai solicitate.

Răspuns

$$AB = 8 \text{ cm}; BC = 12 \text{ cm}; CD = 10 \text{ cm}.$$

Buloanele sînt mai solicitate cînd se pun în A și B și mai puțin solicitate cînd se pun în B și C .

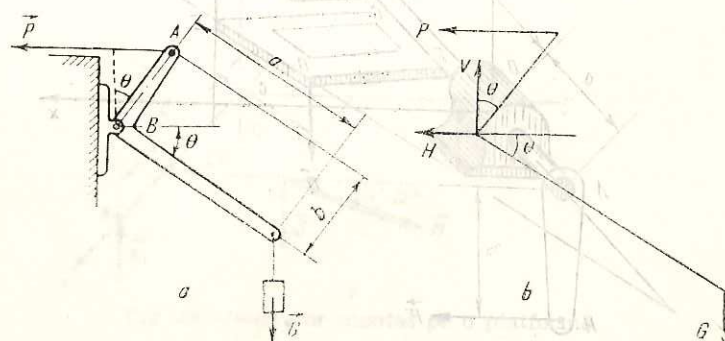


Fig. 58. Menținerea în echilibru a greutății G .

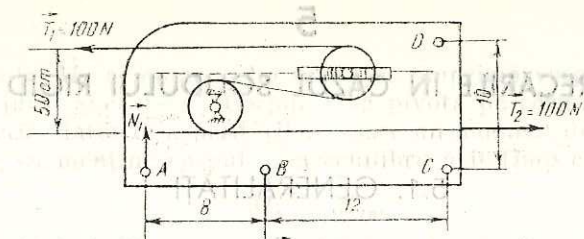


Fig. 59. Sistem de scripeti fixat pe o placă de susținere.

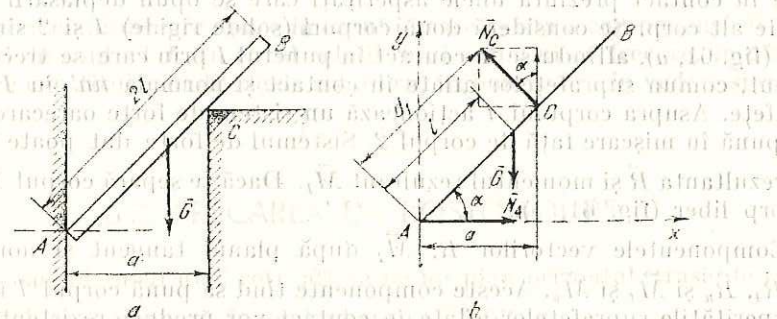


Fig. 60. Determinarea poziției de echilibru a unei bare omogene.

13. O bară omogenă AB așezată într-un plan vertical, se sprijină cu capătul inferior A de un perete neted vertical și într-un punct C se sprijină pe muchia unui alt perete (fig. 60, a). Asupra barei acționează forța gravitațională G iar lungimea barei este $2l$. Să se determine reacțiunile în punctele A și C în care se sprijină bara, precum și poziția de echilibru a barei, cunoscînd că distanța între cei doi pereți este a .

Răspuns

$$N_C = \frac{G}{\cos \alpha} = G \sqrt{\frac{a}{l}}$$

$$N_A = N_C \cdot \sin \alpha = G \sqrt{\frac{a}{l}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{a}{l}}\right) = G \cdot \lg \alpha.$$

FRECĂRILE ÎN CAZUL SOLIDULUI RIGID

5.1. GENERALITĂȚI

La studiul condițiilor de echilibru pentru solidul rigid s-a considerat că suprafețele aflate în contact sînt perfect netede. Această ipoteză a fost făcută cu scopul de a simplifica unele probleme. În realitate însă suprafețele aflate în contact prezintă unele asperități care se opun deplasării unui corp față de alt corp. Se consideră două corpuri (solide rigide) 1 și 2 simplu rezeimate (fig. 61, a), aflîndu-se în contact în punctul I prin care se trece planul T tangent, comun suprafețelor aflate în contact și normala nn' în I la aceste suprafețe. Asupra corpului 1 acționează un sistem de forțe oarecare ce tinde să îl pună în mișcare față de corpul 2. Sistemul de forțe dat poate fi înlocuit prin rezultanta $\vec{R}$ și momentul resultant $\vec{M}_I$. Dacă se separă corpul 1 se obține un corp liber (fig. 61, b).

Componentele vectorilor $\vec{R}$, $\vec{M}_I$ după planul tangent și normala nn' sînt $\vec{R}_t$, $\vec{R}_n$ și $\vec{M}_t$, $\vec{M}_n$. Aceste componente tind să pună corpul 1 în mișcare iar asperitățile suprafețelor aflate în contact vor produce rezistențe datorită frecării și vor menține corpul 1 în echilibru.

Astfel, componenta $\vec{R}_t$ a forței rezultante va tinde să producă alunecarea corpului pe planul tangent T . Ca reacțiune se va produce o forță de frecare de alunecare a cărei mărime este dată de relația:

$$R_t \leq \mu R_n.$$

Componenta $\vec{M}_t$ a momentului resultant imprimă corpului 1 o mișcare de rostogolire pe planul T în jurul axei $t-t'$. Datorită asperităților suprafețelor de frecare va apărea un moment rezistent de frecare $\vec{M}_{ft}$ care va menține corpul 1 în echilibru dacă $M_t \leq M_{ft}$.

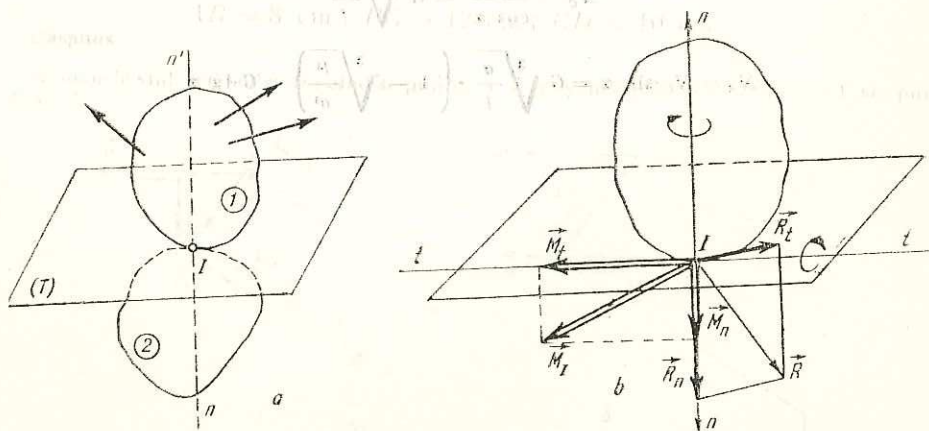


Fig. 61. Elementele frecării.

Componenta M_n a momentului resultant imprimă corpului 1 o mișcare de rotație în jurul axei $n-n'$. Corpul 1 va pivota pe corpul 2 în jurul axei $n-n'$. Ca reacție, datorită asperităților, apare un moment de frecare de pivotare M_{fn} care va menține corpul 1 în echilibru atît timp cît există relația:

$$M_n \leq M_{fn}.$$

5.2. FRECARA DE ALUNECARE

Frecarea cu alunecare apare în cazul în care există o componentă $\vec{R}_t \geq \vec{F}_f$ în punctul de contact I . În cazul echilibrului corpului cu frecare, în afară de ecuațiile ce constituie condițiile de echilibru, trebuie avută în vedere și relația:

$$F_f \leq \mu N$$

5.3. FRECARA DE ROSTOGOLIRE

Se consideră cazul unei roți, aflate pe un plan orizontal, trasă de o forță orizontală $\vec{T}$ ce acționează în centrul roții (fig. 62, a).

Se va considera mai întîi că roata și planul pe care se sprijină sînt solide, nedeformabile. Practic, se observă că pentru a pune în mișcare roata supusă și acțiunii forței gravitaționale $\vec{G}$ este nevoie să se dezvolte o anumită forță $\vec{T}$. Din condițiile de echilibru al roții față de sistemul xOy , originea fiind în punctul de contact al roții cu planul orizontal, se obțin relațiile:

$$\Sigma X = T - F_f = 0;$$

$$\Sigma Y = N - G = 0;$$

$$\Sigma M_0 = TR = 0;$$

$$F_f \leq \mu N.$$

Se observă că, în conformitate cu aceste relații, echilibrul nu este posibil decît dacă $T = 0$, ceea ce este în contradicție cu realitatea. Pentru a ține seama de realitate este necesar ca să se observe că de fapt planul și roata se

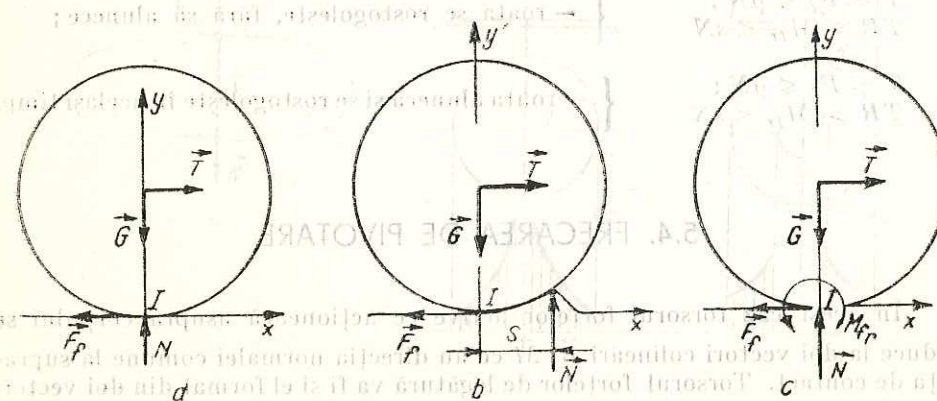


Fig. 62. Frecarea de rostogolire.

deformează. Această deformare se produce astfel că în fața roții, în direcția ei de avansare, apare un mic prag (fig. 62, b). Datorită acestui prag forța normală $\vec{N}$ este deplasată paralel cu ea însăși cu o distanță s . Această distanță s poartă numele de *coeficient de frecare de rostogolire* și se măsoară în centimetri. Mărimea acestei distanțe este variabilă.

Momentul rezistent de frecare de rostogolire este $\vec{M}_{fr} \leq s \cdot \vec{N}$ și este contrar tendinței de rostogolire a corpului. Dacă se reduce forța $\vec{N}$ în raport cu punctul de contact I va trebui, ca în acest punct, să se aplice reacțiunea normală $\vec{N}$ și momentul de frecare de rostogolire $\vec{M}_{fr}$ (fig. 62, c).

Scriindu-se condițiile de echilibru pentru roată în raport cu axele xOy și ținându-se seamă că există atât frecare de alunecare cât și frecare de rostogolire se obțin relațiile:

$$\Sigma X = T - F_f = 0;$$

$$\Sigma Y = N - G = 0;$$

$$\Sigma M_I = M_{fr} = TR = 0;$$

$$F_f \leq \mu N;$$

$$M_{fr} \leq s \cdot N.$$

Coeficientul de frecare de alunecare este adimensional iar coeficientul de frecare de rostogolire este o lungime ce se măsoară în centimetri. Acest coeficient depinde de raza roții și natura materialelor din care sînt confecționate roata și planul pe care se rostogolește.

Deoarece în cazul frecării de rostogolire apare și frecare de alunecare este posibil ca în unele situații să nu se respecte ambele condiții (inegalități) de echilibru. Sînt posibile următoarele cazuri:

$$\begin{cases} T = F_f \leq \mu N; \\ RT = M_{fr} \leq sN \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{— roata este în echilibru;} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} T > F_f \leq \mu N; \\ TR = M_{fr} \leq sN \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{— roata alunecă fără să se rostogolească;} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} T = F_f \leq \mu N; \\ TR > M_{fr} \leq sN \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{— roata se rostogolește, fără să alunece;} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} T > F_f \leq \mu N; \\ TR > M_{fr} \leq sN \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{— roata alunecă și se rostogolește în același timp.} \end{array} \right.$$

5.4. FRECAREA DE PIVOTARE

În acest caz torsorul forțelor active ce acționează asupra corpului se reduce la doi vectori colineari $\vec{R}$, $\vec{M}$ ce au direcția normalei comune la suprafața de contact. Torsorul forțelor de legătură va fi și el format din doi vectori egali și de sens contrar ($\vec{N}$, $\vec{M}_k$). Momentul forțelor de legătură este produs

de forțele de frecare, apare datorită asperităților din suprafețe și are valoarea maximă $M_{frec.p.}$. Pentru echilibru este necesar să existe relațiile:

$$\vec{R} + \vec{N} = 0;$$

$$\vec{M} \leq \vec{M}_{frec.p.}$$

Frecarea de pivotare apare în cazul în care forțele elementare de frecare de alunecare se pot reduce la o rezultantă și un moment rezultat (un torsor) al forțelor de frecare. Se disting *pivoți cu secțiunea circulară plină* și *cu secțiune inelară* (fig. 63).

Prin măsurări speciale s-a stabilit că presiunea de contact (apăsarea pe unitatea de suprafață de contact) variază de la o mărime minimă, la margine, către valori mari, spre centrul secțiunii. Din această cauză lubrifiantul ce se introduce între suprafețele de contact este expulzat de la centru către margine și, ca urmare a acestui fapt, pivotul se gripează mai ușor, în centru. Din acest motiv se preferă folosirea pivoților inelari.

Mărimea momentului rezistent de frecare de pivotare este:

— în cazul pivoților de secțiune circulară,

$$M_{fr.p.} \leq \frac{2}{3} \mu R \cdot Q;$$

— în cazul pivoților inelari,

$$M_{fr.p.} \leq \frac{4}{3} \mu Q \cdot R_m,$$

unde:

$$R_m = \frac{R_i + R_e}{2}.$$

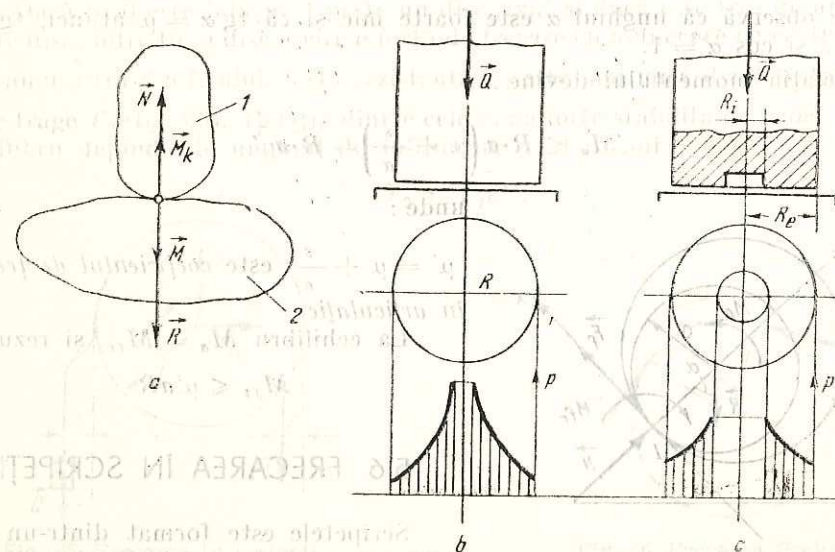


Fig. 63. Frecarea în pivoți.

5.5. FRECAREA ÎN ARTICULAȚII ȘI LAGĂRE

Axul cilindric orizontal al unei articulații cilindrice se rotește în interiorul unui locaș cilindric astfel că se află în contact după o generatoare comună.

Într-o secțiune transversală (fig. 64) acest contact se realizează într-un punct. Dacă asupra axului acționează un moment motor activ M_a și o forță R , acestea tind să pună axul în mișcare. În punctul de contact I apare frecare de alunecare și frecare de rostogolire.

Ecuatiile de echilibru, față de axele de referință (tangenta și normala în I) sînt:

$$F_f - R \sin \alpha = 0;$$

$$N - R \cos \alpha = 0;$$

$$M_{fr} - M_a + Ra \sin \alpha = 0;$$

$$F_f \leq \mu N;$$

$$M_{fr} \leq sN.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obțin:

$$F_f = R \sin \alpha;$$

$$N = R \cos \alpha.$$

$$M_{fr} = M_a - Ra \sin \alpha.$$

La echilibru:

$$M_a \leq R \cdot a \left(\sin \alpha + \frac{s}{a} \cos \alpha \right).$$

Se observă că unghiul α este foarte mic și că $\tan \alpha = \mu$ atunci, $\tan \alpha \approx \sin \alpha$ și $\cos \alpha = 1$.

Relația momentului devine:

$$M_a \leq R \cdot a \left(\mu + \frac{s}{a} \right) = R \cdot a \mu'$$

unde:

$\mu' = \mu + \frac{s}{a}$ este coeficientul de frecare în articulație.

La echilibru $M_a = M_{fr}$ și rezultă:

$$M_{fr} \leq \mu' a R.$$

5.6. FRECAREA ÎN SCRİPEȚI

Scripetele este format dintr-un disc rotund ce se poate roti în jurul unei axe normale pe planul discului, ce trece prin

Fig. 64. Frecarea în lagăre și articulații.

centrul discului. Peste circumferința discului este trecut un fir flexibil și inextensibil, la capetele căruia acționează o forță activă $\vec{F}$ și o forță rezistentă $\vec{Q}$. În articulația discului cu axul apare un moment rezistent datorită frecării. Se constată că forța activă $\vec{F}$ este mai mare decât sarcina $\vec{Q}$. Pentru a determina forța activă $\vec{F}$, la limita echilibrului, necesară pentru a ridica sarcina $\vec{Q}$ se va ține seama de frecarea în ax și de faptul că în realitate firul nu este perfect flexibil și are unele abateri față de tangentele duse la disc.

Se va considera cazul cel mai nefavorabil (fig. 65).

Ecuatiile de echilibru sînt:

$$\Sigma X = H = 0;$$

$$\Sigma Y = V - F - Q = 0;$$

$$\Sigma M = Q(r + \varepsilon) - F(r - \varepsilon) + M_{fr} = 0;$$

$$M_{fr} \leq Ra.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă:

$$H = 0; R = V = F + Q;$$

$$F = \frac{r + \varepsilon + \mu'a}{r - \varepsilon - \mu'a} Q = \lambda Q.$$

Coeficientul $\lambda = \frac{r + \varepsilon + \mu'a}{r - \varepsilon - \mu'a}$ este supraunitar și se numește coeficient de multiplicare. Valoarea sa este practic egală cu $\lambda = 1,1-1,3$.

5.7. FRECAREA FIRELOR

Dacă firul este înfășurat peste un disc fixat și dacă este tras de un capăt peste disc, între fir și disc apare o forță de frecare cu alunecare cu coeficient μ . În ramura trasă a firului, forța rezistentă $\vec{T}_1$ este mai mică decât forța activă care trage $\vec{T}_2$ (fig. 66). Relația dintre cele două forțe stabilită de Euler pentru echilibru depinde de unghiul de înfășurare α al firului:

$$T_2 \leq T_1 e^{\mu \alpha}.$$

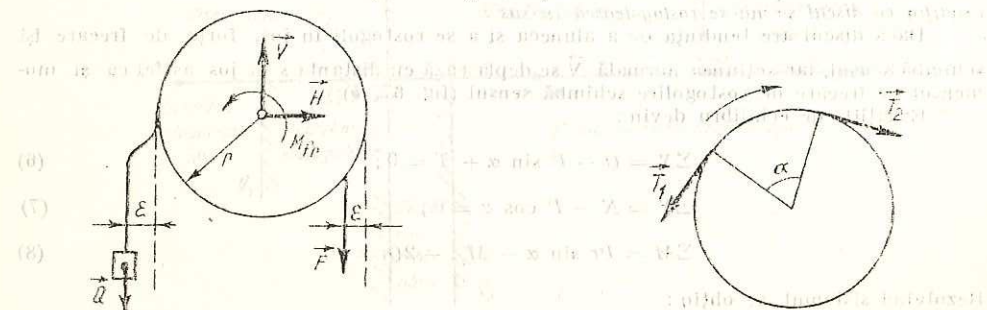


Fig. 65. Frecarea în scripete.

Fig. 66. Frecarea firelor.

PROBLEME

1. Un disc de rază r și acționat de forța gravitațională (greutatea) P (fig. 67) se menține în echilibru pe un plan înclinat cu unghiul α cu ajutorul unui fir fixat cu un capăt de disc, iar la celălalt capăt acționînd o forță Q , paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului înclinat. Cunoscînd coeficientii de frecare de alunecare μ și de rostogolire S , să se studieze condițiile de echilibru al discului.

Rezolvare

În ipoteza că discul are tendința de alunecare și de rostogolire în sus, asupra lui, acționînd forțele efectiv aplicate $\vec{P}$ și $\vec{Q}$ și forțele de legătură, $\vec{N}$ (reacțiunea normală) și $\vec{T} = \mu\vec{N}$ (forța de frecare de alunecare) precum și momentul de frecare de rostogolire $\vec{M}_f$ (fig. 67, a). Ecuațiile de echilibru sînt :

$$\Sigma X = Q - P \sin \alpha - T = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma Y = N - P \cos \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma M = Pr \sin \alpha + M_f - 2Qr = 0. \quad (3)$$

Ca să nu apară alunecare și rostogolire, trebuie ca :

$$T \leq \mu N; \quad (4)$$

$$M_f \leq s \cdot N. \quad (5)$$

Rezolvînd ecuațiile de echilibru, rezultă :

$$N = P \cos \alpha; \quad T = Q - P \sin \alpha; \quad M_f = 2Qr - Pr \sin \alpha.$$

Înlocuindu-se N și T în (4) se obține :

$$Q - P \sin \alpha \leq \mu P \cos \alpha$$

sau

$$Q \leq P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = Q_1,$$

condiția ca discul să nu alunece în sus.

Înlocuindu-se M_f și N în (5) se obține :

$$2Qr - Pr \sin \alpha \leq s \cdot P \cos \alpha$$

sau

$$Q \leq \frac{P}{2} \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right) = Q_2,$$

condiția ca discul să nu se rostogolească în sus.

Dacă discul are tendința de a aluneca și a se rostogoli în jos, forța de frecare își schimbă sensul, iar acțiunea normală $\vec{N}$ se deplasează cu distanța s în jos, astfel că și momentul de frecare de rostogolire schimbă sensul (fig. 67, b).

Ecuațiile de echilibru devin :

$$\Sigma X = Q - P \sin \alpha + T = 0; \quad (6)$$

$$\Sigma Y = N - P \cos \alpha = 0; \quad (7)$$

$$\Sigma M = Pr \sin \alpha - M_f - 2Qr = 0. \quad (8)$$

Rezolvînd sistemul, se obțin :

$$N = P \cos \alpha; \quad T = -Q + P \sin \alpha; \quad M_f = -2Qr + Pr \sin \alpha.$$

Înlocuindu-se N și T în (4) se obține valoarea lui Q astfel ca discul să nu alunece în jos.

$$-Q + P \sin \alpha \leq \mu P \cos \alpha$$

$$Q \geq P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = Q_3.$$

Înlocuindu-se M_f și N în (5) se obține condiția ca discul să nu se rostogolească în jos.

$$-2Qr + Pr \sin \alpha \leq sP \cos \alpha$$

$$Q \geq \frac{P}{2} \left(\sin \alpha - \frac{s}{r} \cos \alpha \right) = Q_4.$$

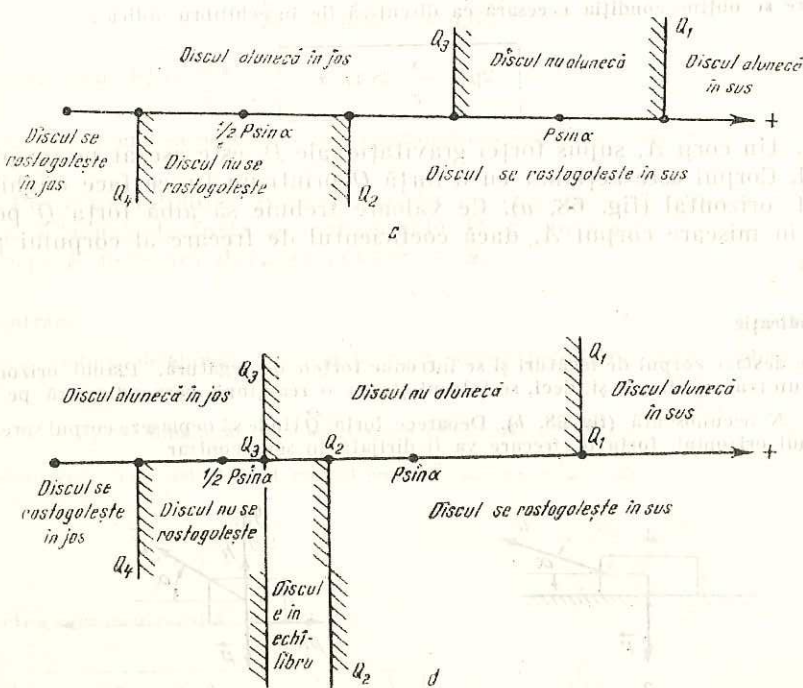
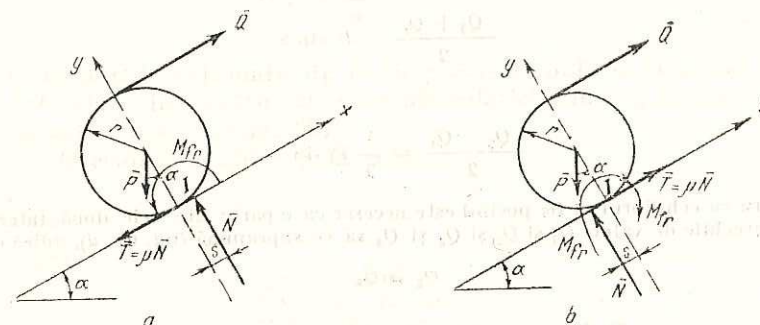


Fig. 67. Condițiile de echilibru ale unui disc pe un plan înclinat.

Echilibrul este posibil dacă :

$$Q_3 \leq Q \leq Q_1$$

$$P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq Q \leq P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

(9)

$$Q_4 \leq Q \leq Q_2$$

$$\frac{P}{2} \left(\sin \alpha - \frac{s}{r} \cos \alpha \right) \leq Q \leq \frac{P}{2} \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right)$$

(10)

Ca să existe echilibru este necesar ca valoarea lui Q să satisfacă simultan inegalitățile (9) și (10). Pentru a verifica acest lucru se pot reprezenta pe o axă cele patru soluții limită în ordine crescătoare (fig. 67, c). Se observă că :

$$\frac{Q_1 + Q_2}{2} = P \sin \alpha$$

și

$$\frac{Q_3 + Q_4}{2} = \frac{1}{2} P \sin \alpha$$

Pentru ca echilibrul să fie posibil este necesar ca o parte din cele două intervale formate de perechile de valori Q_1 și Q_2 și Q_3 și Q_4 să se suprapună (fig. 67, d), adică :

$$Q_2 \geq Q_3$$

sau

$$\frac{P}{2} \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right) \geq P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

din care se obține condiția necesară ca discul să fie în echilibru, adică :

$$2\mu + \frac{s}{r} \geq \tan \alpha$$

2. Un corp A , supus forței gravitaționale P , este așezat pe un plan orizontal. Corpul este acționat cu o forță Q printr-un fir ce face unghiul α cu planul orizontal (fig. 68, a). Ce valoare trebuie să aibă forța Q pentru a pune în mișcare corpul A , dacă coeficientul de frecare al corpului pe plan este μ .

Indicație

Se desface corpul de legături și se introduc forțele de legătură. Planul orizontal constituie un reazem simplu și, deci, se înlocuiește cu o reacțiune perpendiculară pe plan de mărime N necunoscută (fig. 68, b). Deoarece forța $\vec{Q}$ tinde să deplaseze corpul spre dreapta pe planul orizontal, forța de frecare va fi dirijată în sens contrar

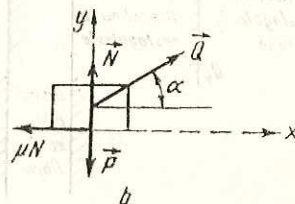
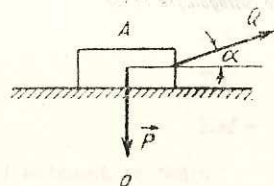


Fig. 68.

Deoarece asupra corpului acționează un sistem de forțe concurente, condiția de echilibru este ca rezultanta sistemului să fie nulă ($\vec{R} = 0$) sau proiecțiile sale pe două axe rectangulare să fie nule.

Se alege sistemul de axe xOy , se scriu ecuațiile de proiecții pe cele două axe și rezultă :

$$Q \leq \frac{\mu P}{\cos \alpha}$$

Corpul A va fi pus în mișcare cînd forța $\vec{Q}$ va fi mai mare decît valoarea limită, deci, cînd există relația :

$$Q > \frac{\mu P}{\cos \alpha}$$

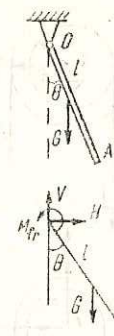


Fig. 69.

3. O bară OA , acționată de forța gravitațională G și avînd lungimea $2l$ este articulată în capătul O , raza articulației fiind r_0 și coeficientul de frecare în articulație μ_0 (fig. 69).

Să se determine unghiul β la echilibru.

Rezolvare

La echilibru :

$$\begin{aligned} \Sigma X &= H = 0 \\ \Sigma Y &= V - G = 0 \\ \Sigma M &= M_H - Gl \sin \theta = 0 \\ M_H &\leq \mu_0 N r_0 \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} H &= 0; V = G; N = G \\ M_H &= Gl \sin \theta \leq \mu_0 G r_0 \end{aligned}$$

$$\text{Rezultă : } |\sin \theta| \leq \frac{\mu_0 r_0}{l}$$

dar $|\sin \theta| < 1$, rezultă că pentru $\frac{\mu_0 r_0}{l} > 1$ unghiul θ poate lua orice valoare.

4. Peste un cilindru fix trece un fir cu care forța F ține în echilibru un corp acționat de forța gravitațională P , ca în figura 70. Să se determine forța F necesară dacă se cunosc P , α , μ .

Rezolvare

Dacă tendința de alunecare este astfel încît corpul tinde să fie ridicat, conform formulei

lui Euler $T_2 \leq T_1 e^{\mu \theta}$. Înlocuind cu notațiile din problemă rezultă $F \leq P e^{\mu \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}$. Dacă tendința de alunecare este astfel încît corpul coboară, aceeași relație devine

$$P \leq F e^{\mu \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}$$

Pentru echilibru rezultă :

$$P e^{-\mu \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)} \leq F \leq P e^{\mu \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}$$

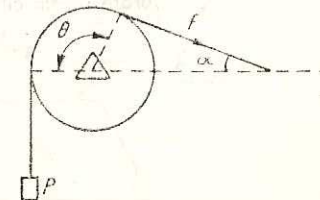


Fig. 70.

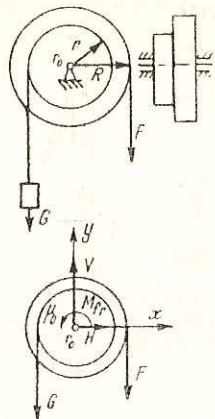


Fig. 71.

5. Un troliu este folosit pentru a ridica un corp acționat de forța gravitațională G . Se cunosc razele r , R ale cilindrilor troliului și r_0 raza articulației și coeficientul de frecare în articulație μ_0 . Să se determine forța F necesară pentru a menține corpul în echilibru (fig. 71).

Rezolvare

Se are în vedere tendința de a ridica corpul:

$$\begin{cases} \Sigma X = H = 0 \\ \Sigma Y = V - F - G = 0 \\ \Sigma M = Gr - FR + M_{fr} = 0 \\ M_{fr} \leq \mu_0 N r_0 \\ H = 0; V = F + G; N = V. \\ M_{fr} = -Gr + FR \leq \mu_0 (F + G) r_0, \end{cases}$$

de unde rezultă pentru echilibru:

$$F \leq G \frac{r + \mu_0 r_0}{R - \mu_0 r_0}.$$

În cazul tendinței de coborîre a corpului se va schimba sensul momentului de frecare din articulație și se pot scrie ecuațiile:

$$\begin{cases} \Sigma X = H = 0 \\ \Sigma Y = V - G - F = 0 \\ \Sigma M = -M_{fr} + Gr - FR = 0. \end{cases}$$

Rezultă:

$$M_{fr} \leq \mu_0 N r_0.$$

La echilibru este necesar să se respecte relația:

$$G \frac{r - \mu_0 r_0}{R + \mu_0 r_0} \leq F \leq G \frac{r + \mu_0 r_0}{R - \mu_0 r_0}.$$

INTREBĂRI RECAPITULATIVE

1. Care sînt formele de frecare ce se pot întîlni în cazul solidului rigid?
2. Ce se înțelege prin coeficientul de frecare de rostogolire? În ce se măsoară?
3. Care este relația de determinare a momentului de frecare în cazul pivotilor?
4. Care este relația de determinare a momentului de frecare în lagăre și articulații?
5. Cum se introduce efectul frecării în cazul scripeților?
6. Cum se calculează forța din ramura activă în cazul firelor trase, înfășurate pe un cilindru fixat?

STATICA SISTEMELOR DE CORPURI

Studiul echilibrului unui sistem de corpuri se face prin două metode:

- metoda separării corpurilor;
- metoda solidificării părților.

6.1. METODA SEPARĂRII CORPURILOR

Se consideră un sistem de corpuri aflat în echilibru (fig. 72) asupra căruia acționează un sistem de forțe.

Dacă întreg sistemul de corpuri este în echilibru atunci fiecare corp este în echilibru. Fiecare corp este un solid rigid supus la legături.

Pentru a se determina condițiile de echilibru se aplică *axioma legăturilor*. Se separă fiecare corp (se desface de legături) și se înlocuiesc legăturile prin forțele de legătură corespunzătoare. Se obține un corp liber asupra căruia acționează un sistem de forțe format din forțele active și forțele de legătură.

În cazul echilibrului torsesor de reducere, în raport cu un punct oarecare, trebuie să fie nul. Dacă se izolează, de exemplu, corpul III (fig. 73, a) se obține un solid rigid asupra căruia acționează forțele date $F_{III-1}, \dots, F_{III-n}$ iar în locul corpurilor II și IV se introduc reacțiunile N_{II-III} și N_{IV-III} . Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{III-i} + \vec{N}_{II-III} + \vec{N}_{IV-III} = 0$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{III-i} + \rho_1 \times \vec{N}_{II-III} + \rho_2 \times \vec{N}_{IV-III} = 0.$$

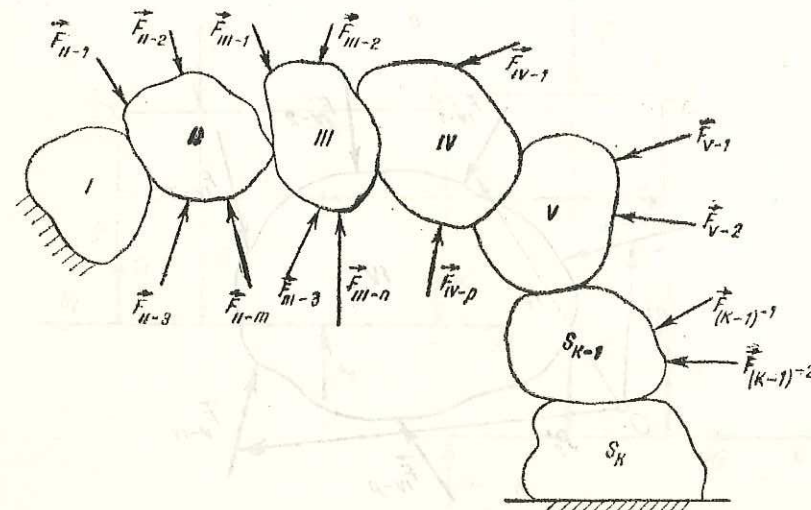


Fig. 72. Sistem de corpuri în echilibru. Metoda separării corpurilor.

Se izolează corpul învecinat IV și se procedează în mod asemănător. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, forțele de legătură $\vec{N}_{IV-III}$ și $\vec{N}_{III-IV}$ sînt egale, de sens contrar și au aceeași direcție (suport) deci, asupra corpului IV va acționa forța de legătură $\vec{N}_{III-IV} = -\vec{N}_{IV-III}$ (fig. 73, b). Ecuațiile de echilibru sînt:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{IV-i} + \vec{N}_{III-IV} + \vec{N}_{V-IV} = 0.$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{IV-i} + \vec{\rho}_1 \times \vec{N}_{III-IV} + \vec{\rho}_2 \times \vec{N}_{V-IV} = 0.$$

Proiectînd ecuațiile vectoriale ale rezultantei $\vec{R}$ și momentului $\vec{M}_O$ pe axele Ox , Oy , Oz se obțin șase ecuații scalare (în cazul forțelor din spațiu) sau trei ecuații scalare (în cazul forțelor plane).

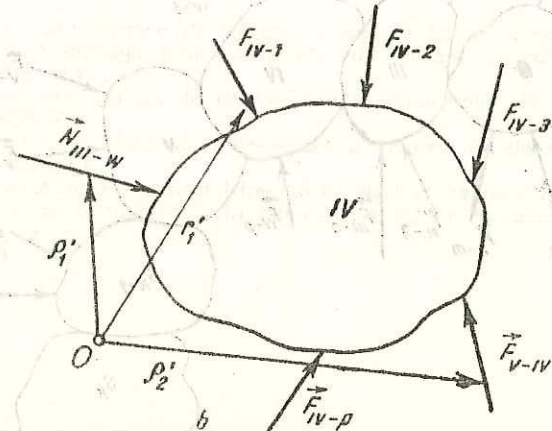
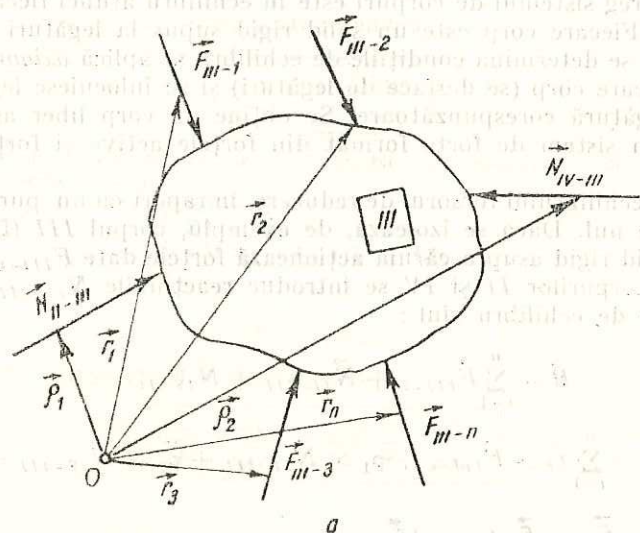


Fig. 73. Corpuri din sistem izolate.

Dacă se izolează un număr s de corpuri se obține un sistem format din $6s$ ecuații, în cazul forțelor în spațiu, respectiv $3s$ ecuații, în cazul forțelor plane.

Necunoscutele pot fi reacțiuni, elemente geometrice (unghiuri sau lungimi) ce determină poziția, precum și forțe active pentru a menține sistemul în echilibru.

Dacă numărul de necunoscute este mai mic sau egal cu numărul de ecuații problema se poate rezolva. Dacă numărul de necunoscute este mai mare decât numărul de ecuații problema nu se poate rezolva și este static nedeterminată.

PROBLEME

1. Două bare O_1A și O_2A articulate la capete și simplu rezemate, una în B , cealaltă în A , sînt încărcate ca în figura 74, a. Să se determine reacțiunile.

Rezolvare

Se separă fiecare corp, se reprezintă toate forțele și se aleg axele de referință (fig. 74, b) Ecuațiile de echilibru sînt:

— pentru primul corp:

$$\Sigma X = -H_1 = 0$$

$$\Sigma Y = V_1 - F + N_1 - N_2 = 0$$

$$\Sigma M_{O_1} = -aF + 2aN_1 - 3aN_2 = 0,$$

— pentru al doilea corp:

$$\Sigma X = H_2 = 0$$

$$\Sigma Y = V_2 - 2F + N_2 = 0$$

$$\Sigma M_{O_2} = +2Fa - N_2 \cdot 2a = 0.$$

Se rezolvă sistemul și se obține:

$$H_1 = 0; H_2 = 0; N_1 = F; N_2 = 2F; V_1 = 0; V_2 = F.$$

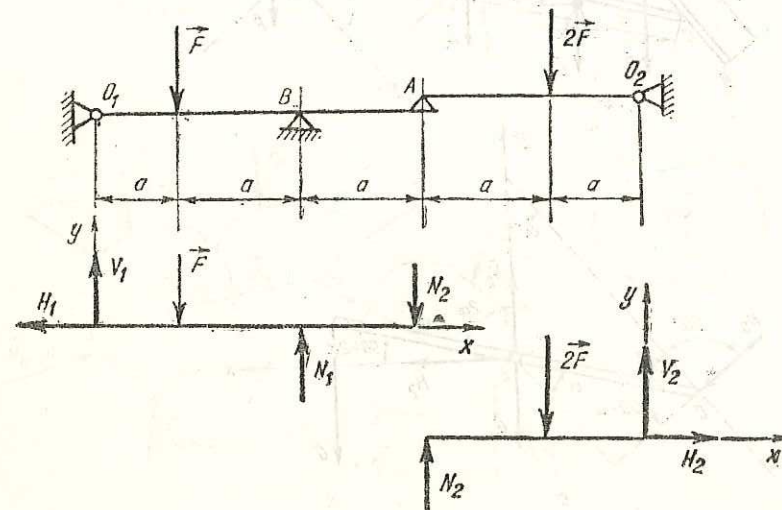


Fig. 74.

2. Bara omogenă AB de lungime $2l$ și acționată de forța gravitațională $\vec{P}$, articulată în A se reazemă fără frecare în C pe bara omogenă DC de lungime $2a$ și acționată de forța gravitațională $\vec{G}$, articulată în mijlocul ei E . De capătul D al acestei bare acționează o forță $\vec{Q}$ (fig. 75, a). Știind că articulațiile A și E se găsesc pe aceeași verticală la distanța $AE = a$, să se determine poziția de echilibru (unghiul α) a sistemului de bare.

Indicație

Se separă fiecare bară și se aplică fiecareia forțele exterioare și de legătură (fig. 75, b). Se scriu ecuațiile de echilibru pentru barele AB și CD .

Răspuns

Sistemul de bare este în echilibru (fig. 75, c):

- instabil, pentru $\cos \alpha = 0$;
- stabil, pentru $\cos \alpha = \frac{P \cdot l}{4aQ}$.

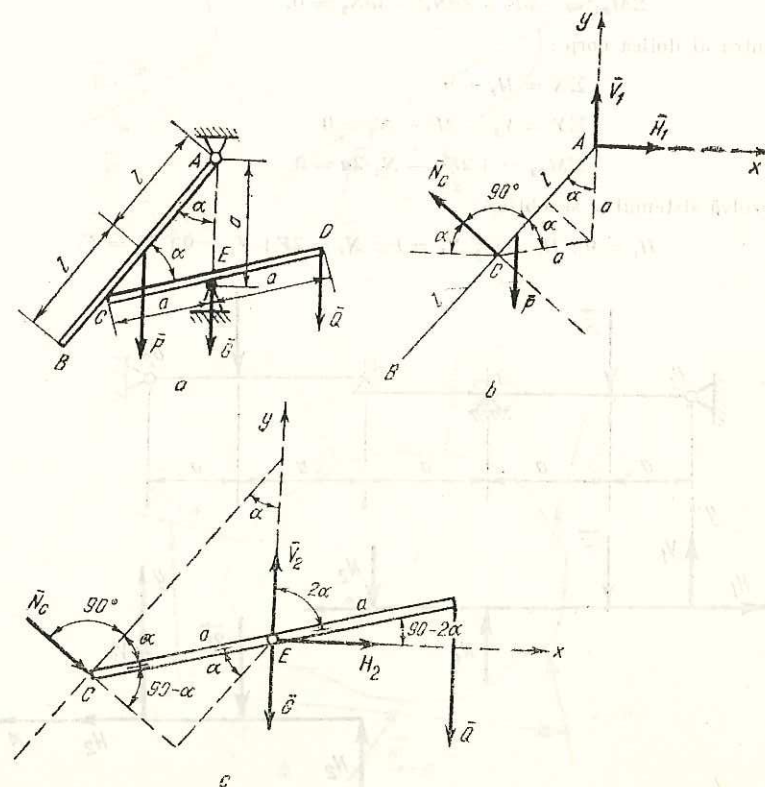


Fig. 75. Determinarea poziției de echilibru a unui sistem de bare.

6.2. METODA SOLIDIFICĂRII PĂRȚILOR

Se consideră un sistem de corpuri aflat în echilibru (fig. 76, a).

Dacă întreg sistemul de corpuri este în echilibru, atunci un grup format din câteva corpuri învecinate se află, de asemenea, în echilibru. Acest grup poate fi considerat drept un singur corp ca și cum ar fi fost obținut prin solidificarea întregului grup. Se poate lua, la alegere, un astfel de grup, de exemplu, cel format din corpurile III, IV și V care se poate considera un singur corp (fig. 76, b).

Se disting trei categorii de forțe ce acționează asupra corpului obținut prin solidificare:

- forțe active: $\vec{F}_{III-1} \dots \vec{F}_{III-m}; \vec{F}_{IV-1} \dots \vec{F}_{IV-n}; \vec{F}_{V-1} \dots \vec{F}_{V-p}$;
- forțe de legătură, exterioare: $\vec{N}_{II-III}$ și $\vec{N}_{IV-V}$;
- forțe de legătură, interioare: $\vec{N}_{III-IV}$ și $\vec{N}_{IV-III}$; $\vec{N}_{IV-V}$ și $\vec{N}_{V-IV}$.

Se observă că forțele de legătură interioare sînt două câte două egale, de sens contrar și pe același suport. Deoarece, în corpul obținut prin solidificare, ele acționează în același corp, efectul lor se anulează. Pentru a scrie condițiile de echilibru se vor lua deci, în considerare numai forțele active și forțele de legătură exterioare. Torsorul de reducere în raport cu un punct oarecare trebuie să fie nul.

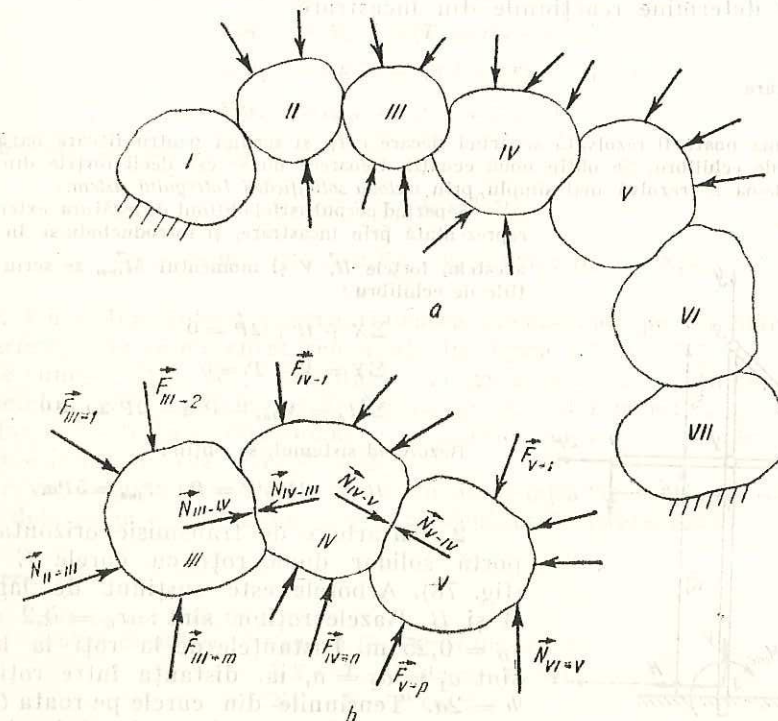


Fig. 76. Sistem de corpuri în echilibru. Metoda solidificării părților.

Se scriu ecuațiile de echilibru sub formă vectorială :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{III-i} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{IV-i} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{V-i} + \vec{N}_{II-III} + \vec{N}_{VI-V} = 0$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{III-i} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{IV-i} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{V-i} + \vec{p}_1 \times \vec{N}_{II-III} + \vec{p}_2 \times \vec{N}_{VI-V} = 0.$$

Proiectând ecuațiile vectoriale ale rezultantei $\vec{R}$ și momentului $\vec{M}_O$ pe axele Ox , Oy și Oz se obțin șase ecuații scalare (în cazul forțelor din spațiu) sau trei ecuații scalare (în cazul forțelor plane).

Se pot forma, după cum este nevoie, diverse grupări ale corpurilor și de fiecare dată se pune condiția ca torșorul de reducere în raport cu un punct oarecare să fie nul. Se obține astfel un sistem de ecuații, care, dacă sistemul este static determinat, se poate rezolva.

PROBLEME

1. Se dă sistemul de bare din figura 77, format din barele de lungimi $AB = 3a$; $BI = a$; $CD = 2a$ articulate în punctele B , C și I , bara AB fiind încastrată în A . În punctul D acționează o forță orizontală de mărime $2P$ și una verticală de mărime P .

Să se determine reacțiunile din încastrare.

Rezolvare

Problema poate fi rezolvată separând fiecare corp și scriind pentru fiecare bară cîte trei ecuații de echilibru. Se obțin nouă ecuații. Deoarece nu se cer decît forțele din încastrare, problema se rezolvă mai simplu prin metoda solidificării întregului sistem.

Separînd corpul astfel obținut de legătura exterioară, reprezentată prin încastrare, și introducîndu-se în locul acestuia, forțele H , V și momentul M_{inc} , se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\Sigma X + H + 2P = 0$$

$$\Sigma Y = V - P = 0$$

$$\Sigma M_A = M_{inc} - P \cdot a - 2P \cdot 2a = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se obțin :

$$H = -2P; V = P; M_{inc} = 5Pa.$$

2. Un arbore de transmisie orizontal suportă solidar două roți cu curele C și D (fig. 78). Arborele este susținut de lagărele A și B . Razele roților sînt : $r_C = 0,2$ m și $r_D = 0,25$ m. Distanțele de la roți la lagăre sînt $a_1 = a_2 = a$, iar distanța între roți este $b = 2a$. Tensiunile din curele pe roata C sînt $t_C = t_0$ și $T_C = 2t_0$ și sînt orizontale, iar pe roata D sînt : t_D și $T_D = 3t_D$ și sînt verticale.

Fig. 77. Calculul reacțiilor unui sistem de bare.

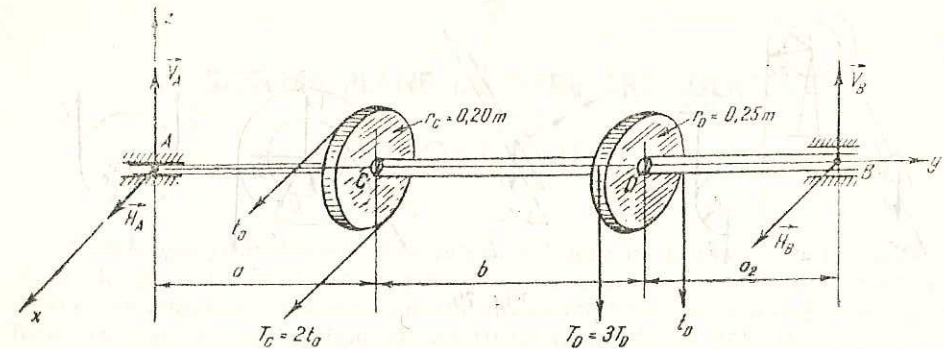


Fig. 78. Arbore solidar cu două roți cu curele.

Să se determine tensiunea t_D și reacțiunile din lagăre, în cazul echilibrului, dacă tensiunile din roata C sînt cunoscute.

Rezolvare

Se separă ansamblul ax cu roți, care formează un singur corp rigid, se aplică forțele active și cele de legătură și se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\Sigma X = H_A + H_B + Z_C + t_C = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Sigma Z = V_A + V_B - T_D - t_D = 0$$

$$\Sigma M_x = 4aV_B - 3a(T_D + t_D) = 0$$

$$\Sigma M_y = -r_C(T_C - t_C) + r_D(T_D - t_D) = 0$$

$$\Sigma M_z = -a(t_C - T_C) - 4aH_B = 0.$$

Rezolvînd sistemul se obține :

$$t_D = \frac{r_C}{2r_D} \cdot t_C = 0,4t_C$$

$$V_A = 0,4t_C; H_A = -2,25t_C; V_B = 1,2t_C; H_B = -0,75t_C.$$

3. Un sistem folosit pentru ridicarea vagonetelor pe un plan înclinat (în cariere) este reprezentat schematic în figura 79, a.

Se cunosc : P — forța gravitațională (greutatea) care acționează asupra vagonetelor, μ — coeficientul de frecare pe planul înclinat, α — înclinarea planului, G — forța gravitațională care acționează asupra cilindrului folosit pentru echilibrare, razele r , R și R_0 .

Se vor neglija frecările în fire și în articulația de susținere a troliului. Să se determine valoarea lui G pentru echilibrul sistemului.

Rezolvare

Se separă fiecare corp în parte.

Se consideră cazul cînd P tinde să fie ridicată (fig. 79, b) :

$$\Sigma X = T - P \sin \alpha - F_f = 0$$

$$\Sigma Y = N - P \cos \alpha = 0$$

$$F_f \leq \mu N.$$

$$T_1 - P \sin \alpha \leq \mu P \cos \alpha.$$

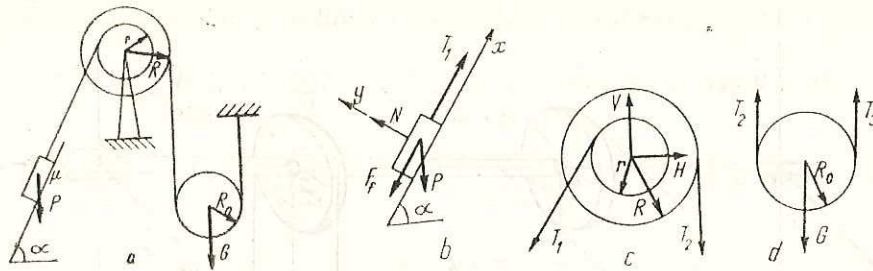


Fig. 79.

Rezultă :

$$T_1 \leq P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Dacă P tinde să coboare se obține :

$$T_1 \geq P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Deci la echilibru :

$$P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq T_1 \leq P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Se separă tamburul și se folosește numai ecuația de momente (fig. 79, c) :

$$T_1 r - T_2 R = 0$$

$$T_2 = \frac{T_1 r}{R}.$$

Se separă cilindrul și se obțin ecuațiile (neglijând frecările) :

$$-T_2 R_0 + T_3 R_0 = 0$$

$$T_2 + T_3 - G = 0.$$

Rezultă :

$$T_2 = T_3 = \frac{G}{2}.$$

Se obține :

$$\frac{G}{2} = \frac{T_1 r}{R}$$

$$G = 2 \frac{T_1 r}{R}.$$

Ținând seama de valorile limită pentru T_1 se determină valorile limită pentru G , pentru echilibrul sistemului (fig. 79, d) :

$$\frac{2r}{R} \cdot P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq G \leq \frac{2r}{R} \cdot P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

SISTEME PLANE DE BARE ARTICULATE

7.1. GENERALITĂȚI

Prin *sistem plan de bare articulate* se înțelege un număr de bare articulate între ele și cu legături exterioare. Dacă sistemul este *deformabil*, fără a se desface articulațiile, el constituie un *mecanism*. Dacă sistemul de bare rigide formează un ansamblu rigid el constituie o *grindă cu zăbrele*.

În figura 80 este reprezentată o grindă cu zăbrele care are opt articulații numerotate ca în figură, care constituie un solid rigid articulat în 1 și simplu rezemat în dreptul articulației 5.

Grinzile cu zăbrele intră în componența construcțiilor metalice (macarale, poduri rulante, ferme, susțineri de rezervoare, fuselaje de avion etc.).

Pentru calculul grinzilor cu zăbrele se stabilesc următoarele ipoteze simplificatoare :

- barele se consideră articulate la ambele capete, fără frecare ;
- forțele exterioare (sarcinile) se aplică numai în noduri (articulații) ;
- forțele gravitaționale datorate maselor barelor sînt neglijabile ; dacă aceste forțe nu se pot neglijă, ele se pot presupune egal repartizate la capetele barelor respective.

Eforturile din bare. Dacă se separă o bară oarecare din grinda cu zăbrele aflate în echilibru, în locul articulațiilor trebuie să se introducă forțele de legătură de module și direcții necunoscute. Se obține astfel un solid rigid, în formă de bară (fig. 81) asupra căruia acționează forțele $\vec{R}_1$ și $\vec{R}_2$ ce au punctele de aplicație în capetele A și B ale barei.

Pentru ca bara să fie în echilibru forțele $\vec{R}_1$ și $\vec{R}_2$ trebuie să fie egale, de sensuri contrare și să aibă direcția axei barei AB .

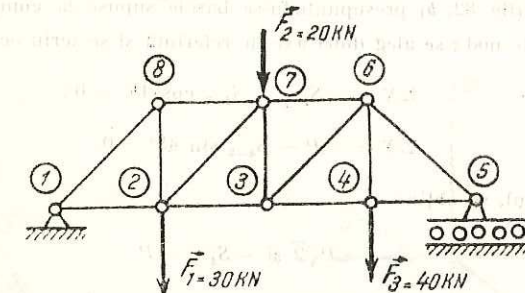


Fig. 80. Grindă cu zăbrele.

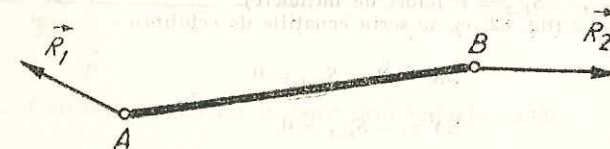


Fig. 81. Bară separată din grindă cu zăbrele.

Rezultă că o bară oarecare din grindă poate fi solicitată, fie de o forță de întindere, fie de o forță de compresiune.

Pentru determinarea eforturilor din bare se folosesc două metode: metoda separării nodurilor și metoda secțiunilor.

7.2. METODA SEPARĂRII NODURILOR

Dacă se separă un nod oarecare din grindă cu zăbrele, tăind barele ce sînt articulate în nodul respectiv, fiecare bară se înlocuiește cu cîte o forță axială, necunoscută ca modul și sens. Grinda cu zăbrele fiind în echilibru fiecare nod în parte este în echilibru și sistemul de forțe concurente corespunzător fiecărui nod izolat trebuie să aibă rezultanta nulă. Condițiile de echilibru pentru fiecare nod în parte se exprim prin anularea sumelor proiecțiilor pe două axe de coordonate. Pentru a putea rezolva acest sistem el trebuie să aibă cel mult două necunoscute. Rezultă că nodurile trebuie alese astfel, încît asupra lor să nu acționeze mai mult de două forțe necunoscute. Alegînd succesiv și convenabil nodurile se determină eforturile în toate barele grinzii.

În primul rînd se determină forțele exterioare de legătură care acționează asupra grinzii (reacțiunile din reazeme, articulații, încastrări etc.).

PROBLEMĂ

Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 82, a, prin metoda separării nodurilor. Grinda este articulată în punctul A și simplu rezemată în B. Asupra ei acționează forțele indicate în figură.

Rezolvare

Se observă că în nodul 4 se îmbină numai două bare și sînt numai două forțe necunoscute eforturile $\bar{S}_{4-3}$ și $\bar{S}_{4-2}$. Se observă, de asemenea, că celelalte noduri au cel puțin cîte trei necunoscute.

Se separă nodul 4 (fig. 82, b) presupunîndu-se barele supuse la compresiune, adică forțele $\bar{S}_{4-3}$ și $\bar{S}_{4-2}$ trag de nod; se aleg două axe de referință și se scriu ecuațiile de proiecții:

$$\Sigma X = -\bar{S}_{4-3} - \bar{S}_{4-2} \cos 45^\circ = 0;$$

$$\Sigma Y = -P - \bar{S}_{4-2} \sin 45^\circ = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se obțin:

$$\bar{S}_{4-2} = P\sqrt{2} \text{ și } -\bar{S}_{4-3} = P.$$

Rezultă că bara 4-2 este comprimată și bara 4-3 este întinsă.

Se trece la nodul 3 unde sînt două eforturi necunoscute $\bar{S}_{3-1}$ și $\bar{S}_{3-2}$, și efortul din bara 3-4 cunoscut: $\bar{S}_{3-4} = \bar{S}_{4-3} = P$ (efort de întindere).

Separînd nodul 3 (fig. 82, c), se scriu ecuațiile de echilibru

$$\Sigma X = P - \bar{S}_{3-1} = 0;$$

$$\Sigma Y = -\bar{S}_{3-2} = 0.$$

Rezultă: $\bar{S}_{3-1} = P$.

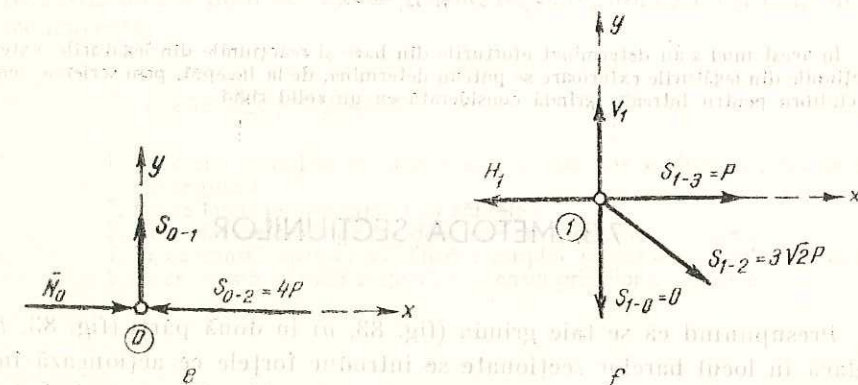
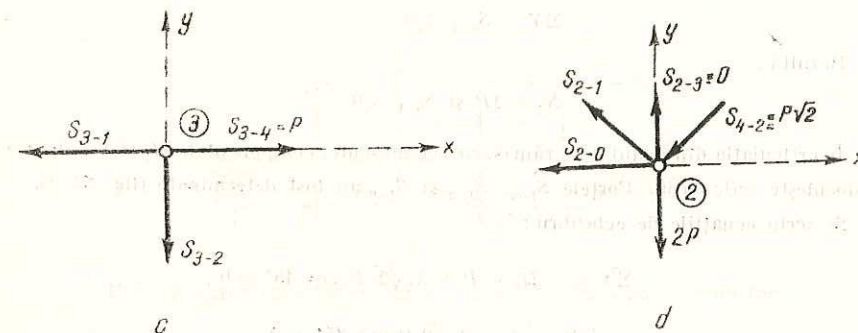
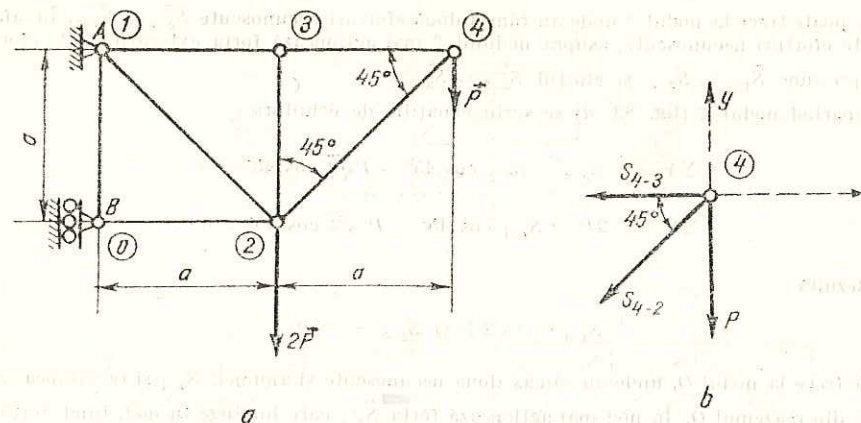


Fig. 82. Calculul eforturilor în bare prin metoda izolării nodurilor.

Bara 3-1 este supusă la întindere cu o forță P , iar bara 3-2 nu este supusă la efort.

Se poate trece la nodul 2 unde au rămas două eforturi necunoscute $\vec{S}_{2-0}$ și $\vec{S}_{2-1}$. În afară de aceste eforturi necunoscute, asupra nodului 2 mai acționează forța exterioară $2P$, efortul de compresiune $\vec{S}_{4-2} = \vec{S}_{2-4}$ și efortul $\vec{S}_{2-3} = \vec{S}_{3-2} = 0$.

Separînd nodul 2 (fig. 82, d) se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\sum Y = -S_{2-0} - S_{2-1} \cos 45^\circ - P\sqrt{2} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum Y = -2P + S_{2-1} \cos 45^\circ - P\sqrt{2} \cos 45^\circ = 0.$$

Rezultă :

$$S_{2-1} = 3\sqrt{2}P \text{ și } S_{2-0} = -4P.$$

Se trece la nodul 0, unde au rămas două necunoscute și anume : S_{0-1} și reacțiunea normală $\vec{N}$ din reazemul 0. În nod mai acționează forța $\vec{S}_{0-2}$ care împinge în nod, fiind forță de compresiune (fig. 82, e).

Se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\sum X = N_0 - 4P = 0;$$

$$\sum Y = S_{0-1} = 0.$$

Rezultă :

$$N_0 = 4P \text{ și } S_{0-1} = 0.$$

În articulația din nodul 1 au rămas, ca necunoscute, componentele H_1 și V_1 ale reacțiunii ce înlocuiește articulația. Forțele $\vec{S}_{1-3}$, $\vec{S}_{1-2}$ și $\vec{S}_{1-0}$ au fost determinate (fig. 82, f).

Se scriu ecuațiile de echilibru :

$$\sum X = -H_1 + P + 3\sqrt{2}P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y = V_1 - 3\sqrt{2}P \cos 45^\circ = 0.$$

Rezultă :

$$V_1 = 3P \text{ și } H_1 = 4P.$$

În acest mod s-au determinat eforturile din bare și reacțiunile din legăturile exterioare. Reacțiunile din legăturile exterioare se puteau determina, de la început, prin scrierea ecuațiilor de echilibru pentru întreaga grindă considerată ca un solid rigid.

7.3. METODA SECȚIUNILOR

Presupunînd că se taie grinda (fig. 83, a) în două părți (fig. 83, b și c) și dacă în locul barelor secționate se introduc forțele ce acționează în mod normal în aceste bare, se obțin două corpuri rigide, fiecare trebuind să fie în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare, a forțelor de legătură exterioare și a forțelor ce înlocuiesc barele secționate.

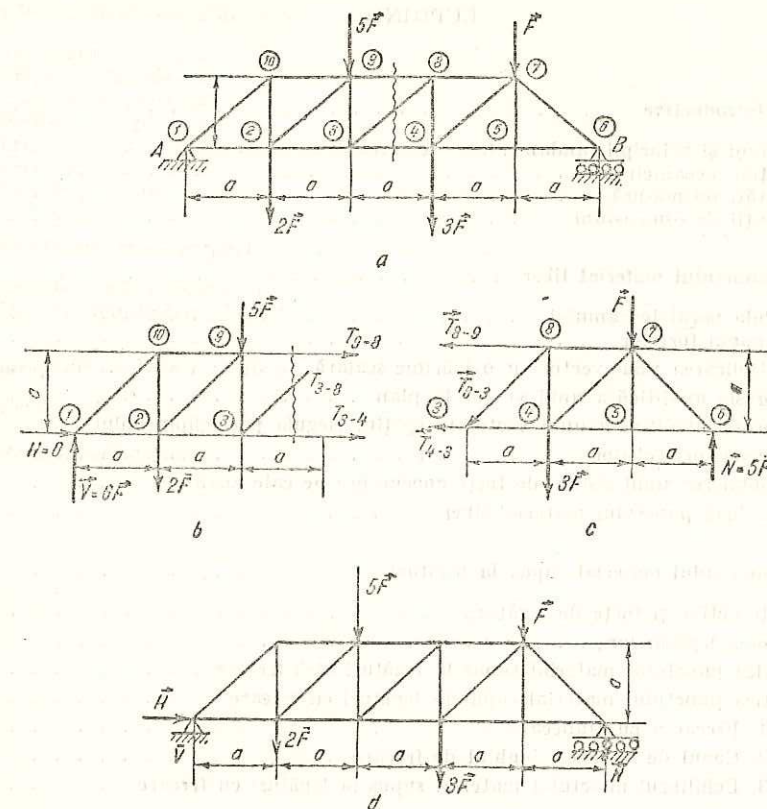


Fig. 83. Calculul eforturilor în bare prin metoda secțiunilor.

Deoarece sistemul de forțe este coplanar, condițiile de echilibru se exprimă prin trei ecuații : două ecuații de proiecții și o ecuație de momente. Rezultă că pot exista cel mult trei necunoscute. Secțiunea grinzii trebuie să fie astfel aleasă încît să taie cel mult trei bare, din care cel mult două să fie concurente.

INTREBĂRI RECAPITULATIVE

1. Care sînt metodele de studiu al condițiilor de echilibru pentru un sistem de corpuri ?
2. Ce se înțelege prin grindă cu zăbrele ?
3. Care sînt metodele pentru determinarea eforturilor în bare ?
4. În ce constă metoda solidificării părților în cazul sistemelor de corpuri ?
5. În ce constă metoda secțiunilor în cazul grinzilor cu zăbrele ?

CUPRINS

1. Noțiuni introductive	3
1.1. Noțiuni și principii fundamentale ale mecanicii	3
1.2. Părțile mecanicii	5
1.3. Unități de măsură	5
1.4. Ecuații de dimensiuni	6
2. Statica punctului material liber	7
2.1. Regula paralelogramului	7
2.2. Poligonul forțelor	8
2.3. Multiplicarea unui vector cu o mărime scalară	9
2.4. Expresia analitică a unui vector în plan	9
2.5. Expresia analitică a unui vector în spațiu. Regula paralelipipedului	10
2.6. Teorema proiecțiilor	11
2.7. Compunerea unui sistem de forțe concurente pe cale analitică	12
2.8. Echilibrul punctului material liber	13
3. Statica punctului material supus la legături	15
3.1. Forțe active și forțe de legătură	15
3.2. Axioma legăturilor	15
3.3. Statica punctului material supus la legături fără frecare	16
3.4. Statica punctului material supus la legături cu frecare	17
3.4.1. Frecarea cu alunecare	17
3.4.2. Conul de frecare. Unghiul de frecare	18
3.4.3. Echilibrul punctului material supus la legături cu frecare	18
4. Statica solidului rigid	26
4.1. Generalități	26
4.2. Reducerea unui sistem de forțe concurente ce acționează asupra unui solid rigid	26
4.3. Reducerea unui sistem de forțe oarecare	27
4.3.1. Momentul unei forțe în raport cu un punct	27
4.3.2. Momentul unei forțe în raport cu o axă	29
4.3.3. Cuplul de forțe	29
4.3.4. Operații de echivalență	30
4.3.5. Reducerea unui sistem de forțe oarecare ce acționează asupra unui solid rigid în raport cu un punct O	31
4.3.6. Cazurile de reducere a unui sistem de forțe oarecare ce acționează asupra unui solid rigid	34
4.4. Cazuri particulare de sisteme de forțe	35
4.4.1. Sistem de forțe coplanare	35
4.4.2. Sistem de forțe paralele	40
4.4.3. Sistem de cupluri de forțe	42
4.5. Echilibrul solidului rigid liber	43
4.6. Echilibrul solidului rigid supus la legături	44
4.6.1. Axioma legăturilor	44
4.6.2. Legăturile solidului rigid	45
4.7. Centre de greutate	48
4.7.1. Generalități	48
4.7.2. Determinarea centrului de greutate	48

5. Frecările în cazul solidului rigid	58
5.1. Generalități	58
5.2. Frecarea de alunecare	59
5.3. Frecarea de rostogolire	59
5.4. Frecarea de pivotare	60
5.5. Frecarea în articulații și lagăre	62
5.6. Frecarea în scripeti	62
5.7. Frecarea firelor	63
6. Statica sistemelor de corpuri	69
6.1. Metoda izolării corpurilor	69
6.2. Metoda solidificării părților	73
7. Sisteme plane de bare articulate	77
7.1. Generalități	77
7.2. Metoda separării nodurilor	78
7.3. Metoda secțiunilor	80

Coli de tipar : 5,25. B.T. 22.III.1989.
Format 16/70×100.
Apărut 1989.

I. P. „Oltenia” Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România
Plan 19530/346/1989

