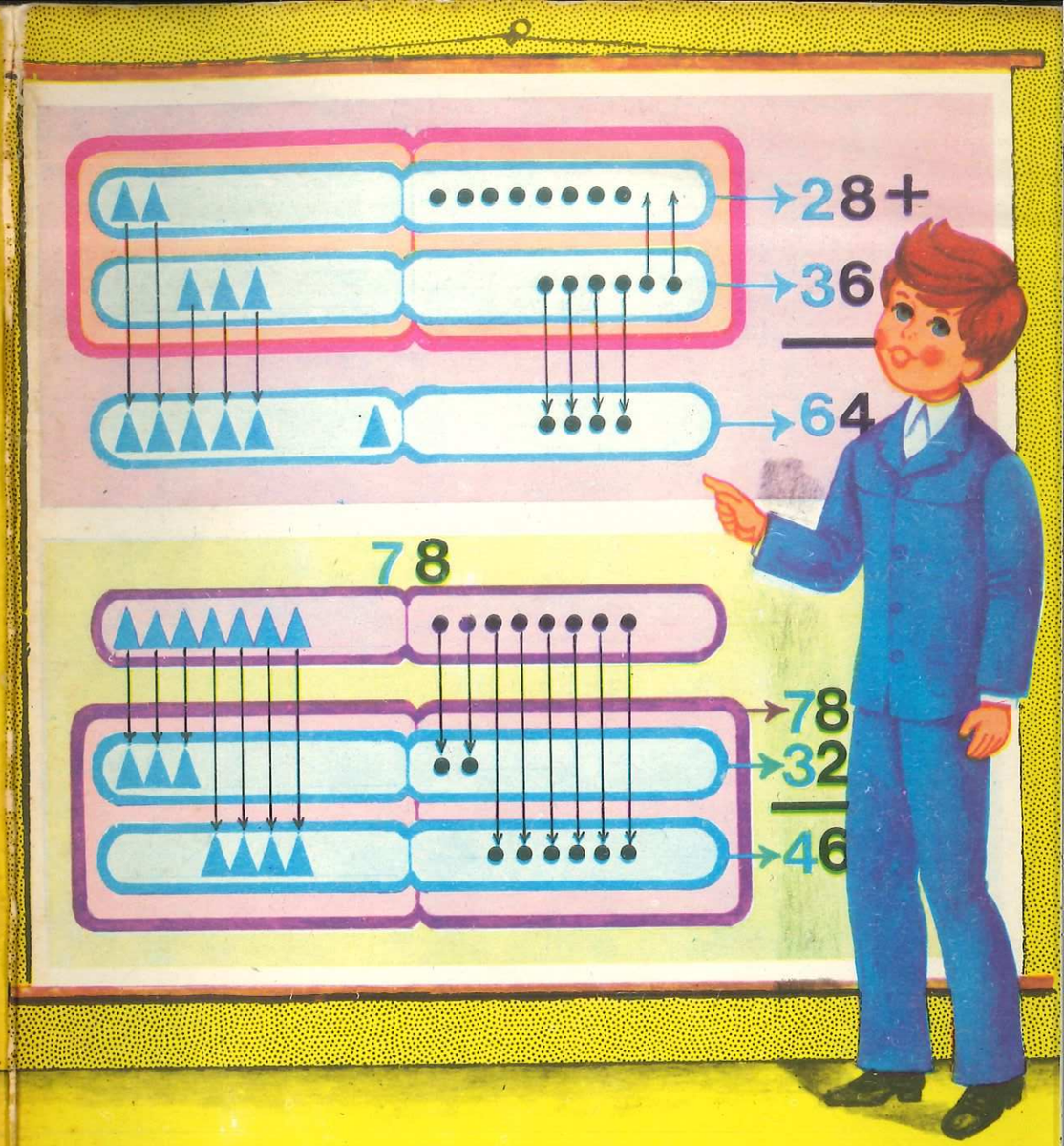
Lei 5,90

Editura didactică și pedagogică, București
1981



DUMITRU ROȘCA

Matematică clasa a II-a
ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI

DUMITRU ROȘCA

Matematică clasa a II-a
ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1981

Referenţi :

Cercet. ştiinţific doctor SILVIU TELEMAN
Prof. IOANA G. BORCA
Prof. GHEORGHE I. HERESCU
Inv. VASILE MOTRESCU

Redactor : TUDORA GAVRILĂ
Tehnoredactor : ELENA PETRICĂ
Coperta : DUMITRU ŞMALENIC

CONSIDERAŢII GENERALE

1. CONCEPŢIA DUPĂ CARE A FOST ELABORAT MANUALUL

Principalele trăsături comune diverselor programe de modernizare a studiului matematicii în primii ani de şcoală decurg din convingerea unanimă că noţiunile despre mulţimi şi relaţii conţin valenţe pedagogice a căror fructificare va determina un salt calitativ important în direcţia optimizării învăţării matematicii.

Un astfel de punct de vedere a fost adoptat şi la noi în ţară prin programa de matematică pentru clasele I—IV ce se introduce treptat, începînd din anul şcolar 1978/79.

Esenţa noii concepţii constă în folosirea, la nivelul de înţelegere al copiilor, a unor cunoştinţe despre mulţimi şi relaţii şi a terminologiei adecvate, care să ofere posibilitatea explicării, în condiţii net superioare decît se putea face pînă acum, a unor noţiuni matematice fundamentale (numere naturale, operaţii cu numere naturale etc.), a exprimării corecte şi comode a ideilor, a folosirii mai eficiente a intuiţiei, concomitent cu un proces treptat de abstractizare.

Noţiunile despre mulţimi şi relaţii dezvoltă la copii abilitatea desprinderii situaţiilor matematice din lumea înconjurătoare, creării de modele matematice şi utilizării lor pentru studierea diferitelor aspecte ale realităţii, găsirii legăturilor esenţiale între diversele mărimi din enunţul problemelor, a operaţiilor care duc la rezolvarea acestora, mărind capacitatea elevilor de aplicare a matematicii în cele mai diverse situaţii şi educînd, cu un excelent randament, supleţea în gîndire a elevilor.

Modernizarea realizată de noile programe şi manuale de matematică la clasele I—IV nu înseamnă înlăturarea din şcoală a unei matematici şi introducerea alteia, cu desăvîrşire nouă. Desigur, există şi lucruri noi, dar baza studiului matematicii în aceste clase o formează în continuare cunoştinţele zise „clasice", a căror utilitate a fost dovedită. Nouă este forma de prezentare a acestor cunoştinţe, dintr-un alt punct de vedere, într-un context mai general,

mai apropiat de situaţia matematică actuală, cu o logică care măreşte apreciabil posibilităţile de explicare pentru învăţători şi şansele de înţelegere şi asimilare, pentru elevi.

Aşa cum am scris şi într-un proiect de programă de matematică pentru clasele I—IV pe care l-am propus Ministerului Educaţiei şi Învăţămîntului în ianuarie 1978, şocat la prima vedere de multe elemente ce par cu totul noi pentru acest nivel de învăţămînt, învăţătorul se va convinge repede că de fapt noile programe şi manuale sistematizează, conştientizează procese psihice şi intelectuale care au fost folosite pînă acum în procesul învăţării în mod inconsecvent, neexplicit, rămînînd la forme de gîndire şi de exprimare echivoce.

Subliniem faptul că, deşi contribuie la dezvoltarea posibilităţilor de exprimare a ideilor, noul sistem de prezentare a cunoştinţelor are drept principală consecinţă nu un spor de verbalizare, ci unul de fundamentare logică a cunoştinţelor matematice, pe baza cunoaşterii şi exersării unor procese ale gîndirii cu caracter foarte general. Ca urmare firească a creşterii conştientizării actului învăţării, se vor întări deprinderile de calcul, ale cărui tehnici devin mai bine înţelese.

Cunoştinţele despre mulţimi şi relaţii, favorizînd o mai profundă ancorare a cunoştinţelor matematice în realitatea înconjurătoare şi, totodată, surprinderea aspectelor matematice din această realitate, dau posibilitatea realizării unui salt calitativ în aplicarea principiului intuiţiei. Prezentul îndrumător şi manualul la care se referă constituie o încercare de folosire a materialului didactic după un program în care se comandă şi se obţine un anumit efect, cu un consum minim de materiale, timp şi energie.

Sporind accesibilitatea cunoştinţelor matematice pentru masa largă a elevilor, se va reduce eşecul şcolar şi diferenţierea în pregătirea matematică a elevilor.

2. UNELE RECOMANDĂRI GENERALE

a. CUM TREBUIE FOLOSIT MANUALUL

Este necesar ca manualul să fie studiat în întregime înainte de a se începe predarea conţinutului la elevi. Aceasta va permite învăţătorului să aibă o vedere de ansamblu care îi va ajuta să dozeze just timpul şi efortul destinat studierii în clasă a fiecărei teme, precum şi orientarea manierei de predare a temelor, astfel încît să favorizeze predarea temelor următoare.

Manualul este, desigur, un ajutor preţios pentru elevi, învăţători şi părinţi. Toţi aceştia trebuie să-l studieze cu grijă, acasă. Manualul va fi folosit şi în clasă în diferite etape ale lecţiei, în măsura în care se va considera necesar, fără însă ca lucrul cu manualul să ocupe partea principală a orelor de matematică.

Conţinutul manualului va orienta pe învăţător cum să-şi construiască lecţiile. În nici un caz acesta nu se va limita la a reproduce, fie şi pe dinafară, textul manualului, urmînd a-şi organiza lecţiile prin contribuţia sa personală, alegîndu-şi exemple proprii, potrivite condiţiilor concrete ale clasei. În acest act de creaţie o deosebită grijă trebuie avută pentru păstrarea nealterată a conţinutului de idei, risc cu atît mai mare cu cît nu există o experienţă a masei învăţătorilor de construire a lecţiilor într-o astfel de concepţie şi nici nu s-a asigurat o pregătire corespunzătoare din timpul liceului pedagogic, iar bibliografia ce poate fi găsită nu corespunde încă pe deplin acestui scop.

Textul din manual va fi folosit în cadrul orelor de clasă mai ales pentru fixarea cunoştinţelor şi rezolvarea independentă a unor exerciţii şi probleme. Acasă elevul va folosi manualul spre a-şi aminti cele explicate de învăţător şi pentru a rezolva exerciţiile şi problemele propuse ca temă pentru acasă.

b. SUGESTII ÎN LEGĂTURĂ CU FOLOSIREA MATERIALULUI DIDACTIC

În manual există multe figuri, care au rol efectiv în procesul însuşirii noilor cunoştinţe. Executarea lor la tablă şi în caiete ar putea duce însă la dificultăţi de natură a compromite realizarea scopului cărora au fost destinate. De aceea, de regulă, se va evita desenarea lor, fiind înlocuite cu planşe dinainte pregătite (există recomandări concrete la fiecare temă), şi cu trusa de material didactic destinat predării operaţiilor cu numere naturale. Cu toate acestea, rămîn destule desene care vor trebui făcute la tablă.

În afara materialului didactic sugerat de manual sau propus în acest îndrumător, învăţătorul poate folosi, cu mici modificări adesea numai de procedură, materialul tradiţional existent în şcoli, sau poate confecţiona altul, imaginat de el.

În ce priveşte folosirea materialului didactic este bine să se ţină seama de faptul că nu abundenţa de material hotărăşte succesul unei lecţii. Arta este în a folosi cît mai puţin material şi cît mai simplu, dar care să asigure în cel mai înalt grad lămurirea conţinutului de idei, a diferitelor procedee, reguli, tehnici de lucru care se stabilesc, şi aceasta pentru toţi elevii clasei. Nu trebuie uitat că elevii cu aptitudini au prea puţină nevoie de material didactic. Totodată, nu trebuie uitat că materialul didactic nu este decît un mijloc, el nu este un scop în sine, de aceea utilizarea sa trebuie să finalizeze totdeauna cu surprinderea şi reţinerea aspectelor matematice, desprinse de suportul material prin care s-au introdus.

c. SUGESTII REFERITOARE LA ÎNSUŞIREA LIMBAJULUI MATEMATIC

În legătură cu limbajul matematic pe care trebuie să şi-l însuşească elevii, ca enunţarea corectă a definiţiilor, regulilor şi a altor propoziţii matematice utilizate, menţionăm că ar fi o corvoadă obositoare pentru elevi cerinţa de

a le memora și enunța pe de rost. Tehnica însușirii trebuie să fie alta. Prin modul de prezentare a cunoștințelor, prin folosirea unui material didactic adecvat, prin exemplele date și aplicațiile făcute, prin munca independentă a elevilor ș.a., trebuie ajuns la o deplină înțelegere de către toți elevii a conținutului matematic prezentat. În timpul explicațiilor și al tuturor discuțiilor cu elevii învățătorul se va exprima îngrijit, în limbaj matematic corespunzător, păstrînd în general mereu aceeași manieră de exprimare a aceloraşi idei. El va permite în schimb elevilor să-și exprime gîndurile în limbaj propriu, cu condiția păstrării corecte a conținutului. În acest mod, elevii nu se vor simți timorați de teama uitării unor termeni, sau că nu vor reuși să reproducă identic cu formularea învățătorului niște propoziții matematice, dar vor împrumuta pe nesimțite modul de exprimare al învățătorului, în ritmul de însușire propriu fiecărui elev.

Experiența noastră în această direcție a dat rezultate excelente. Un însemnat rol mobilizator s-a dovedit a-l avea evidențierea din cînd în cînd, de ce răspunsul dat de elev este acceptabil, dar formularea învățătorului este preferabilă (precizie, conciziune, eleganță etc.).

d. FIXAREA CUNOȘTINȚELOR PRIN REPETARE

Este lucru cunoscut că elevii de vîrstă mică își însușesc destul de repede cunoștințele, dar le și uită repede, dacă nu le repetă mereu. De acest lucru va trebui ținut seama dacă vrem ca anumite cunoștințe transmise elevilor să fie cu adevărat un bun cîștigat, pe care ei să se poată sprijini în însușirea altor cunoștințe și în diverse aplicații practice.

Respectarea principiului repetării permanente nu trebuie să ducă însă la a continua discuțiile și aplicațiile asupra unei teme, mult timp după ce aceasta a fost însușită de elevi. Experiența arată că în acest mod intervine fenomenul de oboseală, de plictiseală, randamentul activității scade, se irosește timpul.

Este mult mai productiv a se trece la dezbaterea altei teme, înainte ca în legătură cu cea veche să apară fenomenul de plictiseală, avînd grijă să se revină periodic, spre a preveni uitarea.

e. ÎNSEMNĂTATEA ECONOMIEI DE CUVINTE ȘI A EVIDENȚIERII CLARE A INVENTARULUI IDEILOR TRANSMISE

Atragem atenția asupra importanței explicării cît mai clare a unei idei, asigurată cu cît mai puține cuvinte. Aceasta obligă învățătorul la o migăloasă pregătire a lecțiilor, dar el va fi răsplătit prin rezultate. Abundența de vorbe la lecții este nedorită. Dacă conținutul a 100 de cuvinte spuse de învățător poate fi exprimat numai prin 30 de cuvinte, atunci cele 70 de cuvinte

reprezintă un balast de care trebuie „curățat" conținutul transmis, lucru deloc ușor, și care rămîne a fi făcut de elev. Aceasta este de natură a diminua apreciabil randamentul activității învățătorului la lecție.

În aceeași ordine de idei, menționăm buna deprindere a unor cadre didactice de a nu-și încheia pregătirea pentru lecție înainte de a întocmi o listă în care sînt enumerate ideile cu care trebuie să rămînă elevii din lecția respectivă, și deprinderile pe care doresc să le formeze la elevi în cadrul acesteia.

Deși conținutul cunoscut, sintetizarea sa sub forma acestui „inventar de idei și deprinderi" ridică adesea destule dificultăți. Odată întocmit, inevitabil existența sa își va pune amprenta asupra sistematizării lecției în clasă.

Dacă în finalul lecției elevii sînt în măsură a enumera conținutul acestui „inventar", se poate admite că s-a făcut o treabă bună la acea lecție, deoarece elevii nu puteau reține tot ce s-a spus într-o oră.

f. FOLOSIREA CU RANDAMENT MAXIM A EXERCIȚIILOR ȘI PROBLEMELOR

Pentru clarificarea și fixarea cunoștințelor, pentru antrenarea capacității de utilizare independentă a lor, pentru formarea de abilități și deprinderi de aplicare în cele mai diverse situații, un mare rol îl joacă rezolvarea exercițiilor și problemelor. Pe drept cuvînt, nivelul pregătirii unui elev este exprimat de ceea ce el este în stare să facă singur, pe baza cunoștințelor dobîndite, și de aceasta ne dăm seama în procesul rezolvării de exerciții și probleme.

În manual s-a acordat multă atenție formulării exercițiilor și problemelor în strînsă legătură cu cunoștințele conținute la fiecare temă și capitol, în scopul adîncirii, uneori chiar a completării lor. De aceea trebuie rezolvate toate exercițiile și problemele din manual, ele reprezentînd un minim obligatoriu. Aceasta decurge din faptul că nu s-a mers pe ideea rezolvării rapide a unui număr cît mai mare de exerciții și probleme. O astfel de procedură ar face ca mulți elevi să nu poată „ține pasul", creîndu-se decalaje mari de la un elev la altul în ce privește cîștigul obținut din fiecare exercițiu sau problemă rezolvată în clasă, unii elevi rămînînd, în cel mai fericit caz, cu cîteva tehnici de lucru pe care le aplică mecanic, de obicei după ce li se sugerează din afară procedeul potrivit într-o anumită situație.

Principalul însă este ca elevul să găsească singur calea de urmat și să o poate parcurge independent, asigurîndu-și autocontrolul. În acest scop pare mai potrivit a se merge pe linia unei maxime conștientizări a procesului de rezolvare a exercițiilor și problemelor, în așa fel încît elevul să poată apoi recunoaște situațiile matematice asemănătoare cu care se va întîlni mai tîrziu, situații pe care să le poată trata independent, pe baza experienței anterioare, în mod conștient.

Așadar, în rezolvarea problemelor nu cît mai mult, ci cît mai bine.

În funcţie de situaţia din fiecare clasă este desigur posibil ca, pentru formarea deprinderilor de rezolvare a anumitor tipuri de exerciţii şi probleme, numărul celor existente în manual să nu fie suficient pentru unii elevi. Învăţătorul va putea să formuleze singur altele, după modelul lor.

3. CÎTEVA ASPECTE MAI DEOSEBITE CARE CARACTERIZEAZĂ MANUALUL

a. CÎT MAI PUŢINE REGULI, DAR APLICABILE ÎN CÎT MAI MULTE SITUAŢII

În redactarea manualului s-au adoptat unele soluţii pentru care pledează argumente ce trebuie cunoscute de învăţători, pentru ca aceştia să depună cu toată convingerea efortul necesar aplicării lor în condiţii de maximă eficienţă. Pe de altă parte, cunoaşterea unor aspecte mai deosebite şi a scopului pentru care au fost introduse va preveni trecerea cu uşurinţă peste ele, şi deci diminuarea efectelor pe care s-a contat.

În această ordine de idei, s-a depus un mare efort pentru a nu fărîmiţa în cazuri şi căzuleţe prezentarea unei teme, mai ales la efectuarea operaţiilor. Aceasta pentru a nu aglomera mintea copiilor cu reguli greu de memorat şi care nu sînt strict necesare, deoarece în situaţiile respective copiii pot aplica alte cunoştinţe, cu caracter mai general. Dealtfel, practica arată că la efectuarea operaţiilor copiii preferă aplicarea acelor procedee care sînt valabile în cît mai multe situaţii (probabil ca act inconştient de protejare împotriva supraîncărcării). Învăţătorii pe care i-am consultat au fost unanimi în aprecierea că elevii, în faţa unei operaţii matematice, nu au prima tendinţă de a recunoaşte din care caz particular face parte, spre a-i aplica tehnica specifică de calcul, ci, dimpotrivă, prima tendinţă este de a descoperi din ce categorie mai generală face parte, spre a-i aplica procedeul general valabil în situaţiile asemănătoare.

Aşadar, elevii preferă să se descurce în situaţii cît mai numeroase, cu reguli cît mai puţine. Cîtă vreme nu sînt considerente foarte serioase care să pledeze împotrivă, este firesc să respectăm această cerinţă.

b. RECONSIDERAREA RAPORTULUI ÎNTRE CALCULUL ORAL ŞI CEL SCRIS

În legătură cu ponderea pe care trebuie să o aibă calculul oral şi cel scris, cîştigă tot mai mulţi adepţi ideea că nu este justificat a se da o exagerată extindere calculului oral, a se devansa mult calculul oral înaintea celui scris. Risipa de timp care se produce pe această cale este departe de a fi răsplătită prin operativitatea şi siguranţa obţinute în efectuarea calculului oral. Aceasta

fără a mai lua în consideraţie că stăpînirea unei excelente tehnici de calcul oral, cu ani în urmă reprezenta un avantaj incomparabil mai mare decît în zilele noastre, cînd maşinile de calcul de la cele mai simple, la cele mai perfecţionate, cunosc o largă răspîndire, dimensiunile şi tehnica mînuirii lor făcîndu-le utilizabile pentru masele largi.

Desigur, ar fi cu totul nefericit a se ajunge în situaţia ca pentru cele mai simple calcule să trebuiască folosită o maşină de socotit sau cel puţin mijloace de calcul în scris. Dar nici antrenarea pînă la rafinament a unor deprinderi de calcul oral, pentru toţi elevii, nu se justifică nici ca scop, nici ca volum de energie şi timp cheltuite.

Urmare a unor considerente ca cele de mai sus, noul manual are în vedere efectuarea calculului oral şi în scris, în acelaşi timp. Dealtfel, această cale este urmată în foarte multe ţări cu un învăţămînt matematic evoluat. Un motiv în plus îl constituie faptul că, deduse pe bază de mulţimi, regulile de calcul oral şi în scris decurg simultan, neavînd nici un sens a atrage atenţia elevilor doar asupra unora din ele.

c. NUMIREA ŞI SCRIEREA NUMERELOR NATURALE, PROBLEMĂ DISTINCTĂ DE ADUNAREA LOR. IMPLICAŢII ÎN FORMAREA IDEII GENERALE DE OPERAŢIE INTERNĂ BINARĂ

În manual se rezolvă mai întîi problema determinării, numirii şi scrierii numerelor naturale în sistemul zecimal de numeraţie în cercul 0—10, 0—100 şi 0—1 000, prin introducerea unui procedeu şi a unor convenţii convenabile acestui scop. Numai după aceea se tratează adunarea în mulţimile respective, ale căror elemente sînt deja cunoscute ca semnificaţie, denumire, notaţie etc. În acest mod, operaţia de adunare asociază, după o anumită regulă, la două elemente dintr-o mulţime, un element din acea mulţime, păstrîndu-se astfel sensul general al operaţiei interne binare într-o mulţime.

După ce elevii cunosc numerele naturale de la 0 la 10, ei fac adunarea în cercul 0—10 ca operaţie internă binară în mulţimea

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

fără a se introduce explicit această noţiune.

Adunări ca $2 + 3 =$, $5 + 4 =$, $1 + 6 =$, sînt posibile în această mulţime, iar adunări ca $4 + 9 =$, $8 + 7 =$, $6 + 5 =$, nu sînt posibile în mulţimea respectivă.

După ce au fost introduse numerele de la 10 la 100, se face adunarea în cercul 0—100, ca operaţie internă binară în mulţimea

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100\}.$$

Adunări ca $21 + 46 =$, $39 + 45 =$, sînt posibile în această mulţime, iar adunări ca $81 + 56 =$, $23 + 98 =$, nu sînt posibile în mulţimea respectivă.

Acelaşi sistem de lucru se foloseşte şi la trecerea peste sută.

Trebuie remarcată distincția dintre acest punct de vedere și procedeul folosit adesea pentru introducerea numerelor naturale mai mari ca 10 (apoi mai mari ca 100), prin intermediul adunării. Un astfel de procedeu asociază la două elemente din mulțimea cunoscută

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ceva încă necunoscut, ce nu aparține acestei mulțimi, ceva anume „inventat" pentru a funcționa ca rezultat al adunării :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$2 + 10 = 12$$

Un astfel de procedeu nu face un bun serviciu formării ideii generale de operație internă binară într-o mulțime, care cere rezultatului operației să aparțină aceleiași mulțimi ca și componentele. În plus, această „fabricare" a rezultatului (și nu doar alegerea lui dintre elementele mulțimii, dinainte cunoscute) poate crea derută în legătură cu operațiile ce nu sînt totdeauna posibile într-o mulțime.

Din punct de vedere pedagogic, ultimul procedeu contopește două probleme distincte, aceea a numirii numărului de elemente al unei mulțimi, care își are ca soluție organizarea mulțimii cu structură numerică zecimală și introducerea unor convenții de numire, cu cea a adunării numerelor naturale, care își are ca soluție formarea reuniunii a două mulțimi disjuncte și numărarea ei.

Se vede că prin contopirea de care am vorbit, nici una din cele două probleme contopite nu mai este pusă clar în evidență, atenția fiind îndreptată spre formarea exclusivă a unor automatisme.

d. FOLOSIREA MULȚIMILOR MODEL CU STRUCTURĂ NUMERICĂ ZECIMALĂ ȘI A FIGURILOR NUMERICE

Neacordarea atenției cuvenite problemei numirii numărului de elemente al unei mulțimi, ca problemă distinctă de adunare, are și alte consecințe nedorite. În acest mod trece neobservat faptul că la efectuarea adunării (și mai ales în cazul trecerii peste ordin) nu formarea reuniunii mulțimilor disjuncte prezintă dificultatea principală, ci numirea numărului de elemente al reuniunii, în care scop numărarea nu este deloc convenabilă (și ea implică, dealtfel, cunoașterea numerelor mai mari ca 10 înainte de a face adunarea cu trecere peste 10).

Orice regulă practică de adunare și scădere este, în esență, un procedeu de aflare a numărului elementelor reuniunii unor mulțimi disjuncte, sau a diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, fără a folosi numărarea. În acest scop putem folosi structura numerică zecimală a termenilor, corelată cu structura numerică zecimală a mulțimilor model folosite pentru termeni,

și, fără a strica organizarea în structuri zecimale ale acestora, să căutăm un mijloc de obținere a mulțimilor reuniune sau diferență gata organizate cu structuri numerice zecimale, spre a le putea numi cu ușurință numărul elementelor.

Un astfel de mijloc s-a dovedit a fi utilizarea mulțimilor model sub forma figurilor numerice care le-am introdus și folosit pe larg în manual, care au dus la rezultate surprinzător de suple, păstrînd nealterat conținutul științific și sugerînd, pe un excelent suport intuitiv, regulile de adunare și scădere oral și în scris a numerelor naturale. Totodată, ele au permis imaginarea unui material didactic extrem de simplu și de eficient în scopul predării adunării și scăderii numerelor naturale, sub forma trusei pentru predarea, pe bază de mulțimi, a operațiilor cu numere naturale la clasele I—IV.

e. PE PRIMUL PLAN IDEEA DE ÎNMULȚIRE ȘI ÎMPĂRȚIRE, ȘI APOI TABLA ÎNMULȚIRII ȘI A ÎMPĂRȚIRII

Conținutul manualelor de pînă acum referitor la înmulțirea și împărțirea numerelor naturale se rezumă aproape numai la tabla înmulțirii și a împărțirii.

Practica școlară arată însă că pînă la urmă, tabla înmulțirii și a împărțirii trebuie învățate pe de rost, fiind foarte incomod a cere unui elev să „deducă" produsul sau cîtul (8 × 9 de pildă, sau 63 : 7). Tot practica școlară dovedește că o dată învățate, tabla înmulțirii și a împărțirii se uită repede, de îndată ce intervin perioade (chiar nu prea lungi) în care elevul nu este pus în situația de a le utiliza.

În consecință, a reduce cunoștințele elevilor de clasa a II-a asupra înmulțirii și împărțirii doar la cunoașterea tablei înmulțirii și împărțirii, înseamnă a cheltui cu randament scăzut prea mult timp, elevii nedobîndind suficiente idei durabile, de perspectivă, care să-i ajute a înțelege esența operațiilor respective, astfel încît să fie capabili să recunoască situațiile matematice în care intervin aceste operații, să fie capabili deci să rezolve cu ușurință probleme de înmulțire și împărțire.

f. NECESITATEA UNEI REGULI DE ÎMPĂRȚIRE CARE SĂ NE CONDUCĂ LA OBȚINEREA CÎTULUI

În legătură cu modul de prezentare a împărțirii, cîtă vreme elevii nu cunoșteau noțiuni ca acelea de submulțime, mulțimi disjuncte etc., nu li se putea prezenta ca mijloc de obținere a cîtului, alegerea unei mulțimi model pentru deîmpărțit și separarea elementelor sale în submulțimi disjuncte între ele (ajungînd fie la procedeul împărțirii prin „cuprindere", fie la acela al împărțirii prin „părți egale").

Rămînea alternativa calculării cîtului cu ajutorul scăderii repetate. Dar manualul de pînă acum nu folosea nici această alternativă. El se rezuma doar

să arate cum putem verifica prin înmulțire dacă un anumit număr este, sau nu, cîtul unei anumite împărțiri. Elevului nu-i rămînea decît calea găsirii cîtului prin încercări. El era lăsat astfel fără un procedeu de obținere a cîtului și fără unele cunoștințe care l-ar fi ajutat să pătrundă mai adînc sensul operației de împărțire, să rezolve mai ușor anumite probleme de împărțire.

În noul manual s-a căutat să se soluționeze aceste probleme, la nivelul de înțelegere al copiilor.

4. STRUCTURA INDRUMATORULUI

Intitulat „MATEMATICĂ PENTRU CLASA a II-a — ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI", el nu a fost conceput ca avînd rolul principal de a da indicații asupra modului cum trebuie înțeles conținutul manualului, ci ca avînd menirea să orienteze pe învățător cum trebuie să-și desfășoare activitatea cu elevii, sub toate aspectele, pentru ca aceștia să-și însușească în condiții cît mai bune conținutul noii programe de matematică. Desigur, în acest context se integrează și lămuririle necesare înțelegerii depline a textului din manual și folosirii eficiente a manualului în clasă și acasă.

În scopul de mai sus, îndrumătorul conține aceleași capitole și teme, ca și manualul, și la fel intitulate și numerotate. Între numerotarea figurilor existente în îndrumător, și a celor existente în manual, nu este nici o legătură.

La fiecare capitol îndrumătorul conține, în general.

A. Scurte observații asupra conținutului

1. Obiectivele prevăzute de programa școlară.
2. Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii.

Termeni și notații noi.

B. Indicații metodice pentru predarea temelor (Număr de ore, orientativ = ...)

Tema. Scopul. Material didactic: pentru învățător; pentru elevi.

Recomandări metodice pentru predarea temei.

a. Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului. Muncă independentă.

b. Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului. Exerciții și probleme din manual: propuse a fi rezolvate în clasă; propuse a fi rezolvate acasă.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse în manual la tema...

Notă: Temele, care se pot desfășura după o tehnologie didactică asemănătoare unora care au fost prezentate anterior, nu au fost dezvoltate din nou în amănunțime, ci s-a adăugat doar ceea ce s-a considerat necesar, pentru ca învățătorul să-și poată construi lecția cu maximum de eficiență.

I. RECAPITULAREA ȘI COMPLETAREA CUNOȘTINȚELOR DIN CLASA I

Capitolul 1
NOȚIUNI DESPRE MULȚIMI

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Noțiunile despre mulțimi studiate în clasa I.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

1° Noțiunile de *mulțime* și *element* percepute intuitiv, cu utilizarea curentă a termenilor corespunzători. *Apartenența* și *neapartenența* unui element la o mulțime, exprimate cu terminologia respectivă, formate de asemenea pe cale intuitivă.

Elevii nu trebuie să facă aici teorie, ei vor trebui doar să-și exprime în limbaj corespunzător comentariile în legătură cu exemplele puse în discuție, și, mai ales, să găsească ei exemple care să ilustreze diversele situații cerute de învățător.

Diagrama unei mulțimi, figurată printr-o linie închisă, elementele mulțimii fiind figurate prin puncte în interiorul liniei închise. Scrierea în diagramă, lîngă punct, a *simbolului* elementului pe care îl reprezintă acest punct, în situațiile în care acest lucru ușurează înțelegerea ideilor, sau exprimarea gîndirii copiilor.

Elevii trebuie să cunoască precizarea unei mulțimi prin *indicarea tuturor elementelor* sale, sau prin *indicarea proprietății caracteristice* a mulțimii, adică acele proprietăți pe care le au toate elementele mulțimii și numai ele.

Se va cunoaște că *ordinea* în care sînt luate elementele unei mulțimi nu are nici o însemnătate, iar indicarea unui același element *de mai multe ori* în precizarea mulțimii, nu are rost.

2° Situațiile în care se poate găsi o mulțime față de o mulțime: fără elemente comune, sau *disjuncte; cu unele elemente comune* (fiecare mulțime avînd și elemente necomune cu cealaltă); o mulțime *inclusă* într-o mulțime, submulțime sau parte a unei mulțimi; mulțimi *egale*.

Se va evita exprimarea: „Situația în care se află o mulțime față de *altă* mulțime", deoarece, în cazul mulțimilor egale, se ia în considerație o mulțime față de ea însăși și nu față de o altă mulțime.

Elevii vor cunoaşte reprezentarea a două mulţimi, în orice situaţie s-ar afla, cu ajutorul diagramei generale (fig. 1), figurînd elementele în zonele corespunzătoare, ca în figurile 2, 3, 4 şi 5.

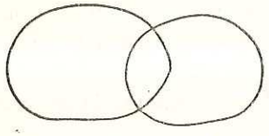


Fig. 1

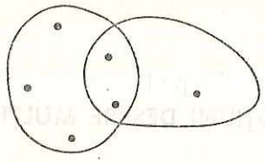


Fig. 2

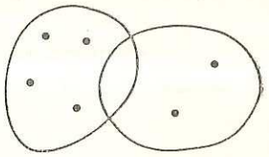


Fig. 3

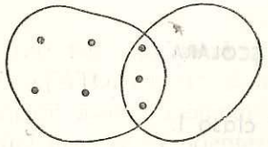


Fig. 4

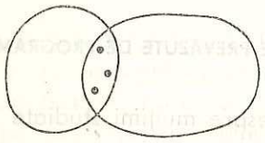


Fig. 5

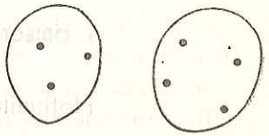


Fig. 6

În cazul mulţimilor disjuncte se vor face şi diagrame ca în figura 6, iar pentru o mulţime inclusă într-o mulţime, diagrame ca în figura 7.

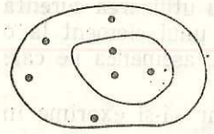


Fig. 7

În legătură cu mulţimile egale se va observa că nu avem de fapt două mulţimi, ci o singură mulţime, indicată în moduri diferite.

3° Mulţimile ce se pot obţine cu două mulţimi date, cunoscînd şi formulările verbale:

Intersecţia *unei mulţimi A cu o mulţime B este o nouă mulţime formată din toate elementele ce aparţin şi mulţimii A şi mulţimii B* (şi numai din acestea).

Diferenţa *dintre o mulţime A şi o mulţime B este o nouă mulţime formată din toate elementele ce aparţin mulţimii A, şi nu aparţin mulţimii B* (şi numai din acestea).

Diferenţa dintre mulţimea B şi mulţimea A se defineşte în mod asemănător.

Reuniunea *unei mulţimi A cu o mulţime B este o nouă mulţime formată din toate elementele ce aparţin cel puţin la una din mulţimile A şi B* (şi numai din acestea).

Observarea *comutativităţii* intersecţiei şi reuniunii mulţimilor şi a *necomutativităţii* diferenţei mulţimilor.

4° Mulţime *pereche*, mulţime *cu un singur element*, mulţime *vidă*. Ele se vor obţine cu ocazia intersecţiei sau a formării diferenţei de mulţimi, dar se vor da şi exemple de astfel de mulţimi care nu se obţin pe aceste căi.

Se vor face exerciţii de alcătuire a unor noi mulţimi cu ajutorul unor mulţimi date, cînd acestea se află şi în alte situaţii, nu numai disjuncte.

Termeni ce vor fi folosiţi: mulţime; element; aparţine, nu aparţine; diagramă; simbol; proprietate caracteristică; mulţimi disjuncte; mulţime inclusă într-o mulţime, submulţime, parte; intersecţie; diferenţă; reuniune; comutativitate; mulţime pereche; mulţime vidă.

B. INDICAŢII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL I

(Număr de ore, orientativ=5)

TEMA 1: MULŢIME, ELEMENT, APARTENENŢĂ

Scop: Împrospătarea noţiunilor şi a termenilor corespunzători. Folosirea diagramelor şi simbolurilor. Indicarea mulţimii prin lista elementelor şi prin proprietate caracteristică.

Material didactic

Pentru învăţător: Planşe cu figurile 8, 9 şi 10: tabla magnetică; piese metalice cu forma pătrat, dreptunghi, triunghi, cerc, fiecare în patru exemplare, respectiv de culoare roşie, verde, albastră, neagră. Tabla magnetică poate fi înlocuită cu un „flanelograf" (stofă aspră întinsă pe un cadru de lemn sau de carton, folosind în locul pieselor metalice, piese din carton avînd pe o parte lipit postav. Piesele, aşezate cu postavul pe stofa cadrului, se menţin chiar dacă acesta stă în poziţie aproape verticală); cretă colorată.

Pentru elevi: Ovale confecţionate din sîrmă; piese asemănătoare cu cele din trusa folosită de învăţător, confecţionate din carton, puse într-un plic.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activităţi desfăşurate cu elevii, fără folosirea manualului*

1) **Recunoaşterea atributelor:** formă, culoare.

Folosind planşa cu figura 8, apoi piese din trusa cu figuri geometrice, se cere elevilor să recunoască forma figurii sau piesei respective.

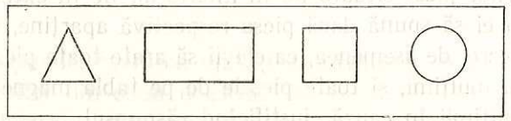


Fig. 8

Din planşa cu figura 9 vor fi recunoscute culorile: roşu, verde, albastru, galben, negru ş.a.

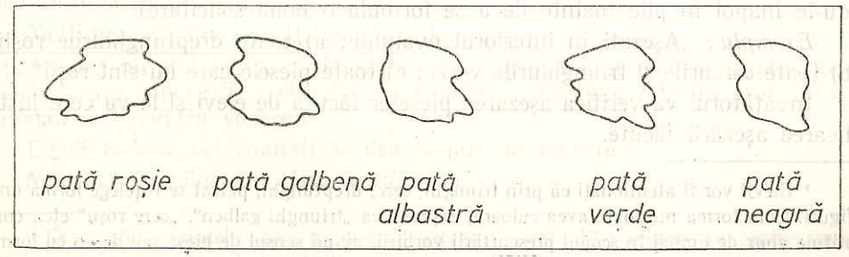


Fig. 9

Problema 3

Se va cere răspunsul complet. De exemplu : „*t* este un element al mulțimii literelor din cuvîntul „*carte*“ “.

Dacă învățătorul va dori să analizeze și alte probleme asemănătoare, va trebui să fie atent la cuvîntul ales. De exemplu, cuvîntul „caiet“ nu creează dificultăți în plus față de cuvîntul „carte“. În schimb, cuvîntul „mama“ este alcătuit doar din două litere, *m* și *a* și nu din patru, așa cum s-ar putea crede.

Problema 4.

Elementele mulțimii *A* sînt cercul roșu, pătratul negru și pătratul roșu. Cercul negru și triunghiul albastru nu aparțin mulțimii *A*, deoarece nu se află în interiorul liniei desenate cu albastru.

Problema 5.

Elementele ce aparțin mulțimii *B* sînt literele : *b ; c ; d*, iar cele care aparțin mulțimii *C* sînt literele : *a ; c ; f*.

Putem scrie mulțimile *B* și *C* astfel :

$$B = \{b;\ c;\ d\}; \qquad C = \{a;\ c;\ f\}.$$

Literele *m* și *p* nu aparțin nici mulțimii *B*, nici mulțimii *C*.

$$* \ m \notin B; \qquad m \notin C; \qquad p \notin B; \qquad p \notin C.$$

TEMA A 2-A : SITUAȚII ÎN CARE SE POT AFLA DOUĂ MULȚIMI

Scop: Să se înțeleagă care elemente sînt comune mai multor mulțimi și ce este aceea zonă comună, în diagramă. Să poată fi recunoscută situația în care se află o mulțime față de o mulțime și să se poată da exemple de mulțimi aflate într-o situație dată : cu unele elemente comune ; fără elemente comune sau disjuncte ; o mulțime inclusă într-o mulțime, submulțime sau parte a unei mulțimi ; mulțimi egale.

Material didactic

Pentru profesor: Tabla magnetică cu piesele menționate ; cretă colorată ; pentru exemplificări se folosesc și elevii din clasă.

Pentru elevi: Același ca la tema anterioară, la care se adaugă un oval din sîrmă, de altă culoare față de cel existent, și de altă mărime, astfel încît ele să poată fi așezate unul în interiorul celuilalt pe bancă, și să rămînă suficient loc pentru a așeza piese în zona cuprinsă între ele (în complementară).

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

1) Mulțimi cu unele elemente comune. Se cere ridicarea în picioare a copiilor care stau în primele două bănci din fiecare rînd. Fiecare elev ridicat în picioare este solicitat să-și spună numele. Cîțiva elevi din clasă vor spune numele tuturor elevilor care sînt elemente ale mulțimii elevilor ce stau în primele două bănci din fiecare rînd.

Numai după ce atenția întregii clase a fost îndreptată în acest mod către mulțimea respectivă privită ca un „tot“, cît și asupra fiecărui element în parte, elevii care au stat în picioare se vor așeza în bănci.

Același exercițiu se face cu mulțimea elevilor din rîndul de bănci din mijloc (presupunînd trei rînduri de bănci).

Se observă că elevii din primele două bănci ale rîndului din mijloc aparțin ambelor mulțimi. Astfel de elemente sînt numite *elemente comune* celor două mulțimi.

Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor care sînt elemente comune pentru mulțimile menționate (toți elevii clasei erau așezați în bănci la sfîrșitul celui de-al doilea exercițiu).

Cîțiva elevi din clasă vor spune numele elevilor care sînt elemente comune pentru mulțimile noastre. Toți elevii se reașază în bănci.

Se formulează concluzia că mulțimea elevilor care stau în primele două bănci, și mulțimea elevilor care stau în rîndul de bănci din mijloc, sînt *mulțimi cu unele elemente comune.*

Cîțiva elevi vor repeta această concluzie.

Învățătorul cere ridicarea în picioare a copiilor care aparțin mulțimii elevilor din primele două bănci, dar nu aparțin mulțimii elevilor din rîndul din mijloc. Elevii se reașază în bănci.

Se solicită ridicarea în picioare a copiilor care aparțin mulțimii elevilor din rîndul din mijloc, dar nu aparțin mulțimii elevilor care stau în primele două bănci. Se reașază elevii în bănci.

Activități de acest fel s-au dovedit foarte antrenante pentru copii și deosebit de eficiente pentru însușirea sau împrospătarea cunoștințelor legate de situațiile în care poate fi o mulțime față de o mulțime, de mulțimi ce se pot obține cu două mulțimi date etc. Ele se vor repeta în diverse variante pînă la însușirea conținutului dorit.

Se poate cere elevilor să formuleze ei exemple de tipul celui descris mai sus.

Învățătorul execută pe tablă figura 12.

Elevii spun elementele mulțimii *A*, pe care învățătorul le poate scrie pe tablă :

$$A = \{b,\ d,\ o\}.$$

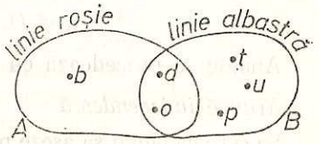


Fig. 12

În mod analog se procedează cu mulțimea *B*:

$$B = \{d,\ o,\ t,\ u,\ p\}.$$

Se cere elevilor să spună dacă mulțimile *A* și *B* au elemente comune. Sînt indicate literele *d* și *o*, motivînd : „*d* este element comun mulțimilor *A* și *B* deoarece aparține mulțimii *A* și mulțimii *B*“. La fel despre *o*. „*b* nu este element comun mulțimilor *A* și *B*, deoarece aparține mulțimii *A* dar nu aparține mulțimii *B*“ ș.a.m.d.

* Se notează (se enunță numai verbal, dacă aceste notații nu se folosesc) :

$$b \in A,\ d \in A,\ o \in A,\ t \notin A,\ u \notin A,\ p \notin A;$$

$$b \notin B,\ d \in B,\ o \in B,\ t \in B,\ u \in B,\ p \in B.$$

Partea figurii unde sînt așezate elementele comune este numită „zonă comună“ și se hașurează ca în figura 13.

Trebuie remarcată distincția dintre acest punct de vedere și procedeul folosit adesea pentru introducerea numerelor naturale mai mari ca 10 (apoi mai mari ca 100), prin intermediul adunării. Un astfel de procedeu asociază la două elemente din mulțimea cunoscută

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ceva încă necunoscut, ce nu aparține acestei mulțimi, ceva anume „inventat" pentru a funcționa ca rezultat al adunării :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$2 + 10 = 12$$

Un astfel de procedeu nu face un bun serviciu formării ideii generale de operație internă binară într-o mulțime, care cere rezultatului operației să aparțină aceleiași mulțimi ca și componentele. În plus, această „fabricare" a rezultatului (și nu doar alegerea lui dintre elementele mulțimii, dinainte cunoscute) poate crea derută în legătură cu operațiile ce nu sînt totdeauna posibile într-o mulțime.

Din punct de vedere pedagogic, ultimul procedeu contopește două probleme distincte, aceea a numirii numărului de elemente al unei mulțimi, care își are ca soluție organizarea mulțimii cu structură numerică zecimală și introducerea unor convenții de numire, cu cea a adunării numerelor naturale, care își are ca soluție formarea reuniunii a două mulțimi disjuncte și numărarea ei.

Se vede că prin contopirea de care am vorbit, nici una din cele două probleme contopite nu mai este pusă clar în evidență, atenția fiind îndreptată spre formarea exclusivă a unor automatisme.

d. FOLOSIREA MULȚIMILOR MODEL CU STRUCTURĂ NUMERICĂ ZECIMALĂ ȘI A FIGURILOR NUMERICE

Neacordarea atenției cuvenite problemei numirii numărului de elemente al unei mulțimi, ca problemă distinctă de adunare, are și alte consecințe nedorite. În acest mod trece neobservat faptul că la efectuarea adunării (și mai ales în cazul trecerii peste ordin) nu formarea reuniunii mulțimilor disjuncte prezintă dificultatea principală, ci numirea numărului de elemente al reuniunii, în care scop numărarea nu este deloc convenabilă (și ea implică, dealtfel, cunoașterea numerelor mai mari ca 10 înainte de a face adunarea cu trecere peste 10).

Orice regulă practică de adunare și scădere este, în esență, un procedeu de aflare a numărului elementelor reuniunii unor mulțimi disjuncte, sau a diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, fără a folosi numărarea. În acest scop putem folosi structura numerică zecimală a termenilor, corelată cu structura numerică zecimală a mulțimilor model folosite pentru termeni,

și, fără a strica organizarea în structuri zecimale ale acestora, să căutăm un mijloc de obținere a mulțimilor reuniune sau diferență gata organizate cu structuri numerice zecimale, spre a le putea numi cu ușurință numărul elementelor.

Un astfel de mijloc s-a dovedit a fi utilizarea mulțimilor model sub forma figurilor numerice care le-am introdus și folosit pe larg în manual, care au dus la rezultate surprinzător de suple, păstrînd nealterat conținutul științific și sugerînd, pe un excelent suport intuitiv, regulile de adunare și scădere oral și în scris a numerelor naturale. Totodată, ele au permis imaginarea unui material didactic extrem de simplu și de eficient în scopul predării adunării și scăderii numerelor naturale, sub forma trusei pentru predarea, pe bază de mulțimi, a operațiilor cu numere naturale la clasele I—IV.

e. PE PRIMUL PLAN IDEEA DE ÎNMULȚIRE ȘI ÎMPĂRȚIRE, ȘI APOI TABLA ÎNMULȚIRII ȘI A ÎMPĂRȚIRII

Conținutul manualelor de pînă acum referitor la înmulțirea și împărțirea numerelor naturale se rezumă aproape numai la tabla înmulțirii și a împărțirii.

Practica școlară arată însă că pînă la urmă, tabla înmulțirii și a împărțirii trebuie învățate pe de rost, fiind foarte incomod a cere unui elev să „deducă" produsul sau cîtul (8 × 9 de pildă, sau 63 : 7). Tot practica școlară dovedește că o dată învățate, tabla înmulțirii și a împărțirii se uită repede, de îndată ce intervin perioade (chiar nu prea lungi) în care elevul nu este pus în situația de a le utiliza.

În consecință, a reduce cunoștințele elevilor de clasa a II-a asupra înmulțirii și împărțirii doar la cunoașterea tablei înmulțirii și împărțirii, înseamnă a cheltui cu randament scăzut prea mult timp, elevii nedobîndind suficiente idei durabile, de perspectivă, care să-i ajute a înțelege esența operațiilor respective, astfel încît să fie capabili să recunoască situațiile matematice în care intervin aceste operații, să fie capabili deci să rezolve cu ușurință probleme de înmulțire și împărțire.

f. NECESITATEA UNEI REGULI DE ÎMPĂRȚIRE CARE SĂ NE CONDUCĂ LA OBȚINEREA CÎTULUI

În legătură cu modul de prezentare a împărțirii, cîtă vreme elevii nu cunoșteau noțiuni ca acelea de submulțime, mulțimi disjuncte etc., nu li se putea prezenta ca mijloc de obținere a cîtului, alegerea unei mulțimi model pentru deîmpărțit și separarea elementelor sale în submulțimi disjuncte între ele (ajungînd fie la procedeul împărțirii prin „cuprindere", fie la acela al împărțirii prin „părți egale").

Rămînea alternativa calculării cîtului cu ajutorul scăderii repetate. Dar manualul de pînă acum nu folosea nici această alternativă. El se rezuma doar

să arate cum putem verifica prin înmulțire dacă un anumit număr este, sau nu, cîtul unei anumite împărțiri. Elevului nu-i rămînea decît calea găsirii cîtului prin încercări. El era lăsat astfel fără un procedeu de obținere a cîtului și fără unele cunoștințe care l-ar fi ajutat să pătrundă mai adînc sensul operației de împărțire, să rezolve mai ușor anumite probleme de împărțire.

În noul manual s-a căutat să se soluționeze aceste probleme, la nivelul de înțelegere al copiilor.

4. STRUCTURA ÎNDRUMĂTORULUI

Intitulat „MATEMATICĂ PENTRU CLASA a II-a — ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI", el nu a fost conceput ca avînd rolul principal de a da indicații asupra modului cum trebuie înțeles conținutul manualului, ci ca avînd menirea să orienteze pe învățător cum trebuie să-și desfășoare activitatea cu elevii, sub toate aspectele, pentru ca aceștia să-și însușească în condiții cît mai bune conținutul noii programe de matematică. Desigur, în acest context se integrează și lămuririle necesare înțelegerii depline a textului din manual și folosirii eficiente a manualului în clasă și acasă.

În scopul de mai sus, îndrumătorul conține aceleași capitole și teme, ca și manualul, și la fel intitulate și numerotate. Între numerotarea figurilor existente în îndrumător, și a celor existente în manual, nu este nici o legătură.

La fiecare capitol îndrumătorul conține, în general.

A. Scurte observații asupra conținutului

1. Obiectivele prevăzute de programa școlară.
2. Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii.

Termeni și notații noi.

B. Indicații metodice pentru predarea temelor (Număr de ore, orientativ = ...)

Tema. Scopul. Material didactic: pentru învățător; pentru elevi.

Recomandări metodice pentru predarea temei.

a. Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului. Muncă independentă.

b. Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului. Exerciții și probleme din manual: propuse a fi rezolvate în clasă; propuse a fi rezolvate acasă.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse în manual la tema...

Notă: Temele, care se pot desfășura după o tehnologie didactică asemănătoare unora care au fost prezentate anterior, nu au fost dezvoltate din nou în amănunțime, ci s-a adăugat doar ceea ce s-a considerat necesar, pentru ca învățătorul să-și poată construi lecția cu maximum de eficiență.

I. RECAPITULAREA ȘI COMPLETAREA CUNOȘTINȚELOR DIN CLASA I

Capitolul 1
NOȚIUNI DESPRE MULȚIMI

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Noțiunile despre mulțimi studiate în clasa I.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

1° Noțiunile de *mulțime* și *element* percepute intuitiv, cu utilizarea curentă a termenilor corespunzători. *Apartenența* și *neapartenența* unui element la o mulțime, exprimate cu terminologia respectivă, formate de asemenea pe cale intuitivă.

Elevii nu trebuie să facă aici teorie, ei vor trebui doar să-și exprime în limbaj corespunzător comentariile în legătură cu exemplele puse în discuție, și, mai ales, să găsească ei exemple care să ilustreze diversele situații cerute de învățător.

Diagrama unei mulțimi, figurată printr-o linie închisă, elementele mulțimii fiind figurate prin puncte în interiorul liniei închise. Scrierea în diagramă, lîngă punct, a *simbolului* elementului pe care îl reprezintă acest punct, în situațiile în care acest lucru ușurează înțelegerea ideilor, sau exprimarea gîndirii copiilor.

Elevii trebuie să cunoască precizarea unei mulțimi prin *indicarea tuturor elementelor* sale, sau prin *indicarea proprietății caracteristice* a mulțimii, adică acele proprietăți pe care le au toate elementele mulțimii și numai ele.

Se va cunoaște că *ordinea* în care sînt luate elementele unei mulțimi nu are nici o însemnătate, iar indicarea unui același element *de mai multe ori* în precizarea mulțimii, nu are rost.

2° Situațiile în care se poate găsi o mulțime față de o mulțime: fără elemente comune, sau *disjuncte; cu unele elemente comune* (fiecare mulțime avînd și elemente necomune cu cealaltă); o mulțime *inclusă* într-o mulțime, submulțime sau parte a unei mulțimi; mulțimi *egale*.

Se va evita exprimarea: „Situația în care se află o mulțime față de *altă* mulțime", deoarece, în cazul mulțimilor egale, se ia în considerație o mulțime față de ea însăși și nu față de o altă mulțime.

Elevii vor cunoaște reprezentarea a două mulțimi, în orice situație s-ar afla, cu ajutorul diagramei generale (fig. 1), figurînd elementele în zonele corespunzătoare, ca în figurile 2, 3, 4 și 5.

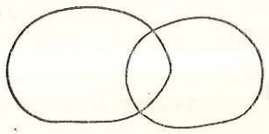


Fig. 1

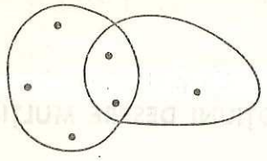


Fig. 2

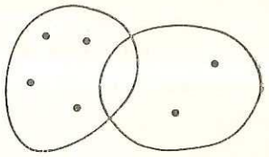


Fig. 3

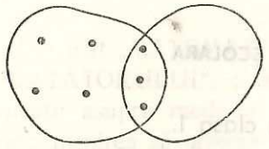


Fig. 4

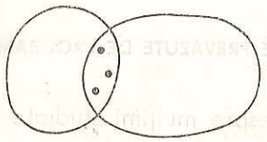


Fig. 5

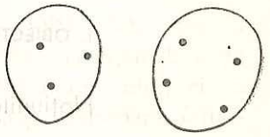


Fig. 6

În cazul mulțimilor disjuncte se vor face și diagrame ca în figura 6, iar pentru o mulțime inclusă într-o mulțime, diagrame ca în figura 7.

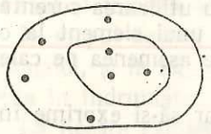


Fig. 7

În legătură cu mulțimile egale se va observa că nu avem de fapt două mulțimi, ci o singură mulțime, indicată în moduri diferite.

3° Mulțimile ce se pot obține cu două mulțimi date, cunoscînd și formulările verbale:

Intersecția *unei mulțimi A cu o mulțime B este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin și mulțimii A și mulțimii B* (și numai din acestea).

Diferența *dintre o mulțime A și o mulțime B este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin mulțimii A, și nu aparțin mulțimii B* (și numai din acestea).

Diferența dintre mulțimea B și mulțimea A se definește în mod asemănător.

Reuniunea *unei mulțimi A cu o mulțime B este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin cel puțin la una din mulțimile A și B* (și numai din acestea).

Observarea *comutativității* intersecției și reuniunii mulțimilor și a *necomutativității* diferenței mulțimilor.

4° Mulțime *pereche*, mulțime *cu un singur element*, mulțime *vidă*. Ele se vor obține cu ocazia intersecției sau a formării diferenței de mulțimi, dar se vor da și exemple de astfel de mulțimi care nu se obțin pe aceste căi.

Se vor face exerciții de alcătuire a unor noi mulțimi cu ajutorul unor mulțimi date, cînd acestea se află și în alte situații, nu numai disjuncte.

Termeni ce vor fi folosiți: mulțime; element; aparține, nu aparține; diagramă; simbol; proprietate caracteristică; mulțimi disjuncte; mulțime inclusă într-o mulțime, submulțime, parte; intersecție; diferență; reuniune; comutativitate; mulțime pereche; mulțime vidă.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL I

(Număr de ore, orientativ = 5)

TEMA 1: MULȚIME, ELEMENT, APARTENENȚĂ

Scop: Împrospătarea noțiunilor și a termenilor corespunzători. Folosirea diagramelor și simbolurilor. Indicarea mulțimii prin lista elementelor și prin proprietate caracteristică.

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile 8, 9 și 10: tabla magnetică; piese metalice cu forma pătrat, dreptunghi, triunghi, cerc, fiecare în patru exemplare, respectiv de culoare roșie, verde, albastră, neagră. Tabla magnetică poate fi înlocuită cu un „flanelograf" (stofă aspră întinsă pe un cadru de lemn sau de carton, folosind în locul pieselor metalice, piese din carton avînd pe o parte lipit postav. Piesele, așezate cu postavul pe stofa cadrului, se mențin chiar dacă acesta stă în poziție aproape verticală); cretă colorată.

Pentru elevi: Ovale confecționate din sîrmă; piese asemănătoare cu cele din trusa folosită de învățător, confecționate din carton, puse într-un plic.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

1) **Recunoașterea atributelor:** formă, culoare.

Folosind planșa cu figura 8, apoi piese din trusa cu figuri geometrice, se cere elevilor să recunoască forma figurii sau piesei respective.

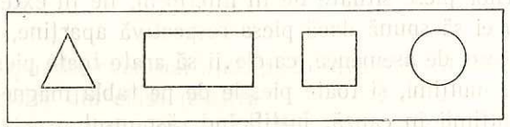


Fig. 8

Din planșa cu figura 9 vor fi recunoscute culorile: roșu, verde, albastru, galben, negru ș.a.

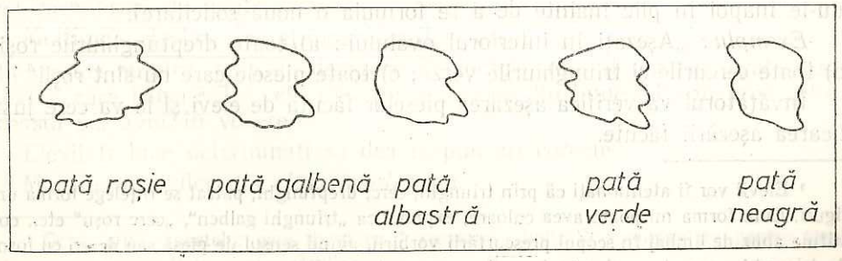


Fig. 9

Planșa cu figura 10 va folosi pentru recunoașterea a două atribute: forma și culoarea. Elevii vor răspunde, arătînd pe planșă desenul potrivit: „Acesta este un triunghi galben" etc.[1]

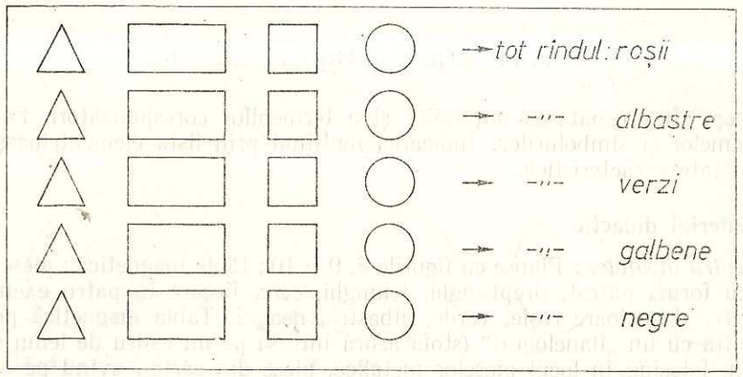


Fig. 10

Exerciții de recunoaștere a atributelor respective vor fi făcute prezentînd piese din trusă și, punînd elevii să aleagă din plicul cu piesele decupate din carton care le-a fost dat la începutul orei, piesa care are atributele cerute de învățător.

2) **Alcătuire de mulțimi.** Se vor așeza pe tabla magnetică diverse piese: triunghiuri, dreptunghiuri, pătrate, cercuri, de diferite culori. Apoi, învățătorul închide succesiv, printr-o linie desenată cu cretă colorată: mulțimea pieselor roșii; mulțimea triunghiurilor etc., de fiecare dată cerînd elevilor să recunoască proprietatea după care s-a format mulțimea.

Arătînd elevilor piese situate fie în interiorul, fie în exteriorul liniei desenate, se cere ca ei să spună dacă piesa respectivă aparține, sau nu, mulțimii formate. Se va cere, de asemenea, ca elevii să arate toate piesele care sînt elemente ale acelei mulțimi, și toate piesele de pe tabla magnetică care nu sînt elemente ale mulțimii în cauză, justificînd răspunsul.

După cîteva exerciții de acest fel, menite să amintească noțiunile și termenii folosiți, se va propune elevilor să așeze pe bănci piesele din plicurile lor, și ovalul din sîrmă. La solicitarea învățătorului, copiii vor așeza în interiorul ovalului, succesiv, toate piesele care posedă atributele menționate de învățător (așezîndu-le înapoi în plic înainte de a se formula o nouă solicitare).

Exemplu: „Așezați în interiorul ovalului: a) toate dreptunghiurile roșii; b) toate cercurile și triunghiurile verzi; c) toate piesele care nu sînt roșii" etc.

Învățătorul va verifica așezarea pieselor făcută de elevi și le va cere justificarea așezării făcute.

[1] Elevii vor fi atenționați că prin triunghi, cerc, dreptunghi, pătrat se înțelege forma unei figuri. Cum forma nu poate avea culoare, expresii ca „triunghi galben", „cerc roșu" etc., constituie abuz de limbaj în scopul prescurtării vorbirii, avînd sensul de piesă sau desen cu forma de triunghi, cerc etc., colorată în galben, roșu etc.

Se va desena pe tablă figura 11, elevii trebuind să spună care litere din cele scrise pe tablă aparțin mulțimii A și care nu aparțin acestei mulțimi. În fine, mulțimea A va fi scrisă:

$$A = \{a, b, c\}$$

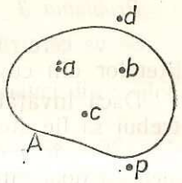


Fig. 11

* Faptul[1] că a aparține mulțimii A se notează $a \in A$. La fel $b \in A$; $c \in A$ (citind „a aparține lui A" etc.).
* Faptul că d nu aparține mulțimii A se notează $d \notin A$ (citind „d nu aparține lui A"). La fel $p \notin A$.

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se strînge materialul didactic distribuit la elevi și se deschid manualele la prima temă.

După un scurt răgaz acordat elevilor pentru a privi prima figură, învățătorul va citi textul din manual, elevii urmărind pe cărțile lor cele citite. Vor fi solicitați apoi să răspundă la întrebările existente în lecție. În legătură cu discuțiile ce vor fi ocazionate de prima figură nu pot apărea dificultăți.

Se vor evita întrebările de felul: „Ce este o mulțime?", „Ce este un element?", „Ce înseamnă a aparține?" etc., deoarece nu pot fi formulate răspunsuri satisfăcătoare, orice răspuns înlocuind, în esență, un cuvînt prin altul sinonim.

În aceeași manieră vor fi abordate și primele trei probleme, urmînd ca la problemele 4 și 5 elevii să caute soluțiile acasă, iar discutarea lor în clasă să aibă loc la începutul orei următoare.

Învățătorul va propune spre analiză și alte probleme asemănătoare cu acestea, solicitînd cît mai multe exemple de la elevi.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema 1

Problema 1.

Elevii vor răspunde, eventual ajutați de învățător, dînd exemple ca:

Mulțimea elevilor din clasa noastră.

Mulțimea tablourilor din clasa noastră.

Mulțimea elevilor ce stau în banca a doua în clasa noastră.

Mulțimea claselor de elevi din școala noastră. (Atenție! Aici elementele sînt la rîndul lor mulțimi).

Precizăm, avînd în vedere experiența noastră, că elevii au tendința să dea răspunsuri de felul:

Mulțimea elevilor; mulțimea băncilor ș.a.

Acestea nu sînt mulțimi, deoarece elementele nu sînt bine precizate. Care elevi și care bănci? Toți elevii și toate băncile din lume? Puțin probabil că aceasta s-a avut în vedere!

Elevii trebuie determinați să dea răspunsuri corecte:

Mulțimea elevilor *din clasa noastră* ș.a.

[1] Conținutul alineatelor care încep cu * reprezintă indicații suplimentare pentru învățător, care nu vor fi transmise elevilor.

Problema 3

Se va cere răspunsul complet. De exemplu: „*t* este un element al mulțimii literelor din cuvîntul „*carte*“ “.

Dacă învățătorul va dori să analizeze și alte probleme asemănătoare, va trebui să fie atent la cuvîntul ales. De exemplu, cuvîntul „caiet“ nu creează dificultăți în plus față de cuvîntul „carte“. În schimb, cuvîntul „mama“ este alcătuit doar din două litere, *m* și *a* și nu din patru, așa cum s-ar putea crede.

Problema 4.

Elementele mulțimii *A* sînt cercul roșu, pătratul negru și pătratul roșu. Cercul negru și triunghiul albastru nu aparțin mulțimii *A*, deoarece nu se află în interiorul liniei desenate cu albastru.

Problema 5.

Elementele ce aparțin mulțimii *B* sînt literele: *b; c; d*, iar cele care aparțin mulțimii *C* sînt literele: *a; c; f*.

Putem scrie mulțimile *B* și *C* astfel:

$$B = \{b;\ c;\ d\};\qquad C = \{a;\ c;\ f\}.$$

Literele *m* și *p* nu aparțin nici mulțimii *B*, nici mulțimii *C*.

$$*\ m \notin B;\qquad m \notin C;\qquad p \notin B;\qquad p \notin C.$$

TEMA A 2-A: SITUAȚII ÎN CARE SE POT AFLA DOUĂ MULȚIMI

Scop: Să se înțeleagă care elemente sînt comune mai multor mulțimi și ce este aceea zonă comună, în diagramă. Să poată fi recunoscută situația în care se află o mulțime față de o mulțime și să se poată da exemple de mulțimi aflate într-o situație dată: cu unele elemente comune; fără elemente comune sau disjuncte; o mulțime inclusă într-o mulțime, submulțime sau parte a unei mulțimi; mulțimi egale.

Material didactic

Pentru profesor: Tabla magnetică cu piesele menționate; cretă colorată; pentru exemplificări se folosesc și elevii din clasă.

Pentru elevi: Același ca la tema anterioară, la care se adaugă un oval din sîrmă, de altă culoare față de cel existent, și de altă mărime, astfel încît ele să poată fi așezate unul în interiorul celuilalt pe bancă, și să rămînă suficient loc pentru a așeza piese în zona cuprinsă între ele (în complementară).

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

1) Mulțimi cu unele elemente comune. Se cere ridicarea în picioare a copiilor care stau în primele două bănci din fiecare rînd. Fiecare elev ridicat în picioare este solicitat să-și spună numele. Cîțiva elevi din clasă vor spune numele tuturor elevilor care sînt elemente ale mulțimii elevilor ce stau în primele două bănci din fiecare rînd.

Numai după ce atenția întregii clase a fost îndreptată în acest mod către mulțimea respectivă privită ca un „tot“, cît și asupra fiecărui element în parte, elevii care au stat în picioare se vor așeza în bănci.

Același exercițiu se face cu mulțimea elevilor din rîndul de bănci din mijloc (presupunînd trei rînduri de bănci).

Se observă că elevii din primele două bănci ale rîndului din mijloc aparțin ambelor mulțimi. Astfel de elemente sînt numite *elemente comune* celor două mulțimi.

Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor care sînt elemente comune pentru mulțimile menționate (toți elevii clasei erau așezați în bănci la sfîrșitul celui de-al doilea exercițiu).

Cîțiva elevi din clasă vor spune numele elevilor care sînt elemente comune pentru mulțimile noastre. Toți elevii se reașază în bănci.

Se formulează concluzia că mulțimea elevilor care stau în primele două bănci, și mulțimea elevilor care stau în rîndul de bănci din mijloc, sînt *mulțimi cu unele elemente comune.*

Cîțiva elevi vor repeta această concluzie.

Învățătorul cere ridicarea în picioare a copiilor care aparțin mulțimii elevilor din primele două bănci, dar nu aparțin mulțimii elevilor din rîndul din mijloc. Elevii se reașază în bănci.

Se solicită ridicarea în picioare a copiilor care aparțin mulțimii elevilor din rîndul din mijloc, dar nu aparțin mulțimii elevilor care stau în primele două bănci. Se reașază elevii în bănci.

Activități de acest fel s-au dovedit foarte antrenante pentru copii și deosebit de eficiente pentru însușirea sau împrospătarea cunoștințelor legate de situațiile în care poate fi o mulțime față de o mulțime, de mulțimi ce se pot obține cu două mulțimi date etc. Ele se vor repeta în diverse variante pînă la însușirea conținutului dorit.

Se poate cere elevilor să formuleze ei exemple de tipul celui descris mai sus.

Învățătorul execută pe tablă figura 12.

Elevii spun elementele mulțimii *A*, pe care învățătorul le poate scrie pe tablă:

$$A = \{b,\ d,\ o\}.$$

În mod analog se procedează cu mulțimea *B*:

$$B = \{d,\ o,\ t,\ u,\ p\}.$$

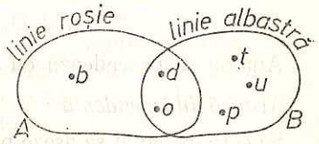


Fig. 12

Se cere elevilor să spună dacă mulțimile *A* și *B* au elemente comune. Sînt indicate literele *d* și *o*, motivînd: „*d* este element comun mulțimilor *A* și *B* deoarece aparține mulțimii *A* și mulțimii *B*“. La fel despre *o*. „*b* nu este element comun mulțimilor *A* și *B*, deoarece aparține mulțimii *A* dar nu aparține mulțimii *B*“ ș.a.m.d.

* Se notează (se enunță numai verbal, dacă aceste notații nu se folosesc):

$$b \in A,\ d \in A,\ o \in A,\ t \notin A,\ u \notin A,\ p \notin A.$$

$$b \notin B,\ d \in B,\ o \in B,\ t \in B,\ u \in B,\ p \in B.$$

Partea figurii unde sînt așezate elementele comune este numită „zonă comună“ și se hașurează ca în figura 13.

Muncă independentă

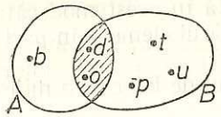


Fig. 13

Se propune elevilor să așeze pe bănci ovalele din sîrmă, așa cum arată figura 13. Se cere apoi să se așeze la locul potrivit piesele din plic, care: sînt elemente ale mulțimii A a tuturor triunghiurilor din plic; sînt elemente ale mulțimii B a tuturor pieselor albastre din plic.

Triunghiurile albastre vor fi așezate în zona comună. Se verifică modul în care a fost îndeplinită sarcina dată elevilor.

Pentru corectarea execuției, învățătorul realizează el tema, cu piesele metalice pe tabla magnetică. Ovalele le desenează cu cretă colorată.

2) Mulțimi fără elemente comune, sau disjuncte. Se va proceda analog cu situația descrisă mai sus, alegînd în mod potrivit mulțimile. De exemplu, se pot lua: mulțimea elevilor ce stau în rîndul din mijloc și mulțimea elevilor care stau în rîndul de bănci de lîngă ferestre.

După ce se analizează suficiente exemple în acest fel, se execută de către învățător la tablă, succesiv figurile 14 și 15.

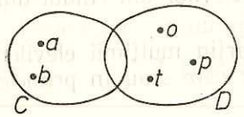


Fig. 14

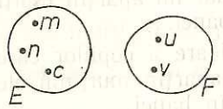


Fig. 15

Elevii vor spune, de fiecare dată, elementele fiecăreia din mulțimile C și D, apoi E și F, constatînd că nu există elemente comune lui C cu D, nici lui E cu F. De aceea, zona comună fie că nu conține elemente, fie că nu mai apare în diagramă.

Învățătorul notează pe tablă:

$$C = \{a, b\}; \qquad D = \{o, p, t\};$$

$$* \quad a \in C,\ b \in C,\ o \notin C,\ p \notin C,\ t \notin C;$$

$$* \quad a \notin D,\ b \notin D,\ o \in D,\ p \in D,\ t \in D.$$

Analog se procedează cu mulțimile E și F.

Muncă independentă

Se cere ca elevii să așeze pe bănci ovalele din sîrmă, așa cum arată figura 14. După aceea se propune așezarea la locul potrivit a pieselor din plicurile lor, care: sînt elemente ale mulțimii A a tuturor triunghiurilor din plic; sînt elemente ale mulțimii P a tuturor pătratelor din plic.

Cum nici un triunghi nu este în același timp și pătrat, învățătorul verifică dacă elevii nu au așezat piese în zona comună.

Pentru corectare, învățătorul execută tema pe tabla magnetică.

Se așază apoi ovalele de sîrmă pe bănci, ca în figura 15. Se propune elevilor să plaseze și acum, la locul potrivit, elementele mulțimilor A și P formate mai sus. Se verifică îndeplinirea sarcinii făcînd aprecierile necesare.

Pentru corectare, învățătorul execută tema pe tabla magnetică.

3) Mulțime inclusă într-o mulțime. Se va folosi aceeași procedură ca mai sus, exemple de mulțimi putîndu-se alege: mulțimea elevilor din primele două bănci; mulțimea elevilor din primele două bănci ale rîndului din mijloc.

În locul figurilor 14 și 15, învățătorul face acum pe tablă, succesiv, figurile 16 și 17. După ce elevii identifică elementele mulțimilor de litere E și P, se scrie pe tablă:

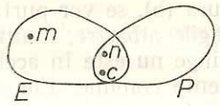


Fig. 16

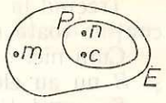


Fig. 17

$$E = \{m, n, c\}; \qquad P = \{n, c\};$$

$$* \quad n \in P;\ n \in E;\ c \in P;\ c \in E.$$

Observîndu-se că orice element al mulțimii P este și element al mulțimii E, se spune despre mulțimea P că este *inclusă* în mulțimea E. Se mai spune că mulțimea P este *submulțime* sau *parte* a mulțimii E.

$$* \quad m \in E;\ m \notin P.$$

* Notația $P \subset E$, (citită „mulțimea P este inclusă în mulțimea E").

Se observă că diagrama din figura 17 este mai sugestivă pentru incluziune.

Muncă independentă

Așezîndu-se pe bănci ovalele din sîrmă așa cum arată figura 16, se cere așezarea la locul potrivit a pieselor din plicuri care sînt elemente ale: mulțimii A a triunghiurilor din plic; mulțimii R a triunghiurilor roșii aflate în plic.

Cîțiva elevi, cu ocazia verificării modului în care au executat sarcina dată, justifică așezarea pieselor. Se execută tema pe tabla magnetică.

Se cere apoi îndeplinirea aceleiași sarcini, dar cu așezarea ovalelor din sîrmă ca în figura 17. Pentru corectare se execută tema pe tabla magnetică.

4) Mulțimi egale. Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor clasei. Se reașază în bănci.

Se cere apoi ridicarea în picioare a tuturor elevilor din clasă care au depășit vîrsta de 5 ani.

Se constată ridicarea din nou a tuturor elevilor din clasă.

Așadar, mulțimea A a elevilor clasei noastre, și mulțimea B a elevilor clasei noastre care au depășit vîrsta de 5 ani, sînt formate exact din aceleași elemente.

Mulțimile formate exact din aceleași elemente sînt numite *mulțimi egale*.

Se notează $A = B$ (citind: „mulțimea A este egală cu mulțimea B").

Se observă că orice mulțime este egală cu ea însăși: $A = A$.

Elevii vor da și alte exemple de mulțimi egale.

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se deschid cărțile la tema a 2-a: „Situațiile în care se pot afla două mulțimi".

Privind figura (a), se vor purta discuții cu elevii urmărind etapele:

1° Cunoașterea elementelor mulțimii A: mingile mici (albastre și roșii).

2° Cunoașterea elementelor mulțimii B: mingile roșii (mari și mici).

3° Se identifică elementele ce aparțin și mulțimii A, și mulțimii B: mingile mici și roșii. Ele sînt elemente comune celor două mulțimi.

4° Fiecare din mulțimile A și B are și elemente care nu sînt comune cealaltă mulțime: mingea mare și roșie nu aparține mulțimii A; mingile mici și albastre nu aparțin mulțimii B.

5° Se formulează concluzia că A și B sînt mulțimi cu unele elemente comune.

Trecînd la figura (b), se vor purta discuţii asemănătoare. Aici mulţimea C conţine toate mingile albastre, mulţimea B conţine toate mingile roşii.

Cum nici o minge nu este în acelaşi timp şi albastră şi roşie, mulţimile C şi B nu au elemente comune. Ele sînt mulţimi disjuncte.

Se constată că în zona comună nu sînt figurate elemente.

În figura (c) avem mulţimea C a mingilor albastre, şi mulţimea D a tuturor mingilor din figură. Se vede că fiecare minge albastră din C, fiind minge aparţine şi mulţimii D.

Învăţătorul va citi din manual, elevii urmărind pe cartea lor, textul referitor la mulţimile egale.

Se va cere elevilor, în timpul lecturii, să execute cele cerute în textul citit.

Vor fi citite în continuare şi rezolvate problemele: 1; 2; 3; 4.

Se vor propune ca temă acasă problemele: 5; 6; 7; 8; 9. Rezolvarea lor va fi discutată, fără grabă, în lecţia următoare.

Indicaţii privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 2-a.

Problema 5.

Elementele comune sînt literele: c, a, t, e.

* Notînd: $A = \{c, a, r, t, e\}$; $B = \{c, a, i, e, t\}$ avem:

$$c \in A, \quad a \in A, \quad t \in A, \quad e \in A, \quad r \in A, \quad i \notin A;$$
$$c \in B, \quad a \in B, \quad t \in B, \quad e \in B, \quad r \notin B, \quad i \in B.$$

Problema 8.

Elementele mulţimii literelor din cuvîntul car: $c; a; r$.

Elementele mulţimii literelor din cuvîntul rac: $r; a; c$.

Se vede că cele două mulţimi sînt formate din aceleaşi elemente (luate doar în altă ordine). Deci, ele sînt egale.

* Notînd: $E = \{c, a, r\}$; $F = \{r, a, c\}$ avem: $E = F$

În adevăr: $c \in E, \quad a \in E, \quad r \in E;$
$c \in F, \quad a \in F, \quad r \in F.$

Problema 9

Figura 18 face corelarea cu cea din manual.

a) Figura 19. Submulţimile sînt două cîte două disjuncte.

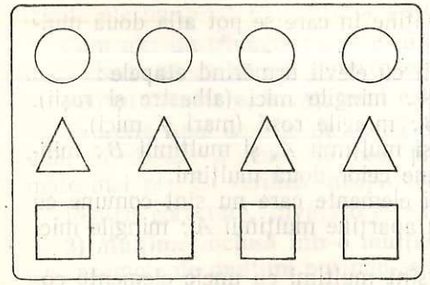


Fig. 18

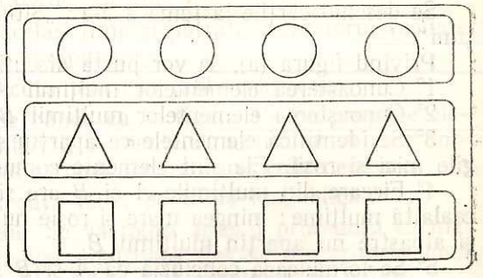


Fig. 19

b) Figura 20. Idem.

c) Figura 21. Submulţimile sînt cu unele elemente comune. Cercul verde este elementul comun.

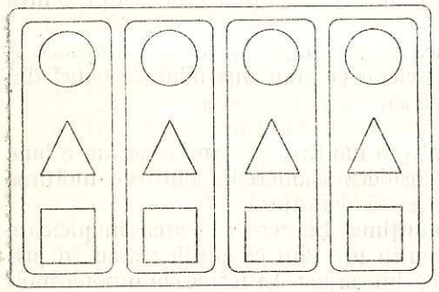


Fig. 20

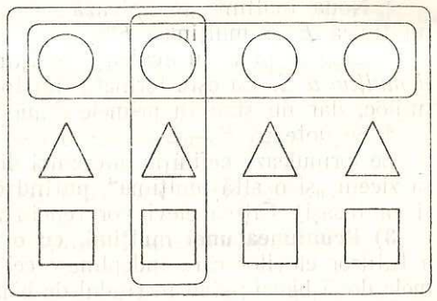


Fig. 21

Notă:

Pentru figurile: 18, 19, 20, 21 culorile din manual sînt:

coloana 1 — negru
coloana a 2-a — verde
coloana a 3-a — roşu
coloana a 4-a — albastru

TEMELE 3 ŞI 4: MULŢIMI CE SE POT OBŢINE CU DOUĂ MULŢIMI DATE. MULŢIME VIDĂ

Scop: Să se cunoască definiţiile intersecţiei, diferenţei şi reuniunii a două mulţimi, acestea putînd fi efectiv formate cu ajutorul unor mulţimi date. Să poată fi folosite diagramele ca metodă de lucru şi ca mijloc de intuiţie.

Material didactic

Acelaşi ca la tema anterioară.

Recomandări metodice pentru predarea temelor

a) *Activităţi desfăşurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Se reiau exemplele de la tema a 20-a după o procedură asemănătoare, dar se valorifică alte aspecte:

1) Intersecţia unei mulţimi cu o mulţime. Mulţimea E a elevilor din primele două bănci, cu mulţimea F a elevilor din rîndul de bănci de la mijloc, au ca elemente comune toţi elevii ce stau în primele două bănci în rîndul din mijloc. Ei formează o nouă mulţime, numită *intersecţia celor două mulţimi.*

Se formulează definiţia intersecţiei a două mulţimi, pe care o vor repeta cîţiva elevi.

* Se notează noua mulţime: $A \cap B$ (citit „intersecţia mulţimii A cu mulţimea B").

2) **Diferența dintre o mulțime și o mulțime.** Se ridică în picioare elevii care stau în primele două bănci, dar nu stau în rîndul de bănci din mijloc. Se observă că ei aparțin mulțimii E, dar nu aparțin mulțimii F. Ei formează o nouă mulțime, numită *diferența dintre mulțimea E și mulțimea F*.

* Noua mulțime se notează: $E - F$ (citit: „mulțimea diferență dintre mulțimea E și mulțimea F").

Analog se pune în evidență mulțimea numită *diferența dintre mulțimea F și mulțimea E*. Ea este formată din toți elevii ce stau în rîndul de bănci din mijloc, dar nu stau în primele două bănci.

* Se notează $F - E$.

Se formulează definiția diferenței dintre o mulțime și o mulțime (nu e bine să zicem „și o altă mulțime", putînd considera și diferența dintre o mulțime și ea însăși). Cîțiva elevi vor repeta această definiție.

3) **Reuniunea unei mulțimi, cu o mulțime.** Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor care îndeplinesc cel puțin una din condițiile: stau în primele două bănci; stau în rîndul de bănci din mijloc. Ei formează o nouă mulțime, numită *reuniunea mulțimilor E și F*.

Se observă că unii elevi îndeplinesc doar una din cele două condiții. Alții (cei care sînt elemente comune), le îndeplinesc pe amîndouă.

* Se notează: $E \cup F$ (citind: „reuniunea mulțimii E cu mulțimea F").

Se formulează definiția reuniunii unei mulțimi cu o mulțime pe care o repetă cîțiva elevi.

Alte exemple

a) Învățătorul execută pe tablă figura 12 (și elevii în caiete). Cere apoi elevilor să găsească elementele următoarelor mulțimi:

1° Intersecția mulțimii A cu mulțimea B. Elementele sînt: d; o.

* Se scrie $A \cap B = \{d, o\}$.

O astfel de mulțime este numită „mulțime pereche".

2° Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B. Elementele sînt: b.

* Se scrie $A - B = \{b\}$.

O astfel de mulțime este numită *mulțime cu un singur element*.

3° Diferența dintre mulțimea B și mulțimea A. Elementele sînt: t; u; p.

* Se scrie $B - A = \{t, u, p\}$.

4° Reuniunea dintre mulțimea A și mulțimea B. Elementele sînt: b; d; o; t; u; p.

* Se scrie $A \cup B = \{b, d, o, t, u, p\}$.

5° Reuniunea dintre mulțimea B și mulțimea A. Elementele sînt: b; d; o; t; u; p.

* Se scrie: $B \cup A = \{b, d, o, t, u, p\}$.

Se observă că schimbînd ordinea în care luăm mulțimile, reuniunea lor nu se schimbă. De aceea zicem că *reuniunea mulțimilor este comutativă*.

* Se scrie: $A \cup B = B \cup A$.

Elevii sînt solicitați să verifice dacă diferența și intersecția mulțimilor A și B sînt comutative.

Privind figura 12, se constată că diferența dintre A și B nu este aceeași cu diferența dintre B și A (elevii vor repeta elementele din care este formată fiecare). Se va conchide că *diferența mulțimilor nu este comutativă*.

* Se scrie: $A - B \neq B - A$.

Se va constata că intersecția dintre mulțimile A și B are aceleași elemente ca și intersecția dintre mulțimile B și A, adică *intersecția mulțimilor este comutativă* (elevii vor spune elementele fiecăreia).

* Se scrie: $A \cap B = B \cap A$.

b) Învățătorul execută pe tablă figura 14, punînd aceleași întrebări ca și la figura 12. Se găsesc:

1° Intersecția mulțimii C cu mulțimea D nu are nici un element.

* Se scrie: $C \cap D = \{\ \}$ sau $C \cap D = \varnothing$.

Mulțimea fără nici un element este numită *mulțime vidă*.

2° Intersecția mulțimii D cu mulțimea C nu are nici un element.

* Se scrie: $D \cap C = \{\ \}$ sau $D \cap C = \varnothing$.

3° Diferența dintre mulțimea C și mulțimea D are ca elemente: a; b.

* Se scrie: $C - D = \{a, b\} = C$.

4° Diferența dintre mulțimea D și mulțimea C are ca elemente: o; p; t.

* Se scrie: $D - C = \{o, p, t\} = D$.

5° Reuniunea dintre mulțimea C și mulțimea D are ca elemente: a; b; o; p; t.

* Se scrie: $C \cup D = \{a, b, o, p, t\}$.

6° Reuniunea dintre mulțimea D și mulțimea C are ca elemente: a; b; o; p; t.

* Se scrie: $D \cup C = \{a, b, o, p, t\}$.

Se va observa comutativitatea intersecției și reuniunii, și necomutativitatea diferenței.

* $C \cap D = D \cap C = \varnothing$; $C \cup D = D \cup C$; $C - D \neq D - C$.

Muncă independentă

Aceeași ca cea prevăzută la tema a 2-a pentru „Mulțime inclusă într-o mulțime". Apoi, învățătorul va cere elevilor să ridice de pe diagrama realizată pe bănci, pe rînd (așezînd piesele înapoi de unde au fost luate, înainte de a cere ridicarea pieselor ce formează mulțimea următoare), piesele ce alcătuiesc mulțimile cerute a fi arătate și în legătură cu figurile 12 și 14 în exemplele a și b mai sus. Elevii vor arăta:

1° Pentru intersecția dintre A și R, toate triunghiurile roșii, adică tocmai mulțimea R.

2° Pentru diferența dintre A și R, toate triunghiurile care nu sînt roșii.

3° Pentru diferența dintre R și A, nu vor ridica nici o piesă. Ea este mulțime vidă, deoarece nu există nici un triunghi roșu care să nu fie în același timp triunghi.

4° Pentru reuniunea dintre A și R, toate triunghiurile, adică tocmai mulțimea A.

După fiecare etapă discutată cu elevii, învățătorul execută aceeași sarcină folosind tabla magnetică, pentru a da posibilitate elevilor să se corecteze.

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se deschid cărțile la tema a 3-a: „Mulțimi ce se pot obține cu două mulțimi date".

Elevii privesc prima figură. Îndrumați de învățător, vor preciza din cine este formată mulțimea A, apoi mulțimea B (cum s-a arătat la tema a 2-a).

Vor spune apoi din ce este formată intersecția mulțimii A cu mulțimea B: toate mingile care sînt și mici, și roșii. Se vor arăta pe figură (sînt cele din zona hașurată).

La fel se va proceda, pe rînd, cu toate celelalte figuri existente la această temă.

Figura a doua arată că intersecția mulțimii B cu mulțimea A este formată din toate mingile care sînt și mici, și roșii (adică este egală cu cea anterioară, verificîndu-se comutativitatea).

Figura a treia arată că diferența dintre mulțimea A și mulțimea B este formată din toate mingile mici, care nu sînt roșii (deci din toate mingile albastre).

Figura a patra arată că diferența dintre mulțimea B și mulțimea A este formată din toate mingile roșii, care nu sînt și mici (deci din toate mingile roșii și mari).

Se va sublinia necomutativitatea diferenței mulțimilor.

A cincea și a șasea figură arată că reuniunea mulțimilor A și B este formată din toate mingile care, sînt fie mici, fie roșii.

Se subliniază comutativitatea reuniunii mulțimilor.

Se privește figura de la tema a 4-a, constatîndu-se că mulțimea C este formată din toate mingile albastre. Se vede că nu există mingi care să fie în același timp și albastre, și roșii, adică C și B nu au elemente comune. Intersecția dintre C și B este, așadar, mulțime vidă.

Se vor propune ca temă acasă problemele: 1; 2; 6; 7. Rezolvarea lor se va discuta amănunțit în ora următoare.

În clasă se vor rezolva problemele: 3; 4; 5.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la temele 3—4

Problema 2.

Observăm că mulțimea F este inclusă în mulțimea E.

a) Intersecția lui E cu F va conține toate elementele mulțimii F: Doru; Anca; Costel. b) Diferența dintre E și F are elementele: Florin; Elena. c) Diferența dintre F și E este mulțimea vidă, neexistînd nici un element care să aparțină lui F și să nu aparțină lui E, d) Reuniunea lui F cu E are elementele: Florin; Doru; Anca; Costel; Elena. Se vede că reuniunea este egală cu mulțimea E.

Problema 3.

a) Figura 22. Mulțimea triunghiurilor. b) Figura 23. Mulțimea figurilor albastre. c) Figura 24. Mulțimea triunghiurilor albastre. d) Figura 25. Mulțimea triunghiurilor care nu sînt albastre. e) Figura 26. Mulțimea figurilor albastre, care nu sînt triunghiuri. f) Figura 27. Mulțimea figurilor care sînt fie triunghiuri, fie albastre.

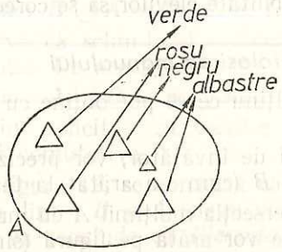


Fig. 22

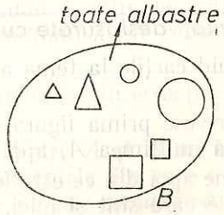


Fig. 23

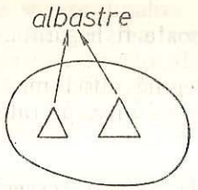


Fig. 24

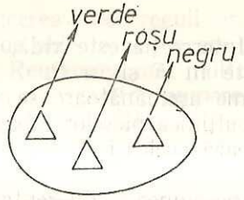


Fig. 25

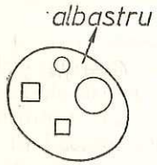


Fig. 26

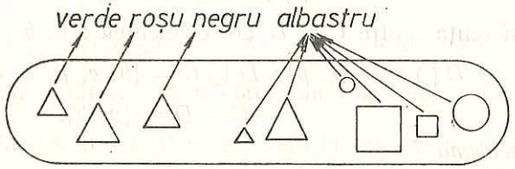


Fig. 27

Problema 4.

Figurile 28 și 29. Se vor arăta toate figurile existente în zona haşurată, indiferent în ce mod ar fi haşurarea.

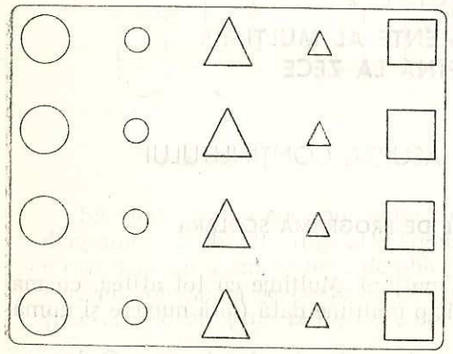


Fig. 28

Notă:

Pentru figurile: 28, 29, 30 culorile din manual sînt:

Rîndul 1 — negru
Rîndul al 2-lea — verde
Rîndul al 3-lea — roșu
Rîndul al 4-lea — albastru

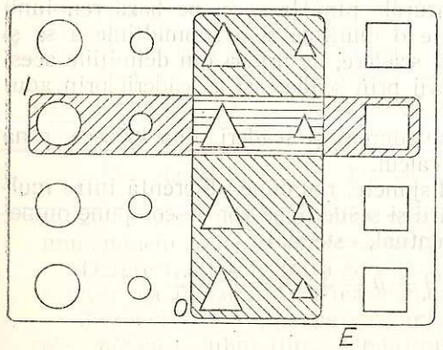


Fig. 29

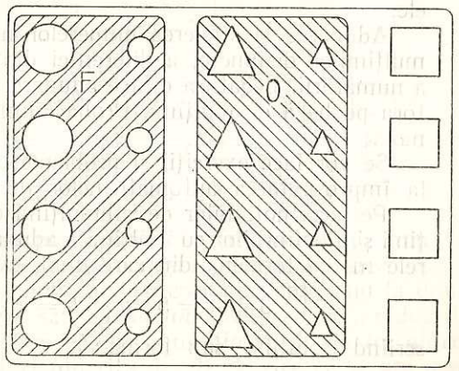


Fig. 30

Problema 5.

Figura 30. Intersecția este vidă, ea nu poate fi hașurată. Se arată toate figurile existente în F și în O.

Alte probleme asemănătoare se obțin alegînd altfel mulțimile I și O. Exemplu: I, mulțimea pieselor albastre; O, mulțimea pătratelor. Etc. Întrebările se păstrează aceleași.

Problema 6.

Intersecția, reuniunea și diferența dintre D și C au, respectiv, elementele:

$$e, p; \quad h, e, p, n, b; \quad h.$$

Diferența dintre C și D are elementele: n, b.

$$* \; D \cap C = \{e, p\}; \; D \cup C = \{h, e, p, n, b\}; \; D - C = \{h\};$$
$$C - D = \{n, b\}.$$

Problema 7.

Mulțimea vidă, neexistînd elevi de 3 ani.

Capitolul 2

NUMĂRUL DE ELEMENTE AL MULȚIMII. NUMERELE PÎNĂ LA ZECE

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Corespondența „unu la unu" între mulțimi. Mulțime cu tot atîtea, cu mai multe sau cu mai puține elemente decît o mulțime dată (fără numere și numărare).

Formarea, numirea și scrierea numerelor naturale pînă la zece. Ordonarea lor. Numărarea. Separarea dintr-o mulțime a unor submulțimi disjuncte între ele.

Adunarea și scăderea numerelor naturale pînă la zece, pe baza reuniunii mulțimilor disjuncte, a diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa și a numărării. Legătura dintre adunare și scădere, desprinsă din definițiile acestora pe bază de mulțimi. Proba adunării prin scădere și a scăderii prin adunare.

Se vor face exerciții și probleme cu adunări și scăderi pînă la zece, pînă la împrospătarea automatismelor de calcul.

Pe baza noțiunilor de submulțimi disjuncte, reuniune, diferență între mulțimi și a definițiilor cu mulțimi a adunării și scăderii, se vor descompune numerele în doi termeni, din care unul, eventual, este dat:

$$3 + a = 5; \; a + b = 7; \; 9 - a = 3; \; a - 5 = 2$$

scriind soluțiile sub forma:

$$a = 5 - 3; \; a = 7 - b; \; a = 9 - 3; \; a = 2 + 5 \text{ etc.}$$

Exercițiile se vor finaliza cu deducerea unor reguli practice, care să nu mai facă necesară apelarea la mulțimi de obiecte, de fiecare dată, ajungîndu-se la formarea automatismelor de calcul. Reuniunea mai multor mulțimi. Comutativitatea și asociativitatea. Adunarea mai multor numere naturale, cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte. Comutativitatea și asociativitatea.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

1° Să recunoască corespondența *„unu la unu"* între mulțimi, ca o legătură între mulțimi în care:

a) fiecărui element din mulțimea A îi corespunde un singur element din mulțimea B;

b) fiecare element din mulțimea B corespunde la un singur element din mulțimea A.

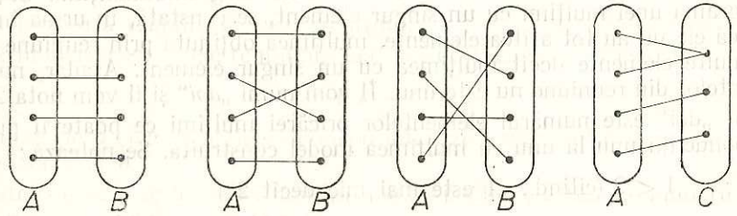


Fig. 31 Fig. 32 Fig. 33 Fig. 34

Să poată stabili corespondențe element cu element între mulțimi, folosind diagramele mulțimilor (fig. 31). Trebuie să se observe că, dacă s-a putut stabili o corespondență unu la unu, de obicei se mai pot stabili și altele (fig. 32 și 33), dar, nu totdeauna se poate stabili o corespondență unu la unu între o mulțime A și o mulțime B (fig. 34, 35, 36, 37 și 38).

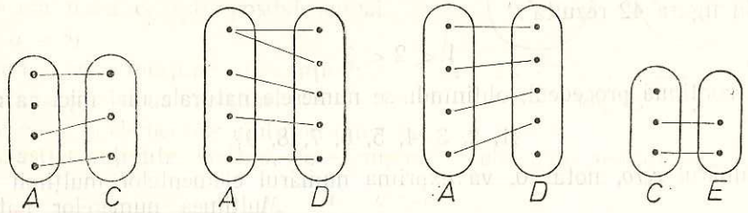


Fig. 35 Fig. 36 Fig. 37 Fig. 38

2° Despre mulțimile între care se poate stabili o corespondență unu la unu spunem că *au tot atîtea elemente* sau că *au același număr de elemente.*

Despre mulțimile între care nu putem stabili o corespondență unu la unu, spunem că nu au tot atîtea elemente sau că *au numărul elementelor diferit.*

3° Elevii vor reține pe cale intuitivă că, dacă mulțimea A are *tot atîtea elemente* ca o submulțime a mulțimii B (diferită de B), se zice că A are *mai puține elemente* decît B, sau că B are *mai multe elemente* decît A (fig. 39).

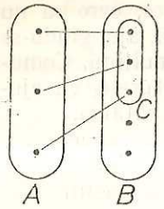


Fig. 39

Ei vor mai spune în această situație că *numărul elementelor lui A este mai mic decît numărul elementelor lui B*, sau că *numărul elementelor lui B este mai mare decît numărul elementelor lui A*.

A spune dacă mulțimea *A* are tot atîtea, mai multe sau mai puține elemente decît mulțimea *B*, înseamnă *a compara mulțimile A și B după numărul elementelor.*

4° Mulțimile cu un singur element sînt recunoscute intuitiv de către elevi, datorită experienței de viață pe care o au pînă la vîrsta școlarizării. Folosind mulțimi cu un singur element și reuniunea mulțimilor disjuncte, elevii vor cunoaște *construirea numerelor naturale* în maniera următoare:

Se ia o mulțime model cu un singur element. Numărul elementelor sale este numit *„unu"* și notat 1. Tot unu este numit numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu ea.

Se ia o mulțime cu 1 element, și încă o mulțime cu 1 element, disjunctă de prima. Se formează reuniunea lor. Făcînd diagrama mulțimii obținute, și diagrama unei mulțimi cu un singur element, se constată, în urma încercărilor, că ele nu au tot atîtea elemente, mulțimea obținută prin reuniune avînd mai multe elemente decît mulțimea cu un singur element. Așadar, numărul elementelor din reuniune nu este unu. Îl vom numi *„doi"* și îl vom nota 2.

Tot „doi" este numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu mulțimea model construită. Se notează:

$1 < 2$ (citind: „1 este mai mic decît 2")

sau

$2 > 1$ (citind: „2 este mai mare decît 1")

Reunind o mulțime cu 2 elemente, cu o mulțime cu 1 element disjunctă de prima, se obține o mulțime model care nu are nici 1, nici 2 elemente (lucru pe care elevii îl vor verifica folosind diagramele, ca în fig. 40—41). Numărul elementelor mulțimii obținute va fi numit *„trei"* și notat 3. Tot trei va fi numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu ea.

Din figura 42 rezultă:

$$1 < 2 < 3$$

Se continuă procedeul, obținîndu-se numerele naturale mai mici ca zece:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Numărul *zero*, notat 0, va exprima numărul elementelor mulțimii vide.

Mulțimea numerelor naturale pînă la zece, scrise în ordine crescătoare, este:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Păstrînd această ordine a elementelor, ea se va numi *șirul numerelor naturale mai mici decît zece.*

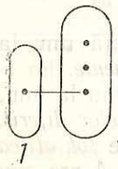


Fig. 40

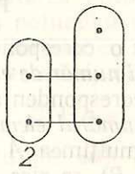


Fig. 41

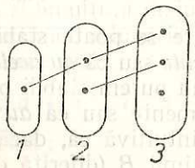


Fig. 42

5° Numărul *zece* se obține și se numește la fel cu numerele naturale pînă la 9. Pentru scrierea lui însă nu se acordă o nouă cifră (semn cu care scriem numerele de la 0 la 9). Tehnica scrierii lui zece este aceea folosită pentru numerele mai mari ca zece, de care ne vom ocupa într-un alt capitol.

6° *Numărarea* va fi cunoscută ca proces de punere în corespondență unu la unu a mulțimii „de numărat", cu o submulțime a mulțimii numerelor naturale, începînd cu 1 și urmînd în ordinea din șirul numerelor naturale. Ultimul număr din acest șir intrat în corespondența respectivă este rezultatul numărării.

7° Elevii vor face exerciții de separare dintr-o mulțime cu numărul elementelor cunoscut, a două sau mai multe submulțimi disjuncte din care una să aibă, eventual, numărul elementelor de asemenea cunoscut, fără ca din mulțimea inițială să rămînă elemente necuprinse în aceste submulțimi.

Exercițiile de acest fel fac o pregătire valoroasă pentru studiul ulterior al scăderii și împărțirii.

8° *Adunarea* a două numere naturale *a* și *b* se va face după regula:

Se iau două mulțimi disjuncte oarecare, una avînd *„a"* elemente și una avînd *„b"* elemente.

Se formează reuniunea acelor mulțimi.

Se numără elementele reuniunii. Găsind, de exemplu, *„c"* elemente, notăm:

$$a + b = c$$

Numerele *a* și *b* se numesc *termenii adunării*[1], numărul *c* se numește *suma* numerelor *a* și *b*.

Este comod a se folosi ca mulțimi model pentru efectuarea adunării numerelor naturale, mulțimi de puncte.

De exemplu, pentru a aduna 2 cu 3, figura 43 arată că avem $2 + 3 = 5$. Observăm din aceeași figură că $3 + 2 = 5$. Așadar, *adunarea numerelor naturale este comutativă.*

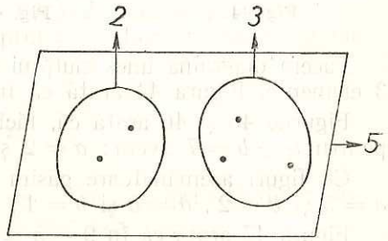


Fig. 43

9° *Scăderea* a două numere naturale *a* și *b* se face după regula:

Se ia o mulțime cu *„a"* elemente, și o mulțime cu *„b"* elemente, inclusă în prima (ceea ce este posibil numai dacă $a \geqslant b$).

Se formează mulțimea diferență dintre prima și a doua mulțime.

Se numără elementele mulțimii diferență astfel obținute. Găsind, de exemplu, *„c"* elemente, notăm:

$$a - b = c.$$

Numerele *a* și *b* se numesc *termenii scăderii*. Numărul *a* se numește *descăzut*, *b* se numește *scăzător* iar *c* se numește *diferență* sau *rest*.

Este comod a folosi ca mulțimi model pentru efectuarea scăderii numerelor naturale, mulțimi de puncte.

---

[1] În general, dacă avem $a * b = c$ (* fiind o operație oarecare), *a* și *b* se numesc termeni iar *c* rezultatul operației. În particular, dacă operația * este numită înmulțire, *a* și *b* sînt numiți factori.

De exemplu, figura 43 arată că avem:

$$5 - 2 = 3 \quad \text{și} \quad 5 - 3 = 2$$

10° Se constată imediat că, dacă este adevărată una din egalitățile:

$$2 + 3 = 5; \quad 3 + 2 = 5; \quad 5 - 2 = 3; \quad 5 - 3 = 2$$

atunci sînt în mod sigur adevărate și celelalte trei.

În adevăr, toate cele patru egalități se deduc dintr-o singură figură, anume, din figura 43.

De aici rezultă modalitățile de a face probele prin adunare și scădere, a operațiilor de adunare și scădere.

11° Aceeași figură (43) arată că la scădere se cunoaște suma a două numere naturale, și unul din numere, și se caută celălalt număr. De aceea se spune că *scăderea este operație inversă adunării*. Numărul căutat se află scăzînd din sumă numărul cunoscut.

Pe baza observației de la (10°) se vor găsi numerele necunoscute din egalități de felul:

$$3 + a = 5; \quad a + b = 7; \quad 9 - a = 3; \quad a - 5 = 2$$

fie folosind diagrame, fie calculînd direct, prin adunare sau scădere. Folosind diagrame:

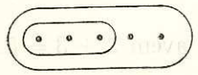


Fig. 44

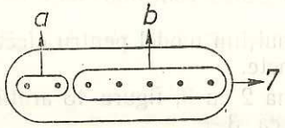


Fig. 45

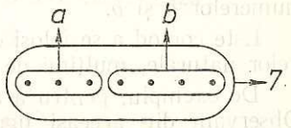


Fig. 46

Facem diagrama unei mulțimi cu 5 elemente; separăm o submulțime cu 3 elemente. Figura 44 arată că în $3 + a = 5$ avem $a = 2$.

Figurile 45 și 46 arată că, făcînd diagrama unei mulțimi cu 7 elemente, pentru $a + b = 7$ avem: $a = 2$ și $b = 5$ sau $a = 3$ și $b = 4$.

Cu figuri asemănătoare găsim încă: $a = 1$ și $b = 6$; $a = 4$ și $b = 3$; $a = 5$ și $b = 2$; $a = 6$ și $b = 1$; $a = 0$ și $b = 7$; $a = 7$ și $b = 0$.

Figura 47 arată că în $9 - a = 3$, făcînd diagrama unei mulțimi cu 9 elemente și separînd o submulțime cu 3 elemente, avem $a = 6$.

Figura 48 arată că în $a - 5 = 2$, luînd submulțimile disjuncte între ele una cu 5 și una cu 2 elemente, avem $a = 7$, adică numărul elementelor reuniunii celor două submulțimi.

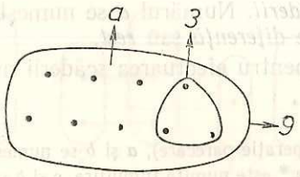


Fig. 47

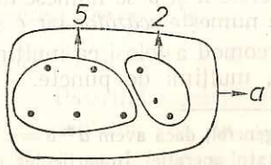


Fig. 48

Fără diagrame:

Egalitatea $3 + a = 5$ se citește: „suma a două numere este 5, unul din numere este 3. Aflați celălalt număr". Rezolvarea acestei probleme se scrie, ținînd seama de legătura dintre adunare și scădere (scăzînd din sumă unul din termeni, obținem celălalt termen):

$$3 + a = 5,$$
$$a = 5 - 3,$$
$$a = 2.$$

Egalitatea $a + b = 7$ se citește: „Găsiți două numere a căror sumă este 7". Rezolvarea se scrie:

$$a + b = 7,$$
$$a = 7 - b.$$

Înlocuind aici pe b cu unul din numerele:

$$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

se calculează de fiecare dată, a. Rezultatele se pot sintetiza într-o tabelă de felul:

a	0	1	2	3	4	5	6	7
b	7	6	5	4	3	2	1	0

Egalitatea $9 - a = 3$ se citește: „Aflați scăzătorul, dacă descăzutul este 9 și diferența este 3". Rezolvarea folosește faptul că, scăzînd din descăzut diferența obținem pe scăzător:

$$9 - a = 3,$$
$$a = 9 - 3$$
$$a = 6.$$

Egalitatea $a - 5 = 2$ se citește: „Aflați descăzutul, dacă scăzătorul este 5 și diferența este 2". Rezolvarea folosește faptul că, adunînd scăzătorul cu diferența, obținem pe descăzut:

$$a - 5 = 2,$$
$$a = 5 + 2,$$
$$a = 7.$$

12° *Reuniunea mai multor mulțimi* este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin cel puțin la una din mulțimile date.

Reuniunea mulțimilor A, B și C din figura 49 este formată din elementele p; s; d; f; t; e; m.

Se vede că schimbînd ordinea în care luăm mulțimile A, B și C, reuniunea lor rămîne formată din aceleași elemente. Așadar, *reuniunea mai multor mulțimi este comutativă*.

13° *Adunarea mai multor numere naturale* a, b și c se face după regula:

Se iau trei mulțimi disjuncte două cîte două, una avînd a elemente, una avînd b elemente și una avînd c elemente.

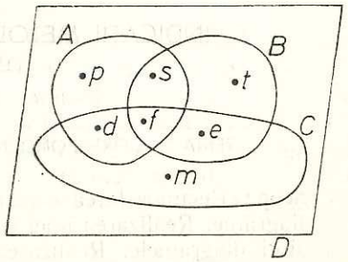


Fig. 49

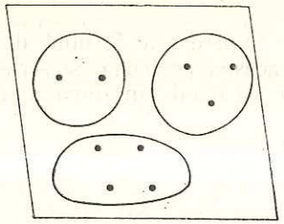


Fig. 50

Se formează reuniunea celor trei mulțimi.

Se numără elementele reuniunii. Găsind, de exemplu, d elemente, notăm:

$$a + b + c = d.$$

Pentru adunarea numerelor 2, 3 și 4, figura 50 arată că:

$$2 + 3 + 4 = 9.$$

Avînd în vedere comutativitatea reuniunii mulțimilor, rezultă că și *adunarea mai multor numere naturale este comutativă:*

$$2 + 3 + 4 = 3 + 2 + 4 = 3 + 4 + 2 = \ldots = 9.$$

14° Reuniunea mulțimilor A, B și C din figura 49 poate fi obținută și pe una din căile:

a) Se formează mai întîi reuniunea mulțimilor A și B (ea are ca elemente: *p; s; d; f; t; e)*, apoi aceasta se reunește cu mulțimea C (obținînd în final mulțimea cu elementele: *p; s; d; f; t; e; m)*.

b) Se formează mai întîi reuniunea mulțimilor B și C (ea are elementele: *s; t; f; e; d; m)*, apoi se reunește A cu reuniunea lui B și C (obținînd în final mulțimea cu elementele: *p; s; d; f; t; e; m)*.

Se vede că pe oricare din căile de mai sus facem reuniunea mulțimilor A, B și C, obținem același rezultat. De aceea zicem că *reuniunea mulțimilor este asociativă.*

15° Rezultă imediat *asociativitatea adunării mai multor numere naturale:*

$$2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4).$$

Termeni și notații ce se vor folosi

Corespondență „unu la unu" sau „element cu element"; mulțime cu tot atîtea, cu mai multe, sau cu mai puține elemente decît o mulțime dată.

Număr de elemente al mulțimii. Numere egale, cu semnul $=$; număr mai mare decît un alt număr, cu semnul $>$; număr mai mic decît un alt număr, cu semnul $<$; $\geqslant$ mai mare sau egal (nu este mai mic); $\leqslant$ mai mic sau egal (nu este mai mare).

Denumirile numerelor de la zero la zece; scrierea numerelor de la zero la nouă. Numărare.

Adunare; termeni; sumă; scădere; diferență sau rest; descăzut, scăzător. Proba adunării și scăderii. Operație inversă.

Asociativitate.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL II

(Număr de ore, orientativ = 11)

TEMA 1: CORESPONDENȚA ELEMENT CU ELEMENT ÎNTRE MULȚIMI

Scop: Recunoașterea corespondenței unu la unu între mulțimi, realizată pe diagrame. Realizarea unei corespondențe între mulțimi după o regulă dată, folosind diagramele. Realizarea unor corespondențe unu la unu între două mulțimi date.

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile 51, 54, 56 și 58. Cretă colorată. (La nevoie pot fi înlocuite cu desene făcute la tablă, cu cretă colorată).

Pentru elevi: Plic cu figurile geometrice decupate din carton (pătrate, dreptunghiuri, triunghiuri, cercuri, fiecare în patru exemplare, respectiv de culorile roșu, albastru, verde, negru). Două ovale din sîrmă. Patru bucăți de sîrmă dreaptă, de cîte circa 20 cm fiecare.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

1° Învățătorul prezintă planșa[1] cu figura 51. Prin discuții cu elevii se stabilește care sînt elementele mulțimii A, apoi elementele mulțimii B.

Învățătorul trasează o linie cu creta colorată de la cercul roșu, la triunghiul roșu, așa cum se vede pe figura 52.

Cere apoi elevilor să traseze linii asemănătoare de la fiecare element al mulțimii A, la elementele mulțimii B care au aceeași culoare cu elementul respectiv din A.

Sub îndrumarea învățătorului elevii completează planșa așa cum arată figura 53.

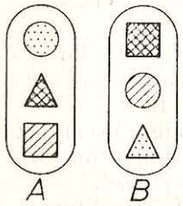


Fig. 51

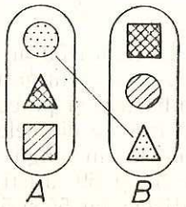


Fig. 52

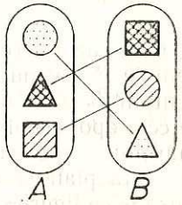


Fig. 53

Se prezintă planșa din figura 54 și se cere elevilor să unească prin linii fiecare element din mulțimea A, cu elementele mulțimii C care au aceeași culoare cu elementul respectiv din A.

Ajutați de învățător, elevii completează planșa cu figura 54, așa cum se vede în figura 55.

Învățătorul prezintă, pe rînd, planșe cu figurile 56 și 58, elevii completîndu-le așa cum arată figurile 57 și 59.

Cerînd elevilor să privească atent cele patru planșe, li se va cere să arate pe acelea în care, fiecare element din prima mulțime, A, este pus în corespondență cu un singur element din mulțimea a doua.

Se arată planșele conținînd figurile 53 și 57. Elevii vor motiva de ce planșele cu figurile 55 și 59 nu îndeplinesc condițiile cerute. În adevăr, în figura 55 triunghiul verde este pus în corespondență cu două elemente din B, cercul verde și pătratul verde. Mai mult, nu fiecare element din A are corespondent

[1] Figurile geometrice umplute aici cu puncte, pe planșa respectivă sînt roșii; cele simplu hașurate, pe planșă sînt albastre; cele dublu hașurate, pe planșă sînt verzi.

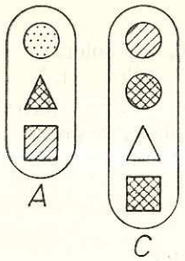


Fig. 54

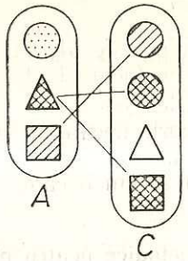


Fig. 55

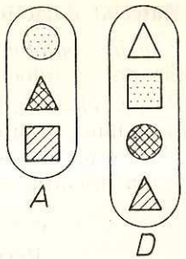


Fig. 56

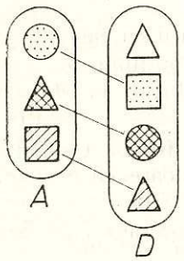


Fig. 57

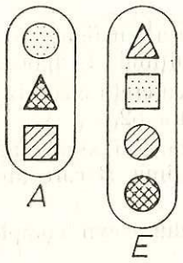


Fig. 58

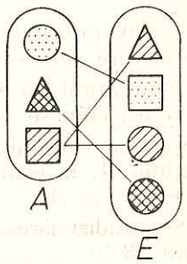


Fig. 59

în *B*. Este cazul cercului roşu. În figura 59 are fiecare element din *A* corespondent în *B*, dar nu unul singur. Este cazul pătratului albastru care are corespondent în *B* şi pe triunghiul albastru, şi pe cercul albastru.

Se cere apoi elevilor să spună în care din cele patru planşe, fiecare element din mulţimea a doua corespunde la un singur element din prima mulţime.

Se arată planşele cu figurile 53 şi 59. Justificarea răspunsului se face ca mai sus (de ce figurile 53 şi 59 satisfac, iar 55 şi 57 nu satisfac condiţiile cerute).

În fine, se cere elevilor să arate la care din cele patru planşe sînt îndeplinite amîndouă condiţiile :

a) la fiecare element din prima mulţime corespunde un singur element din a doua mulţime ;

b) fiecare element din a doua mulţime corespunde la un singur element din prima mulţime.

Se va arăta planşa cu figura 53.

Corespondenţa între mulţimi care îndeplineşte aceste două condiţii va fi numită *corespondenţă „unu la unu"* sau *corespondenţă „element cu element"* între mulţimi.

* Ea se numeşte şi *corespondenţă biunivocă* între mulţimi.

Corespondenţa unu la unu se recunoaşte pe diagrame prin aceea că, în nici una din cele două mulţimi nu rămîn elemente fără corespondent în cealaltă mulţime, şi nici un element din cele două mulţimi nu are mai mult decît un corespondent în cealaltă mulţime.

2° Învăţătorul execută pe tablă figura 60. El cere elevilor să pună în corespondenţă elemente din mulţimea *M*, cu elemente din mulţimea *N*, trasînd linii cu cretă albă, astfel încît să rezulte o corespondenţă unu la unu între mulţimile *M* şi *N*.

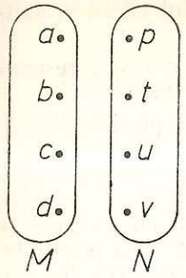


Fig. 60

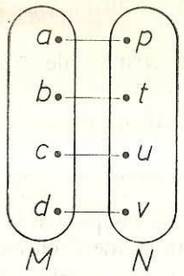


Fig. 61

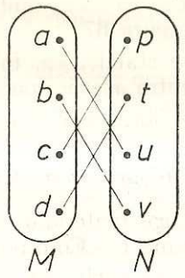


Fig. 62

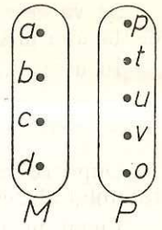


Fig. 63

Să zicem că elevii realizează corespondenţa unu la unu redată în figura 61.

Se va cere executarea din nou a figurii 60 şi stabilirea unei corespondenţe unu la unu între mulţimile *M* şi *N*, care să difere de cea anterioară. Ajutaţi de învăţător, ei vor stabili, folosind linii roşii, corespondenţe ca cea din figura 62 de exemplu, apoi vor repeta exerciţiul, stabilind alte corespondenţe unu la unu între mulţimile *M* şi *N*, diferite de cele de mai sus.

Se va trage concluzia că, dacă între două mulţimi se poate stabili o corespondenţă element cu element, atunci mai pot fi stabilite şi altele.

3° Executînd pe tablă figura 63 se va cere elevilor să realizeze o corespondenţă element cu element între mulţimile *M* şi *P*. După cîteva încercări, se va constata că acest lucru nu este posibil.

Muncă independentă

Copiii vor aşeza ovalele din sîrmă pe bănci, cum se vede în figura 64. În primul oval vor aşeza toate piesele din plic care au culoarea albastră, în al doilea oval vor aşeza toate piesele din plic care au culoare verde. Vor obţine pe bănci aspectul din figura 65.

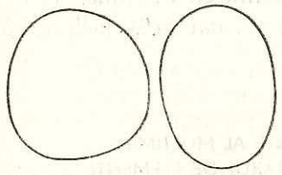


Fig. 64

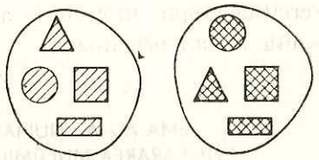


Fig. 65

Se va cere apoi să realizeze o corespondenţă între cele două mulţimi, aşezînd cîte o sîrmă de 20 cm între elementele din cele două mulţimi, care sînt piese cu aceeaşi formă.

Se vor obţine aspecte ca în figura 66.

Prin discuţii cu elevii se va stabili că s-a realizat o corespondenţă unu la unu între cele două mulţimi.

Reintroducînd piesele în plicuri, se va aşeza apoi în primul oval mulţimea pieselor albastre,

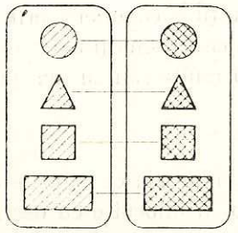


Fig. 66

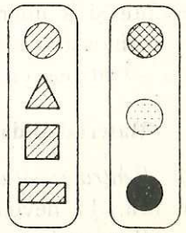


Fig. 67

iar în al doilea oval se va așeza mulțimea cercurilor care nu sînt albastre, obținînd aspectul din figura 67.

Se va cere să se stabilească, folosind sîrmele de cîte 20 cm, o corespondență unu la unu între aceste două mulțimi, indiferent în ce mod.

În urma încercărilor, elevii vor constata că lucrul nu este posibil.

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

După ce se strînge materialul didactic de pe bănci se deschid cărțile la capitolul al 2-lea, tema 1 : „Corespondența element cu element între mulțimi".

Elevii urmăresc în cărți, iar învățătorul citește prima întrebare. Apoi, cere cîtorva elevi să răspundă la întrebarea pusă în carte. Dintre răspunsurile date se apreciază ca juste acele care indică figurile (1) și (2) din manual, ca redînd corespondențe element cu element între mulțimile A și B.

Elevii vor motiva de ce în figura (3) nu avem o corespondență element cu element între A și B: pătratul roșu din mulțimea E are corespondent și cercul roșu, și triunghiul roșu din mulțimea I. În figura (4) nu avem o corespondență element cu element între mulțimile B și O, deoarece, spre exemplu pătratul roșu din mulțimea B nu are nici un corespondent în mulțimea O.

În figurile (1) și (2) fiecare element din prima mulțime are un singur corespondent în mulțimea a doua, și fiecare element din mulțimea a doua corespunde la un singur element din prima mulțime. Așadar, în figurile (1) și (2) din manual avem corespondențe element cu element între mulțimile A și B.

* Două mulțimi A și B între care se poate stabili o corespondență element cu element se numesc *mulțimi echipotente*, notînd :

$A \sim B$ (citit „mulțimea A este echipotentă cu mulțimea B").

* Două mulțimi A și B între care nu se poate stabili o corespondență element cu element se numesc *mulțimi neechipotente*, notînd :

$A \nsim B$ (citit : „mulțimea A nu este echipotentă cu mulțimea B").

Exercițiul propus în carte la această temă va fi dat să se facă acasă și se va discuta în ora următoare.

TEMA A 2-A : NUMĂRUL DE ELEMENTE AL MULȚIMII. COMPARAREA MULȚIMILOR DUPĂ NUMĂRUL DE ELEMENTE

Scop : Sesizarea existenței la orice mulțime a unui anumit număr de elemente.

Punerea în evidență a existenței unor mulțimi ce au același număr de elemente și a unor mulțimi ce diferă prin numărul de elemente.

Cunoașterea comparării mulțimilor după numărul de elemente : mulțime cu tot atîtea, cu mai multe sau cu mai puține elemente decît o mulțime dată.

Material didactic

Pentru învățător : Planșele cu figurile 53, 55, 57 și 59 folosite în ora anterioară. (La nevoie pot fi înlocuite cu desene făcute la tablă cu cretă colorată).

Pentru elevi : Fișe cu figurile 72 și 73.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Se prezintă planșele cu figurile 53, 55, 57 și 59, elevii trebuind să spună în care avem o corespondență unu la unu, și să justifice răspunsul.

Învățătorul va desena apoi pe tablă figurile 68 și 69, cerînd elevilor să stabilească o corespondență unu la unu între mulțimile U și V, apoi între mulțimile U și I. Se obțin figuri ca 70 și 71 din care rezultă că între U și V se poate stabili o corespondență unu la unu, dar între U și I nu se poate stabili o astfel de corespondență.

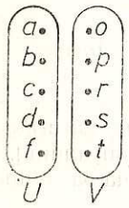


Fig. 68

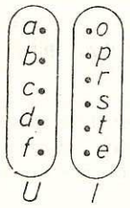


Fig. 69

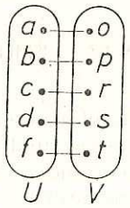


Fig. 70

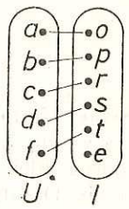


Fig. 71

Discuțiile cu elevii vor fi astfel conduse încît să se sublinieze că, între unele mulțimi se poate stabili o corespondență element cu element, între altele nu se poate stabili o astfel de corespondență.

Dacă între mulțimi se poate stabili o corespondență unu la unu, zicem că ele au același număr de elemente. Dacă între mulțimi nu poate fi stabilită o corespondență unu la unu, zicem că ele au numărul elementelor diferit.

Care dintre mulțimile V și I are același număr de elemente ca mulțimea U ? Elevii vor indica mulțimea V, precizînd că numărul elementelor mulțimii I diferă de numărul elementelor mulțimii U, după cum rezultă din figura 71.

Se spune că mulțimea U are *tot atîtea elemente* ca mulțimea V, sau că mulțimea U are *același număr de elemente* ca mulțimea V. Se spune însă că mulțimea U are *mai puține elemente* ca mulțimea I, sau că mulțimea I are *mai multe elemente* ca mulțimea U.

Se mai spune că numărul elementelor mulțimii U este mai mic decît numărul elementelor mulțimii I, sau că numărul elementelor mulțimii I este mai mare decît numărul elementelor mulțimii U.

* Prin $\overline{\overline{A}}$ înțelegem numărul elementelor mulțimii A.

* Avem : $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{V}}$; $\overline{\overline{U}} < \overline{\overline{I}}$; $\overline{\overline{I}} > \overline{\overline{U}}$.

Muncă independentă

Se distribuie fișe conținînd figurile 72 și 73. Elevii sînt solicitați a stabili corespondențe unu la unu și să spună care mulțimi au același număr de elemente. Pentru mulțimile care diferă prin numărul de elemente, ei vor spune care are mai multe și care are mai puține elemente.

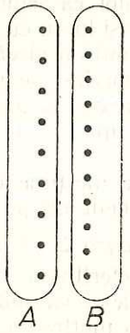


Fig. 72

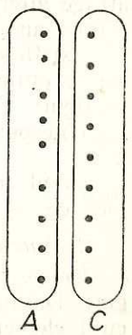


Fig. 73

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se deschide manualul, învățătorul citind exercițiul care a fost dat pentru acasă. Cîțiva elevi vor spune ce au constatat la rezolvarea lui. Răspunsul corect este că la figura (5) din manual se poate stabili o corespondență element cu element, dar la figura (6) o astfel de corespondență nu poate fi stabilită.

Discutînd cu elevii, aceștia vor preciza că la figura (6) din manual cele două mulțimi nu au același număr de elemente, prima mulțime avînd mai multe elemente decît mulțimea a doua.

Învățătorul va citi apoi tema a 2-a, elevii urmărind pe cărți cele citite. Ei vor justifica afirmațiile făcute în text, cu ajutorul figurilor respective.

TEMA A 3-A : NUMERELE NATURALE PÎNĂ LA ZECE

Scop: Cunoașterea unui procedeu de obținere a numerelor naturale pînă la zece, cu ajutorul unor mulțimi model construite într-un anumit mod. Formarea ideii de succesiune a numerelor naturale. Ordonarea numerelor naturale. Distincția între număr și cifră.

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile din manual aflate la tema respectivă, una pentru numărul 1, una pentru 2 și una pentru 3. Pe fiecare planșă grupele de figuri vor fi acoperite cu hîrtie subțire lipită ușor în cele patru colțuri, astfel încît să poată fi descoperite la momentul potrivit.

Pentru elevi: Manualul.

Recomandări metodice pentru predarea temei

1° *Numărul și cifra 1*

Se cer de la elevi exemple de mulțimi cu un singur element. La exemplele date se adaugă cel reprezentat de prima figură aflată pe planșa referitoare la numărul 1, figură de pe care este ridicată foița de hîrtie care o acoperea.

Numărul elementelor acestei mulțimi este numit „unu" și notat cu 1. Se atrage atenția elevilor că semnele cu care se scriu numerele se numesc cifre. Cifra 1 nu este același lucru cu numărul pe care îl reprezintă.

Există și alte mulțimi al căror număr de elemente este tot unu ? Răspunsul se obține descoperind pe planșa referitoare la numărul 1, al doilea grup de figuri. Ele sugerează că toate mulțimile cu un singur element pot fi puse în corespondență unu la unu între ele, deci au numărul elementelor tot unu.

Drept model de mulțime cu un singur element este comod a lua mulțimea ce are ca element un punct.

2° *Numărul și cifra 2*

De pe planșa referitoare la numărul 2 se „descoperă" prima grupă de figuri. Discuția cu elevii va sublinia că în aceste figuri sînt reunite o mulțime cu 1 element, cu o mulțime cu 1 element, disjunctă de prima. Numărul elementelor mulțimii rezultate este numit „*doi*" și notat 2.

De pe aceeași planșă se „descoperă" al doilea grup de figuri. Cu ajutorul lor elevii vor stabili că numărul unu este mai mic decît numărul doi, notînd:

$1 < 2$ (citit: „1 este mai mic decît 2").

Există și alte mulțimi al căror număr de elemente este tot doi ? Răspunsul se obține descoperind pe planșa referitoare la numărul 2 al treilea grup de figuri. Ele sugerează că tot 2 este numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu o mulțime cu 2 elemente.

Drept model de mulțime cu două elemente este comod a lua mulțimea ce are ca elemente două puncte.

3° *Numărul și cifra 3*

Pe planșa referitoare la numărul 3 se „descoperă" prima grupă de figuri. Elevii vor fi determinați să observe că în aceste figuri este reunită o mulțime cu 2 elemente cu o mulțime cu 1 element, disjunctă de prima. Numărul elementelor mulțimii rezultate este numit „trei" și notat 3.

De pe aceeași planșă se „descoperă" al doilea grup de figuri. Cu ajutorul lor elevii vor stabili că numărul trei este mai mare decît doi și decît unu, notînd:

$$1 < 2 < 3.$$

„Descoperind" al treilea grup de figuri, se observă că tot 3 este numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu o mulțime cu 3 elemente.

Drept model de mulțime cu trei elemente este comod a lua mulțimea ce are ca elemente trei puncte.

4° *Celelalte numere pînă la zece*

Se observă că prin același procedeu se obțin numerele:

4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

Așadar în această etapă se va studia doar formarea și numirea numărului zece. Scrierea lui însă urmează alt procedeu, pentru numărul zece nu folosim o nouă cifră, așa cum am făcut pînă acum pentru fiecare număr mai mic decît zece. Scrierea lui zece o vom explica împreună cu scrierea numerelor mai mari ca zece.

Deoarece fiecare mulțime are un număr de elemente care primește un nume și o notație, vom proceda la fel și cu mulțimea vidă.

Numărul elementelor mulțimii vide îl numim „zero" și îl notăm 0. El este considerat cel mai mic număr natural.

Numerele naturale mai mici decît zece, în ordine crescătoare, sînt:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Scrise în această ordine, ele formează *șirul numerelor naturale* mai mici decît zece.

Se cere să se spună numerele naturale de la zero la zece, mai întîi în ordine crescătoare, apoi în ordine descrescătoare.

Se va scrie pe caiete șirul numerelor naturale de la 0 la 9.

Din manual se vor rezolva în clasă problemele: 1 ; 2 ; 5, întrebările (a) și (d); celelalte probleme de la sfîrșitul temei a 3-a se vor da pentru acasă, discutînd amănunțit rezolvările în lecțiile următoare.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 3-a.

Problema 1

Figurile 74, 75 și 76. Răspunsul se obține prin numărare.

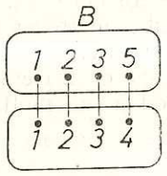


Fig. 74

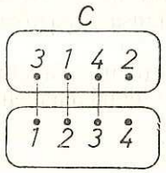


Fig. 75

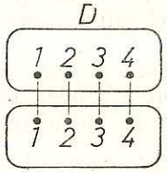


Fig. 76

Problema 3

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; sau {1, 2, 3, 4}.

Problema 4

a, b, d, f, g sînt corecte. *c, e, h* nu sînt corecte și trebuie scrise :

c) $7 > 6$; *e)* $9 > 8$; *h)* $4 < 6 < 9$.

Problema 5

a) Figura 77 ; dacă o submulțime are 2 elemente, cealaltă are 3 elemente.

b) Figura 78 

; figura 79 

.

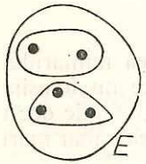


Fig. 77

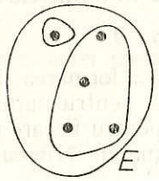


Fig. 78

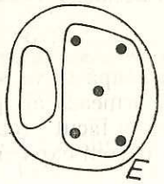


Fig. 79

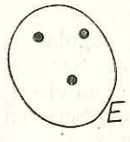


Fig. 80

c) Același text, cu întrebarea (a), mulțimea *E* fiind însă cea din figura 80, iar tabloul se înlocuiește cu

Etc.

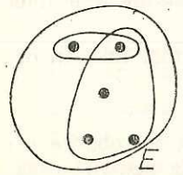


Fig. 81

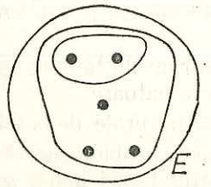


Fig. 82

d) Răspunsul la întreabarea (a) se modifică în acest caz, după cum se vede din figurile 81 și 82.

Explicația constă în aceea că submulțimile pot avea acum și

unul sau două elemente comune. Rămîne valabilă și situația în care submulțimile sînt disjuncte.

TEMA A 4-A : ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR PÎNĂ LA ZECE

Scop: Cunoașterea adunării numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte ; a scăderii acestor numere cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa ; a legăturii dintre adunarea și scăderea numerelor naturale desprinsă din legătura ce există între două mulțimi disjuncte, reuniunea lor, și diferența dintre reuniune și fiecare din cele două mulțimi. Cunoașterea probelor adunării și scăderii numerelor naturale.

Material didactic

Pentru învățător : Cretă colorată.

Pentru elevi : Manualul.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

1° Învățătorul execută pe tablă cu cretă colorată figura 83. El cere elevilor să închidă cu o linie verde elementele mulțimii formate prin reuniunea mulțimilor *A* și *B*, și să noteze cu *C* această reuniune. Se obține figura 84.

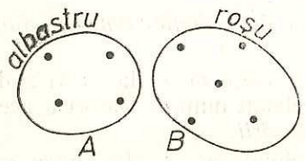


Fig. 83

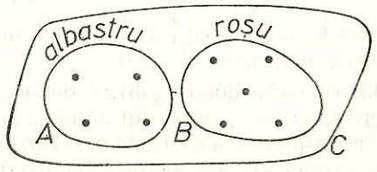


Fig. 84

* $C = A \cup B$,

Se cere elevilor să arate pe figura 84 mulțimea diferență dintre *C* și *A*, apoi dintre *C* și *B*. Se arată, respectiv, mulțimile *B* și *A*.

* $C - A = B$; $C - B = A$.

2° Copiii vor fi solicitați să spună cîte elemente are mulțimea *A*, cîte elemente are mulțimea *B* și apoi cîte elemente are reuniunea mulțimilor *A* și *B*. Se va insista ca ei să explice cum au aflat fiecare din aceste trei numere : numărînd întîi elementele mulțimii *A*, apoi elementele mulțimii *B* și la urmă numărînd elementele mulțimii formată prin reuniunea mulțimilor *A* și *B* adică numărînd elementele mulțimii *C*.

* $\overline{\overline{A}} = 4$; $\overline{\overline{B}} = 5$; $\overline{\overline{C}} = 9$ sau $\overline{\overline{A \cup B}} = 9$.

3° Din cele de mai sus rezultă că numărul 9 poate fi obținut dacă se dau numerele 4 și 5, prin procedeul următor, numit adunarea numerelor naturale :

Se ia o mulțime oarecare A cu 4 elemente și o mulțime oarecare B cu 5 elemente, disjunctă de prima (de exemplu mulțimile de puncte A și B de mai sus).

Se formează reuniunea dintre mulțimile A și B.

Prin numărare se găsește că reuniunea are 9 elemente.

Notăm: $4 + 5 = 9$

La solicitarea învățătorului elevii vor reaminti că numerele 4 și 5 care se adună se numesc termenii adunării, rezultatul adunării, 9, se numește suma dintre 4 și 5.

4° Figura 84 poate folosi la efectuarea scăderii numerelor naturale 9 și 4:

Se ia o mulțime C avînd 9 elemente, și o submulțime A a mulțimii C, avînd 4 elemente.

Se formează mulțimea diferență dintre C și A, adică mulțimea B.

Prin numărare se găsește că diferența B are 5 elemente.

Notăm: $9 - 4 = 5$.

Prin discuții se va reaminti că 9 se numește descăzut, 4 este scăzătorul iar 5 este diferența sau restul. Descăzutul și scăzătorul împreună formează termenii scăderii.

Din figura 84 se va deduce că avem și

$$9 - 5 = 4.$$

Rezumînd, se va atrage atenția elevilor că din figură 84 rezultă

$$4 + 5 = 9;\ 5 + 4 = 9;\ 9 - 4 = 5;\ 9 - 5 = 4.$$

Primele două egalități exprimă proprietatea de *comutativitate a adunării numerelor naturale.*

Din celelalte două egalități deducem că la scădere ni se dă suma a două numere naturale, și unul din numere, și se află celălalt număr. Datorită acestui fapt spunem că *scăderea este operația inversă adunării.*

Se atrage atenția elevilor că valabilitatea simultană a celor patru egalități dă posibilitatea să facem proba adunării prin adunare și prin scădere:

dacă $4 + 5 = 9$, atunci: $5 + 4 = 9$; $9 - 5 = 4$; $9 - 4 = 5$,

și proba scăderii prin adunare și prin scădere:

dacă $9 - 4 = 5$, atunci: $5 + 4 = 9$; $4 + 5 = 9$; $9 - 5 = 4$.

Elevii vor reține enunțurile:

„Dacă din sumă scădem un termen al adunării, se obține celălalt termen".

„Dacă adunăm diferența cu scăzătorul, obținem pe descăzut".

„Dacă scădem din descăzut diferența, obținem pe scăzător".

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Elevii deschid cărțile la tema a 4-a: „Adunarea și scăderea numerelor pînă la zece".

Sub îndrumarea învățătorului și folosind figura din manual ei vor explica aplicarea regulilor de adunare și scădere pentru a efectua:

$$2 + 3 = 5;\ 5 - 2 = 3;\ 5 - 3 = 2$$

Vor spune termenii adunării și suma; termenii scăderilor, descăzutul scăzătorul, diferența sau restul.

Li se cere să verifice pentru numerele 2 și 3 dacă adunarea este comutativă, folosind aceeași figură din manual. Se va pune problema dacă scăderea este comutativă, verificînd pentru perechea de numere 5 și 2.

Se va constata că $5 - 2 = 3$ dar $2 - 5 =$ nu se poate efectua, neputînd alege într-o mulțime cu 2 elemente, o submulțime cu 5 elemente. Se va deduce că scăderea nu este posibilă dacă descăzutul este mai mic decît scăzătorul. Dimpotrivă, adunarea este totdeauna posibilă.

Învățătorul va citi din manual, elevii urmărind textul, paragrafele (c) și (d) referitoare la probele adunării și scăderii și la adunarea și scăderea cu zero.

Se va atrage atenția asupra faptului că, dacă descăzutul este egal cu scăzătorul, diferența este 0.

Ca temă în clasă se vor efectua primele două coloane de adunări și scăderi de la exercițiile 1 și 2, restul dîndu-se de efectuat acasă. Aceste exerciții vor fi făcute folosind mulțimi model formate din puncte, reuniunea și diferența mulțimilor. Tot în clasă se vor rezolva exercițiile și problemele: 4; 5; 6; 7; 8; 9; 15; 17.

Pentru acasă se vor propune încă: 3; 10; 11; 12; 13; 14; 16, discutînd amănunțit rezolvarea în lecțiile următoare.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 4-a

Exercițiul 1

$$4 + 1 = \ ; \qquad 4 + 1 = 5$$

Figura 85. Suma 5 a lui 4 cu 1 se găsește numărînd elementele reuniunii.

$5 + 0 = \ ;\quad 5 + 0 = 5$ (fig. 86);

$0 + 0 = \ ;\quad 0 + 0 = 0$ (fig. 87)

Etc.

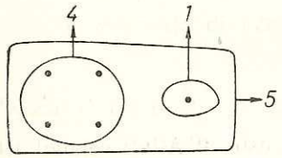


Fig. 85

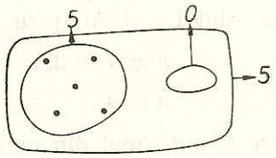


Fig. 86

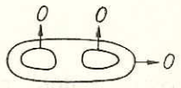


Fig. 87

Exercițiul 2

$6 - 4 = \ ;\ 6 - 4 = 2$ (fig. 88). Diferența 2, dintre 6 și 4, se găsește numărînd elementele mulțimii C, diferența dintre mulțimile A și B.

$5 - 5 = \ ;\quad 5 - 5 = 0$ (fig. 89);

$8 - 0 = \ ;\quad 8 - 0 = 8$ (fig. 90).

$1 - 3 =$ imposibil, neputînd separa dintr-o mulțime cu 1 element o submulțime cu 3 elemente.

Etc.

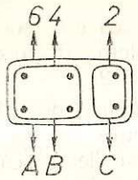


Fig. 88

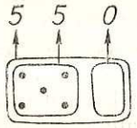


Fig. 89

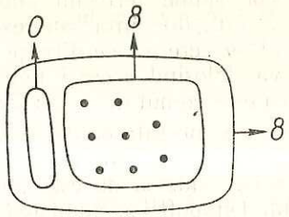


Fig. 90

Exercițiul 3

$9 - 3 = 6$. Proba: $3 + 6 = 9$ sau $9 - 6 = 3$.

$3 + 6 = 9$. Proba: $6 + 3 = 9$ sau $9 - 6 = 3$ sau $9 - 3 = 6$

Problema 4

a) $5 - a = 3$ din prima figură; $a - 2 = 3$ din a doua; $3 + a = 5$ din prima; $3 + 2 = a$ din a doua; $a + 2 = 5$ din a treia; $a - 3 = 2$ din a doua; $5 - 3 = a$ din prima; $5 - a = 2$ din a treia; $5 - 2 = a$ din a treia figură.

b) La toate egalitățile ce se deduc din prima figură, prin numărare găsim $a = 2$; la cele deduse din figura a doua, analog găsim $a = 5$; la cele ce se deduc din figura a treia găsim $a = 3$.

Pentru calculul lui a putem scrie, privind figurile din care se deduce fiecare egalitate:

$$5 - a = 3, \quad a - 2 = 3, \quad 3 + a = 5, \quad 3 + 2 = a, \quad a + 2 = 5,$$
$$a = 5 - 3, \quad a = 2 + 3, \quad a = 5 - 3, \quad a = 3 + 2, \quad a = 5 - 2,$$
$$a = 2, \quad a = 5, \quad a = 2, \quad a = 5, \quad a = 3.$$

$$a - 3 = 2, \quad 5 - 3 = a, \quad 5 - a = 2, \quad 5 - 2 = a,$$
$$a = 3 + 2, \quad a = 5 - 3, \quad a = 5 - 2, \quad a = 5 - 2,$$
$$a = 5, \quad a = 2, \quad a = 3, \quad a = 3.$$

Problema 5

Termenii unei adunări sînt 1 și 3. Aflați suma lor.

$$a = 1 + 3,$$
$$a = 4.$$

Suma a două numere este 4, unul din numere este 3. Aflați celălalt număr.

$$a + 3 = 4,$$
$$a = 4 - 3,$$
$$a = 1.$$

Suma a două numere este 4, unul din numere este 1. Aflați celălalt număr.

$$a + 1 = 4,$$
$$a = 4 - 1,$$
$$a = 3.$$

Se pot găsi și alte formulări pentru probleme. De exemplu, pentru prima figură:

Două mulțimi disjuncte au, respectiv, 1 și 3 elemente. Aflați cîte elemente are reuniunea lor.

Din rezolvarea problemelor formulate în legătură cu a doua și a treia figură, rezultă:

Pentru a afla un termen al adunării cînd se dă suma și celălalt termen, scădem din sumă termenul cunoscut.

Putem afla pe a din

$$4 - a = 1 \text{ și } a - 1 = 3,$$

respectiv din a treia și prima figură. Găsim:

$$4 - a = 1, \qquad a - 1 = 3,$$
$$a = 4 - 1, \qquad a = 1 + 3,$$
$$a = 3, \qquad a = 4.$$

Determinarea lui a din $4 - a = 1$ ne arată că:

Pentru a afla scăzătorul cînd cunoaștem descăzutul și diferența, scădem diferența din descăzut.

Determinarea lui a din $a - 1 = 3$ ne arată că:

Pentru a afla descăzutul cînd cunoaștem scăzătorul și diferența, adunăm scăzătorul cu diferența.

Problema 6

Avem, respectiv:

Aflați suma numerelor 2 și 7

$$2 + 7 = a; \qquad a = 2 + 7; \qquad a = 9.$$

Suma a două numere este 8, unul din numere este 3. Cît este celălalt număr?

$3 + a = 8$; $a = 8 - 3$; $a = 5$ (scădem din sumă numărul cunoscut).

Cît este diferența dintre 8 și 5?

$$8 - 5 = a; \qquad a = 8 - 5; \qquad a = 3.$$

Descăzutul este 9, diferența este 5. Cît este scăzătorul?

$9 - a = 5$; $a = 9 - 5$; $a = 4$ (dacă scădem din descăzut diferența obținem pe scăzător).

Diferența a două numere este 3, scăzătorul este 5. Să se afle descăzutul.

$a - 5 = 3$; $a = 5 + 3$; $a = 8$ (adunînd scăzătorul cu diferența obținem descăzutul).

Problema 7.

Se va observa mai întîi că nici a nici b nu pot fi mai mari decît 5. În al doilea rînd, dacă presupunem că unul din numere, să zicem b, este 3, celălalt număr a, se calculează din $a + 3 = 5$. Avem:

$$a + 3 = 5; \qquad a = 5 - 3; \qquad a = 2$$

ceea ce arată că a nu poate fi orice număr natural mai mic decît 5.

Pentru a afla toate perechile de numere a și b pentru care:

$$a + b = 5$$

vom considera că unul din numere (să zicem b) este, pe rînd, orice număr natural cel mult egal cu 5, și vom calcula ce număr natural poate fi a, în fiecare caz.

$b = 0$; $a + 0 = 5$; $a = 5 - 0$; $a = 5$ deci $a = 5$; $b = 0$.
$b = 1$; $a + 1 = 5$; $a = 5 - 1$; $a = 4$ deci $a = 4$; $b = 1$.
$b = 2$; $a + 2 = 5$; $a = 5 - 2$; $a = 3$ deci $a = 3$; $b = 2$.
$b = 3$; $a + 3 = 5$; $a = 5 - 3$; $a = 2$ deci $a = 2$; $b = 3$.
$b = 4$; $a + 4 = 5$; $a = 5 - 4$; $a = 1$ deci $a = 1$; $b = 4$.
$b = 5$; $a + 5 = 5$; $a = 5 - 5$; $a = 0$ deci $a = 0$; $b = 5$.

Mulțimea perechilor de numere naturale (a, b) care dau

$$a + b = 5$$

este, așadar:

$$\{(5, 0), (4, 1) (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)\}$$

Observăm că sînt 6 perechi de acest fel.

Notă: Problemele de la 8 la 16 se vor rezolva folosind diagrame, apoi folosind notarea numărului necunoscut cu o literă. În acest mod elevii vor înțelege mai bine legăturile existente între mărimile despre care vorbește problema, deducînd procedeul de rezolvare și nu „ghicind" ce operație trebuie făcută pentru a găsi răspunsul.

Problema 8

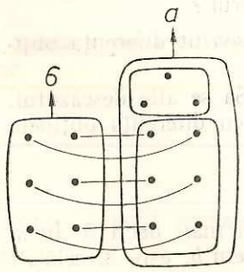
Figura 91. Prin numărare se găsește că mulțimea bilelor albastre are 9 elemente. Se observă că putem scrie:

$$a = 6 + 3; \quad a = 9.$$

Problema 9

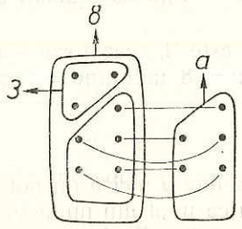
Figura 92. Prin numărare se găsește că mulțimea peștilor prinși de Dana are 5 elemente. Se observă că putem scrie:

$$a + 3 = 8; \quad a = 8 - 3; \quad a = 5.$$



Mulțimea bilelor roșii. Mulțimea bilelor albastre.

Fig. 91



Mulțimea peștilor prinși de Radu Mulțimea peștilor prinși de Dana

Fig. 92

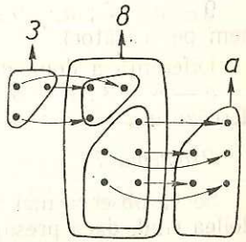


Fig. 93

Problema 10

Figura 93. $3 + a = 8$; $a = 8 - 3$; $a = 5$.

Problema 11

Figura 94. $a + 2 = 7$; $a = 7 - 2$; $a = 5$.

Problema 12

Figura 95. $a = 3 + 4$; $a = 7$.

Problema 13

Figura 96. $7 = 3 + a$; $a = 7 - 3$; $a = 4$.

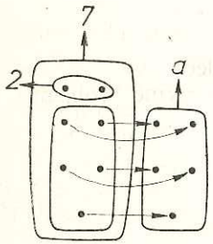


Fig. 94

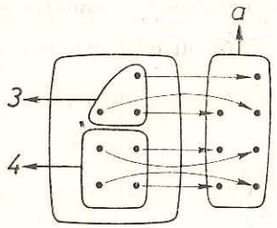


Fig. 95

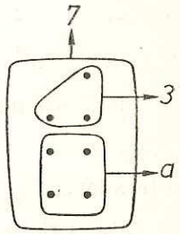


Fig. 96

Problema 14

Figura 95. $4 + 3 = a$; $a = 7$.

Figura 97. $4 - 3 = a$; $a = 1$.

Problema 15

Figura 98. $b = 3 + a$; $a = 3 + 2$; $b = 3 + 5$;

$a = 5$; $b = 8$.

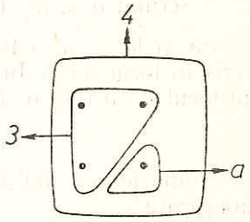


Fig. 97

Problema 16

Figura 99. $b = 5 + a$; $3 + a = 5$; $a = 5 - 3$; $a = 2$. $b = 5 + 2$; $b = 7$;

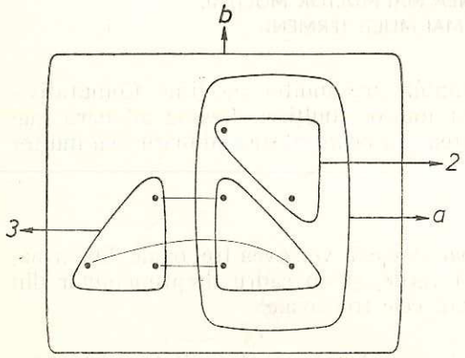


Fig. 98

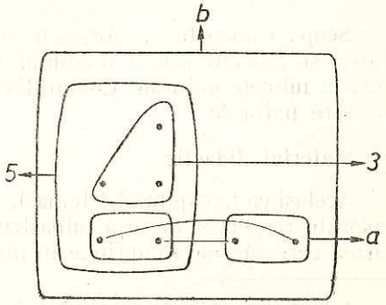


Fig. 99

Problema[1] *17*

$\{0, 1, 2, 3\}$; $\{0, 1, 2, 3, 4,\}$.

* sau : $a \in \{0, 1, 2, 3\}$; $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Ultimele trei exerciţii se rezolvă prin încercări, admiţînd ca evident faptul că dacă un termen al adunării creşte, creşte şi suma :

$$a + 2 < 5,$$

$a = 0$, $0 + 2 = 2$, cum $2 < 5$ urmează că $a = 0$ face inegalitatea adevărat

$a = 1$, $1 + 2 = 3$, $3 < 5$ deci $a = 1$ convine problemei ;

$a = 2$, $2 + 2 = 4$, $4 < 5$ deci $a = 2$ convine problemei ;

$a = 3$, $3 + 2 = 5$, $5 = 5$ (5 nu este mai mic decît 5) deci $a = 3$ nu convine problemei.

Mulţimea numerelor naturale a pentru care

$$a + 2 < 5$$

este adevărată, s-a găsit : $\{0, 1, 2\}$.

* Se scrie $a \in \{0, 1, 2\}$

Pentru $a + 2 \leqslant 5$ se găseşte $\{0, 1, 2, 3\}$,

* scriind $a \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Se vede că $a + 4 < 2$ nu este adevărată pentru nici un număr natural scris în locul lui a. În adevăr, cel mai mic număr natural care poate fi scris în locul lui a este 0. Dar :

$$0 + 4 = 4 \text{ şi } 4 < 2 \text{ este falsă.}$$

Vom zice că mulţimea numerelor naturale care scrise în locul lui a fac adevărată

$$a + 4 < 2$$

este vidă.

TEMA A 5-A : REUNIUNEA MAI MULTOR MULŢIMI. ADUNAREA CU MAI MULŢI TERMENI

Scop : Cunoaşterea formării reuniunii mai multor mulţimi. Comutativitatea şi asociativitatea reuniunii mai multor mulţimi. Regula adunării mai multor numere naturale. Comutativitatea şi asociativitatea adunării mai multor numere naturale.

Material didactic

Acelaşi ca la capitolul I tema 1, doar că elevii vor avea trei ovale din sîrmă, colorate respectiv în roşu, albastru şi verde, şi un cadru dreptunghiular din sîrmă care să poată cuprinde în interior cele trei ovale.

[1] Toate exerciţiile de acest tip întîlnite în manual se vor rezolva prin încercări, fără a se stabili reguli de felul celor folosite în algebră la rezolvarea inecuaţiilor.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activităţi desfăşurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Învăţătorul execută pe tablă figura 49, apoi scrie

$$A = \{\ ,\ ,\ ,\}; \quad B = \{\ ,\ ,\ ,\ ,\}; \quad C = \{\ ,\ ,\ ,\ \}$$

elevii trebuind să completeze pe tablă (şi în caiete) elementele din care este formată fiecare mulţime. Se obţine :

$$A = \{p, s, d, f\}; \ B = \{s, t, f, e\}; \quad C = \{d, f, e, m\}.$$

Se atrage atenţia că mulţimea D este formată din toate literele care aparţin cel puţin la una din mulţimile A, B şi C.

Învăţătorul scrie $D = \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\}$ şi elevii completează $D = \{p, s, d, f, t, e, m\}$.

Mulţimea D astfel formată este *reuniunea mulţimilor* A, B şi C.

* Se notează $D = A \cup B \cup C = \{p, s, d, f, t, e, m\}$.

Elevii vor repeta de cîteva ori care sînt elementele fiecăreia din mulţimile A, B şi C, şi care sînt elementele mulţimii D, reuniunea mulţimilor A, B şi C. Apoi, ei vor spune elementele reuniunii D, care figurează numai în una din mulţimile A, B şi C (p este numai în A ; t este numai în B ; m este numai în C), cele care figurează în două din aceste mulţimi (s este în A şi B ; d este în A şi C ; e este în B şi C), şi cele care figurează în toate trei (f este şi în A, şi în B, şi în C).

Se cere elevilor să găsească elementele reuniunii mulţimilor B, A şi C, apoi C, B şi A etc. Se constată că de fiecare dată reuniunea este tot mulţimea D.

Aşadar, *reuniunea mai multor mulţimi este comutativă.*

* Se va scrie : $A \cup B \cup C = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A = \ldots$

Muncă independentă

Se propune elevilor să aşeze pe bănci ovalele din sîrmă, ca în figura 100. Într-un oval vor aşeza apoi toate piesele roşii din plic, care nu sînt pătrate, în altul toate piesele albastre din plic, care nu sînt pătrate şi în al treilea toate piesele verzi din plic, care nu sînt pătrate.

Se obţine pe bănci aspectul din figura 101. După o sumară verificare şi cîteva discuţii, învăţătorul va desena cu cretă pe tabla magnetică ovalele şi va aşeza piesele metalice ca în figura 101.

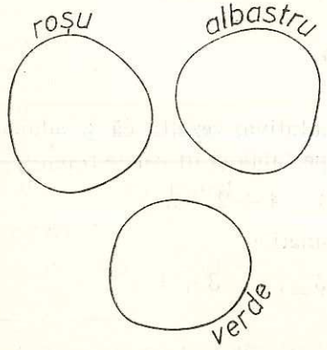


Fig. 100

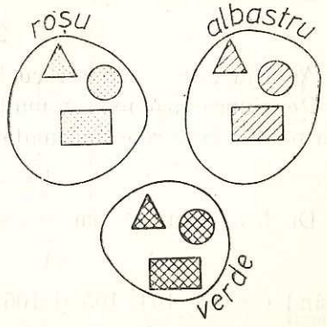


Fig. 101

Se cere apoi să se așeze pe bancă cadrul dreptunghiular din sîrmă astfel ca în interiorul lui să se afle toate piesele ce sînt în interiorul oricăruia din cele trei ovale.

Se obține aspectul din figura 102. Din nou se face o sumară verificare în bănci, apoi se trasează cu cretă dreptunghiul pe tabla magnetică ca în figura 102.

Mulțimea ce are ca elemente toate piesele situate în interiorul cadrului dreptunghiular este reuniunea celor trei mulțimi avînd ca elemente, respectiv, piesele din interiorul celor trei ovale din sîrmă.

Pentru a percepe mai bine reuniunea respectivă, vor fi înlăturate cele trei ovale, rămînînd pe bănci aspectul din figura 103. Se va observa că această mulțime este formată din toate piesele din plic, care nu sînt pătrate.

Învățătorul va șterge de pe tabla magnetică ovalele, rămînînd figura 103.

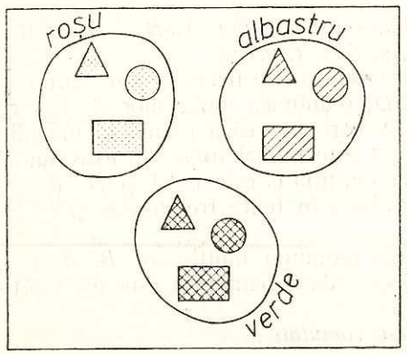


Fig. 102

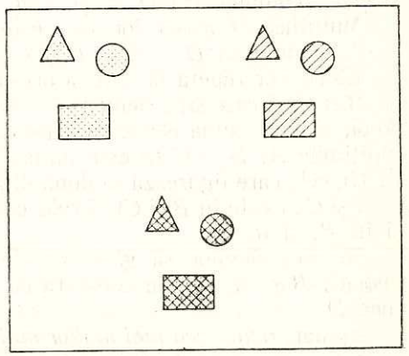


Fig. 103

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se strînge de pe bănci materialul didactic și se deschid cărțile la tema a 5-a ; „Reuniunea mai multor mulțimi. Adunarea cu mai mulți termeni".

Elevii privesc prima figură. Conduși de întrebările învățătorului ei vor constata că în această figură se face reuniunea a trei mulțimi disjuncte, una avînd 2, una 3 și una 4 elemente. Prin numărare se găsește că reuniunea are 9 elemente scriind :

$$2 + 3 + 4 = 9.$$

Aceasta este o adunare cu trei termeni.

Reuniunea mai multor mulțimi fiind comutativă, rezultă că și adunarea mai multor numere este comutativă. Se scrie pe tablă și în caiete :

$$2 + 3 + 4 = 3 + 2 + 4 = 3 + 4 + 2 = \ldots$$

După modelul de mai sus, se vor face adunările :

$$1 + 3 + 4 = \qquad 2 + 1 + 5 = \qquad 3 + 1 + 2 =$$

găsind (figurile 104, 105 și 106) :

$$1 + 3 + 4 = 8; \quad 2 + 1 + 5 = 8; \quad 3 + 1 + 2 = 6$$

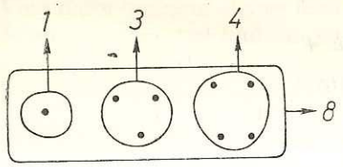


Fig. 104

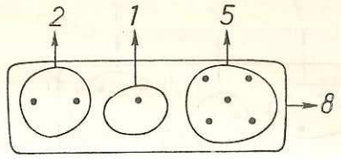


Fig. 105

Trecînd la a doua și a treia figură din manual[1], învățătorul le va executa pe tablă și va explica verbal asociativitatea reuniunii mulțimilor și a adunării numerelor naturale, scriind :

$$2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$$

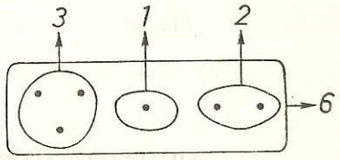


Fig. 106

conform textului din manual, pe care îl va citi, după ce termină explicațiile. El va cere cîtorva elevi să repete aceste explicații folosind figurile de pe tablă, restul elevilor urmărind atît la tablă, cît și pe manuale.

Figurile respective vor fi apoi executate pe caiete.

Se va observa că într-un exercițiu în care avem paranteză, prima dată trebuie să efectuăm operația din paranteză.

Se fac în clasă : exercițiul 1, prima coloană ; problemele 2 și 4.

Pentru acasă se propun ca temă celelalte coloane de la exercițiul 1 și problema 3.

Indicații pentru rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 5-a

Exercițiul 1

$$2 + (5 + 1) = 2 + 6 = 8$$

$$(2 + 5) + 1 = 7 + 1 \ldots = 8$$

$$1 + 2 + 3 = 3 + 3 = 6$$

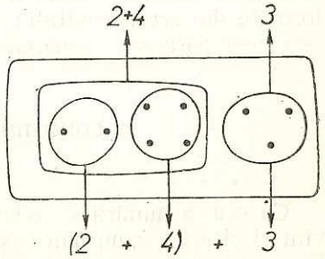


Fig. 107

Problema 2

Figura 107.

$$(2 + 4) + 3 = 6 + 3 = 9$$

↓ cîte timbre are Victor ↓ cîte timbre are Dănuț cîte timbre au împreună

Problema 3

Figura 108. $3 + (3 + 2) = 3 + 5 = 8$

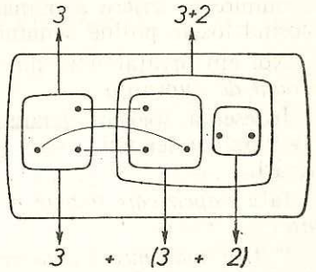


Fig. 108

[1] În manual, prezența unei săgeți → între figuri sugerează transformarea unei figuri în cealaltă, ca urmare a parcurgerii unor etape ce rezultă clar la fiecare situație întîlnită.

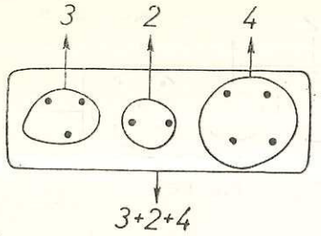


Fig. 109

Problema 4

Figura 109

$$3 + 2 + 4 = 5 + 4$$
$$= 9$$

Capitolul 3
NUMERELE NATURALE DE LA ZECE LA O SUTĂ

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Procedeul folosit pentru numirea și scrierea numerelor mai mari ca zece. Mulțimi cu elementele zeci. Mulțimi cu elementele zeci și unități. Cunoașterea numerelor formate numai din zeci, pînă la o sută. Ordonarea lor. Numerele formate din zeci și unități ; particularitățile denumirii lor între zece și douăzeci ; compararea ; numărarea.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Cu ocazia numirii și scrierii numerelor de la 0 la 9 am folosit cîte un cuvînt și cîte un semn (cifră) special pentru numirea și scrierea fiecărui număr. Dacă am continua astfel, ar trebui folosite multe denumiri și semne, devenind greu a le ține minte. De aceea oamenii au căutat și au găsit procedee de numire și scriere a numărului elementelor mulțimilor care îi interesează, folosind foarte puține denumiri și semne.

Noi am învățat unul din procedeele larg folosite în prezent, numit *sistem zecimal de numerație.*

În esență, folosind denumirile numerelor de la zero la zece și cifrele de la 0 la 9 putem denumi și scrie foarte multe alte numere, făcînd doar cîteva completări.

Iată *etapele care trebuie parcurse pentru denumirea numerelor de la zece la o sută.*

1° *Din mulțimea căreia vrem să-i denumim numarul elementelor, separăm, atît cît este posibil, submulțimi disjuncte fiecare avînd cîte zece elemente* (folosind în acest scop numărarea pînă la zece).

Să presupunem că am obținut 3 submulțimi de cîte zece, epuizînd în acest fel toate elementele mulțimii.

Vom numi numărul elementelor mulțimii inițiale „treizeci".

Analog, putem găsi mulțimi cu numărul elementelor : douăzeci ; patruzeci ; cincizeci ;... ; nouăzeci.

Despre mulțimea din care putem forma zece submulțimi de cîte zece, spunem că are numărul elementelor „o sută".

Mulțimea [1] avînd ca elemente submulțimile de cîte zece elemente ale mulțimii inițiale joacă doar un rol ajutător, în scopul introducerii unei convenții comode pentru denumirea numărului elementelor mulțimii inițiale, prin numărul zecilor mulțimii ajutătoare.

2° Dacă formînd submulțimile de cîte zece, rămîn elemente ale mulțimii inițiale, pe care le numim și „unități", cu care nu putem completa încă o zece, de exemplu obținem 2 zeci și încă 3 unități, *formăm două mulțimi: una avînd ca elemente „zecile" obținute; una avînd ca elemente unitățile obținute.* În exemplul nostru o mulțime din acestea are 2 zeci, cealaltă are 3 unități.

Vom numi numărul elementelor mulțimii inițiale „douăzeci și trei".

Analog, putem găsi mulțimi cu numărul elementelor : patruzeci și doi ; șaizeci și nouă ; optzeci și unu etc.

Mulțimea care are ca elemente „zecile" și cea care are ca elemente „unitățile" cu care nu s-a putut completa încă o zece joacă doar un rol ajutător, în scopul *introducerii unei convenții pentru denumirea numărului elementelor mulțimii inițiale, prin numărul zecilor și numărul unităților acestor mulțimi ajutătoare.* Formînd aceste mulțimi ajutătoare din mulțimea inițială, *pregătim* de fapt mulțimea inițială pentru a-i denumi și nota numărul elementelor, o organizăm într-o structură convenabilă acestui scop. Vom zice că înzestrăm mulțimea cu o *structură numerică zecimală.*

Este indicat să se repete întîi numirea numerelor formate din zeci și unități cuprinse între douăzeci și o sută și, numai după aceea, numirea numerelor cuprinse între zece și douăzeci, datorită particularităților în denumirea acestora.

Pentru scrierea numărului elementelor unei mulțimi, aceasta se organizează cu aceeași structură ca și pentru denumirea acestui număr. Trecerea la scrierea numărului se face parcurgînd etapele :

1° Construcția unei figuri numerice atașate mulțimii respective.

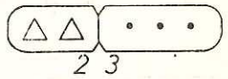


Fig. 110

Figurile numerice reprezintă mulțimi organizate cu structuri numerice zecimale, ceea ce permite a le stabili ușor numărul de elemente.

Aceste figuri numerice realizează o trecere mai „lină" spre abstracțiunea pe care o reprezintă numărul. Ele vor juca în continuare un rol foarte mare în deducerea regulilor de calcul, adîncind caracterul intuitiv al învățării și favorizînd totodată gîndirea și exprimarea în termenii specifici mulțimilor, ceea ce mărește apreciabil claritatea și profunzimea cunoștințelor, asigură o mai mare generalitate, o dezvoltare unitară, de o reală perspectivă pentru însușirea cunoștințelor matematice în viitor.

Aceste figuri numerice și modul în care le vom utiliza, se deosebesc fundamental de cele cîteva tipuri de figuri numerice întîlnite pînă acum în diverse metodici de predare a matematicii la clasele mici.

---

[1] Conținutul aliniatelor care sînt scrise cu litere mici reprezintă indicații suplimentare pentru învățător.

Figura numerică sugerează numărul de elemente al mulțimii, prin cele două mulțimi ajutătoare: a zecilor, fiecare zece fiind reprezentată printr-un triunghi albastru (în interiorul căruia, la nevoie, pot fi figurate cele zece unități prin puncte); *a unităților, fiecare element al mulțimii inițiale din cele cu care nu s-a putut completa o zece, fiind reprezentat printr-un punct.*

Atunci cînd se va simți nevoia, lungimile celor două părți ale figurii numerice se vor alege astfel încît în interior să fie rezervate locuri pentru zece triunghiuri, respectiv zece puncte (fără ca toate aceste locuri să fie efectiv completate).

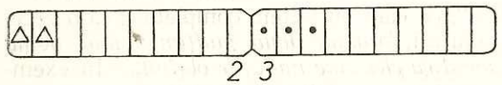


Fig. 111

În figura numerică cifra scrisă sub mulțimea zecilor reprezintă numărul de zeci (triunghiuri), *iar aceea scrisă sub mulțimea unităților reprezintă numărul de unități* (puncte).

Din această așezare a cifrelor, cu semnificațiile respective, se degajă firesc ideea scrierii poziționale zecimale. Formînd submulțimi de cîte 7 sau 5 elemente, în loc de zece, s-ar obține o scriere poziațională în baza 7 sau 5 etc., pentru care figurile numerice rămîn valabile, doar că triunghiul albastru ar însemna mulțime de 7 respectiv de 5 elemente, și nu de zece.

2° Păstrînd semnificația avută de fiecare cifră în figura numerică, putem renunța la figura numerică. În acest mod, din două cifre scrise alături:

2 3

cea din stînga va reprezenta zeci, cea din dreapta, unități.

De exemplu:

74 → 7 zeci și 4 unități → șaptezeci și patru
20 → 2 zeci și 0 unități → douăzeci
10 → 1 zeci și 0 unități → zece

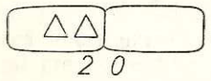


Fig. 112

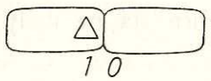


Fig. 113

Se vede că este firesc că se învețe întîi scrierea numerelor formate din zeci și unități, și numai după aceea numere formate doar din zeci. Totodată, se vede că scrierea lui zece se face după procedeul de scriere a numerelor mai mari ca zece.

Principiul comparării a două numere naturale mai mari ca 10 rămîne același ca și pentru numerele mai mici ca 10. Se iau două mulțimi model (de exemplu, mulțimi de puncte), una avînd atîtea elemente cît este primul număr și una cu atîtea elemente cît este al doilea număr. Se încearcă realizarea unei corespondențe element cu element între cele două mulțimi model. Mulțimea în care rămîn elemente fără corespondent în cealaltă, are numărul elementelor mai mare.

Aplicarea acestei reguli de comparare a numerelor este greoaie, mai ales dacă numerele sînt mari. Se stabilesc ușor cu ajutorul ei procedee practice foarte comode pentru a compara două numere cuprinse între zece și o sută vezi tema „Compararea numerelor pînă la o sută", în manual):

Dintre două numere formate numai din zeci, mai mare este acela la care cifra zecilor arată un număr mai mare; dintre două numere cu aceeași cifră a zecilor, mai mare este acela la care cifra unităților arată un număr mai mare; dintre două numere cu cifrele zecilor diferite, mai mare este acela la care cifra zecilor arată un număr mai mare.

Evident, orice număr mai mic decît 10 este mai mic decît orice număr mai mare decît 10.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 3

(Număr de ore, orientativ = 2)

TEMA 1: NUMIREA ȘI SCRIEREA NUMERELOR

Scop: Cunoașterea modului în care trebuie „pregătită", „organizată" o mulțime pentru numirea și scrierea numărului elementelor sale. Convențiile de numire și scrierea a numerelor formate din: un număr întreg de zeci; un anumit număr de zeci și încă cîteva unități cu care nu se mai poate completa o zece. Familiarizarea cu figurile numerice.

Material didactic

Pentru învățător: Asemănător cu al elevilor (este descris mai jos).

Pentru elevi: Pungă de celofan conținînd circa 50 de bețe de chibrituri sau scobitori; papiotă cu ață; foarfece; carton alb, dreptunghiular, 40 × 25 cm, pe care sînt desenate linii închise, așa cum se vede în figura 114.

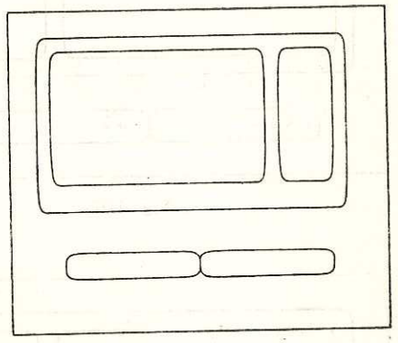


Fig. 114

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Muncă independentă

Se propune elevilor să separe din mulțimea bețișoarelor din pungă, atît cît este posibil, submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd cîte zece elemente. Aceste submulțimi vor alcătui mănunchiuri de bețișoare legate cu sfoară și așezate pe cartonul alb dreptunghiular, în interiorul liniei închise „mai mari". Bețișoarele rămase fără a putea completa cu ele un mănunchi de zece, vor fi așezate pe carton, în interiorul liniei închise „mai mici", alăturate.

Pe carton apare aspectul din figura 115. S-au obținut astfel cele două mulțimi ajutătoare care folosesc la numirea și scrierea numărului elementelor mulțimii bețișoarelor din pungă: mulțimea zecilor și mulțimea unităților.

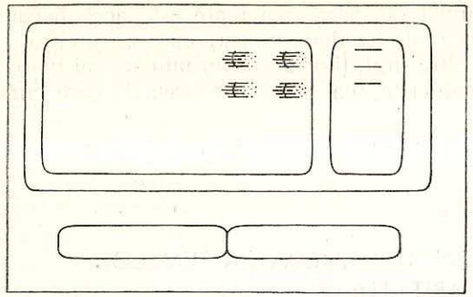


Fig. 115

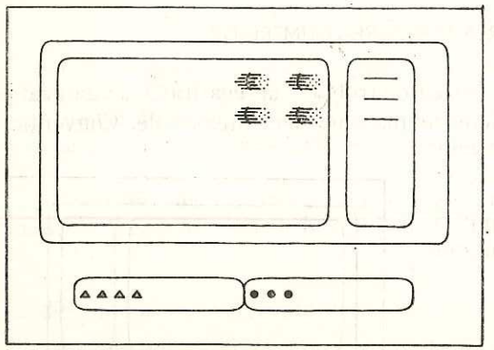


Fig. 116

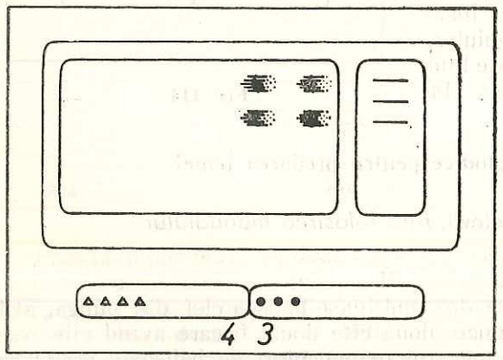


Fig. 117

Învățătorul execută la catedră același lucru ca și elevii în bănci. El va folosi carton sau placaj pe care sînt fixate perechi de cuișoare ca suport pentru bețișoare și mănunchiurile de bețișoare, (bețișoarele vor fi mai mari ca ale elevilor), astfel încît să poată sta aproape vertical, spre a fi văzut de toți elevii.

Se va pune să se deseneze cîte un triunghi albastru pentru fiecare mulțime de zece bețișoare, și cîte un punct negru pentru fiecare bețișor din mulțimea celor cu care nu s-a putut forma o zece, în figura de pe carton aflată sub bețișoare, așa cum se vede în figura 116.

Figura aflată sub mulțimea bețișoarelor de pe carton, astfel completată, va fi numită *figură numerică* care arată numărul elementelor din mulțimea bețișoarelor aflate pe carton.

Acest număr va fi numit „patruzeci și trei".

Învățătorul va controla, modul cum au lucrat elevii, cerîndu-le unora din ei să spună cîte bețișoare au pe carton.

În sfîrșit, el va scrie pe planșa sa numărul elementelor, așa cum se vede în figura 117, iar elevii vor completa cu creionul pe planșa lor numărul elementelor mulțimii bețișoarelor aflate pe cartonul din fața fiecăruia.

În continuare, elevii vor ridica mulțimea bețișoarelor care nu formează o zece, apoi vor denumi și scrie (radiind numărul anterior) numărul elementelor mulțimii bețișoarelor aflate de această dată pe cartonul din fața lor.

Învățătorul face același lucru la catedră, obținînd figura 118.

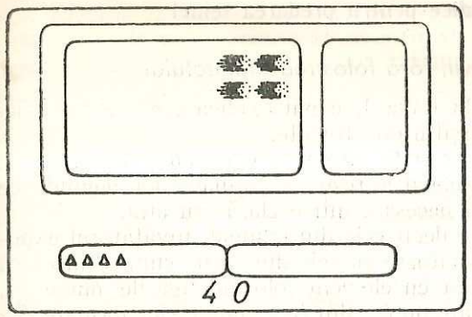


Fig. 118

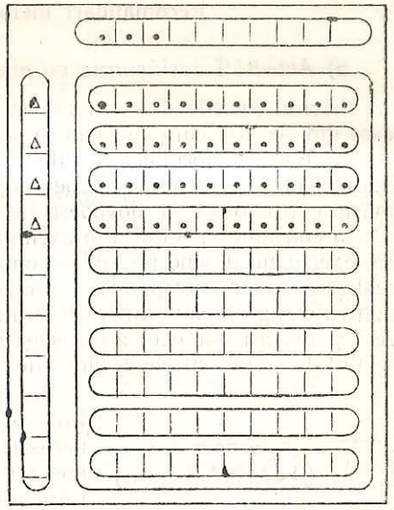


Fig. 118*

Dacă situația din clasă o cere[1], se vor repeta exerciții ca cele anterioare (punînd elevii să introducă în punga de celofan o parte din chibrituri), pînă cînd toți elevii își vor reaminti principiul numirii, scrierii și citirii numerelor naturale, și se vor familiariza cu construirea și interpretarea figurilor numerice introduse (figurile 118* și 118**).

Se vor face și exerciții în care se va da figura numerică și se va cere alegerea mulțimii bețișoarelor care au numărul elementelor dat de acea figură numerică. De exemplu, pentru figura numerică 119 se găsește mulțimea de bețișoare din figura 120.

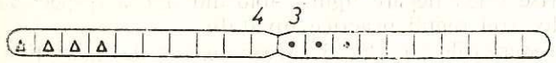


Fig. 118**

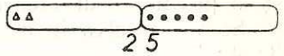


Fig. 119

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se strînge materialul didactic de pe bănci și se deschid cărțile la tema 1: „Numirea și scrierea numerelor".

Sub îndrumarea învățătorului, elevii vor explica ceea ce redau fiecare din figurile din manual aflate la această temă, rezolvînd cele trei exerciții propuse la sfîrșit.

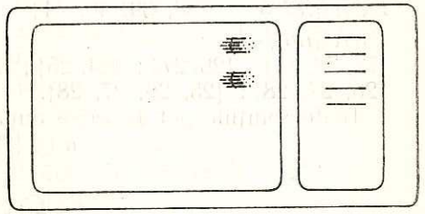


Fig. 120

TEMA A 2-A : COMPARAREA NUMERELOR PÎNĂ LA O SUTĂ

Scop: Deducerea unor reguli practice de comparare a numerelor naturale mai mari ca 10, care să nu mai facă necesară aplicarea principiului general de comparare a numerelor naturale (cu ajutorul corespondenței unu la unu).

Material didactic

Figurile din manualul școlar, aflate la tema respectivă.

[1] Poate fi folosit, din trusa învățătorului pentru predarea numerelor naturale, panoul cu aspectul din figura 186** (pagina 106).

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activităţi desfăşurate cu elevii, fără folosirea manualului

Privind figurile din manual de la tema 1, elevii explică ceea ce redă fiecare din ele, aşa cum au făcut la sfîrşitul orei trecute.

Învăţătorul formulează cîteva exerciţii asemănătoare cu cele aflate în manual la sfîrşitul temei 1, pe care elevii le rezolvă. Numărul lor depinde de măsura în care ele se dovedesc încă necesare într-o clasă sau alta.

În continuare, luînd alte exemple decît cele din manual, învăţătorul explică, executînd desene pe tablă asemănătoare cu cele din carte, cum se încearcă realizarea unor corespondenţe element cu element folosind figurile numerice, pentru compararea : numerelor formate numai din zeci ; numerelor formate din zeci şi unităţi dar care au aceeaşi cifră a zecilor ; numerelor formate din zeci şi unităţi, avînd cifrele zecilor diferite.

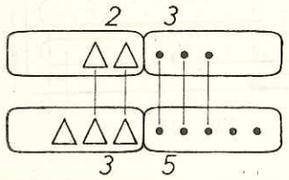


Fig. 121

În ultimul caz se atrage atenţia asupra faptului că, transformarea unei zeci în unităţi este necesară numai dacă numărul cu mai multe zeci are mai puţine unităţi ca celălalt. Altfel rezultatul comparării este evident, cum se observă în figura 121.

Elevii vor repeta de cîteva ori regulile practice deduse (existente în manual), trebuind să le aplice pentru a spune care este mai mare dintre perechile de numere :

50 şi 30 ; 43 şi 41 ; 60 şi 65 ; 32 şi 36 etc.

Revenind la tema din manual, se va cere să se explice rezultatele comparării perechilor de numere scrise lîngă fiecare figură, folosind figura respectivă, şi să justifice deducerea celor trei reguli practice învăţate.

Se vor rezolva în clasă exerciţiile : 1 ; 2 ; 6. Acasă se vor da exerciţiile : 3 ; 4 ; 5.

Indicaţii privind rezolvarea unora din exerciţiile propuse la tema a 2-a

Exerciţiul 5 {38, 39, 40, 41}

Exerciţiul 6

{72, 73, 74} ; {26, 27} ; {24, 25} ; {32, 33, 34} ; {17, 18, 19} ; {25, 26, 27} ; {26, 27, 28} ; {25, 26, 27, 28}.

* Toate soluţiile pot fi scrise după modelul :

$a \cup \{72, 73, 74\}$.

Capitolul 4

ADUNAREA ŞI SCĂDEREA NUMERELOR PÎNĂ LA O SUTĂ FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN

A. SCURTE OBSERVAŢII ASUPRA CONŢINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ŞCOLARĂ

Adunarea şi scăderea numerelor pînă la o sută, fără trecere peste ordin.

Descompunerea numerelor în sumă de doi termeni, unul format numai din zeci : $16 = 10 + 6$; $39 = 30 + 9$ etc.

Efectuarea acestor operaţii se va explica apelînd la noţiunile cunoscute despre mulţimi şi principiul numirii şi scrierii numerelor mai mari ca zece, dar se va urmări formarea unor automatisme de calcul, care să nu mai facă necesară revenirea, de fiecare dată, la aceste explicaţii.

Exerciţii şi probleme simple.

2. CUNOŞTINŢE ŞI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Cum se aplică regulile adunării şi scăderii date cu ajutorul reuniunii mulţimilor disjuncte şi a diferenţei dintre o mulţime şi o submulţime a sa, pentru adunarea şi scăderea numerelor naturale de la zero la o sută, fără trecere peste ordin.

Folosirea în acest scop *ca mulţimi model a figurilor numerice* introduse la numirea şi scrierea numerelor naturale, *în aşa fel încît*, păstrînd structura numerică zecimală a mulţimilor model folosite pentru termeni, mulţimile model pentru rezultatele operaţiilor să apară gata organizate cu structuri numerice zecimale. *Deducerea, pe această bază, a regulilor practice de adunare şi scădere a numerelor zecimale în diversele cazuri mai importante* (reducînd numărul lor la strictul necesar), cunoscînd şi tehnica de calcul în scris.

Generalizînd aspectele comune, se va ajunge la regula : se adună sau se scad unităţile între ele şi zecile între ele (cu scrierea numerelor unele sub altele în cazul calculului în scris).

Descompunerea numerelor într-o sumă de doi termeni, unul format numai din zeci şi unul format numai din unităţi :

$$27 = 20 + 7$$

dedusă prin intermediul mulţimilor, va putea fi folosită la efectuarea calculelor cu numere naturale.

Elevii vor utiliza comutativitatea şi asociativitatea reuniunii mulţimilor şi a adunării numerelor naturale, pentru găsirea rezultatului unor operaţii. Ei vor fi obişnuiţi să folosească parantezele pentru scrierea modului în care trebuie gîndit la efectuarea unor operaţii.

Calculul oral se va face paralel cu cel în scris.

B. INDICAŢII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 4

(Număr de ore, orientativ = 12)

TEMA 1 : ADUNAREA NUMERELOR FORMATE NUMAI DIN ZECI

Scop : Efectuarea adunării acestor numere folosind definiţia adunării prin intermediul reuniunii mulţimilor disjuncte ; justificarea analogiei cu adunarea numerelor pînă la zece, prin folosirea mulţimilor cu elementele zeci, introduse cu ocazia organizării unei mulţimi cu o structură convenabilă pentru denumirea numărului elementelor sale ; utilizarea ca mulţimi model a figurilor numerice în aşa fel, încît, păstrînd structura mulţimilor model folosite

pentru termeni, reuniunea lor să apară gata organizată cu o structură convenabilă denumirii numărului elementelor sale; deducerea de aici a regulii practice de adunare.

Material didactic

Pentru învățător. Trusa învățătorului pentru predarea adunării și scăderii numerelor naturale. Planșă cu figura 127.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Se fac cîteva adunări cu numere pînă la zece:

$1 + 4 =$, $2 + 6 =$, $4 + 3 =$, $8 + 1 =$, $5 + 4 =$, $2 + 3 =$.

Elevii vor spune mai întîi sumele respective, apoi vor aplica definiția cu mulțimi a adunării, pentru a efectua ultima din aceste adunări. Se va executa pe tablă și în caiete figura 122, suma fiind găsită prin numărare.

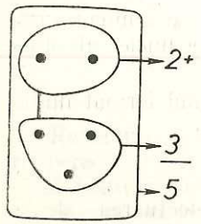


Fig. 122

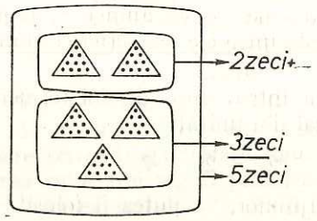


Fig. 123

Se va propune apoi adunarea

$20 + 30 =$

pe care elevii, conduși de învățător, o vor gîndi:

2 zeci + 3 zeci = 5 zeci

găsind:

$20 + 30 = 50$.

Învățătorul execută pe tablă figura 123, pentru a face mai sugestiv raționamentul. El se va strădui să se exprime cît mai corect și complet, în limbajul mulțimilor: luăm o mulțime cu 20 de elemente și o mulțime cu 30 de elemente, disjunctă de prima. Facem reuniunea acestor mulțimi. Obținem o mulțime în care există 5 submulțimi de cîte zece (numărul zecilor se află prin numărare). Așadar, reuniunea are 50 de elemente.

Se observă că se lucrează cu mulțimile ce au ca elemente zeci, la fel cu cele care au ca elemente unități simple (fig. 124). Aceasta permite să calculă prin analogie:

$1 + 4 = 5$, $2 + 6 = 8$, $4 + 3 = 7$, $8 + 1 = 9$,
$10 + 40 = 50$, $20 + 60 = 80$, $40 + 30 = 70$, $80 + 10 = 90$ etc.

calcule ce vor fi făcute de elevi oral și în scris.

Învățătorul prezintă din trusă panoul cu figura 125 și anunță că el poate fi folosit pentru adunarea numerelor naturale pînă la o sută.

Se explică deocamdată adunarea numerelor formate numai din zeci.

De exemplu, pentru a găsi suma $20 + 30$, se așază în prima figură numerică 2 triunghiuri albastre, în a doua 3 triunghiuri de acest fel, încît ele să

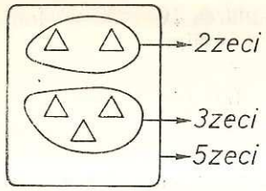


Fig. 124

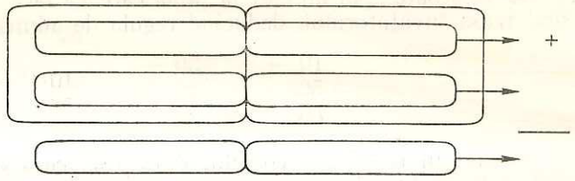


Fig. 125

devină mulțimi model, respectiv cu 20 și 30 de elemente (fig. 126). Suma va fi tocmai numărul elementelor reuniunii celor două mulțimi model formate pentru termeni. *Acest număr îl găsim fie numărînd „zecile" (triunghiurile) existente în figura numerică ce reprezintă reuniunea mulțimilor termeni* (fig. 126), *fie deplasînd piesele ce reprezintă mulțimile de cîte zece elemente aflate în cele două mulțimi model pentru termeni, în partea de jos a panoului, obținînd astfel figura numerică a reuniunii, fără a mai fi puse în evidență mulțimile model ale termenilor* (fig. 127).

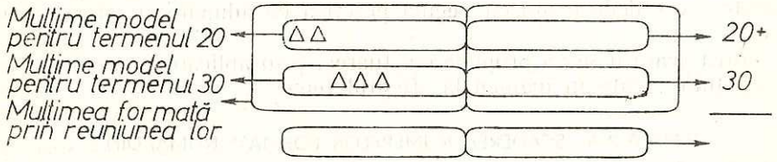


Fig. 126

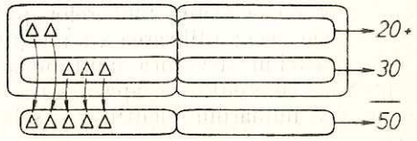


Fig. 127

În ambele cazuri se reunesc, în fond, mulțimile ce au ca elemente zeci și se obține o mulțime ce are de asemenea ca elemente zeci. Lucrul este însă mai evident pe figura 127. De aici regula: se adună numerele reprezentînd zecile termenilor.

Figura 127 sugerează scrierea numerelor unele sub altele și adunarea „unități cu unități și zeci cu zeci":

$$\begin{array}{r} 20+ \\ 30 \\ \hline 50 \end{array} \quad \text{se observă totodată} \quad \begin{array}{r} 30+ \\ 20 \\ \hline 50 \end{array}$$

Muncă independentă

Se cere elevilor să efectueze adunările:

$10 + 50 =$ $\quad$ $20 + 30 =$

folosind figuri ca 123 și 124 (care se află încă executate pe tablă).

Desigur, scopul urmărit nu este aflarea sumei, lucru deja cunoscut de elevi, ci deprinderea modului de gîndire și exprimare în limbajul mulțimilor a etapelor ce trebuie parcurse pentru aflarea sumei.

Se va scoate apoi un elev la tablă care va face adunarea 10 + 50 = folosind trusa învățătorului, deducînd regula de adunare și scriind :

$$\begin{array}{r} 10 + \\ 50 \\ \hline 60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 + \\ 10 \\ \hline 60 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10 + 50 = 60 \\ 50 + 10 = 60 \end{array}$$

Elevii din bănci vor corecta, după caz, ceea ce au efectuat și vor scrie același lucru în caiete.

În continuare, cîțiva elevi vor fi scoși, pe rînd, să efectueze la tablă, iar restul elevilor în caiete adunări ca :

10 + 20 = ; 30 + 30 = ; 30 + 40 = ; 20 + 40 = .

de fiecare dată efectuînd întîi oral, apoi în scris cu așezarea numerelor unele sub altele, sumele fiind găsite prin aplicarea regulii stabilite anterior.

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se cere elevilor să explice ceea ce redau figurile din manual existente la tema 1 : „Adunarea numerelor formate numai din zeci". Elevii, ajutați de învățător, vor deduce din ele regula practică de adunare și tehnica adunării în scris.

Pentru acasă li se va propune efectuarea, prin aplicarea regulii de calcul, a exercițiilor aflate în manual la sfîrșitul temei 1.

TEMA A 2-A : SCĂDEREA NUMERELOR FORMATE NUMAI DIN ZECI

Scop : Efectuarea scăderii acestor numere folosind definiția scăderii prin intermediul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa ; justificarea analogiei cu scăderea numerelor pînă la zece, prin folosirea mulțimilor cu elementele zeci ; utilizarea ca mulțimi model a figurilor numerice în așa fel încît, păstrînd structura mulțimilor model folosite pentru termenii scăderii, mulțimea diferență să apară gata organizată într-o structură convenabilă denumirii numărului elementelor sale ; deducerea de aici a regulii practice de scădere.

Material didactic

Pentru învățător : Trusa învățătorului pentru predarea operațiilor cu numere naturale. Planșa cu figura 133.

Recomandări metodice pentru predarea temei

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se fac cîteva scăderi cu numere pînă la zece :

3 — 1 = ; 7 — 5 = ; 9 — 4 = ; 6 — 6 = ; 5 — 2 = .

Elevii vor spune mai întîi diferențele respective, apoi vor aplica definiția cu mulțimi a scăderii numerelor naturale, pentru a efectua ultima din aceste scăderi. Se va executa pe tablă și în caiete, pe etape corespunzînd regulii de scădere, figura 128. Se va observa că diferența 3 se află numărînd elementele mulțmii diferență. Se va observa de pe aceeași figură că avem :

5 — 3 = 2.

Se propune apoi scăderea :

50 — 20 =

pe care elevii, conduși de învățător, o vor gîndi :

5 zeci — 2 zeci = 3 zeci

găsind

50 — 20 = 30.

Pentru a fi mai sugestiv raționamentul, învățătorul face pe tablă figura 129, de asemenea pe etape distincte, conform regulii de scădere : luăm o mulțime cu 50 de elemente ; separăm în ea o submulțime cu 20 de elemente ; formăm diferența dintre mulțimea inițială și submulțimea pe care am ales-o în ea ; numărăm elementele mulțimii diferență și găsim rezultatul scăderii.

Se atrage atenția că, de fapt *nu este nevoie a număra decît submulțimile de cîte zece elemente, întrucît mulțimea diferență este gata organizată cu o structură care permite numirea numărului elementelor sale.* În fond, cu mulțimile de cîte zece se lucrează la fel cum s-a procedat în figura 128 cu unitățile simple, ceea ce devine clar pe figura simplificată 130 (care se face la tablă).

Aceasta permite calculul prin analogie :

3 — 1 = 2, 7 — 5 = 2, 9 — 4 = 5, 6 — 6 = 0,

30 — 10 = 20, 70 — 50 = 20, 90 — 40 = 50, 60 — 60 = 0 etc.

Din figura 130 se va observa :

dacă avem 50 — 20 = 30, avem și 50 — 30 = 20

rezultat cunoscut în sensul că, scăzînd din descăzut pe diferență obținem pe scăzător.

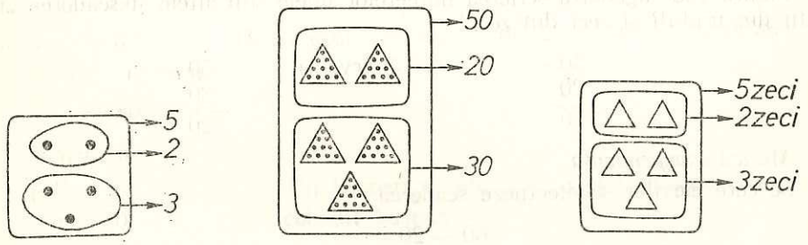


Fig. 128 Fig. 129 Fig. 130

Învățătorul prezintă din trusă panoul cu figura 131 și anunță că poate fi folosit pentru scăderea numerelor naturale pînă la o sută.

Deocamdată se explică folosirea sa pentru scăderea numerelor formate numai din zeci, de exemplu

50 — 20 =

Se așază în prima figură de pe panou 5 triunghiuri albastre, obținînd o figură numerică reprezentînd mulțimea model pentru descăzutul 50 (fig. 132).

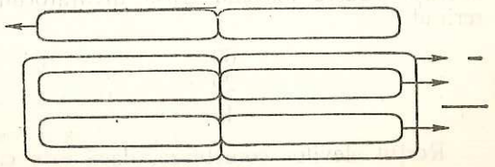


Fig. 131

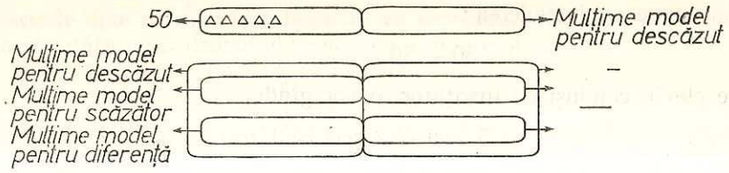


Fig. 132

Trebuie să separăm elementele mulțimii model pentru descăzut în două submulțimi disjuncte, astfel ca una din ele să aibă 20 de elemente. În acest scop vom folosi figura aflată sub mulțimea model a descăzutului. *Vom deplasa 2 triunghiuri albastre din mulțimea model pentru descăzut, în figura numerică ce va reprezenta mulțimea model pentru scăzător. Celelalte triunghiuri albastre rămase din mulțimea model a descăzutului le deplasăm în figura numerică ce va reprezenta mulțimea model pentru numărul diferență. S-a realizat separarea în submulțimi pe care am dorit-o, sugerată în figura 133.*

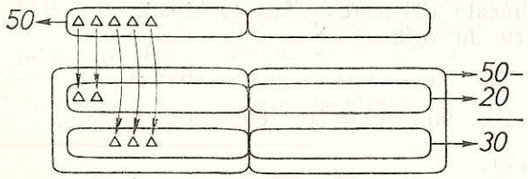


Fig. 133

Rezultatul 30 al scăderii se află numărînd zecile din figura numerică reprezentînd mulțimea diferență.

Se atrage atenția elevilor că, de fapt, noi am aflat diferența a două mulțimi ce au ca elemente zeci, mulțimea diferență avînd de asemenea elementele zeci. De aici regula : se scad zecile scăzătorului din zecile descăzutului.

Figura 133 sugerează scrierea numerelor unele sub altele și scăderea „unității din unități și zeci din zeci"

$$\begin{array}{r} 50\,- \\ 20 \\ \hline 30 \end{array} \qquad \text{se observă și} \qquad \begin{array}{r} 50\,- \\ 30 \\ \hline 20 \end{array}$$

Muncă independentă

Se cere elevilor să efectueze scăderea :

$$60 - 20 =$$

folosind figuri ca 129 și 130 (care se află încă executate pe tablă) după modelul folosit de învățător pentru scăderea 50—20 =.

Prin discuții purtate concomitent cu îndrumarea lucrului elevilor în bănci, învățătorul îi ajută să exprime corect în limbajul mulțimilor, ceea ce fac. După ce elevii din clasă termină lucrul, se scoate un elev la tablă care face aceeași scădere folosind trusa învățătorului, deducînd regula de scădere și scriind :

$$\begin{array}{r} 60\,- \\ 20 \\ \hline 40 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 60\,- \\ 40 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 60 - 20 = 40 \\ \\ 60 - 40 = 20 \end{array}$$

Restul elevilor corectează, dacă este cazul, ceea ce au efectuat și scriu același lucru pe caiete.

În continuare se fac, aplicînd direct regula, scăderi ca :

$$80 - 50 = \qquad 60 - 10 = \qquad 70 - 70 = \qquad 90 - 50 =$$

calculînd întîi oral, apoi în scris, cu așezarea numerelor unele sub altele.

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Elevii vor explica ceea ce redau figurile din manual existente la tema a 2-a „Scăderea numerelor formate numai din zeci".

Învățătorul îi va ajuta să se exprime corect în limbajul mulțimilor și să deducă regula practică de calcul oral și în scris.

Se vor efectua în clasă exercițiile : 2 ; 5.

Acasă se vor da exercițiile : 1 ; 3 ; 4.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile propuse la tema a II-a

Exercițiul 3

$$\begin{array}{r} 20\,+ \\ \text{probe} \\ 50 \\ \hline 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70\,- \\ 50 \\ \hline 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70\,- \\ 20 \\ \hline 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50\,+ \\ 20 \\ \hline 70 \end{array} \;; \qquad \begin{array}{r} 70\,- \\ \text{probe} \\ 20 \\ \hline 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50\,+ \\ 20 \\ \hline 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70\,- \\ 50 \\ \hline 20 \end{array}$$

Exercițiul 4

$a + 20 = 50$ $\qquad$ $30 + a = 50$ $\qquad$ Un termen al adunării se află scăzînd din sumă celălalt termen.

$a = 50 - 20$ $\qquad$ $a = 50 - 30$

$a = 30$ $\qquad$ $a = 20$

$80 - a = 30$ $\qquad$ Scăzătorul se află dacă scădem din descăzut diferența.

$a = 80 - 30$

$a = 50$

$a - 50 = 30$ $\qquad$ Descăzutul se află adunînd scăzătorul cu diferența.

$a = 50 + 30$

$a = 80$

Exercițiul 5

$a + b = 50$ $\qquad$ Un termen al adunării se află scăzînd din sumă celălalt termen.

$a = 50 - b$

Acuma, vom înlocui pe b cu numere formate numai din zeci ;

$b = 10$, $a = 50 - 10$; $a = 40$ $\qquad$ $b = 20$, $a = 50 - 20$; $a = 30$ $\qquad$ $b = 30$, $a = 50 - 30$; $a = 20$

$b = 40$, $a = 50 - 40$; $a = 10$ $\qquad$ $b = 50$, $a = 50 - 50$; $a = 0$ $\qquad$ care nu este un număr format numai din zeci.

Așadar, am găsit

$a = 40.$ $\quad$ $a = 30,$ $\quad$ $a = 20,$ $\quad$ $a = 10,$

$b = 10.$ $\quad$ $b = 20,$ $\quad$ $b = 30.$ $\quad$ $b = 40.$

* Mulțimea perechilor de numere a și b se poate scrie :

$(a, b) \in \{(40, 10), (30, 20), (20, 30), (10, 40)\}.$

Acestea se vor preda după o tehnologie didactică asemănătoare cu cea folosită la temele 1 şi 2, adaptată cerinţelor ce decurg din următoarele observaţii :

La cazurile de adunare prezentate

Alegînd mulţimile model pentru a face adunarea în conformitate cu definiţia acesteia cu mulţimi, se constată că *dacă mulţimile model alese pentru termeni sînt organizate în structuri convenabile numirii numerelor de elemente pe care le au, atunci reuniunea celor două mulţimi model este şi ea gata organizată cu o astfel de structură.* Se formează cu uşurinţă figura numerică reprezentînd mulţimea model pentru suma celor două numere. Ca exemplu, pentru 32 + 46 = avem figura 134 (care va fi prezentată sub formă de planşă, ca material didactic, împreună cu figura 136).

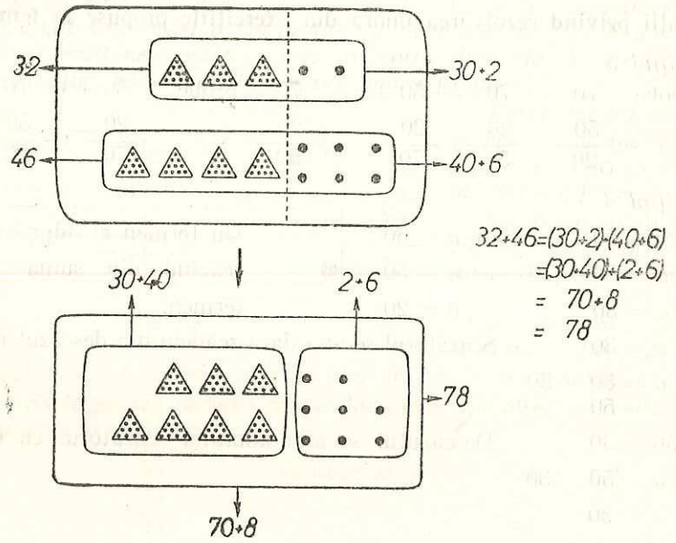


Fig. 134

Dacă se folosesc ca mulţimi model figurile numerice corespunzătoare termenilor (fig. 135), *atunci apare clar că figura numerică corespunzătoare sumei se obţine reunind mulţimile cu elementele zeci, între ele, şi mulţimile cu elementele unităţi, între ele.* De aici regula practică de adunare : se adună unităţi cu unităţi şi zeci cu zeci.

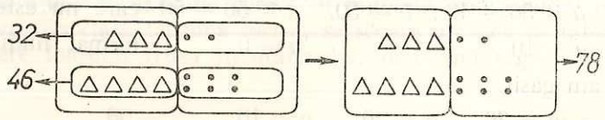


Fig. 135

Din modul cum s-a făcut reuniunea, folosind figurile numerice, rezultă şi regula de calcul în scris, cu scrierea numerelor unele sub altele. Pentru

exemplul 32 + 46 = lucrul pe panoul trusei este sugerat în figura 136, în locul punctelor din figură pe panou folosind discuri negre.

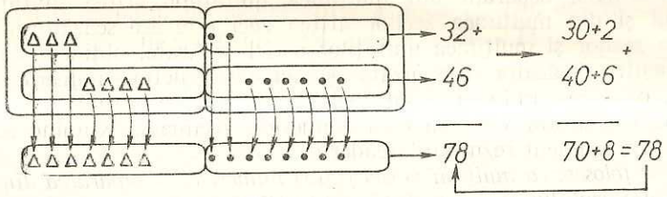


Fig. 136

În partea din lecţii în care învăţătorul lucrează în clasă cu elevii fără folosirea manualului, utilizînd trusele menţionate la temele 1 şi 2, pe panou se va obţine : în locul figurii a 3-a, din manual, la tema a 3-a, aspectul din figura 137 ; la tema a 4-a se va obţine aspectul din figura 138 etc.(identice cu cele din manual).

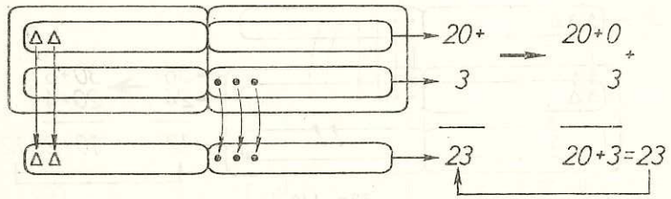


Fig. 137

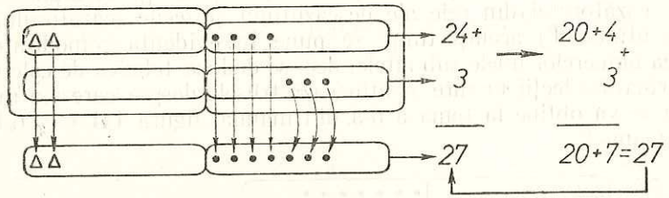


Fig. 138

La cazurile de scădere prezentate

Alegînd mulţimile model pentru a face scăderea în conformitate cu definiţia acesteia cu mulţimi, *dacă mulţimea model folosită pentru descăzut este organizată cu structură convenabilă numirii numărului său de elemente, atunci avem posibilitatea alegerii submulţimii corespunzătoare scăzătorului astfel încît şi ea să fie gata organizată cu o asemenea structură, şi mulţimea diferenţă care rezultă are, de asemenea, o structură convenabilă numirii numărului elementelor sale.* De exemplu, pentru 36—24=12 avem figura 139 (care se va executa la tablă, apoi se va prezenta planşa respectivă).

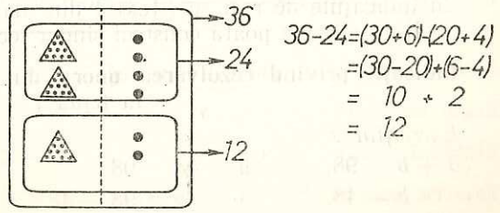


Fig. 139

Cele de mai sus se realizează dacă mulțimea model pentru scăzător se alege astfel: din mulțimea model a descăzutului organizată cu structură numerică zecimală, separăm din mulțimea unităților atîtea unități cîte are scăzătorul și din mulțimea zecilor atîtea zeci cîte are scăzătorul. Reunind mulțimea zecilor și mulțimea unităților astfel separate, obținem submulțimea model pentru scăzător organizată și ea cu structură numerică zecimală. Evident, ceea ce rămîne în mulțimea model a descăzutului este mulțimea diferență, organizată cu structură numerică zecimală. Numind numărul ei de elemente, spunem rezultatul scăderii.

Dacă se folosesc ca mulțimi model figuri numerice, la separarea din mulțimea model a descăzutului a celor două submulțimi model, cea pentru scăzător, cu numărul elementelor cunoscut, și cea pentru diferență, al cărei număr de elemente se caută, devine foarte clar că de fapt formăm două mulțimi diferență, una între mulțimi cu elementele zeci și una între mulțimi cu elementele unități, și că reuniunea acestora două este mulțimea diferență ce funcționează ca model pentru rezultatul scăderii, fiind tocmai figura numerică corespunzătoare acestuia. Pentru 36 — 24 = 12 lucrul pe panoul trusei este sugerat pe figura 140.

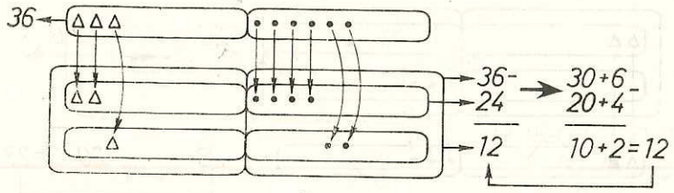


Fig. 140

Tot cu această ocazie apare limpede regula practică de scădere: se scad unitățile scăzătorului din cele ale descăzutului și zecile scăzătorului din cele ale descăzutului. În același timp, se pune în evidență comoditatea oferită de scrierea numerelor unele sub altele, deci se deduce tehnica de calcul în scris.

În partea din lecții în care se utilizează trusele despre care am mai vorbit, pe panou se va obține la tema a 5-a din manual figura 141 etc. (identice cu cele din manual).

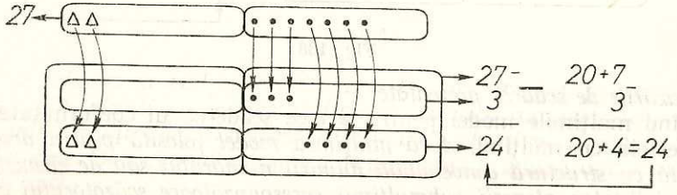


Fig. 141

Cu indicațiile de mai sus, textul din manual este suficient de clar pentru ca învățătorul să-și poată construi singur lecțiile legate de temele menționate.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema 7

Exercițiul 2

$a + b = 98$,	$a + 48 = 98$	Se caută un termen cunoscînd
$b = 48$,	$a = 98 - 48$	suma și celălalt termen.
$a = ?$	$a = 50$	

Problema 4

Notăm cu a numărul de pagini citite a doua zi. Din enunțul problemei rezultă că putem scrie fie: $a + 11 = 24$, fie: $a = 24 - 11$.

Dacă am scris prima egalitate, pentru găsirea lui a observăm că știm suma și un termen și căutăm celălalt termen. Avem:

$$a = 24 - 11; \qquad a = 13.$$

Problema 5

Notăm numărul de lei care i-au rămas cu a. În baza enunțului problemei, avem:

$$a = 79 - 53 \qquad 79 -$$
$$a = 26 \qquad \underline{53}$$
$$26$$

Problema 6

Se rezolvă la fel ca problema 5.

Problema 8

Unele exerciții se rezolvă cerînd elevilor să le formuleze ca probleme:

Aflați termenul necunoscut a al unei adunări, știind că suma este 78 și celălalt termen este 26.

Aflați scăzătorul unei scăderi știind că descăzutul este 57 și diferența este 32.

Aflați descăzutul dacă scăzătorul este 20 și diferența este 41.

Se scrie, respectiv:

$26 + a = 78$	$78 - 57 - a = 32$	$57 - a - 20 = 41$
$a = 78 - 26$	26	$a = 57 - 32$	32	$a = 20 + 41$
$a = 52$	$\underline{-52}$	$a = 25$	$\underline{25}$	$a = 61$

Celelalte exerciții se rezolvă prin încercări:

$$a - 15 \leqslant 2.$$

Se vede că a nu poate fi un număr natural mai mic decît 15, deoarece nu s-ar putea face scăderea. Așadar, avem:

$a = 15$;	$15 - 15 = 0$;	$0 < 2$	deci $a = 15$ face scrierea adevărată
$a = 16$;	$16 - 15 = 1$;	$1 < 2$	și $a = 16$ face scrierea adevărată
$a = 17$;	$17 - 15 = 2$;	$2 = 2$	și $a = 17$ face scrierea adevărată
$a = 18$;	$18 - 15 = 3$;	$3 > 2$	se vede că $a = 18$ nu face scrierea adevărată.

Ceea ce s-a întîmplat pentru $a = 18$, se va întîmpla şi pentru orice număr natural a mai mare decît 18. Aşadar, mulţimea numerelor naturale care fac scrierea adevărată este:

$$\{15, 16, 17\}.$$

* Se scrie şi $a \in \{15, 16, 17\}$.

În $12 + a < 15$ a poate fi orice număr natural de la 0 la 2 (se fac încercări).

* $a \in \{0, 1, 2\}$.

În $47 + a < 49$, a poate fi: 0 şi 1.

* $a \in \{0, 1\}$.

În $35 - a > 32$, a poate fi: 0; 1; 2

* $a \in \{0, 1, 2\}$.

În $a + 13 \leqslant 17$, a poate fi: 0; 1; 2; 3; 4

* $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Problema 9

Vasilică a rezolvat 47 probleme.

Sora lui a rezolvat a probleme, avînd $a = 47 - 17$.

Împreună au rezolvat b probleme, avînd $b = 47 + a$.

Putem scrie:

$$b = 47 + a \qquad \begin{array}{r} 47 - \\ 17 \\ \hline 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 + \\ 30 \\ \hline 77 \end{array}$$

$$b = 47 + (47 - 17)$$

$$b = 47 + 30$$

$$b = 77$$

Rezolvarea se poate scrie şi:

$47 - 17 = 30$ probleme a rezolvat sora lui Vasilică.

$47 + 30 = 77$ probleme au rezolvat împreună.

Problema 12

12 kg roşii în prima ladă.

a kg roşii în a doua ladă, şi $a = 12 + 5$; $a = 17$ kg.

b kg roşii în cele două lăzi, cu $b = 12 + a$, $\begin{array}{r} 12 + \\ 17 \\ \hline 29 \end{array}$ $b = 29$ kg.

$$b = 12 + 17$$

$$b = 29$$

Rezolvarea se poate scrie şi:

$12 + 5 = 17$

$12 + 17 = 29$ În cele două lăzi sînt 29 kg de roşii.

Problema 13

$50 + 34 + a = 96$ $\quad \begin{array}{r} 96 - \\ 84 \\ \hline 12 \end{array}$ Mai trebuie să se cumpere 12 m de sîrmă.

$84 + a = 96$

$a = 96 - 84$

$a = 12$

Altă scriere a rezolvării:

$50 + 34 = 84$; $96 - 84 = 12$. Trebuie încă 12 m de sîrmă.

Problema 14

$45 + (45 - 3) = 45 + 42 = 87$. S-au consumat 87 l de lapte.

Rezolvarea se poate scrie:

$45 - 3 = 42$

$45 + 42 = 87$. S-au consumat 87 l de lapte.

Problema 15

Figura 142.

$17 - 3 = 14$ bile mari albe;

$3 + 2 = 5$ bile mici;

$17 + 2 = 19$ bile sînt în total.

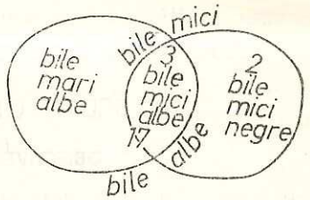


Fig. 142

II. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA O SUTĂ CU TRECERE PESTE ORDIN

Capitolul 1

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA PÎNĂ LA 20 CU TRECERE PESTE ZECE

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Formarea, pe bază de activități practice, a reuniunii a două mulțimi disjuncte, fiecare avînd numărul elementelor mai mic ca 10, dar reuniunea avînd între 10 și 20 elemente. Numirea numărului de elemente al reuniunii, prin separarea în ea a două submulțimi disjuncte, una avînd 10 elemente.

Pe baza pregătirii astfel făcute, se fac adunări de tipul $8 + 5 = 13$, mînuind nemijlocit mulțimi de obiecte, făcînd reuniuni, separări de submulțimi disjuncte (din care una cu 10 elemente), numirea și scrierea numărului elementelor reuniunii.

Treptat, din explicațiile date folosind mulțimile și operațiile cu mulțimi, se vor degaja etapele de rezolvare:

$8 + 5 = 13$

$10 - 8 = 2$ cu cît trebuie completat 8 pînă la 10;

$5 - 2 = 3$ cît rămîne din 5, după completarea la 8 cu 2 unități.

$10 + 3 = 13$ cîte zeci și unități sînt în total.

Prin exerciții repetate se vor forma automatisme de calcul, spunîndu-se direct rezultatul unor adunări de acest fel, fără a mai apela la mulțimi de obiecte și operații cu ele.

Utilizînd nemijlocit mulțimi cu elementele zeci și unități, separarea de submulțimi disjuncte și alte noțiuni cunoscute despre mulțimi, se vor face scăderi de tipul $15 - 8 = 7$, distingînd etapele:

$$15 - 8 = 7$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 + 5 = 7$$

și ajungînd la automatisme de calcul. Pentru însușirea tipului de exerciții prezentate mai sus, nu se va economisi timp și efort, ele fiind temelia calculului ce urmează a fi învățat mai departe.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

La cele expuse în obiectivele prevăzute de programă, facem următoarele completări:

Formarea automatismului de recunoaștere a perechilor de numere a căror sumă este 10.

Cunoașterea modului de calcul a numărului care adunat cu un număr dat, dă suma zece (completarea zecii, prin scădere). Formarea automatismului

de găsire a numărului care adunat cu un număr dat, dă suma zece (completarea zecii în mod direct, fără a mai face calculul prin scădere).

La adunarea a două numere mici ca 10, a căror sumă este mai mare ca 10, numărul elementelor reuniunii se va găsi prin procedeele (exemplificăm pentru $7 + 5 =$):

— *Se face reuniunea mulțimilor model*, așa cum cere definiția adunării, *apoi se numără elementele reuniunii* (vezi prima figură de la tema a 4-a din manual). Găsim $7 + 5 = 12$.

— *Se scurtează procesul de găsire a sumei dacă aflarea numărului elementelor reuniunii are loc în același timp cu formarea acesteia.* Este suficient a pune în reuniune elementele mulțimii model folosite pentru unul din termeni, de exemplu pentru 7, apoi punem în continuare, pe rînd, elementele mulțimii model folosite pentru al doilea termen, în exemplul nostru 5, numărîndu-le începînd cu 8, ca și cum au fost numărate și elementele primei mulțimi (vezi figura din dreapta primei figuri, la tema a 4-a din manual).

— *Se face reuniunea mulțimilor, iar pentru aflarea numărului elementelor ei, ea se organizează cu structură numerică zecimală.* Aceasta revine la **a trece în reuniune de la o separare a sa în submulțimi disjuncte, fiecare avînd atîtea elemente cît sînt termenii adunării, la o altă separare în submulțimi disjuncte, una avînd 10 elemente** (pentru exemplul $7 + 5 =$ vezi figura situată sub primul rînd de figuri, la tema a 4-a din manual).

Se va observa că **nu formarea reuniunii mulțimilor model este lucru dificil, la efectuarea adunării, ci aflarea numărului elementelor reuniunii, ceea ce ne obligă la organizarea acesteia cu o structură numerică zecimală.** Aceasta este însă incomod și *vom căuta mijloace de a evita realizarea practică a organizării respective a reuniunii, găsind alte căi de a afla structura zecimală a ei, prin folosirea structurilor zecimale ale mulțimilor model folosite pentru termeni.*

Se va cunoaște modul în care poate fi găsită structura numerică zecimală a reuniunii folosind figuri numerice pentru termeni și sumă, așa cum rezultă din figura 143 (care reproduce ultima figură de la tema a 4-a din manual).

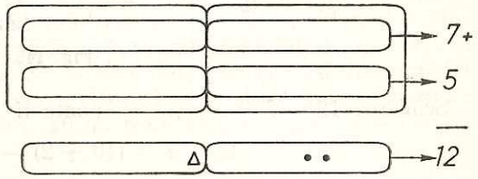


Fig. 143

Elevii vor ști să recunoască cu ajutorul acestei figuri dacă suma celor două numere trece peste zece, datorită modului în care sînt amplasate punctele ce reprezintă unitățile. Avînd în vedere că într-o figură numerică aceste puncte încep din stînga, iar în cealaltă ele încep din dreapta, suma va trece de zece dacă cele două rînduri de puncte „se depășesc" unul pe altul, și nu va trece de zece dacă cele două rînduri de puncte „nu ajung" unul la altul.

Se deduce că $7 + 5$ se poate efectua prin calcul cu următoarele operații ajutătoare[1]:

$$10 - 7 = 3; \quad 5 - 3 = 2;$$
$$7 + 5 = 7 + (3 + 2)$$

deci:
$$= (7 + 3) + 2$$
$$= 10 + 2$$
$$= 12$$

[1] Manualul și îndrumătorul recomandă diverse procedee menite să ducă la însușirea conștientă a unor tehnici de calcul. Pe măsura formării automatismelor în efectuarea acestor calcule, se va renunța la procedeele utilizate în perioada deducerii regulilor respective.

La scăderea cu trecere peste zece a unui număr scris cu o cifră, dintr-un număr cuprins între 10 și 20, este firesc să folosim drept model pentru descăzut o mulțime organizată cu structură numerică zecimală. În adevăr, trebuie să alegem o mulțime cu numărul de elemente cunoscut, cuprins între 10 și 20. În procesul constituirii mulțimii model cu acest număr de elemente, ea rămîne în final cu o structură numerică zecimală.

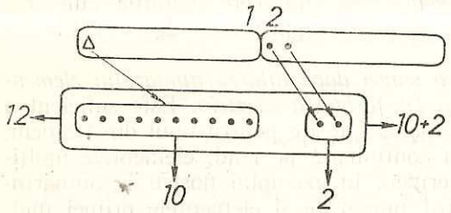


Fig. 144

La scăderi ca 12 — 7 =, alegînd mulțimea model pentru descăzutul 12, aceasta apare deja organizată ca reuniune a două mulțimi disjuncte, una cu 10 elemente și una cu 2 elemente (fig. 144). Pentru a efectua scăderea trebuie să alegem, din mulțimea model a descăzutului, o submulțime cu 7 elemente. *Mulțimea model a descăzutului prezentîndu-se cu structura din figura 144, este firesc să alegem submulțimea cu 7 elemente din mulțimea celor 10 elemente, așa cum sugerează figura 145.*

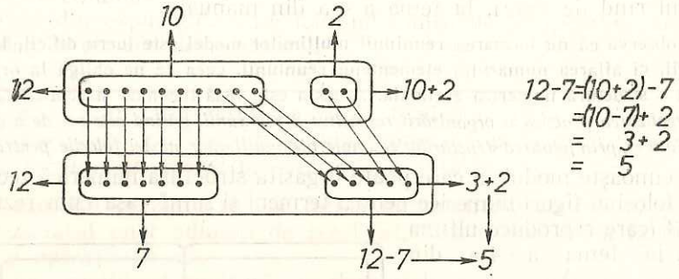


Fig. 145

Scăderea 12 — 7 = poate fi efectuată prin calcul, astfel:

$$12 - 7 = (10 + 2) - 7$$
$$= (10 - 7) + 2$$
$$= 3 + 2$$
$$= 5$$

Raționamentul va putea fi urmărit pe figura 145*.

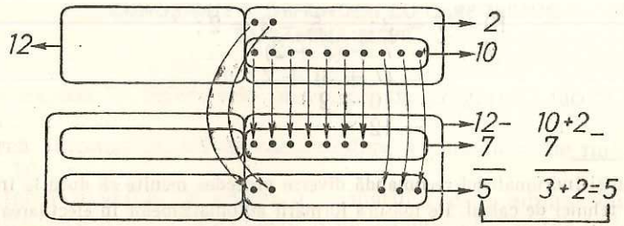


Fig. 145*

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 1

(Număr de ore, orientativ=11)

TEMELE : 1, 2 ȘI 3 DIN MANUAL

Scop: Cunoașterea raționamentului și formarea automatismelor de calcul pentru completarea zecii.

Material didactic

Manualul, cretă colorată.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Lecția se poate desfășura lucrînd cu manualul. Desenele de la temele 1, 2 și 3 din manual vor fi executate de învățător la tablă, cu cretă colorată, la momentul oportun.

La tema 1 se parcurg etapele:

— Elevii arată pe figură: cele două mulțimi disjuncte care se folosesc pentru a afla sumele 9 + 1 și 1 + 9; reuniunea lor.

Se procedează analog pentru: 8 + 2 și 2 + 8; 7 + 3 și 3 + 7; 6 + 4 și 4 + 6; 5 + 5.

— Se vor arăta perechile de adunări la care sumele se pot scrie de la una la cealaltă, datorită comutativității adunării.

La tema a 2-a se parcurg etapele:

— Elevii arată pe figură: mulțimea model pentru descăzut și mulțimea model pentru scăzător, pentru a face scăderea 10 — 9 = ; diferența celor două mulțimi anterioare, pe care o numără, aflînd rezultatul scăderii 10 — 9 = .

— Se arată apoi: mulțimea model pentru descăzut și mulțimea model pentru scăzător, pentru a face scăderea 10 — 1 = ; diferența celor două mulțimi anterioare, pe care o numără, aflînd rezultatul scăderii 10 — 1 = .

Se procedează analog pentru:

10 — 8 = și 10 — 2 = ; 10 — 7 = și 10 — 3 = ;
10 — 6 = și 10 — 4 = ; 10 — 5 =

La tema a 3-a

Elevii vor fi deprinși să citească

$$7 + a = 10$$

ca problemă: „7 adunat cu cît fac 10?"; „Ce număr adunat cu 7 face suma 10?"; „Suma a două numere este 10, unul din numere este 7. Aflați celălalt număr."

Ei vor explica găsirea lui a folosind legătura dintre adunare și scădere rezultată din definițiile cu mulțimi ale acestora, așa cum decurge ea din figura existentă în manual: luăm o mulțime cu 10 elemente; separăm în ea o submulțime cu 7 elemente; formăm mulțimea diferență, care are, deocamdată, numărul elementelor necunoscut, pe care îl notăm cu a; numărăm elementele mulțimii diferență, găsind $a = 3$.

Din figură rezultă scrierile :

$$7 + a = 10$$

$$a = 10 - 7$$

$$a = 3$$

care sînt, dealtfel, cunoscute de copii.

Observaţie

Mai sus s-a cerut ca elevii să îndeplinească cerinţele învăţătorului folosind manualul. După fiecare etapă, învăţătorul va executa la tablă desenul existent în manual şi va arăta el (sau va scoate un elev să arate) răspunsul corect, spre a da posibilitatea verificării şi îndreptării răspunsurilor iniţiale ale elevilor.

În clasă se vor face exerciţii asemănătoare cu cele din manual, urmînd ca cele din manual să fie propuse ca temă acasă.

(Acest procedeu va fi extins şi la alte lecţii, diminuînd pe cît posibil numărul exerciţiilor şi problemelor din manual recomandate în acest Îndrumător să fie efectuate în clasă, recomandări care au doar un caracter orientativ).

TEMA A 4-A : ADUNAREA CU TRECERE PESTE ZECE A DOUĂ NUMERE SCRISE CU CÎTE O CIFRĂ

Scop: Cunoaşterea diferitelor căi de aflare a numărului elementelor reuniunii rezultate prin aplicarea definiţiei cu mulţimi a adunării numerelor naturale; utilizarea ca mulţimi model a figurilor numerice în aşa fel, încît reuniunea mulţimilor model folosite pentru termeni să apară gata organizată cu o structură numerică zecimală, care să permită numirea şi scrierea numărului său de elemente.

Material didactic

Pentru învăţător: Trusa învăţătorului pentru predarea operaţiilor cu numere naturale. Planşa cu figura 147.

Pentru elevi: Pungă de material plastic cu 20 de beţişoare (chibrituri sau scobitori); sfoară.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activităţi desfăşurate cu elevii, fără folosirea manualului

Muncă independentă

Învăţătorul scrie pe tablă adunările pe care le propune a fi efectuate:

$$7 + 5 = \quad ; \qquad 8 + 6 = \quad ; \qquad 2 + 9 =$$

El propune elevilor următorul procedeu de lucru, pentru fiecare adunare: *se aleg ca mulţimi model pentru termeni, cerute de regula adunării numerelor naturale, mulţimi de beţişoare* din punga cu beţişoare avută de fiecare elev (elevul formează efectiv aceste mulţimi pe bancă, în faţa lui); *se face reuniunea acestor mulţimi;* se numără elementele reuniunii obţinute, scriind rezultatul adunării: $7 + 5 = 12$.

La prima adunare, $7 + 5 =$, elevii execută în bănci după fiecare etapă, cele explicate de învăţător în etapa respectivă. Numai după terminarea lucrului în bănci învăţătorul explică etapa următoare.

La sfîrşitul efectuării primei adunări, cîţiva elevi explică modul în care au procedat. După ce există certitudinea că au înţeles cu toţii ce trebuie făcut, se propune elevilor efectuarea în mod asemănător a celorlalte două adunări. Cînd au terminat cu toţii, se cer rezultatele obţinute de cîţiva elevi, cerîndu-le să explice cum au procedat. Se indică rezultatele corecte, dacă este necesar se dau explicaţii separate unor elevi care mai întîmpină dificultăţi, în timp ce celorlalţi elevi li se propun alte exerciţii asemănătoare cu acestea.

Se scriu apoi pe tablă adunările:

$$9 + 4 = \quad ; \qquad 3 + 8 = \quad ; \qquad 6 + 7 =$$

Pentru efectuarea lor se propune următorul procedeu, diferit puţin de primul: *Se aleg ca mulţimi model pentru termeni, mulţimi de beţişoare* luate din punga de pe bancă. Pentru prima adunare se obţine pe bancă o mulţime cu 9 beţişoare şi una cu 4 beţişoare. *Se ia în mînă una din cele două mulţimi de beţişoare (de preferinţă aceea cu mai puţine beţişoare), să zicem mulţimea celor 4 beţişoare. Se pune din ea cîte un beţişor, pe rînd, peste mulţimea cu 9 beţişoare, numărînd beţişoarele puse, începînd cu* 10 *(ca şi cum au fost deja numărate elementele primei mulţimi, şi se continuă numărarea cu elementele mulţimii a doua). La epuizarea beţişoarelor din mînă, rezultatul numărării este tocmai numărul elementelor reuniunii, deci rezultatul adunării,* scriind $9 + 4 = 13$.

După ce se face în acest mod prima adunare, sub îndrumarea învăţătorului, elevii le vor efectua asemănător pe celelalte două.

Se vor face scurte verificări şi aprecieri asupra modului în care au lucrat elevii, apoi li se va cere părerea care dintre cele două procedee folosite pînă acum, li se pare mai uşor.

În urma discuţiilor învăţătorul va sublinia că la adunările făcute, **partea dificilă este numărarea elementelor reuniunii,** *aceasta neobţinîndu-se gata pregătită pentru a-i numi şi scrie numărul elementelor sale* (nu are structură *numerică zecimală).*

Această pregătire trebuie făcută de noi, după ce s-a obţinut reuniunea. Ca exerciţiu în acest sens se propune efectuarea adunărilor:

$$9 + 3 = \qquad 5 + 8 = \qquad 7 + 5 =$$

Se recomandă următorul procedeu de lucru:

Se aleg ca mulţimi model pentru termeni, mulţimi de beţişoare din punga de pe bancă. Pentru prima adunare se obţine pe bancă o mulţime cu 9 beţişoare şi una cu 3 beţişoare. *Se face reuniunea lor, obţinînd pe bancă o singură mulţime de beţişoare, al cărei număr de elemente dorim să-l aflăm.*

Pentru aflarea numărului elementelor ei, aplicăm procedeul cunoscut de la numirea şi scrierea numerelor mai mari ca zece: separăm din mulţimea noastră o submulţime de zece beţişoare (pe care le legăm cu sfoară într-un mănunchi); *numărăm mulţimea beţişoarelor rămase în afara zecii. Găsim structura numerică zecimală a reuniunii:* 1 zece şi 2 beţişoare. *Pe baza ei, numim numărul elementelor reuniunii,* doisprezece, *şi scriem* $9 + 3 = 12$.

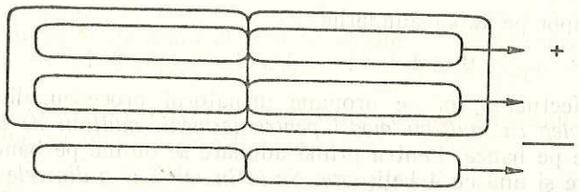
După ce, sub îndrumarea învăţătorului, se face prima adunare pe această cale, elevii vor face asemănător celelalte două adunări, urmate de o scurtă verificare şi apreciere a rezultatelor şi a modului de lucru, de către învăţător.

Deducerea regulii de calcul

Discutînd *cele trei modalități de lucru folosite*, învățătorul va atrage atenția că toate *rămîn greoaie. Ar fi necesară o regulă de adunare care să ne ducă mai repede la rezultat, fără a fi nevoiți să mai folosim mulțimi model.* El anunță elevii că de găsirea unei astfel de reguli se va ocupa în continuare.

Elevii strîng materialul didactic de pe bănci.

Se prezintă panoul cu figura 125, din trusa învățătorului pentru predarea operațiilor cu numere naturale:



Se scriu pe tablă adunările:

$$7 + 5 = \quad ; \qquad 8 + 6 = \quad ; \qquad 2 + 9 =$$

Pentru efectuarea primei adunări, se completează cu discuri panoul astfel încît să formăm figurile numerice ale termenilor. Obținem figura 146. *Se observă că 3 elemente din a doua mulțime sînt necesare pentru a completa o zece, împreună cu cele 7 elemente ale primei mulțimi.*

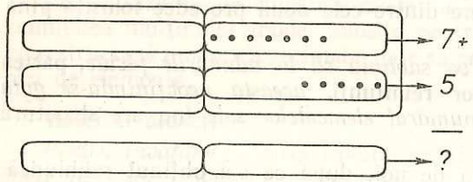


Fig. 146

Se iau cele 3 discuri negre de pe panou, împreună cu cele 7 cu care am completat o zece, și în locul lor punem un triunghi verde în figura numerică de sub reuniunea mulțimilor model folosite pentru termeni (care este chiar figura numerică ce dă numărul elementelor reuniunii respective). *Au rămas două discuri negre din cele 5 cîte a avut mulțimea a doua, pe care le coborîm în figura numerică de jos.* Cele spuse mai sus sînt sugerate în figura 147. Această figură, sub formă de planșă, va fi expusă în fața clasei.

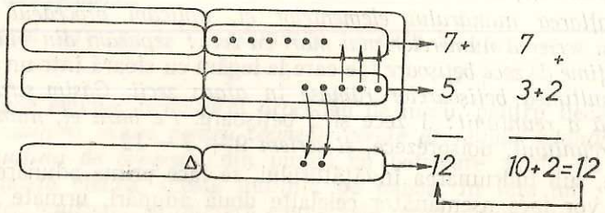


Fig. 147

După ce se fac transformările respective, panoul arată ca în figura 148. Se scrie pe tablă: $7 + 5 = 12$.

Se propune unor elevi ca, folosind trusa învățătorului, să facă în mod asemănător celelalte două adunări.

Elevii vor fi puși să efectueze și alte adunări de acest fel în scopul deprinderii modului de lucru.

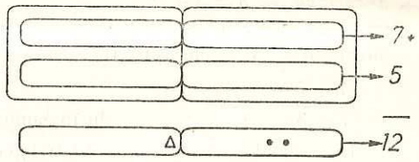


Fig. 148

După ce toți elevii și-au însușit tehnica de lucru, învățătorul, prin discuții cu clasa, va evidenția etapele principale în adunările de acest fel, și modul în care sînt rezolvate:

— găsirea numărului cu cît trebuie completat un termen pînă la 10. În cazul nostru, ca să aflăm cu cît trebuie completat 7 pînă la 10 este necesară operația:

$$10 - 7 = 3$$

care se face în minte, sau se scrie;

— găsirea numărului ce rămîne din termenul din care am luat ca să completăm pe celălalt pînă la 10. În cazul nostru, acesta se află prin operația:

$$5 - 3 = 2$$

care se face în minte, sau se scrie;

— zecea formată și unitățile rămase (2 în cazul nostru) ne dau numărul ce reprezintă suma căutată

$$10 + 2 = 12.$$

Rezumînd cele de mai sus, rezultă că putem face adunarea $7 + 5 =$ prin calcul, fără a folosi mulțimi model, ci anumite operații ajutătoare. Calculul respectiv[1] se poate așeza astfel:

$$\begin{array}{ll} 7 + 5 = & \\ \hline 10 - 7 = 3 & \text{cu cît trebuie completat 7 pînă la 10;} \\ 5 - 3 = 2 & \text{cît rămîne din 5 după completarea zecii;} \\ \hline 7 + 5 = 7 + (3 + 2) & \\ \quad = (7 + 3) + 2 & \\ \quad = 10 + 2 & \\ \quad = 12 & \text{cît este suma } 7 + 5. \end{array}$$

Numai după ce învățătorul se convinge, prin discuții cu clasa și prin efectuarea la tablă de către elevi a celorlalte două adunări propuse, că toți elevii au înțeles efectuarea adunărilor de acest fel scriind operațiile ajutătoare, le va propune exerciții asemănătoare ca muncă independentă și le va permite treptat să facă oral operațiile ajutătoare, scriind doar rezultatul.

Într-o etapă ulterioară, după ce tehnica de calcul dată mai sus va fi perfect însușită, se va permite elevilor care sesizează direct cu cît trebuie completată zecea și cît rămîne din celălalt număr (în exemplul nostru, atunci cînd elevii

[1] În sistemul de numerație zecimal.

sesizează descompunerea convenabilă a lui 5 în 5 = 3 + 2, pentru a efectua 7 + 5 =), să spună direct rezultatul adunării, fără a mai face nici în scris, nici oral, operații ajutătoare.

Observație: *Toată dificultatea adunării cu trecere peste 10, ca 7 + 5 = , constă în a găsi descompunerea 5 = 3 + 2.*

Dacă elevii găsesc această descompunere, nu pot întîmpina nici o dificultate pentru a spune direct suma. A-i obliga să scrie operații ajutătoare de felul:

$$\begin{array}{l} 7+5= \\ \hline 7+3=10 \\ 10+2=12 \\ \text{deci } 7+5=12 \end{array}$$

nu înseamnă a le da un mijloc de găsire a sumei (mijloc care trebuia să-i învețe cum să-l descompună pe 5 în 3 + 2), ci a-i pedepsi pe copii cu corvoada scrierii inutile a unor lucruri deja cunoscute.

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Pe bănci rămîn doar manualele de matematică, care se deschid la tema a 4-a: „Adunarea a două numere scrise cu cîte o cifră". Elevii, îndrumați de învățător, vor spune ce sugerează fiecare din figurile existente la această temă.

Ei vor rezolva pe caiete exercițiile date ca exemple în manual, scriind și operațiile ajutătoare, apoi își vor verifica lucrul urmărind rezolvarea din manual.

În clasă se vor lucra exercițiile: 1 și 2, primele două coloane din fiecare; 7 Acasă se vor propune: 1 și 2, restul exercițiilor; 3; 4; 5; 6; 8; 9. Ele vor fi amănunțit discutate în orele următoare.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 4-a

Problema 7

Figura 149.

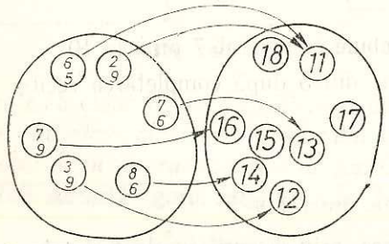


Fig. 149

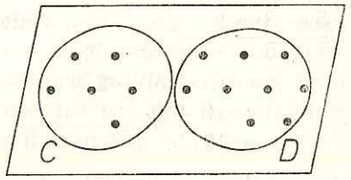


Fig. 150

Problema 8

Nu a ales mulțimile disjuncte, așa cum cere regula adunării. Figura 150.

Problema 9

În cutie nu există alte piese, care să nu fie nici roșii, nici cercuri. Deci, piesele care nu sînt cercuri sînt triunghiuri roșii. Numărul maxim de piese este realizat cînd intersecția mulțimii pieselor roșii, cu a cercurilor, este vidă (fig. 151). În acest caz, în cutie avem 6 + 7 = 13 piese.

Numărul minim de piese este realizat cînd intersecția are cel mai mare număr posibil de piese, deci cînd avem 5 cercuri roșii (fig. 152). În acest caz avem 1 + 7 = 8 piese în cutie. (Nu pot fi 6 cercuri roșii, pentru că atunci nu am mai putea avea măcar un triunghi roșu).

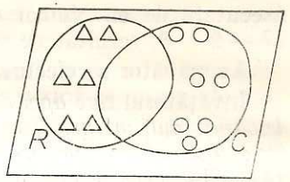


Fig. 151

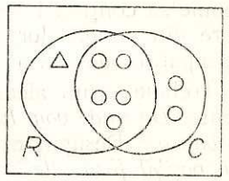


Fig. 152

TEMA A 5-A: SCĂDEREA CU TRECERE PESTE ZECE A UNUI NUMĂR SCRIS CU O CIFRĂ, DINTR-UN NUMĂR CUPRINS ÎNTRE 10 ȘI 20

Scop: Deducerea unui procedeu de calcul aplicînd definiția cu mulțimi a scăderii numerelor naturale.

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile 144, 145, 145*. Trusa învățătorului pentru adunarea și scăderea numerelor naturale.

Pentru elevi: Punga cu bețișoare (20 bucăți).

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Se scriu pe tablă scăderile care urmează a fi efectuate

18 — 5 = 17 — 9 = 14 — 8 = 13 — 9 =

Elevii încearcă efectuarea după regula cunoscută; se scad unitățile scăzătorului din cele ale descăzutului:

$$\begin{array}{r} 18- \\ 5 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17- \\ 9 \\ \hline ? \end{array} \quad \begin{array}{r} 14- \\ 8 \\ \hline ? \end{array} \quad \begin{array}{r} 13- \\ 5 \\ \hline ? \end{array}$$

Se constată că aplicarea acestei reguli este posibilă numai în primul caz. Pentru celelalte scăderi este necesar un alt procedeu de lucru.

Deocamdată *vom folosi definiția cu mulțimi a scăderii a numerelor naturale.* În acest scop, prin discuțiile învățătorului cu elevii este reamintită această definiție:

a) Se alege o mulțime model cu atîtea elemente cît este descăzutul.

b) Se alege în ea o submulțime cu atîtea elemente cît este scăzătorul.

c) Se formează mulțimea diferență între mulțimea model a descăzutului și cea a scăzătorului. Numărul elementelor acestei mulțimi este rezultatul scăderii.

Se propune ca, folosind drept mulțimi model, mulțimi de bețișoare din pungile lor, elevii să efectueze scăderea 17 — 9 = aplicînd definiția de mai sus. În acest scop definiția este reluată pe etape, elevii executînd în bănci ceea ce se cere în ea, iar învățătorul verificînd prin sondaj corectitudinea celor

executate de ei. Numai după aceea se trece la etapa următoare. Se obține 17 — 9 = 8, rezultat ce se scrie pe tablă.

Asemănător se efectuează scăderile 14 — 8 = și 13 — 5 = .

Învățătorul *cere apoi elevilor să efectueze scăderea* 12 — 7 = , *folosind pentru descăzut mulțimi model ce sînt pregătite pentru numirea numărului elementelor lor (au structură numerică zecimală)*. Procedeul de lucru este sugerat în figurile 144 și 145 care se prezintă sub formă de planșă.

Discutînd figura 144 se stabilește că mulțimea model pentru descăzut trebuie să conțină 1 zece și 2 unități. Elevii aleg o astfel de mulțime de bețișoare din pungile lor, așezînd-o pe bănci astfel încît submulțimea de 10 să fie separată de aceea de 2 bețișoare.

Trebuie acum aleasă o submulțime model pentru scăzător, avînd 7 elemente. *De unde vom lua cele 7 elemente, din cele 10, din cele 2 bețișoare aflate pe bancă?* Desigur, există și alte posibilități, dar *este firesc a le lua de unde este posibil fără alte complicații, deci din cele 10 bețișoare.* Luînd 7 din ele și așezîndu-le separat pe bancă ca mulțime model pentru scăzător, din zecea respectivă rămîn :

10 — 7 = 3 (se scrie pe tablă și în caiete)

Figura 145 sugerează formarea mulțimii diferență între cele două mulțimi model, a descăzutului și a scăzătorului : se reunește mulțimea celor 3 elemente rămase din zece, cu mulțimea celor 2 elemente aflate inițial în mulțimea model a descăzutului. Este evident că numărul elementelor mulțimii diferență este 3 + 2 = 5.

Discutînd cele scrise la dreapta figurii 145 pe planșă, se constată că sînt tocmai calculele ce trebuie făcute pentru a efectua scăderea :

$$\begin{aligned} 12 - 7 &= (10 + 2) - 7 \\ &= (10 - 7) + 2 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Folosind același procedeu, elevii vor efectua 15 — 6 = , scriind în final modul de calcul.

Scăderile 13 — 8 = ; 14 — 6 = ; 17 — 8 = , vor fi efectuate doar prin calcul, fără a mai folosi mulțimi model :

15—6=(10+5)—6	13—8=(10+3)—8	14—6=(10+4)—6	17—8=(10+7)—8
=(10—6)+5	=(10—8)+3	=(10—6)+4	=(10—8)+7
= 4+5	= 2+3	= 4+4	= 2+7
= 9	= 5	= 8	= 9

În scopul consolidării modului în care se face scăderea și a sintetizării sub forma unei reguli de calcul cît mai comode, *se va folosi din trusa învățătorului* pentru predarea adunării și scăderii, *panoul cu aspectul din figura 145 a.*

Învățătorul îl folosește pentru a efectua, de exemplu, 12 — 7 =

a) *Așază pe panou un triunghi albastru și două discuri negre, așa cum se vede în figura 145, a, realizînd mulțimea model pentru descăzut.*

b) Neputînd alege pentru scăzător mulțimea model cu 7 elemente, din mulțimea „unităților" descăzutului 12, se *înlocuiește triunghiul albastru care*

reprezintă o zece, cu 10 discuri negre, mulțimea model a descăzutului arătînd acuma ca în figura 145 b.

c) *Din mulțimea celor 10 discuri negre care au înlocuit zecea, se alege o submulțime de 7 discuri negre care sînt puse în figura numerică ce reprezintă scăzătorul (fig. 145 c).*

d) *Mulțimea celor 10 — 7 discuri rămase din zecea menționată, reunită cu mulțimea celor 2 discuri existente inițial în mulțimea model a descăzutului, formează mulțimea diferență.*

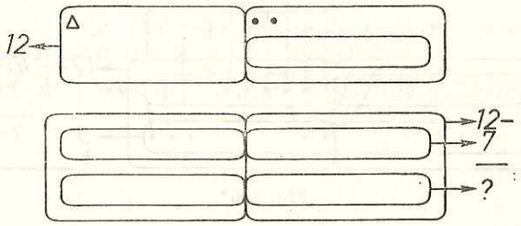


Fig. 145 a

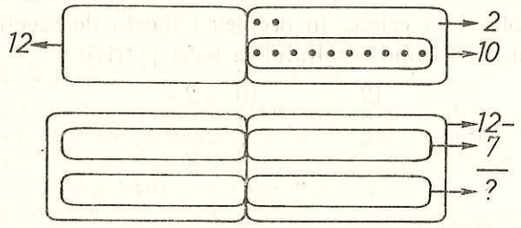


Fig. 145 b

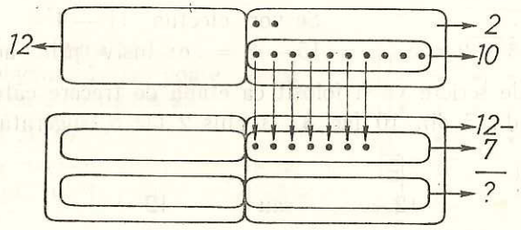


Fig. 145 c

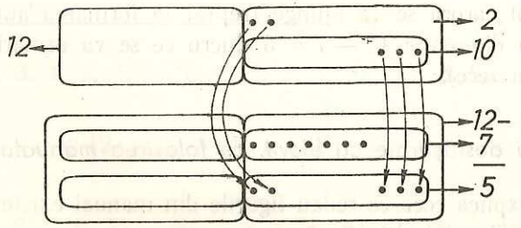


Fig. 145 d

Elementele ei se vor aşeza cum arată figura 145 d în care este realizată separarea, din mulţimea model a descăzutului, a mulţimii model a scăzătorului şi este pusă în evidenţă mulţimea diferenţă dintre primele două.

Toate aceste etape vor fi recapitulate pe figura 145* care se va prezenta sub formă de planşă. Apoi, elevii vor efectua singuri alte scăderi de acest fel, folosind trusa învăţătorului, pînă vor deprinde modul de lucru.

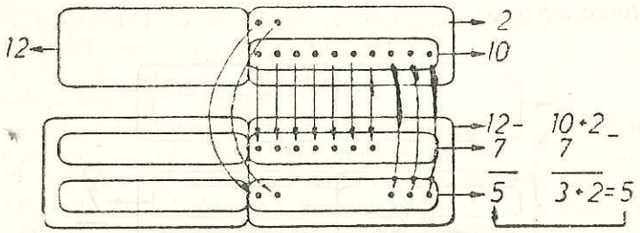


Fig. 145*

Discuţiile se vor încheia observînd că în dreapta figurii pe planşa 145* sînt scrise prescurtat operaţiile prin care s-a găsit rezultatul scăderii. Ele se vor scrie pe tablă şi în caiete, în ordinea indicată de săgeţi (acestea nu se vor desena, la urmă trecînd rezultatul la locul potrivit:

$$\begin{array}{l} 12 - \\ \underline{7} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 10 + 2 - \\ \underline{7} \\ 3 + 2 = 5 \end{array}$$

În acest mod se va obţine scris:

$$\begin{array}{l} 12 - \\ \underline{7} \\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10 + 2 - \\ \underline{7} \\ 3 + 2 = 5 \end{array}$$

Se vor efectua $11 - 4 =$; $14 - 7 =$; $15 - 8 =$ exclusiv prin acest calcul.

Acest mod de scriere va fi folosit ca etapă de trecere către calcularea diferenţei, gîndind: 7 din 10 fac 3; 3 plus 2 fac 5, sugerată şi de scrierile:

$$\begin{array}{l} \boxed{10} \\ 12 - \\ \underline{7} \\ 5 \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{l} 12 - \\ \underline{7} \\ 5 \end{array}$$

prin intermediul cărora se va ajunge treptat la formarea automatismului de găsire directă a diferenţei $12 - 7 = 5$ (lucru ce se va urmări şi la adunarea cu trecere peste zece).

b) *Activităţi desfăşurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Elevii vor explica ceea ce redau figurile din manual existente la tema respectivă, şi scrierile alăturate fiecăreia.

Se vor citi (de către elevi) şi explica exemplele date în manual. Scrierile:

$$\begin{array}{l} \boxed{10} \\ 15 - \\ \underline{6} \\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 15 - \\ \underline{6} \\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 15 - \\ \underline{6} \\ 9 \end{array}$$

arată că 6 se scade din 10, diferenţa obţinută, 4, se adună cu 5, obţinînd rezultatul final 9.

În clasă se fac exerciţiile şi problemele: 1, 2, 3 şi 4, primele două coloane; 5; 6.

Pentru acasă se propun: 1, 2, 3 şi 4, restul exerciţiilor; 7; 8; 9; 10. Ele se vor discuta amănunţit în lecţiile următoare.

Indicaţii privind rezolvarea unora din exerciţiile şi problemele propuse la tema a 5-a.

Exerciţiul 1

$$17 - 8 = \qquad \begin{array}{l} 17 - 8 = \\ \hline 10 - 8 = 2 \\ 2 + 7 = 9 \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{l} 17 - \\ \underline{8} \\ 9 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 10 + 7 - \\ \underline{8} \\ 2 + 7 = 9 \end{array}$$

deci: $17 - 8 = 9$

Etc.

Problemele 5, 6 şi 7

Se va folosi limbajul mulţimilor. De exemplu, pentru problema 5: mulţimea florilor din vază are 16 elemente. În această mulţime există o submulţime formată din toate garoafele din vază, care are 9 elemente. Restul florilor din vază formează mulţimea diferenţă dintre mulţimea florilor din vază şi mulţimea garoafelor din vază. Numărul elementelor mulţimii diferenţă se află prin scăderea:

$$16 - 9 =$$

Se poate folosi figura 153.

Pentru problema 7 se poate folosi o figură asemănătoare cu figura 92.

Exerciţiile 9 şi 10

Se fac după modelul exerciţiului 8 de la tema a 7-a, capitolul 4, partea I. Se obţine pentru:

$$5 + a < 12; \quad 14 - a > 8; \quad a - 7 < 8$$

respectiv:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}; \quad \{7, 8, 9, \ldots, 13, 14\}$$

şi pentru:

$$5 + a \leqslant 12; \quad 14 - a \geqslant 8; \quad a - 7 \leqslant 8$$

respectiv:

$$\{0, 1, 2, \ldots, 6, 7\}; \quad \{0, 1, 2, \ldots, 5, 6\}; \quad \{7, 8, \ldots, 14, 15\}.$$

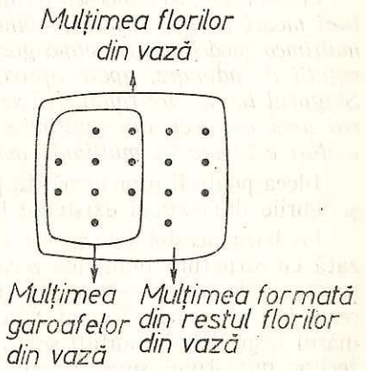


Fig. 153

Capitolul 2

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA CU TRECERE PESTE ORDIN A NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA O SUTĂ

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Folosind cunoștințele despre mulțimi și alegînd mulțimi cu elemente zeci și unități în mod potrivit, se vor face adunări și scăderi pînă la 100 cu trecere peste ordin, ajungîndu-se la automatisme de calcul și la tehnica de calcul în scris, cu așezarea numerelor unele sub altele.

Trecînd de la operații cu mulțimi, la operații cu numere, pentru a ușura urmărirea ideilor se vor folosi în scriere parantezele rotunde.

Se vor rezolva exerciții de tipul: $9 + a = 16$; $13 - a = 8$; $a - 15 = 12$, scriind soluțiile sub forma $a = 16 - 9$; $a = 13 - 8$; $a = 12 + 15$.

Exerciții și problemele de adunare și scădere pînă la 100 cu trecere peste ordin, făcîndu-le și probele acestor operații. De asemenea, se vor rezolva exerciții de forma: $5 + a < 15$; $17 + a < 25$; $35 - a > 24$; $21 - a \geqslant 15$; $a + 13 \leqslant 19$.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

La adunare, să cunoască avantajul pentru găsirea sumei, a alegerii unor mulțimi model pentru termeni, avînd structuri numerice zecimale. În acest mod, mulțimea model pentru sumă găsită prin formarea reuniunii cerute de aplicarea regulii de adunare, apare aproape organizată cu structură numerică zecimală. Singurul lucru care rămîne să se mai facă după formarea reuniunii este separarea unei noi zeci, din mulțimea obținută prin reunirea celor două mulțimi de unități existente în mulțimile model ale termenilor.

Ideea poate fi ușor urmărită privind figurile existente în manual la tema 1 și figurile din manual existente la tema a 2-a.

Pe baza acestei tehnici de găsire a mulțimii model pentru sumă, organizată cu structură numerică zecimală, devine comod a numi și scrie numărul sumă, și de dedus regula practică de adunare. Se adună unitățile între ele, rezultînd un număr format dintr-o zece și un anumit număr de unități. Numărul respectiv de unități se scrie la locul unităților din numărul sumă. Cifra zecilor numărului sumă se află adunînd 1 zece rezultată din adunarea unităților, cu numerele de zeci de existente la fiecare termen.

La scădere, utilizarea unor mulțimi model pentru descăzut organizate cu structuri numerice zecimale face firească alegerea mulțimii model pentru scăzător tot cu structură numerică zecimală. Alegerea respectivă se va face astfel (nu este singura posibilitate): *întrucît scăzătorul are mai multe unități decît descăzutul, nu putem separa, din mulțimea unităților de la mulțimea model a descăzutului, atîtea unități cîte sînt la scăzător, și, în consecință, le vom separa din una din zecile mulțimii model a descăzutului; din mulțimea zecilor rămase în mulțimea model a descăzutului se separă atîtea zeci cîte sînt la scăzător; mulțimea diferență rămîne gata organizată cu structură numerică zecimală, așa cum se vede în figurile din manual la temele a 3-a și a 4-a.*

Aceasta face să putem numi și scrie comod numărul diferență și să deducem regula practică de calcul la scădere: se scad unitățile scăzătorului dintr-o zece a descăzutului; unitățile rămase din zecea respectivă se adună cu unitățile descăzutului și obținem cifra unităților din numărul diferență; cifra zecilor numărului diferență se obține scăzînd zecile scăzătorului din cele rămase la descăzut (după luarea de aici a zecii menționate anterior).

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 2

(Număr de ore, orientativ = 18)

Pe baza textului din manual, lecțiile vor putea fi construite după o tehnologie didactică asemănătoare cu cea folosită pînă acum, mai ales începînd de la Capitolul 4, partea I, ținînd seama și de următoarele recomandări:

— Ca material didactic principal se vor folosi: trusele pentru predarea adunării și scăderii numerelor naturale; planșe cu figurile din manual de la temele 1, 2, 3 și 4; pungi de plastic conținînd circa 100 de bețișoare (chibrituri sau scobitori pentru elevi).

— Ca muncă independentă, după ce învățătorul prin discuții cu elevii a clarificat ideile, se vor aplica definițiile cu mulțimi ale adunării și scăderii, folosind ca mulțimi model pentru termeni, mulțimi de bețișoare din pungă, organizate cu structuri numerice zecimale prin legarea a cîte 10 bețișoare. Etapele sînt sugerate, respectiv, de figurile din manual existente la temele 1, 2, 3 și 4. Pe baza acestor etape se va deduce calculul:

$$\begin{aligned} 27 + 5 &= (20 + 7) + 5 \\ &= 20 + (7 + 5) \\ &= 20 + 12 \\ &= 32 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 28 + 36 &= (20 + 8) + (30 + 6) \\ &= (20 + 30) + (8 + 6) \\ &= 50 + 14 \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42 - 7 &= (30 + 10 + 2) - 7 \\ &= 30 + (10 - 7) + 2 \\ &= 30 + 3 + 2 \\ &= 30 + 5 \\ &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 82 - 37 &= (70 + 10 + 2) - (30 + 7) \\ &= (70 - 30) + (10 - 7) + 2 \\ &= 40 + 3 + 2 \\ &= 40 + 5 \\ &= 45 \end{aligned}$$

care se va folosi doar scurt timp după prezentarea cazului respectiv, și în continuare numai la calculul oral.

— După demonstrația făcută de învățător cu trusa sa, elevii vor face singuri, folosind trusa învățătorului, operații asemănătoare celor explicate în manual pe figurile existente la temele 1, 2, 3 și 4, deducîndu-se regulile de calcul corespunzătoare.

— Ca etapă intermediară lucrului cu mulțimile model formate pe panourile trusei, și aceea a aplicării exclusive a regulilor obișnuite de calcul, se vor folosi scrieri de forma :

$$\begin{array}{l} 27 + \\ \underline{5} \\ ? \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 20 + 7 \\ \underline{5} \; + \\ 20 + 12 = 32 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \boxed{1} \\ 27 + \\ \underline{5} \\ 32 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 27 + \\ \underline{5} \\ 32 \end{array}$$

introduse treptat, în această ordine, care favorizează automatizarea calculului și păstrarea în final a tehnicii obișnuite.

Primul mod de scriere de mai sus, pentru situațiile de la temele 2, 3 și 4 va putea arăta astfel :

$$\begin{array}{l} 28 + \\ \underline{36} \\ ? \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 20 + 8 \\ + \\ \underline{30 + 6} \\ 50 + 14 = 64 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 42 - \\ \underline{7} \\ ? \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 30 + 10 + 2 \\ - \\ \underline{7} \\ 30 + 3 + 2 = 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 82 - \\ \underline{37} \\ ? \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 70 + 10 + 2 \\ \underline{30 + 7} \\ 40 + 3 + 2 = 45 \end{array}$$

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la Capitolul 2

Exercițiul 5 (tema a 3-a)

Pentru : $a + 2 = 31$; $8 + a = 75$; $a - 9 = 43$; $67 - a = 8$ avem, respectiv : $a = 29$; $a = 67$; $a = 52$; $a = 59$.

Pentru : $a + 9 < 21$ găsim prin încercări :

$$\{0, 1, 2, ..., 10, 11\}.$$

Pentru : $30 < a + 5 < 38$ căutăm întîi, prin încercări, mulțimea numerelor naturale a care fac adevărată $30 < a + 5$. Se găsește $B = \{26, 27, 28, 29$ $30, 31, 32, 33, 34, ...\}$.

Căutăm acum mulțimea numerelor naturale a care fac adevărată $a + 5 <$ < 38. Prin încercări, găsim :

$$C = \{0, 1, 2, 3, ..., 24\ 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32\}.$$

Mulțimea numerelor naturale a, pentru care sînt îndeplinite amîndouă condițiile cerute, va fi alcătuită din toate numerele naturale ce aparțin și mulțimii B și mulțimii C, adică este intersecția celor două mulțimi B și C :

$$\{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32\}.$$

Exercițiul $42 < a - 8 < 53$.

Pentru $42 < a - 8$ se găsește mulțimea $D = \{51, 52, 53, 54 ...\}$. Pentru $a - 8 < 53$ se găsește mulțimea $E = \{8, 9, 10, ..., 57, 58, 59, 60\}$. Scrierea $42 < a - 8 < 53$ va fi făcută adevărată de orice număr natural a care aparține și la D și la E, deci intersecției lor : $\{51, 52, ..., 58, 59, 60\}$.

Asemănător se rezolvă $20 < a - 7 < 25$.

Exercițiul 3 (tema a 4-a).

Prin încercări, se găsește pentru :

$$17 + a < 25 ; \qquad 21 - a \geqslant 15 ; \qquad a + 48 \leqslant 51$$

respectiv :

$$\{0, 1, 2, ..., 6, 7\} ; \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,\} ;$$
$$\{0, 1, 2, 3\}.$$

Problema 12 (tema a 4-a).

Soluțiile rezultă din figura 154 în care se reprezintă întîi cele 5 elemente din intersecție :

a) $12 - 5 = 7$; b) $13 - 5 = 8$; c) $7 + 8 + 5 = 20$

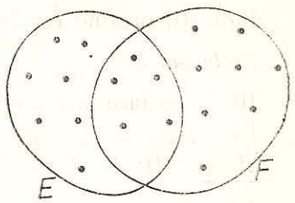


Fig. 154

Problema 13 (tema a 4-a).

a) $72 - 58 = 14$; b) 58 ; c) 72.

Capitolul 3

ADUNAREA MAI MULTOR NUMERE NATURALE

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Adunarea mai multor numere naturale.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Să cunoască posibilitatea adunării mai multor numere naturale prin adunarea a cîte două numere (aplicînd deci asociativitatea adunării), eventual schimbînd mai întîi convenabil ordinea termenilor (în baza comutativității adunării).

Să cunoască regula practică : se adună unitățile între ele și zecile între ele. Este comod în acest scop să se scrie numerele unele sub altele, unități sub unități și zeci sub zeci.

Dacă adunînd unitățile obținem un număr format din zeci și unități, unitățile respective dau cifra unităților de la rezultat, zecile adunîndu-se împreună cu zecile ce se găsesc la termeni.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 3

(Număr de ore, orientativ = 4)

Învățătorul își poate construi cu ușurință lecțiile din acest capitol, pe baza textului din manual, la care va adopta tehnologia didactică folosită la lecțiile anterioare.

Ca material didactic este suficientă trusa învăţătorului pentru predarea operaţiilor cu numere naturale, din care se vor folosi panourile conţinînd cele două figuri existente în manual la capitolul respectiv. Aceste figuri vor fi prezentate şi sub formă de planşe, pe care se va urmări, la fixare, deducerea regulilor de calcul.

Manualul va fi folosit, de asemenea, pentru fixarea ideilor, elevii trebuind să explice tehnicile de lucru scrise şi să spună ceea ce redau figurile.

Indicaţii privind rezolvarea unora din problemele propuse la Capitolul 3

Problema 3

10 + se face adunarea înlocuind, pe rînd,* cu una din cifrele :
15
2* 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

Problema 6

Figura 155.

$$32 + 18 + 28 = 78.$$

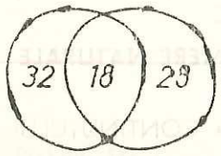


Fig. 155

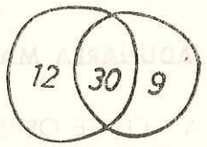


Fig. 156

Problema 7

Figura 156.

$$12 + 30 + 9 = 51 ; \quad 12 + 30 = 42 ; \quad 30 + 9 = 39.$$

III. NOŢIUNI DE GEOMETRIE (8 ore)

SCURTE OBSERVAŢII ASUPRA CONŢINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ŞCOLARĂ

Cunoaşterea intuitivă a centimetrului şi milimetrului, cu ajutorul riglei gradate, fără transformări. Măsurarea lungimii unor segmente sau construirea unor segmente de lungime dată.

Elemente intuitive de geometrie. Linii drepte, frînte, curbe ; linii închise şi deschise ; interiorul şi exteriorul unei linii închise (intuitiv). Măsurarea lungimilor unor linii frînte date. Noţiunea de perimetru (intuitiv), pe baza figurilor plane cunoscute. Calculul perimetrului unor figuri date. Noţiunile de lungime, lăţime, înălţime, intuire, pe baza corpurilor geometrice cunoscute în clasa I. Folosirea riglei gradate.

2. CUNOŞTINŢE ŞI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Cunoştinţele şi deprinderile prevăzute mai sus, formate pe cale intuitivă, fără a se cere definiţii riguroase şi verbalizări obositoare.

IV. NUMERELE NATURALE PÎNĂ LA O MIE

Capitolul 1
NUMIREA, SCRIEREA ȘI CITIREA

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Cu mulțimi ce au între 100 și 1 000 elemente, se fac exerciții practice de separare de submulțimi disjuncte a cîte 10 elemente. Se consideră mulțimea avînd ca elemente toate zecile obținute și i se aplică același procedeu, numind fiecare mulțime de 10 zeci, o sută. Se obține astfel o mulțime cu elementele sute și o mulțime cu mai puțin de 10 zeci (deci cu elementele zeci), din mulțimea zecilor. Se formează trei mulțimi din mulțimea inițială: a sutelor, a zecilor și a unităților. Sutele sînt numite unități de ordinul al treilea.

Se numește numărul elementelor mulțimii inițiale, enunțînd cîte sute, cîte zeci și cîte unități sînt în fiecare din cele trei mulțimi formate după procedeul de mai sus. Scrierea de forma 374. Cazurile de forma 407; 630; 300.

Sublinierea faptului că fiecare mulțime ce formează o unitate de un anumit ordin este formată din zece elemente ce sînt mulțimi reprezentînd un ordin imediat mai mic, cu excepția unităților de ordinul unu.

Numerele de la 100 la 200 în ordine crescătoare. Numărarea de la 100 la 200. Numărarea din zece în zece de la 100 la 200 în ordine crescătoare și descrescătoare. Analog se va proceda cu celelalte numere din sută în sută, pînă la 1 000, nu insistîndu-se asupra enunțării tuturor numerelor, ci asupra principiului formării, numirii și scrierii lor. Numărarea din sută în sută pînă la 1 000, în ordine crescătoare și descrescătoare.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Ideea organizării ca structură numerică zecimală a unei mulțimi avînd numărul elementelor între o sută și o mie.

Folosirea structurii numerice zecimale pentru numirea și scrierea numerelor de la o sută la o mie. Unitățile de ordinul unu, doi și trei și locul lor în scrierea numărului. *Figura numerică corespunzătoare unui număr scris cu trei cifre, ca mulțime model pentru acel număr.*

Cum putem obține toate numerele naturale de la o sută la o mie, în ordine crescătoare. Reguli pentru compararea acestor numere.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 1

(Număr de ore, orientativ=7)

Pentru predarea temelor din acest capitol se va folosi o tehnologie didactică asemănătoare cu cea de la capitolul 3, „Numerele naturale pînă la o sută", bineînțeles, adaptată noilor cerințe. Aceste cerințe decurg limpede din conținutul manualului la capitolul respectiv.

Ca exemple de mulțimi cu peste o sută de elemente și de organizare a acestora cu structură numerică zecimală, se vor folosi mulțimi de bețișoare, adecvate demonstrațiilor făcute de învățător. Ele pot fi aduse gata legate în mănunchiuri de cîte zece, și încă cîteva bețișoare. Legarea zecilor în mănunchiuri de cîte o sută trebuie să aibă loc în fața elevilor. Sutele, zecile și unitățile vor fi apoi puse pe un panou, prevăzut din timp cu cuișoarele necesare și pe care sînt trasate linii, obținîndu-se aspectul din figura 157.

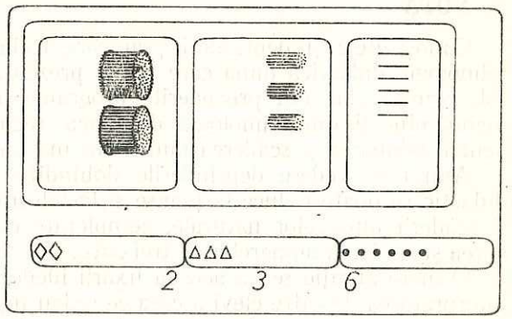


Fig. 157

În figura numerică din partea de jos a panoului sutele sînt indicate prin pătrate roșii, zecile prin triunghiuri albastre și unitățile prin discuri negre (în figura 157 reprezentate prin puncte).

În funcție de condițiile concrete ale clasei, se va aprecia dacă este sau nu necesar a cere elevilor să aducă o pungă cu bețișoare pregătită în mănunchiuri de cîte zece, așa cum s-a recomandat pentru învățător, și să se execute ca muncă independentă în bănci, organizarea unei mulțimi cu peste o sută de elemente, cu structură numerică zecimală.

Se va acorda toată atenția intuirii figurilor din manual, pentru perceperea vizuală a zecii, sutei și miei, comparativ una cu alta. Elevii vor explica ceea ce redau figurile din manual, insistîndu-se asupra cazurilor cînd lipsesc unități de un anumit ordin.

Se va observa că scrierea sutei are loc după procedeul folosit pentru scrierea numerelor mai mari decît o sută.

Capitolul 2
ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA O MIE FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN (20 ore)

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Apelînd la definițiile adunării și scăderii numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte și diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, folosind mulțimi model organizate cu structuri numerice zecimale și

convenţiile de numire şi scriere a numerelor naturale în sistemul zecimal, se fac adunări şi scăderi pînă la o mie, fără trecere peste ordin.

Se va ajunge la automatisme de calcul şi la tehnica de calcul în scris, cu scrierea numerelor unele sub altele.

Subliniind din nou legătura dintre adunare şi scădere pe baza legăturii dintre reuniune şi submulţimile disjuncte care o formează, se face proba adunării prin scădere şi a scăderii prin adunare şi prin scădere.

Adunarea mai multor numere naturale, fără trecere peste ordin, cînd suma nu depăşeşte o mie.

Exerciţii de tipul: $a + 600 = 724$; $945 - a = 800$, soluţiile scriindu-le sub forma $a = 724 - 600$; $a = 945 - 800$; etc.

Exerciţii şi probleme, nu prea complicate (probleme cu cel mult două operaţii).

NOTĂ

Cunoştinţele şi deprinderile cu care trebuie să rămînă elevii, precum şi tehnologia didactică după care pot fi prezentate în clasă temele acestui capitol, rezultă clar din prevederile programei expuse mai sus, din conţinutul manualului şi din tehnologia didactică recomandată în acest îndrumător, pentru adunarea şi scăderea numerelor mai mici decît o sută.

Avînd în vedere deprinderile dobîndite pînă acum de elevi, materialul didactic se poate reduce la planşe şi la folosirea trusei pentru studiul adunării şi scăderii numerelor naturale, completate cu cele necesare utilizării la adunarea şi scăderea numerelor de trei cifre.

O mare atenţie se va acorda fixării ideilor în partea finală a lecţiilor, prin interpretarea de către elevi a ceea ce redau figurile din manual, deducerii regulilor de calcul, interpretării diverselor modalităţi de scriere folosite.

Ca mulţimi model pentru efectuarea operaţiilor se vor folosi figurile numerice, ceea ce se realizează comod datorită trusei, cu a cărei mînuire elevii sînt deja familiarizaţi pentru numerele de două cifre. La nevoie, înaintea folosirii trusei pentru efectuarea operaţiilor ca:

$200 + 300$ (tema a 2-a); $500 - 200$ (tema a 3-a);
$325 + 461$ (tema a 4-a); $786 - 461$ (tema a 5-a);
$300 + 200 + 400$ şi $231 + 324 + 143$ (tema a 6-a).

se pot revedea după manual (sau chiar repeta calculul cu ajutorul trusei învăţătorului), operaţiile:

$20 + 30$ (tema 1, capitolul 4, partea I); $50 - 20$ (tema a 2-a, capitolul 4, partea I); $32 + 46$ (tema a 6-a, capitolul 4, partea I); $78 - 32$ (tema a 7-a, capitolul 4, partea I); $24 + 12 + 43$ (tema 1, capitolul 3, partea a 2-a).

Indicaţii privind rezolvarea unora din exerciţiile şi problemele propuse la capitolul 2

Exerciţiul 2 (tema 1 la sfîrşit).

$532 = 500 + 30 + 2$; $790 = 700 + 90$; $304 = 300 + 4$; $27 = 20 + 7$ etc.

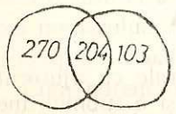


Fig. 158

Problema 8 (tema a 4-a, sub titlul „Exerciţii şi probleme").

$270 + 204 = 474$; $204 + 103 = 307$.

Problema 9 (idem).

$320 + 210 = 530$; $210 + 107 = 317$.

Problema 5 (tema a 5-a, sub titlul „Exerciţii şi probleme").

a) {50, 51, 52, ..., 58, 59}.

b) Se calculează pe rînd: $999 - 50 =$; $999 - 51 =$; $999 - 52 =$ etc.

Problema 7 (idem).

Prin încercări, se găsesc, respectiv:

{0, 1, 2, 3, 4}; {0, 1, 2, 3}; {201, 202, 203}.

Problema 10 (sub titlul „Exerciţii probleme" la sfîrşitul capitolului).

Figura 159.

$321 + 105 + 403 = 829$
$321 + 105 = 426$;
$105 + 403 = 508$.

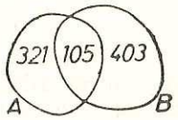


Fig. 159

V. ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE DE LA 0 LA 10

Capitolul 1

ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE FOLOSIND MULȚIMEA PRODUS

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Exerciții de aflare a mulțimii tuturor perechilor (ordonate) la care primul element aparține unei mulțimi date și al doilea aparține altei mulțimi date. Mulțimi factori, mulțime produs (cartezian). Notarea mulțimii produs și scrierea elementelor ei (numite și cupluri).

Legătura între numărul elementelor mulțimilor factori și cel al mulțimii produs. Definirea înmulțirii numerelor naturale folosind mulțimea produs. Factorii înmulțirii. Produsul. Exerciții de aflare a produsului.

Comutativitatea înmulțirii.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÂNĂ ELEVII[1]

Noțiunea de *cuplu sau pereche ordonată*, determină prin stabilirea unei corespondențe oarecare de la un element la un element. Dacă elementul de la care pleacă corespondența este notat cu a și cel la care sosește ea este notat cu b, atunci perechea ordonată care se formează este *notată* (a, b).

Reprezentarea grafică a perechii ordonate printr-o săgeată (fig. 160).

Observați că perechea ordonată (a, b) *diferă de* (b, a), deoarece ele nu au nici același element de plecare, nici același element de sosire (fig. 161).

Pentru mulțimile $A = \{c, d, f\}$ și $B = \{p, s\}$, figura 162 arată *toate perechile ordonate ce pot fi formate astfel încît fiecare din ele să aibă primul element din A și al doilea din B. Mulțimea de cupluri obținută se notează* $A \times B$ *și este numită mulțime produs (cartezian) al mulțimilor A și B.*

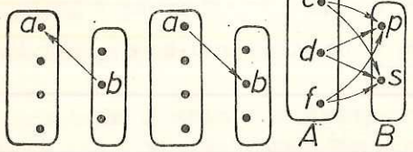


Fig. 160 Fig. 161 Fig. 162

S-au putut forma 6 cupluri de acest fel, indicate prin cele 6 săgeți:

$$A \times B = \{(c, p), (c, s), (d, p) (d, s), (f, p), (f, s)\}.$$

[1] În legătură cu înmulțirea, ca peste tot în carte, nu se va urmări ca elevii să reproducă fidel diversele propoziții formulate, ci să sesizeze faptul matematic conținut în ele, pe baza exemplelor ce se vor analiza.

Mulțimile A și B se numesc *mulțimi factori* pentru mulțimea $A \times B$.

Diagrama mulțimii $A \times B$ este dată în figura 163.

Un *procedeu mai sugestiv* pentru formarea mulțimii produs cartezian $A \times B$, dacă se dau mulțimile factori A și B, este arătat în figura 164, în care apar diagramele mulțimilor factori și diagrama mulțimii produs.

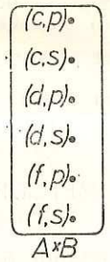


Fig. 163

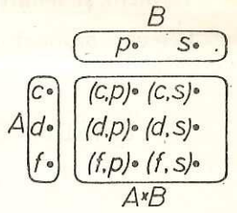


Fig. 164

Elevii vor deprinde utilizarea acestui procedeu. Ei vor face exerciții de aflare a numărului elementelor mulțimii produs, prin numărare. După un suficient număr de exerciții se va trage concluzia că, *înlocuind mulțimile factori cu altele, dar păstrînd nemodificat numărul elementelor din fiecare, mulțimea produs se schimbă păstrînd același număr de elemente ca cea anterioară.*

Aceasta arată că între numerele elementelor mulțimilor factori și numărul elementelor mulțimii produs există o legătură stabilă. *Regula de formare a mulțimii produs face să corespundă la un cuplu de numere naturale, reprezentînd numerele elementelor mulțimilor factori, un număr natural unic, reprezentînd numărul elementelor mulțimii produs.*

Dacă 3 și 2 sînt, respectiv, numerele elementelor mulțimilor factori, atunci numărul elementelor mulțimii produs se notează 3×2 și se găsește prin numărarea elementelor mulțimii produs (fig. 165).

Din cele de mai sus se deduce că, pentru a afla numărul elementelor mulțimii produs, cunoscînd numerele elementelor mulțimilor factori, nu are nici o importanță care anume sînt elementele acestor trei mulțimi. De aceea este convenabil a folosi în acest scop *procedeul simplificat ilustrat în figura 166.*

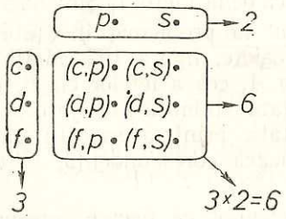


Fig. 165

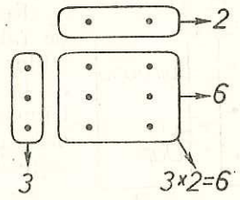


Fig. 166

Această figură are aceeași semnificație ca cea anterioară, dar nu au mai fost notate elementele reprezentate de fiecare punct, acest lucru neavînd nici o importanță în scopul urmărit de noi.

Pe baza cunoștințelor de mai sus se introduce *operația de înmulțire a numerelor naturale* conform regulii date în manual la partea a 5-a, capitolul 1, tema a 2-a punctul (c), regulă al cărei enunț va trebuie cunoscut de elevi.

Aplicarea regulii se va face luînd mulțimi model oarecare pentru factorii înmulțirii, notînd elementele acestora prin litere, scriind mulțimea produs și numărînd elementele ei. Pentru scrierea mulțimii produs se va folosi aranjamentul sugerat în figura 165.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Se va cunoaște: semnificația adunării repetate cu ajutorul mulțimilor; procedee de calcul al sumei; tipurile de probleme care se rezolvă prin adunare repetată; legătura dintre adunarea repetată și înmulțire, cu scrierea adunării repetate ca înmulțire, și a înmulțirii ca adunare repetată (în două moduri); înmulțiri care nu pot fi scrise ca adunări repetate: 0×0; 0×1; 1×0; 1×1; scrierea ca adunări repetate a altor înmulțiri care au factor pe 0; tipuri de probleme care se rezolvă prin înmulțire, deduse din tipurile de probleme care se rezolvă prin adunare repetată.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 2

(Număr de ore, orientativ=6)

Temele din acest capitol sînt astfel redactate în manual, încît nu pot crea dificultăți învățătorului în înțelegerea conținutului, în conceperea și realizarea lecțiilor corespunzătoare. Figurile 187* și 187** sugerează modul de folosire a trusei pentru predarea acestui capitol.

Ne limităm să dăm modele de rezolvare pentru:

Exercițiul 2, *tema* 1

a) $9 + 9 + 9 = 27$ etc.
$9 + 9 = 18$
$18 + 9 = 27$

b) $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ etc.
$8 + 8 = 16$
$16 + 8 = 24$
$24 + 8 = 32$

c) $11 + 11 + 11 = 33$ etc.
$11 + 11 = 22$
$22 + 11 = 33$

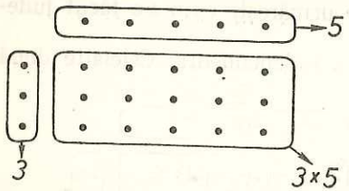


Fig. 196

Exercițiul 1, *tema a* 2-*a*

$14 + 14 + 14 + 14 = 4 \times 14$ etc.

Exercițiul 2, *tema a* 2-*a*

$5 + 5 + 5 = 3 \times 5$. Pentru găsirea numărului 3×5 folosim figura 196 care ne dă, prin numărare $3 \times 5 = 15$. La fel se face $7 + 7 + 7 +$

Exercițiul 1, *tema a* 3-*a* (sub titlul „Exerciții și probleme").

$7 \times 3 = 7 + 7 + 7$; $7 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ etc.
$= 14 + 7$ $\quad = 6 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
$= 21$ $\quad = 9 + 3 + 3 + 3 + 3$
$= 12 + 3 + 3 + 3$
$= 15 + 3 + 3$
$= 18 + 3$
$= 21$

Exercițiul 2, *tema a* 3-*a*

$200 \times 4 = 200 + 200 + 200 + 200 = 800$

$3 \times 221 = 221 + 221 + 221 = 663$

etc.

200 +	221 +
200	221
200	221
200	663
800	

Exercițiul 3, *tema a* 3-*a*

$5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
$= 6 + 3 + 3 + 3$
$= 9 + 3 + 3$
$= 12 + 3$
$= 15$

$3 \times 5 = 5 + 5 + 5$
$= 10 + 5$
$= 15$

Exercițiul 4, *tema a* 3-*a*

$5 \times 3 = 15$. Se calculează cu mulțimea produs sau prin adunare repetată etc.

Exercițiul 9, *tema a* 3-*a*

a) $5 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$= 2 + 1 + 1 + 1$
$= 3 + 1 + 1$
$= 4 + 1$
$= 5$

În al doilea mod nu este posibil, deoarece nu putem aduna pe 5 cu el însuși o singură dată (adunarea presupune minimum 2 termeni).

$1 \times 1 =$; $0 \times 0 =$; $1 \times 0 =$ nu se poate calcula prin adunare repetată.
$6 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. În al doilea mod nu este posibil.
b) $5 \times 1 = 5$ (fig. 197); $1 \times 1 = 1$ (fig. 198); $0 \times 0 = 0$ (fig. 190) etc.

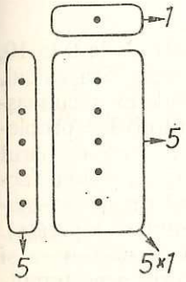


Fig. 197

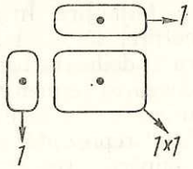


Fig. 198

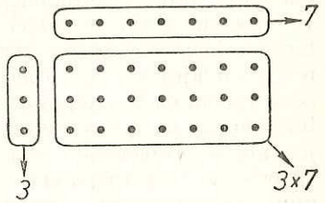


Fig. 199

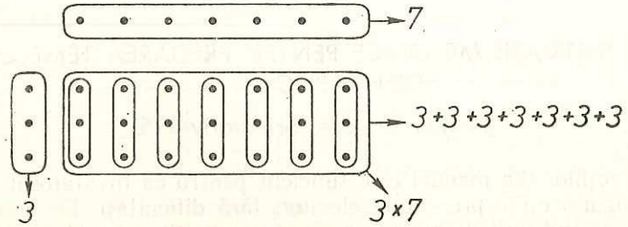


Fig. 200

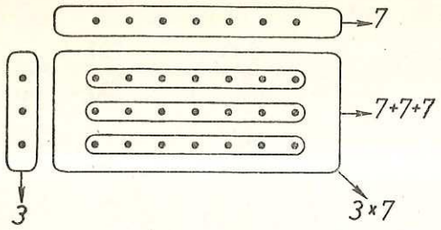


Fig. 201

Exercițiul 11, *tema a* 3-*a*

3 × 7 ; a) fig. 199 ; b) fig. 200 ; c) fig. 201.

Capitolul 3

TABLA ÎNMULȚIRII

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Înmulțirea cînd avem factor pe 0 sau 1. Ideea întocmirii tablei înmulțirii cu ajutorul adunării repetate a comutativității înmulțirii numerelor naturale. Învățarea tablei înmulțirii.

Exerciții și probleme simple de înmulțire.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Să cunoască modalități de calcul a produsului a două numere de la 0 la 10, dar să-și formeze automatisme de enunțare a produsului direct, fără calcul. În procesul învățării tablei înmulțirii, să dobîndească deprinderea recunoașterii problemelor care se rezolvă prin înmulțire. În scrierea rezolvării problemelor cu ajutorul operației de înmulțire, să se obișnuiască a scrie numărul ce se repetă ca termen al adunării, ca al doilea factor al înmulțirii, primul factor arătînd de cîte ori se repetă al doilea ca termen al adunării (în marea majoritate a problemelor înmulțirea intervine în locul unei adunări repetate). În orice caz, se va observa că produsul reprezintă același fel de unități ca și numărul ce se repetă ca termen al adunării scrise prescurtat prin acea înmulțire.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 3

(Număr de ore, orientativ=15)

Textul lecțiilor din manual este suficient pentru ca învățătorul să-și poată construi singur lecțiile prezentate elevilor, fără dificultăți. De aceea ne vom limita la a da indicații de rezolvare a unor exerciții și probleme.

Tema a 4-a

Exercițiul 2 : 2 × 2 = 4 ; 2 × 4 = 8 ; 2 × 6 = 12.
Exercițiul 3 : 2 + 2 = 4 ; 4 + 2 = 6 ; 6 + 2 = 8.
Exercițiul 4 : 3 × 2 = 6 ; 5 × 2 = 10 ; 8 × 2 = 16.
Exercițiul 5 : 2 × 1 = 2 ; 2 × 2 = 4 ; 2 × 7 = 14.

Problema 6 : 2 × 6 = 12. Maria are 12 nuci.

Problema 7 : 2 × 8 = 16. Florin are acum în colecție 16 timbre.

Problema 8 : 1 × 2 = 2 ; 8 × 2 = 16 ; 2 × 2 = 4 ; 6 × 2 = 12 ; 4 × 2 = 8. Se vede că elementele mulțimii *A* care înmulțite cu 2 dau produsul mai mare ca 10 sînt 8 și 6.

Problema 9 : 2 × 4 = 8 ; 2 × 3 = 6 ; 2 × 5 = 10 ; 2 × 8 = 16. Segmentul căutat are respectiv : 8 cm ; 6 cm ; 10 cm ; 16 cm.

Tema a 5-a

Problema 3 : 3 × 6 = 18. În al doilea coș sînt 18 kg de mere.

Exercițiul 4 : 7 × 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + + 2 = 14 ; 7 × 2 = 7 + 7 = 14 etc.

Problema 6 : Figura 202.

Problema 7 : b) 3 × 2 = 6. Lungimea segmentului construit va avea 6 laturi de pătrățele de caiet.

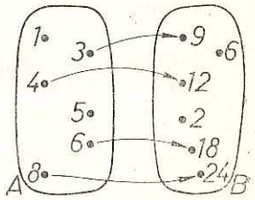


Fig. 202

Tema a 7-a

Problema 4 : 5 × 3 = 15. Pe toate caietele dă 15 lei.

Tema a 8-a

Problema 5 : 5 × 8 = 40 Orezul a costat 40 lei.
4 × 9 = 36. Zahărul a costat 36 lei.
40 + 36 = 76. Orezul și zahărul împreună au costat 76 lei.

Problema 6 : 4 × 8 = 32. Cărțile au costat 32 lei.
42 — 32 = 10. Mărioarei i-au mai rămas 10 lei.

Problema 7 : Fie că se completează figura din manual, după ce a fost făcută mai întîi pe caiet, și numărînd găsim 45 de gropi, fie că se observă operația 5 × 9 = 45.

Partea a doua a problemei cere, în fond, perimetrul :
27 + 27 = 54 ; 15 + 15 = 30 ; 54 + 30 = 84. Gardul va avea 84 m.
Sau : 27 + 15 = 42 ; 42 + 42 = 84. Același rezultat.

Tema a 13-a

Problema 14 : 4 × 7 = 28. Tatăl Oanei are 28 ani.
8 × 7 = 56. Bunicul Oanei are 56 ani.

Problema 15 : 9 × 4 = 36. Pe raft sînt 36 kg făină.
5 × 4 = 20. Pe al doilea raft sînt 20 kg făină.
36 + 20 = 56. Pe ambele rafturi sînt 56 kg făină.

Problema 17 : Prin încercări găsim, respectiv :
{0, 1, 2, 3} ; {0, 1, 2, 3, 4} ; {5, 6, 7, 8, 9, 10} ; {4, 5, 6}.

VI. ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE

Capitolul 1

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE FOLOSIND SEPARAREA DE SUBMULȚIMI DISJUNCTE, FIECARE AVÎND ACELAȘI NUMĂR DE ELEMENTE

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Separerea unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele, avînd fiecare același număr de elemente, folosind: procedeul prin „cuprindere" (dacă ni se dă cîte elemente trebuie să fie într-o submulțime); procedeul prin „părți egale" (dacă ni se dă cîte submulțimi trebuie formate).

Definirea împărțirii numerelor naturale folosind procedeul „prin cuprindere" și procedeul prin „părți egale".

Deîmpărțit, împărțitor, cît, termenii împărțirii.

Pe bază de exemple se va deduce că, fiind adevărată una din scrierile: $20 : 4 = 5$; $20 : 5 = 4$; $4 \times 5 = 20$; $5 \times 4 = 20$, sînt adevărate și celelalte trei.

Exerciții și probleme simple de împărțire.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII*

Sînt cele conținute în programa expusă mai sus și în manual, fiind necesară evidențierea unor aspecte nemenționate în mod explicit.

Trebuie observat că *la separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, alegerea procedeului „prin cuprindere" sau a celui prin „părți egale" nu este o chestiune de preferință*, după voia noastră, *ci se impune unul sau altul din aceste procedee, după conținutul problemei practice care trebuie rezolvată.*

În adevăr, în problemele de această natură ni se spune fie care sînt elementele mulțimii și numărul de elemente ce trebuie să fie într-o submulțime — caz în care se folosește procedeul „prin cuprindere" (vezi descrierea lui la indicațiile metodice) — fie care sînt elementele mulțimii și numărul submulțimilor care trebuie obținut — caz în care se folosește procedeul prin „părți egale" (de asemenea descris la indicațiile metodice).

Deoarece marea majoritate a problemelor de împărțire întîlnite la acest nivel de învățămînt sînt desprinse din situații practice de viață de felul unuia din cele două tipuri de probleme menționate mai sus, rezultă că nu putem lipsi elevii de niciunul din procedeele zise prin „cuprindere" sau prin „părți egale", fără a le reduce șansele de rezolvare a problemelor de împărțire.

---

* În legătură cu împărțirea, ca peste tot în carte, nu se va urmări ca elevii să reproducă fidel diversele propoziții formulate, ci să sesizeze faptul matematic conținut în ele, pe baza exemplelor ce se vor analiza.

Se va observa că înlocuind mulțimea ce a fost împărțită în submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, cu alta avînd tot atîtea elemente ca ea:

a) *dacă păstrăm același număr de elemente într-o submulțime, nu se modifică numărul de submulțimi obținute;*

b) *dacă păstrăm același număr de submulțimi, nu se modifică numărul elementelor obținut într-o submulțime.*

Această observație creează posibilitatea efectuării împărțirii numerelor naturale, de exemplu $18 : 6$, prin:

Procedeul prin „cuprindere":

1° Se ia o mulțime model cu 18 elemente (de exemplu, o mulțime de puncte).

2° Se separă în ea, atît cît este posibil, submulțimi disjuncte, fiecare avînd același număr de elemente, egal cu 6.

3° Dacă nu au rămas elemente necuprinse în submulțimile respective, cu care să nu mai putem completa o nouă submulțime, numărăm cîte submulțimi s-au obținut.

Rezultatul numărării este cîtul împărțirii $18 : 6$.

$$18 : 6 = 3.$$

Dacă rămîn elemente cu care nu putem face o nouă submulțime, zicem că împărțirea numerelor respective nu este posibilă. (Exemple: 8 și 3; 10 și 4 etc.).

Procedeul prin „părți egale".

1° Se ia o mulțime model cu 18 elemente (de exemplu o mulțime de puncte).

2° Se „distribuie" elementele mulțimii model în 6 submulțimi disjuncte toate avînd același număr de elemente.

3° Dacă nu au rămas elemente care nu mai pot fi „distribuite" cu păstrarea aceluiași număr de elemente în fiecare submulțime, numărăm cîte elemente au revenit într-o submulțime.

Rezultatul numărării este cîtul împărțirii $18 : 6$.

$$18 : 6 = 3.$$

Dacă au rămas elemente care nu mai pot fi distribuite în submulțimile formate, cu păstrarea aceluiași număr de elemente în aceste submulțimi, zicem că împărțirea numerelor respective nu este posibilă. (Exemple: 7 și 2; 15 și 6 etc.).

Din exemple se va desprinde observația că, la separarea unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele fiecare avînd același număr de elemente, **numărul submulțimilor obținute cu cîte *n* elemente fiecare, cu ocazia aplicării procedeului prin „cuprindere", este egal cu numărul elementelor obținute într-o submulțime, cu ocazia aplicării procedeului prin părți „egale", dacă formăm *n* submulțimi.** (Elevii nu vor reține enunțul ci faptul sesizat).

Această observație ne asigură că, *la împărțirea a două numere naturale obținem același rezultat fie că o efectuăm cu procedeul prin „cuprindere", fie că o efectuăm cu procedeul prin „părți egale".* Cunoașterea ambelor procedee este însă necesară pentru a putea recunoaște că o anumită problemă practică se rezolvă prin împărțire.

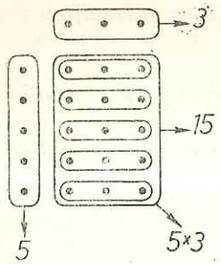


Fig. 203

Valorificînd figuri de felul figurii 203, obținute cu ocazia separării unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, se va observa că sînt simultan adevărate scrierile:

$5 \times 3 = 15$; $15 : 3 = 5$ (efectuată prin cuprindere)
$3 \times 5 = 15$; $15 : 5 = 3$ (efectuată prin părți egale)

ceea ce arată existența unei strînse legături între operațiile de înmulțire și împărțire și oferă posibilitatea de a face probele operațiilor de înmulțire și împărțire.

Termeni și notații ce se vor folosi:

Procedeul prin „cuprindere" și prin „părți egale"; împărțire, deîmpărțit, împărțitor, cît, termenii împărțirii.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 1

(Număr de ore, orientativ=8)

TEMA 1: EXERCIȚII ȘI PROBLEME PREGĂTITOARE

Scop: Reamintirea noțiunii de submulțime sau parte a unei mulțimi și a definiției scăderii numerelor naturale cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa. Introducerea noțiunii de scădere repetată. Cunoașterea separării unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele, avînd fiecare același număr de elemente, folosind: a) procedeul prin „cuprindere"; b) procedeul prin „părți egale".

Recomandări metodice pentru predarea temei

Ne vom ocupa doar de separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, deoarece realizarea celorlalte obiective menționate mai sus nu poate întîmpina dificultăți.

Procedeul prin „cuprindere"

c) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Pe catedră este așezată o cutie conținînd 15 discuri negre (din cele de la trusa pentru adunarea și scăderea numerelor naturale).

Se cere elevilor să separe mulțimea discurilor din cutie în submulțimi disjuncte, fiecare submulțime avînd cîte 3 discuri (aceste submulțimi urmînd a fi așezate pe catedră separat una de alta).

După scurte discuții asupra modului în care poate fi îndeplinită cerința formulată, se stabilește următorul procedeu de lucru: *se iau din cutie tot cîte 3 discuri negre și se așază pe catedră, sub formă de „grămezi", separate de cele așezate anterior, pînă se termină discurile din cutie.*

Un elev este scos la catedră și execută practic cele spuse mai sus. Se observă că în cutie nu rămîne nici un disc. De asemenea, se observă că s-au obținut

5 submulțimi pe catedră, adică tocmai de cîte ori am putut lua cîte 3 discuri din cele 15 aflate în cutie.

Vom spune că 3 se cuprinde în 15 de 5 ori, iar procedeul de separare în submulțimi pe care l-am folosit îl numim „prin cuprindere".

Elevii vor executa în bănci, sub formă de muncă independentă, aceeași sarcină, folosind: boabe de grîu, castane etc.

Se fac probleme asemănătoare alegînd alte mulțimi, dar avînd grijă de fiecare dată a lua numărul elementelor dintr-o submulțime astfel încît, în final, să nu rămînă elemente ale mulțimii alese, necuprinse în aceste submulțimi.

După ce procedeul de lucru va fi bine cunoscut de elevi, învățătorul va face, pe rînd, separarea în submulțimi disjuncte între ele fiecare avînd același număr de elemente, egal cu 4, a mulțimilor formate din 12: discuri negre; 12 triunghiuri albastre; 12 pătrate roșii.

De fiecare dată se va constata că se obțin 3 submulțimi. Așadar, *numărul submulțimilor obținute este perfect determinat numai de numărul elementelor mulțimii inițiale și de numărul elementelor dintr-o submulțime, și nu este influențat de natura acestor elemente.*

Această observație va deveni mai evidentă cînd învățătorul, după rezolvarea practică a problemei de către elevi, va explica de fiecare dată procedeul ce s-a folosit, în felul următor:

1° Execută pe tablă diagrama Euler-Venn a mulțimii date inițial pentru a fi separată în submulțimi, ca în figura 204.

2° Execută pe tablă, alăturat, figura 205 în care sînt 3 linii închise reprezentînd 3 mulțimi: cea de sus în care s-au figurat 4 puncte arată cîte elemente trebuie să luăm în fiecare submulțime; în cea din stînga vom desena cîte un punct pentru fiecare submulțime separată din mulțimea inițială; în cealaltă linie închisă rămasă vom figura tot cîte o submulțime de 4 puncte, de fiecare dată cînd separăm din mulțimea indicată în figura 204 cîte o submulțime de 4 puncte.

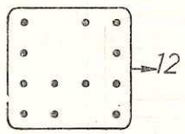


Fig. 204

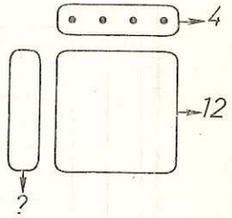


Fig. 205

3° Se trece la realizarea practică a celor explicate mai sus, pe etape.

Etapa 1: Figura 204 ia aspectul figurii 206 și figura 205 ia aspectul figurii 207, după separarea primei submulțimi de 4 elemente.

Etapa a 2-a: Figura 206 ia aspectul figurii 208 și figura 207 iar aspectul figurii 209, după separarea celei de a doua submulțimi de 4 elemente.

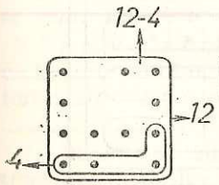


Fig. 206

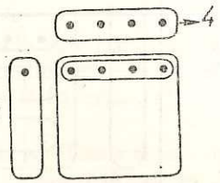


Fig. 207

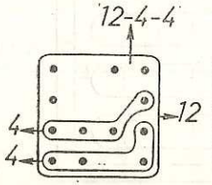


Fig. 208

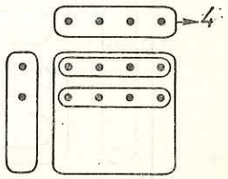


Fig. 209

Etapa a 3-a: Figura 208 ia aspectul figurii 210 și figura 209 ia aspectul figurii 211, după separarea celei de . treia submulțimi, cînd, în cazul nostru, procedeul nu mai poate fi continuat.

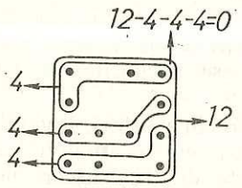


Fig. 210

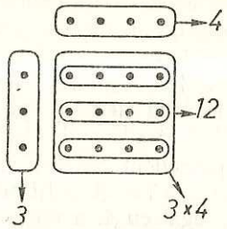


Fig. 211

Etapele de mai sus pot fi realizate pe un panou al trusei, ca în figurile 205* 207*, 209* și 211*.

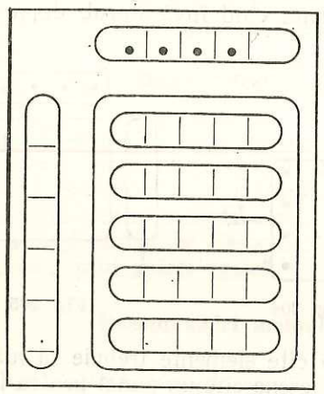


Fig. 205*

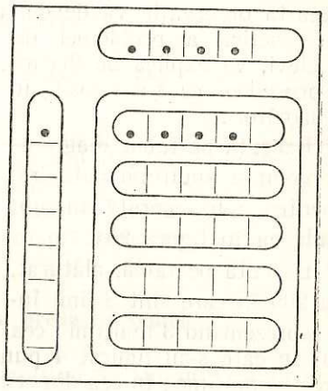


Fig. 207*

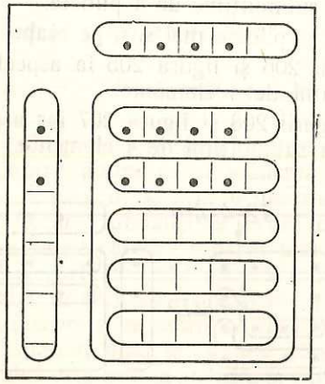


Fig. 209*

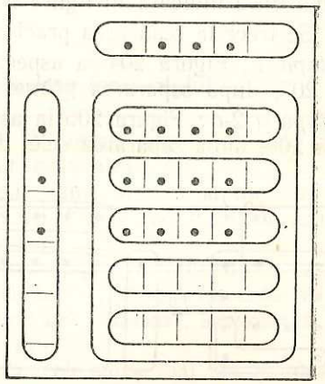


Fig. 211*

Se constată că, repetînd procedeul de mai sus utilizat în cazul în care mulțimea inițială a constat din 12 discuri negre, pentru cazul cînd ea a fost înlocuită cu 12 triunghiuri albastre, cu 12 pătrate roșii etc., pe tablă se obțin de fiecare dată aceleași figuri (iar pe panoul trusei, același aspect).

Așadar, *separînd dintr-o mulțime de 12 elemente* (indiferent care ar fi acestea), *submulțimi disjuncte între ele de cîte 4 elemente fiecare, se obțin totdeauna 3 submulțimi.*

Observăm că în figura 211 mulțimea din stînga are 3 elemente, atîtea cîte submulțimi s-au obținut, iar mulțimea de sus are 4 elemente, atîtea cîte s-au separat în fiecare submulțime.

Ținînd seama de aspectul figurii 211 și de definiția înmulțirii cu ajutorul mulțimii produs, se vede că avem:

$$12 = 3 \times 4.$$

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se deschid manualele la partea a 6-a, cap. 1, tema 1, subtema: „b) Separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, avînd numărul elementelor cunoscut".

Se privesc cele două ilustrații. Prin discuții se subliniază că împărțirea fructelor în farfurioare s-a făcut prin procedeul zis prin „cuprindere".

Se citește apoi problema din manual. Conduși de învățător, elevii vor observa că rezolvarea pe etape sugerată de figurile din manual este identică cu cele explicate la tablă prin figurile de la 204 la 211.

Se rezolvă în clasă exercițiile 1 și 2 din manual.

Procedeul prin „părți egale"

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Se așază pe catedră aceeași cutie conținînd 15 discuri negre. Se cere elevilor să separe mulțimea discurilor din cutie în 3 submulțimi disjuncte, fiecare avînd același număr de elemente (aceste submulțimi urmînd a fi așezate pe catedră separat una de alta, fiecare pe cîte o carte, de exemplu).

După scurte discuții asupra modului în care poate fi îndeplinită cerința formulată, se stabilește următorul procedeu de lucru: *se așază pe catedră 3 cărți* (cîte submulțimi trebuie formate); *se iau din cutie 3 discuri negre și se distribuie cîte unul pe fiecare carte; se iau apoi 3 discuri negre din cele rămase în cutie și se distribuie cîte unul pe fiecare carte; se continuă același procedeu pînă se epuizează discurile din cutie*[1].

Un elev este scos la catedră și execută practic cele spuse mai sus. Se observă că în cutie nu rămîne nici un disc albastru (dacă ar fi rămas spuneam că cerința formulată nu poate fi îndeplinită).

[1] Discurile din cutie pot fi luate și succesiv (cum se arată în îndrumările pentru folosirea trusei). Elevii vor fi determinați să observe că pentru distribuirea a cîte un disc pe fiecare carte trebuie luate din cutie 3 discuri, ceea ce se poate face și simultan. Se ajunge la procedeul expus mai sus.

După cunoașterea acestui mod de aplicare a regulii, va fi folosit mai ales procedeul simplificat sugerat de figura 166.

Termeni și notații ce se vor folosi

Pereche ordonată (și cuplu), cu notații de felul (a, b). Mulțime produs, cu notația $A \times B$. Mulțimi factori. Înmulțire, factori, produs.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 1

(Număr de ore, orientativ = 5)

TEMA 1 : PERECHE ORDONATĂ, MULȚIMI FACTORI, MULȚIME PRODUS

Scop. Cunoașterea noțiunilor conținute în titlul temei. Formarea mulțimii produs, cînd se cunosc mulțimile factori. Constatarea că schimbarea mulțimilor factori cu păstrarea numărului elementelor fiecăreia duce la modificarea mulțimii produs, fără modificarea numărului elementelor sale.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Lecția poate începe cu o problemă de felul următor :

Simona, Oana, Dănuț, Victor și Nicu sînt colegi de clasă și prieteni buni. Băieții, plecînd într-o tabără sportivă, s-au înțeles ca fiecare să trimită cîte o vedere celor două prietene ale lor. Să se spună pentru toate vederile trimise, de la ce băiat pleacă și la ce fată sosește.

Se obțin răspunsuri de felul : O vedere pleacă de la Dănuț la Simona ; o vedere pleacă de la Dănuț la Oana ; o vedere pleacă de la Victor la Simona ; ș.a.m.d.

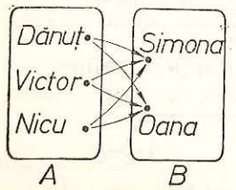


Fig. 167

Rezumînd răspunsul la problemă, învățătorul face pe tablă, și elevii în caiete, figura 167. Mulțimea băieților a fost notată cu A, cea a fetelor cu B, legătura de la un băiat la o fată stabilită cu ajutorul vederii trimise este reprezentată printr-o săgeată cu sensul orientat de la cine pleacă corespondența, la cine sosește ea.

Se atrage atenția elevilor că fiecare corespondență de la un element (băiat) la alt element (fată) stabilită în acest mod determină o pereche de elemente formată din elementul de plecare și cel de sosire în acea corespondență, pe care o putem scrie sub forma

(Dănuț, Simona).

Astfel de perechi sînt numite *perechi ordonate*, deoarece elementele lor sînt luate totdeauna în această ordine : primul este elementul de plecare, al doilea este elementul de sosire în corespondența de la un element la un element care determină acea pereche ordonată.

Din figura 167 se deduce ușor mulțimea tuturor perechilor ordonate ce pot fi formate astfel încît fiecare să aibă primul element din A și al doilea

din B, mulțime pe care o notăm $A \times B$ și o numim *mulțime produs (cartezian)* pentru mulțimile A și B :

$A \times B =$ {(Dănuț, Simona), (Dănuț, Oana), (Victor, Simona), (Victor, Oana), (Nicu, Simona), (Nicu, Oana)}.

Se va atrage atenția elevilor că elementele acestei mulțimi sînt perechi ordonate (sau cupluri). Ei, îndrumați de învățător, vor număra cîte elemente are mulțimea $A \times B$, găsind 6 elemente.

Elevii vor fi puși să spună, pe rînd, elementele mulțimii $A \times B$: un element al mulțimii $A \times B$ este perechea ordonată (Dănuț, Simona) ; un alt element al mulțimii $A \times B$ este perechea ordonată (Dănuț, Oana etc.).

Pentru a ușura vorbirea și scrierea, vom nota fiecare copil care formează mulțimile A și B cu litera inițială a prenumelui său[1], învățătorul scriind pe tablă și elevii în caiete :

$$A = \{d, v, n\}; \quad B = \{s, o\};$$

$$A \times B = \{(d, s), (d, o), (v, s), (v, o), (n, s), (n, o)\}.$$

Se va executa figura 168, ca model simplificat pentru figura 167.

Mulțimile A și B vor fi numite *mulțimi factori* pentru mulțimea produs $A \times B$.

Se va arăta elevilor că pentru mulțimea produs $A \times B$ se poate face o diagramă ca pentru orice mulțime, cum se vede în figura 169, unde fiecare cuplu este reprezentat printr-un punct.

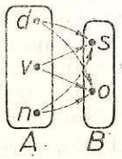


Fig. 168

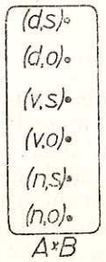


Fig. 169

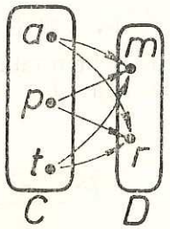


Fig. 170

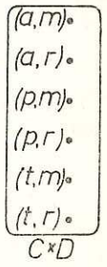


Fig. 171

După modelul figurii 168, se va cere elevilor să formeze mulțimea produs $C \times D$, dacă mulțimile factori sînt mulțimile de litere :

$$C = \{a, p, t\}; \qquad D = \{m, r\}.$$

Se obține figura 170. Se scriu elementele mulțimii $C \times D$:

$$C \times D = \{(a, m), (a, r), (p, m), (p, r), (t, m), (t, r)\}.$$

Se face diagrama mulțimii $C \times D$ ca în figura 171.

Elevii sînt conduși să observe că : în primul exemplu mulțimile factori au fost A și B, avînd respectiv 3 și 2 elemente, iar mulțimea produs $A \times B$ a avut 6 elemente ; în al doilea exemplu mulțimile factori sînt C și D, dar au, respectiv, tot 3 și 2 elemente. Mulțimea produs $C \times D$ diferă de $A \times B$, dar

[1] Se va folosi prilejul pentru a preciza că elementele mulțimii se notează obișnuit cu litere mici, în timp ce mulțimea se notează cu literă mare.

are tot 6 elemente ca și $A \times B$. Li se spune elevilor că *înlocuind mulțimile factori cu altele, dar păstrînd numărul elementelor fiecăreia, mulțimea produs se înlocuiește cu alta, care păstrează același număr de elemente ca cea anterioară.* Acest lucru se va constata și în exercițiul următor :

Pentru fiecare pereche de mulțimi :

$E = \{a, b, c\}$ și $F = \{m, p, s, t\}$; $M = \{d, r, f\}$ și $R = \{i, g, o, u\}$

se va forma mulțimea produs folosind diagramele mulțimilor factori și reprezentarea perechilor ordonate prin săgeți, apoi scriind mulțimea tuturor perechilor ordonate din care este alcătuită mulțimea produs. Se vor face, la urmă, diagramele fiecăreia din mulțimile produs.

De fiecare dată, prin numărare, se va spune cîte elemete are fiecare din mulțimile factori și cîte elemente are mulțimea produs, observîndu-se că, păstrînd numărul elementelor mulțimilor factori, se păstrează și numărul elementelor mulțimii produs.

Se vor relua toate exemplele de formare a mulțimii produs care s-au analizat pînă acum și se va forma din nou mulțimea produs, dar folosind aranjamentul sugerat de figura 164, ilustrat pentru primul exemplu de învățător, apoi vor lucra elevii, îndrumați de învățător.

Muncă independentă

Se cere elevilor ca, folosind modul de formare a mulțimii produs sugerat de figura 162 sau 164, să determine toate modurile în care se pot așeza într-o bancă de două locuri elevii

{Ina, Ana, Mona, Dana} și {Petru, Radu, Costică}

astfel ca în stînga băncii să fie o fată și în dreapta un băiat.

Soluția este dată de figura 172 sau 173, unde fiecare elev este notat cu inițiala prenumelui său. Numărul așezărilor posibile coincide cu numărul perechilor ordonate care au primul element o fată și al doilea un băiat, din mulțimile date mai sus.

Figurile 172 și 173 vor fi desenate apoi pe tablă, sub îndrumarea învățătorului, pentru corectarea lucrului independent al copiilor.

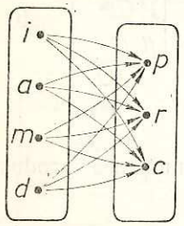


Fig. 172

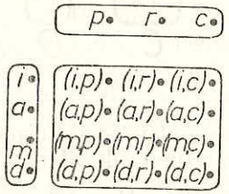


Fig. 173

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se deschid cărțile la partea a 5-a, capitolul 1, tema 1 : „Pereche ordonată. Mulțimi factori, mulțime produs".

Se privesc ilustrațiile, cerînd copiilor să spună ce conțin ele. Apoi învățătorul citește, elevii urmărind pe cărți, exemplul (a). Se propune să se închidă cărțile și să se încerce rezolvarea problemei citite, fiecare copil lucrînd singur, pe caietul său. După răgazul necesar în acest scop, se cer cîteva din răspunsurile obținute de elevi, care sînt scrise pe tablă de învățător, fără

comentarii. Apoi se deschid iarăși cărțile și se citește textul pînă la exemplul (b).

Se apreciază soluțiile scrise pe tablă și alte rezultate scrise de elevi în caiete.

Se citește în continuare exemplul (b), explicîndu-se soluția conținută în figura din manual.

Cele două probleme din manual se propun ca temă pentru acasă.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema 1.

Problema 1

c) $A \times B = \{(b, o), (c, o)\}$, figura 172*.

Problema 2

Figura 173*.

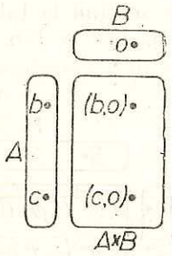


Fig. 172*

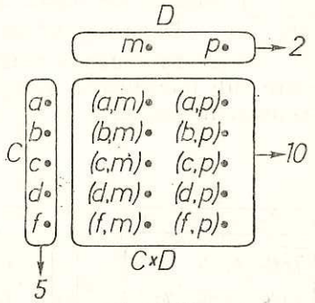


Fig. 173*

$C \times D = \{(a, m), (a, p), (b, m), (b, p), (c, m), (c, p) (d, m), (d, p), (f, m), (f, p)\}$.

Figura 174

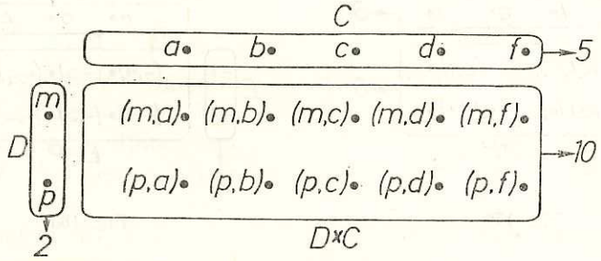


Fig. 174

$D \times C = \{(m, a), (p, a), (m, b), (p, b), (m, c), (p, c), (m, d), (p, d), (m, f), (p, f)\}$.

TEMA A 2-A : INMULȚIREA NUMERELOR NATURALE CU AJUTORUL MULȚIMII PRODUS

Scop : Cunoașterea înmulțirii numerelor naturale folosind mulțimi model pentru factori, formînd mulțimea produs și numărînd elementele acesteia.

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Studiul temei poate începe cerînd elevilor să formeze mulțimea produs pentru perechi de mulțimi date, cum ar fi:

$A = \{c, d\}$ și $B = \{f, g, i\}$;
$E = \{-, +\}$ și $P = \{*, O, \Delta\}$;
$R = \{1, 2\}$ și $T = \{5, 7, 8\}$,

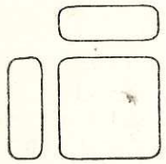


Fig. 175

folosind diagramele lor și ale mulțimii produs, după modelul sugerat de figura 175.

După răgazul acordat pentru lucrul independent în bănci, se va comenta realizarea sarcinii date, scoțînd la tablă elevi care execută sub îndrumarea învățătorului figurile 176, 177 și 178. Ceilalți elevi corectează în caiete.

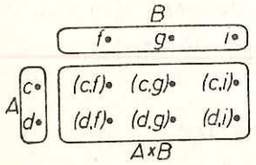


Fig. 176

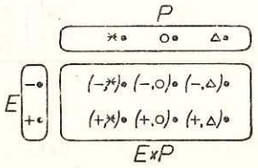


Fig. 177

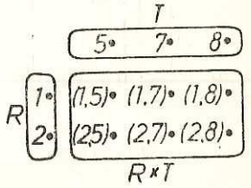


Fig. 178

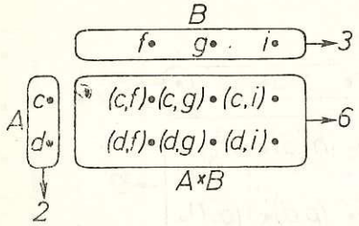


Fig. 179

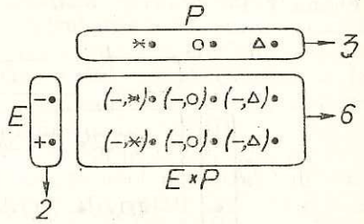


Fig. 180

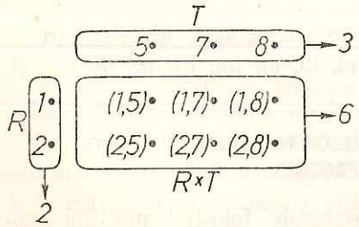


Fig. 181

Se cere apoi să se spună, în fiecare caz, numărul elementelor mulțimilor factori și numărul elementelor mulțimii produs. Acestea se vor afla prin numărare, completîndu-se pe tablă și în caiete figurile 176, 177 și 178, așa cum arată figurile 179, 180 și 181.

Observînd ultimele trei figuri se va constata că la aceleași numere de elemente pentru mulțimile factori, în cazul

nostru 2 și 3, se obține totdeauna același număr de elemente pentru mulțimea produs, în cazul nostru 6.

Pentru a pune în evidență faptul observat mai sus, vom scrie numărul elementelor mulțimii produs, cînd cunoaștem pe 2 și 3, numerele elementelor mulțimilor factori, sub forma 2×3 (citit „2 ori 3").

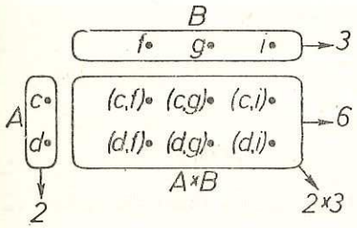


Fig. 182

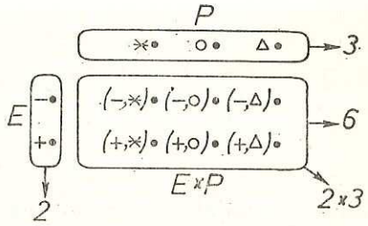


Fig. 183

Se completează figurile 179, 180 și 181 așa cum arată figurile 182, 183 și 184. Se observă imediat că avem:

$$2 \times 3 = 6$$

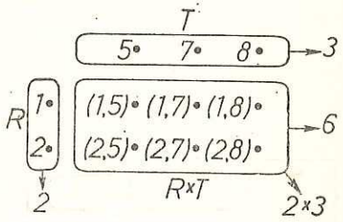


Fig. 184

Punem acum elevilor problema de a afla cîte elemente are mulțimea produs, dacă mulțimile factori au 2, și respectiv 4 elemente. Numărul căutat îl putem nota 2×4. Pentru a afla care este acest număr ei vor fi îndrumați să observe că este necesar:

1° Să aleagă două mulțimi model, una cu 2 și una cu 4 elemente, pe care să le noteze simbolic, să zicem:

$$M = \{a, b\}; \qquad N = \{c, d, f, i\}$$

(mai comod este să se aleagă dintr-o dată mulțimi de simboluri, pentru a scrie cu ușurință mulțimea produs).

2° Să formeze mulțimea produs $M \times N$, de exemplu ca în figura 185.

3° Să numere elementele mulțimii produs. Vor găsi:

$$2 \times 4 = 8$$

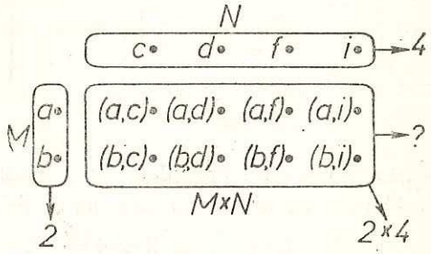


Fig. 185

Li se vor propune cîteva exerciții asemănătoare, cu numere nu prea mari, pînă ce elevii deprind acest mod de aflare a numărului elementelor mulțimii produs, cunoscînd numerele elementelor mulțimilor factori. Nu se va insista însă foarte mult trecîndu-se destul de repede la arătarea procedeului simplificat, la care nu se mai scriu elementele, ci doar reprezentarea lor prin puncte, cum se vede în figurile 186 și 187.

El va fi ilustrat cu trusa pentru predarea operațiilor cu numere naturale, folosind panourile cu aspectele din figurile 186* și 186**, după caz. În figurile 187*

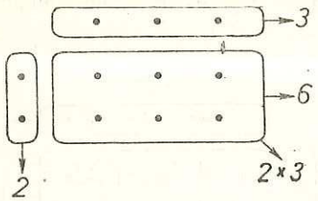


Fig. 186

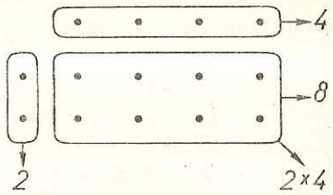


Fig. 187

și 187** s-a arătat așezarea discurilor albastre pentru a ilustra $3 \times 4 = 12$ și $6 \times 8 = 48$.

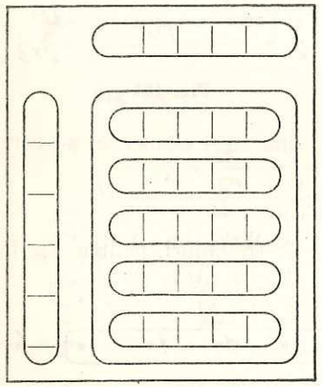


Fig. 186*

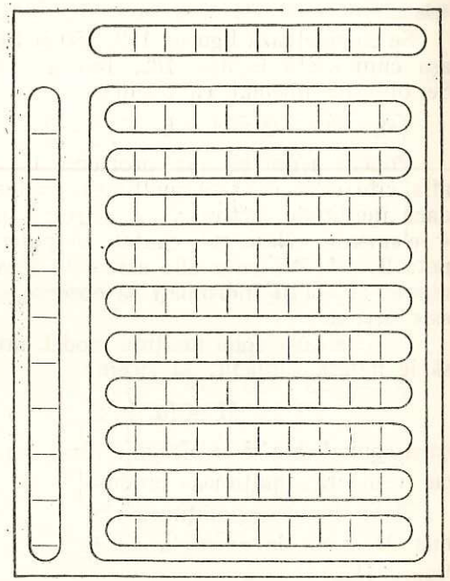


Fig. 186**

Asupra acestui procedeu se va insista pînă ce va fi deprins de toți elevii. Problemele cu acest conținut vor fi date și prin scrieri de forma:

$$2 \times 5 = \quad ; \quad 3 \times 4 = \quad ; \quad 4 \times 2 = \quad ; \quad 5 \times 3 =$$

sau prin figuri ca 188 și 189.

Numai după ce toți elevii rezolvă fără dificultăți problemele de acest tip, se va arăta că tehnica rezolvării lor permite introducerea unei noi operații cu numere naturale, numită *înmulțire*. Elevii cunosc deja enunțul și aplicarea regulii:

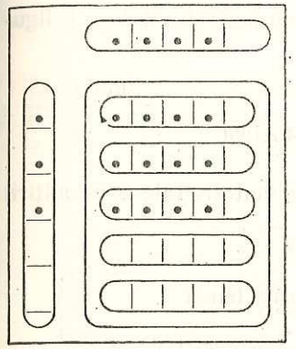


Fig. 187*

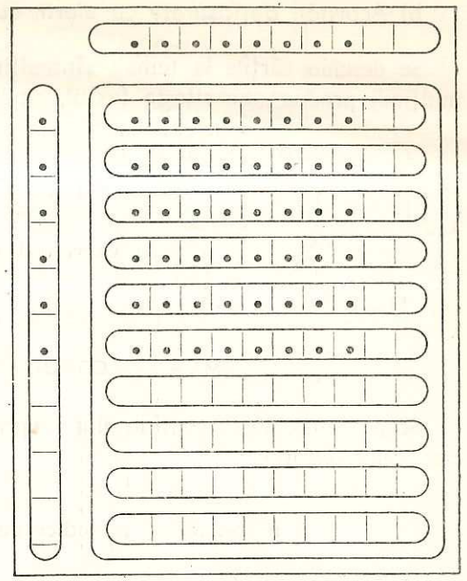


Fig. 187**

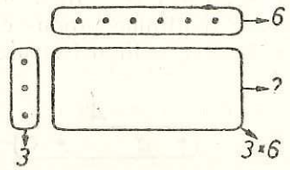


Fig. 188

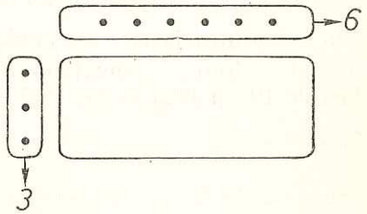


Fig. 189

A înmulți numerele naturale m și p înseamnă a găsi un număr natural notat $m \times p$ („m ori p" sau „m înmulțit cu p"), astfel:

1° Se iau două mulțimi model oarecare A și B, A cu m elemente și B cu p elemente.

2° Se formează mulțimea produs $A \times B$.

3° Se numără elementele mulțimii produs. Rezultatul numărării este numărul $m \times p$.

Se atrage atenția că $\times$ este semnul înmulțirii. Uneori este folosit în locul lui un simplu punct $m \times p = m \cdot p$.

Numerele m și p se numesc factorii înmulțirii. Rezultatul se numește produs.

Se poartă discuții cu elevii legate de exemplele date, sau de alte exemple noi, pînă ce există certitudinea justei înțelegeri a celor de mai sus.

b) *Activităţi desfăşurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se deschid cărţile la tema: „Înmulţirea numerelor naturale, cu ajutorul mulţimii produs". Se citeşte textul, explicîndu-se ideile conţinute şi figurile existente, rezolvîndu-se exerciţiile de la sfîrşitul exemplului (b).

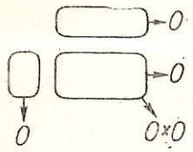


Fig. 190

Exerciţiile 1 şi 2 de la sfîrşit se vor da ca temă pentru acasă.

Pentru exerciţiul $0 \times 0 =$ soluţia este dată în figura 190.

TEMA A 3-A : COMUTATIVITATEA ÎNMULŢIRII

Scop: Cunoaşterea conţinutului proprietăţii de comutativitate a înmulţirii numerelor naturale.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activităţi desfăşurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Se propune efectuarea înmulţirilor

$$2 \times 3 = \quad \text{şi} \quad 3 \times 2 =$$

folosind pentru factori mulţimile model: $A = \{c, d\}$; $B = \{f, g, h\}$.

Sub îndrumarea învăţătorului, elevii găsesc mulţimile produs cum arată figurile 191 şi 192. Se constată că $A \times B \neq B \times A$, nefiind formate din aceleaşi elemente, deoarece, de exemplu $(c, f) \neq (f, c)$. În schimb mulţimile $A \times B$ şi $B \times A$ au tot atîtea elemente, după cum se constată uşor, făcînd să corespundă un cuplu de forma (c, f) din $A \times B$, cu (f, c) din $B \times A$, aşa cum arată figura 193 (care va fi executată de învăţător).

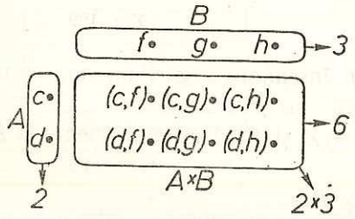


Fig. 191

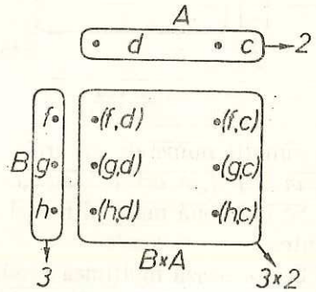


Fig. 192

Rezultă că avem $2 \times 3 = 3 \times 2$. Ceea ce s-a arătat despre numerele 2 şi 3, se poate arăta despre oricare alte numere diferite de zero, pe aceeaşi cale.

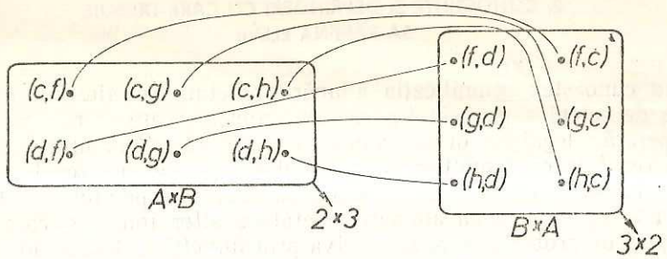


Fig. 193

Dacă unul din factori este 0, produsul este 0, aşa cum arată figurile 194 şi 195: $0 \times 3 = 3 \times 0$.

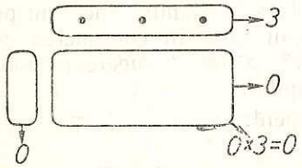


Fig. 194

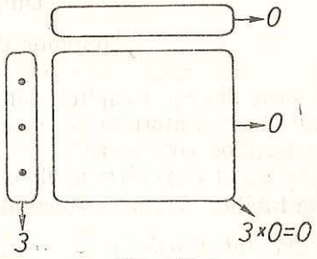


Fig. 195

Deducem că oricare ar fi numerele naturale a şi b avem:

$$a \times b = b \times a$$

adică *înmulţirea numerelor naturale este comutativă.*

b) *Activităţi desfăşurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Deschizînd manualul la tema respectivă, se urmăreşte cum s-a făcut judecata.

Primul exerciţiu se face în clasă ca muncă independentă. Celelalte două se dau ca temă pentru acasă.

Capitolul 2

ÎNMULŢIREA NUMERELOR NATURALE FOLOSIND ADUNAREA REPETATĂ

A. SCURTE OBSERVAŢII ASUPRA CONŢINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ŞCOLARĂ

Definirea înmulţirii numerelor naturale ca adunare repetată de termeni egali. Ilustrarea legăturii dintre această definiţie şi aceea care foloseşte mulţimea produs, prin scrierea convenabilă a mulţimii produs ca reuniune de submulţimi disjuncte, fiecare conţinînd toate perechile ordonate la care primul element este acelaşi.

De asemenea, se observă că procedeul folosit asigură obținerea aceluiași număr de elemente în fiecare din cele 3 submulțimi, motiv pentru care el se numește prin „părți egale". (Este un abuz de limbaj, deoarece cele 3 submulțimi obținute nu sînt egale, nefiind formate din exact aceleași elemente. Numai numerele de elemente ale lor sînt egale).

Se mai observă că *în fiecare submulțime vom pune de atîtea ori cîte un element, de cîte ori putem lua cîte 3 elemente din cele 15 elemente.* Așadar, **dintr-o mulțime cu 15 elemente revin tot atîtea elemente în 3 submulțimi echipotente disjuncte între ele, cîte submulțimi de cîte 3 elemente disjuncte între ele pot fi formate din mulțimea celor 15 elemente.** (Elevii nu vor reține enunțul ci faptul semnalat).

Astfel de observații vor fi făcute cu răbdare la toate exemplele următoare, pînă ideile respective vor fi sesizate și reținute de elevi, trecînd cu vederea eventualele imperfecțiuni în exprimare, mai ales la început.

Elevii vor executa în bănci sub formă de muncă independentă aceeași sarcină, folosind boabe de grîu, castane etc.

Se fac probleme asemănătoare alegînd alte mulțimi, dar avînd grijă de fiecare dată să se ia numărul de submulțimi astfel încît, în final, să nu rămînă elemente ale mulțimii alese, necuprinse în aceste submulțimi.

După ce procedeul de lucru va fi bine însușit de elevi, se va propune, pe rînd, separarea în 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, a mulțimilor formate din: 12 discuri negre; 12 triunghiuri albastre; 12 pătrate roșii (toate fiind luate din trusa învățătorului).

De fiecare dată se va constata că se obțin 3 elemente într-o submulțime. Așadar, *numărul elementelor obținut într-o submulțime este perfect determinat numai de numărul elementelor mulțimii inițiale și de numărul de submulțimi ce trebuie formate, și nu este influențat de natura elementelor.*

Această observație va deveni mai evidentă cînd învățătorul, după rezolvarea practică a problemei de către elevi, va explica de fiecare dată procedeul care s-a folosit, în felul următor:

1° Execută pe tablă diagrama Euler-Venn a mulțimii date inițial pentru a fi separată în submulțimi, ca în figura 212.

2° Execută pe tablă, alăturat, figura 213, în care: linia închisă situată „vertical" în stînga conține 4 puncte, arătînd cîte submulțimi trebuie separate din mulțimea inițială; în dreapta ei este o linie închisă ce reprezintă mulțimea inițială cu 12 elemente, în interior fiind figurate prin linii închise cele 4 submulțimi disjuncte ce trebuie formate (necunoscînd cîte elemente are una din ele, elementele lor nu pot fi încă figurate); deasupra acesteia este o linie închisă în care vom desena cîte un punct de fiecare dată cînd vom distribui cîte un element în submulțimile ce trebuie formate, din cele 4 elemente pe care le luăm, succesiv, din mulțimea inițială indicată în figura 212.

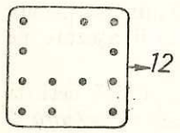


Fig. 212

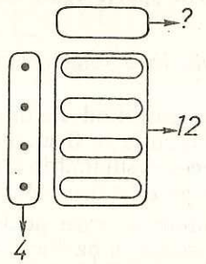


Fig. 213

3° Se trece la realizarea practică, pe etape, a celor explicate mai sus.

Etapa 1: Se separă în figura 212 o submulțime de 4 elemente, aceasta luînd aspectul din figura 214. Prin distribuirea lor în cele 4 submulțimi, arătate în figura 213, figura 213 ia aspectul din figura 215.

Etapa a 2-a: Figura 214 ia aspectul din figura 216 și figura 215 ia aspectul din figura 217, după separarea celei de a doua submulțimi din mulțimea inițială și distribuirea elementelor ei în cele 4 submulțimi din figura 215.

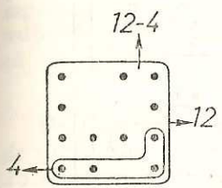


Fig. 214

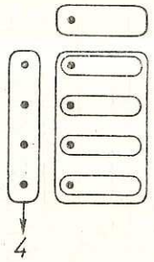


Fig. 215

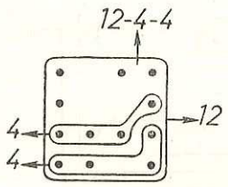


Fig. 216

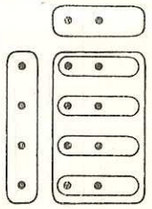


Fig. 217

Etapa a 3-a: Figura 216 ia aspectul din figura 218 și figura 217 ia aspectul din figura 219, după separarea celei de a treia submulțimi din mulțimea inițială și distribuirea elementelor ei în cele 4 submulțimi din figura 217. Se vede că procedeul nu mai poate fi continuat, elementele mulțimii inițiale fiind epuizate.

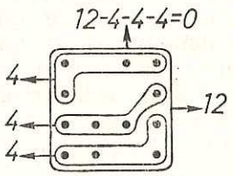


Fig. 218

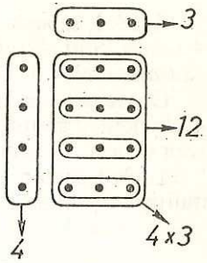


Fig. 219

Etapele de mai sus pot fi realizate pe un panou al trusei, ca în figurile 213*, 215*, 217* și 219*.

Dacă aplicăm procedeul de mai sus în cazul în care înlocuim mulțimea celor 12 discuri negre, cu 12 triunghiuri albastre sau cu 12 pătrate roșii, se constată că de fiecare dată pe tablă se obțin aceleași figuri (iar pe panoul trusei, același aspect).

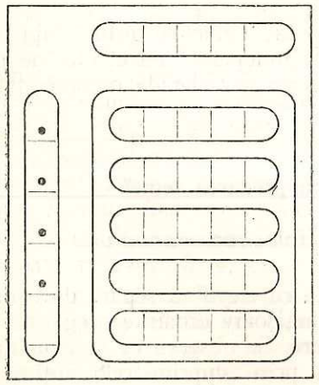


Fig. 213 *

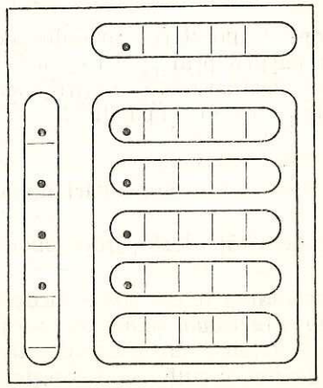


Fig. 215 *

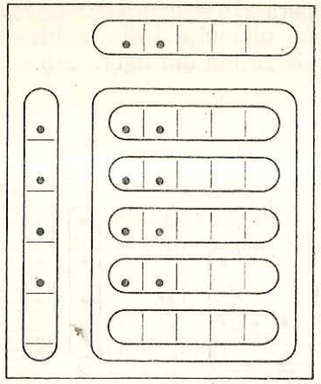


Fig. 217 *

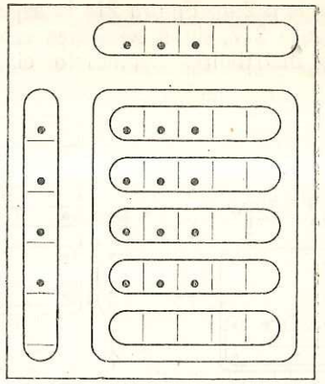


Fig. 219 *

Așadar, *separînd dintr-o mulțime cu 12 elemente* (indiferent care ar fi aceasta) *4 submulțimi disjuncte între ele fiecare avînd același număr de elemente, se obțin totdeauna cîte 3 elemente într-o submulțime.*

Observăm că în figura 219 mulțimea din stînga (desenată „vertical") are 4 elemente, atîtea cîte submulțimi au trebuit formate, iar mulțimea de „deasupra" are 3 elemente, atîtea cîte s-au obținut în fiecare submulțime.

Ținînd seama de aspectul figurii 219 și de definiția înmulțirii cu ajutorul mulțimii produs, se vede că avem

$$12 = 4 \times 3.$$

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Se organizează prin analogie cu cele recomandate în legătură cu procedeul prin „cuprindere".

TEMA A 2-A : ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE CU AJUTORUL SEPARĂRII DE SUBMULȚIMI DISJUNCTE, AVÎND ACELAȘI NUMĂR DE ELEMENTE

Scop: Cunoașterea modului de efectuare a împărțirii prin „cuprindere" și a împărțirii prin „părți egale". Observarea independenței cîtului de procedeul de efectuare a împărțirii, pentru o aceeași pereche de numere naturale ca deîmpărțit și împărțitor.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) *Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului*

Prezentarea temei poate începe cu cerința ca elevii să separe dintr-o mulțime de 8 bețișoare (luate dintr-o pungă cu bețișoare dinainte pregătită), submulțimi disjuncte între ele, de cîte 4 bețișoare. Se observă că pentru îndeplinirea acestei cerințe se folosește procedeul prin „cuprindere", obținîndu-se 2 submulțimi.

Prin discuții cu elevii se va aminti din alte lecții ca înlocuind cele 8 bețișoare cu 8 grăunțe, 8 monede etc., și separînd tot submulțimi disjuncte de cîte 4 elemente, se obțin de fiecare dată 2 submulțimi. Numărul acestor submulțimi se notează și

$$8 : 4$$

și el depinde numai de numărul 8 al elementelor mulțimii în care dorim să separăm submulțimile disjuncte între ele și de numărul 4 al elementelor unei astfel de submulțimi, și nu depinde de natura elementelor respective. Se vede că

$$8 : 4 = 2.$$

Pe baza celor de mai sus, *scrierile de forma* 15 : 3 *vor reprezenta numărul de submulțimi disjuncte între ele ce pot fi formate dintr-o mulțime oarecare cu 15 elemente, astfel ca fiecare din ele să aibă 3 elemente.*

Scrierile de acest fel arată o nouă operație cu numere naturale numită împărțire. Avem:

$$\underset{\text{deîmpărțit}}{15} : \underset{\text{împărțitor}}{3} = \underset{\text{cît}}{5}$$

: este semnul operației de împărțire. Procedeul expus aici pentru găsirea lui 5, rezultatul împărțirii lui 15 la 3, se numește împărțire prin „cuprindere". Zicem că 3 se cuprinde în 15 de 5 ori.

Se vor efectua mai multe exerciții de împărțire prin cuprindere, folosind pentru deîmpărțit mulțimi model (bețișoare, discuri din trusă, boabe de grîu etc.), pentru ca toți elevii să deprindă acest mod de aflare a cîtului împărțirii a două numere:

12 : 4 = ; 15 : 5 = ; 18 : 6 = ; etc.

Astfel de împărțiri vor fi efectuate și cu ajutorul panourilor corespunzătoare din trusa învățătorului.

Cu ocazia acestor exerciții se va avea grijă a fi puse clar în evidență etapele de efectuare a împărțirii prin cuprindere, care au fost expuse mai înainte la „Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii".

Se va propune apoi ca elevii să separe dintr-o mulțime de 8 bețișoare, 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare conținînd același număr de elemente. Se observă că pentru îndeplinirea acestei cerințe se folosește procedeul prin „părți egale", obținîndu-se 2 bețișoare în fiecare submulțime.

Prin discuții se va aminti că numărul elementelor obținute într-o submulțime depinde numai de numărul elementelor mulțimii inițiale și de numărul de submulțimi ce trebuie formate, și nu depinde de natura elementelor.

Se va aminti totodată că *numărul elementelor obținute într-o submulțime este același cu numărul de submulțimi disjuncte între ele de cîte 4 elemente fiecare, ce pot fi formate dintr-o mulțime cu 8 elemente.*

Ultima observație arată că numărul elementelor obținut într-o submulțime poate fi notat 8 : 4, ca și numărul submulțimilor menționate.

De aici rezultă că împărțirea 8 : 4 = poate fi efectuată și prin procedeul zis prin „părți egale". Se vor face și prin acest procedeu împărțirile făcute mai înainte prin „cuprindere", folosind pentru deîmpărțit aceleași mulțimi model ca și prin procedeul anterior:

12 : 4 = ; 15 : 5 = ; 18 : 6 = ; etc.

Astfel de împărțiri vor fi efectuate și cu ajutorul panourilor corespunzătoare din trusa învățătorului.

Cu ocazia efectuării acestor împărțiri se va avea grijă să fie puse clar în evidență etapele de efectuare a împărțirii prin „părți egale", care au fost expuse de asemenea la „Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii".

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

În funcție de modul în care vor putea fi dozate cunoștințele în cadrul orelor, tema respectivă va fi citită din manual și analizat conținutul din perspectiva, celor studiate fără folosirea manualului, în trei reprize: una se va referi la împărțirea prin cuprindere; una se va referi la împărțirea în „părți egale"; una se va referi la efectuarea exercițiilor și problemelor cuprinse în manual, din care o parte se vor face în clasă cu rolul de fixare a cunoștințelor, restul vor fi propuse ca temă pentru acasă, dar vor fi discutate amănunțit în clasă în orele următoare.

Indicații pentru rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 2-a

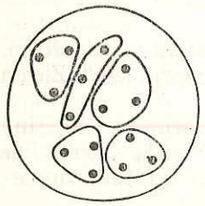


Fig. 220

Exercițiile ce urmează după „Exemplu"

Se iau mulțimi model pentru deîmpărțit (de exemplu mulțimi de puncte), se separă în submulțimi disjuncte fiecare avînd atîtea elemente cît este împărțitorul. Cîtul se află numărînd cîte submulțimi s-au obținut.

15 : 3 = 5 (fig. 220) etc.

Exercițiile ce urmează după „Alt exemplu"

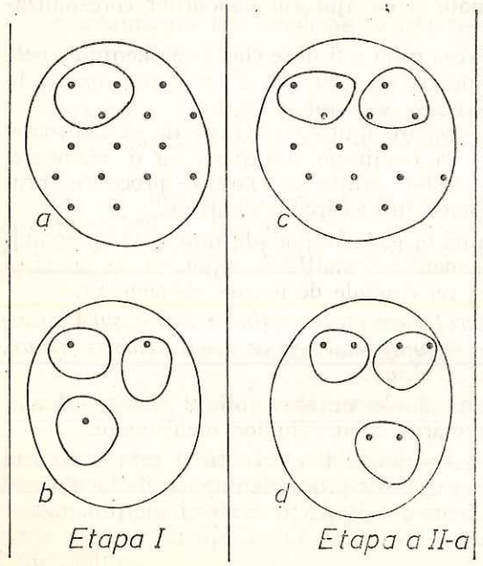


Fig. 221

Exercițiul 1

Se iau mulțimi model pentru deîmpărțit (de exemplu mulțimi de puncte) și se folosește procedeul prin „părți egale".

15 : 3 = 5 (fig. 221) etc.

Exercițiul 3

Se va folosi, pe rînd, procedeul prin „cuprindere" și procedeul prin „părți egale", aplicate pentru o mulțime model aleasă după voie pentru deîmpărțit.

Exercițiile și problemele de la sfîrșitul temei a 2-a

Problema 3

6 : 3 = 2 efectuată prin cuprindere; 6 : 2 = 3 efectuată prin părți egale; 2 × 3 = 6 conform definiției înmulțirii cu mulțimea

produs; 3 × 2 = 6 conform aceleiași definiții sau scriind întîi din figură 2 × 3 = 6 și aplicînd comutativitatea înmulțirii.

Problema 4

a) 21 : 7 = 3 20 : 5 = 4. b) 21 : 3 = 7; 20 : 4 = 5.
c) 3 × 7 = 21 și 7 × 3 = 21; 4 × 5 = 20 și 5 × 4 = 20.

Problema 5

24 : 8 = 3 efectuată prin cuprindere; 24 : 3 = 8 efectuată prin părți egale; 3 × 8 = 24 efectuată prin adunare repetată; 8 × 3 = 24, din figură deducem 3 × 8 = 24 și aici folosim comutativitatea.

Problema 6

a) 10 : 5 = 2; 24 : 6 = 4; 27 : 9 = 3. b) 10 : 2 = 5; 24 : 4 = 6; 27 : 3 = 9. c) 2 × 5 = 10; 4 × 6 = 24; 3 × 9 = 27 și, respectiv, prin comutativitate 5 × 2 = 10; 6 × 4 = 24; 9 × 3 = 27.

Observație: Aici și la problema 5 mai sus, înmulțirile ce pot fi făcute se deduc și completînd figurile ca în figura 222; etc.

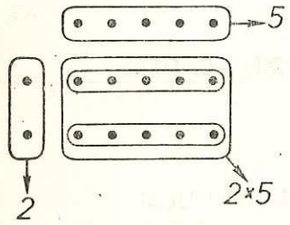


Fig. 222

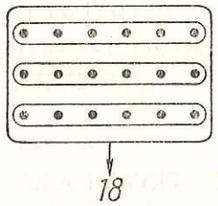


Fig. 223

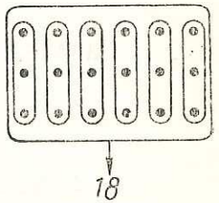


Fig. 224

Problema 7

Figura 223. 18 : 3 = 6; Fig. 224. 18 : 6 = 3;
Figura 225. 18 : 3 = 6; Fig. 226. 18 : 6 = 3.

Problema 8

Figura 227. 28 : 4 = 7 efectuată prin cuprindere.

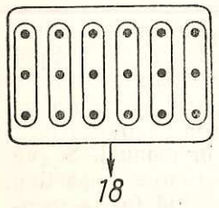


Fig. 225

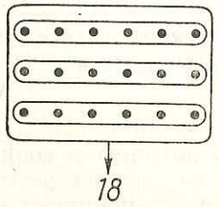


Fig. 226

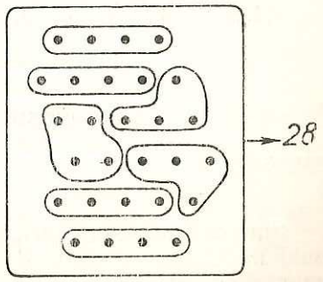


Fig. 227

Problema 9

Figura 228. 42 : 7 = 6 efectuată prin părţi egale (procedeul este acelaşi care a fost sugerat în figura 221).

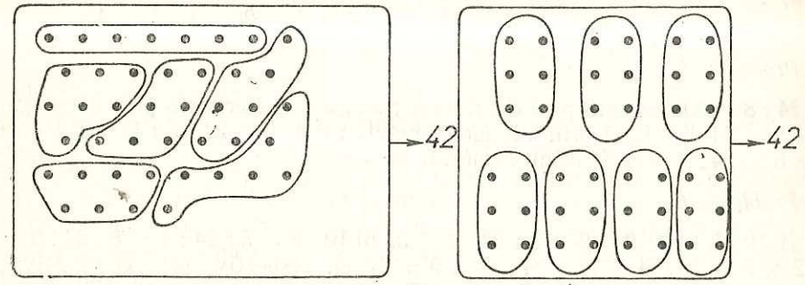


Fig. 228

Capitolul 2

ÎMPĂRŢIREA NUMERELOR NATURALE PRIN SCĂDERE REPETATĂ

A. SCURTE OBSERVAŢII ASUPRA CONŢINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ŞCOLARĂ

Analizînd modul de efectuare a împărţirii numerelor naturale cu ajutorul unei mulţimi model pentru deîmpărţit şi folosind procedeul prin „cuprindere" sau cel prin „părţi egale", se va deduce posibilitatea de calcul a cîtului prin scădere repetată a împărţitorului din deîmpărţit. Cîtul este tocmai numărul scăderilor ce pot fi făcute pînă se obţine restul 0. Împărţirea prin 0 nu este definită. Împărţirea prin 1.

Exerciţii şi probleme simple.

2. CUNOŞTINŢE ŞI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Sînt cele prevăzute mai sus în programă şi conţinute în manual. Se va sublinia avantajul oferit de scăderea repetată pentru efectuarea împărţirii numerelor naturale prin calcul, folosirea mulţimilor model fiind foarte incomodă.

B. INDICAŢII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 2

(Număr de ore, orientativ=3)

Elaborarea lecţiilor de către învăţător, folosindu-se de programă şi manual, nu poate crea dificultăţi.

Indicaţii privind rezolvarea unora din problemele propuse la capitolul 2

Exerciţiul 7

a) Se va folosi procedeul prin „cuprindere", apoi procedeul prin „părţi egale".

Problema 8

a) Figura 229. 6 : 2 = 3 efectuată prin „cuprindere";

b) 6 — 2 = 4
4 — 2 = 2
2 — 2 = 0

Prin scădere repetată am găsit 6 : 2 = 3

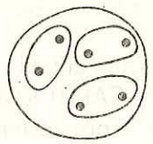


Fig. 229

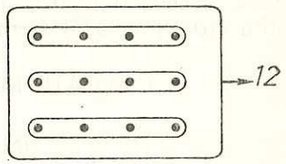


Fig. 230

Problema 9

a) Figura 230. 12 : 3 = 4 efectuată prin „părţi egale"; b) 12 — 3 = 9
9 — 3 = 6
6 — 3 = 3
3 — 3 = 0

Prin scădere repetată am găsit 12 : 3 = 4.

Capitolul 3

LEGĂTURA DINTRE ÎNMULŢIRE ŞI ÎMPĂRŢIRE

A. SCURTE OBSERVAŢII ASUPRA CONŢINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ŞCOLARĂ

Pe baza observaţiei făcute anterior că egalităţile:
20 : 4 = 5; 20 : 5 = 4; 4 × 5 = 20; 5 × 4 = 20
sînt adevărate în acelaşi timp, se va face proba înmulţirii prin înmulţire şi împărţire, şi proba împărţirii prin înmulţire şi împărţire.

Tabla împărţirii. Ideea întocmirii ei, folosind legătura dintre împărţire şi înmulţire. Învăţarea tablei împărţirii.

Exerciţii şi probleme simple de împărţire. Exerciţii de tipul $5 \times a = 20$; $a \times 7 = 42$; $48 : x = 8$, cu scrierea soluţiilor $a = 20 : 5$; $a = 42 : 7$; $x = 48 : 8$.

Exerciţii şi probleme cu toate operaţiile învăţate (nu prea complicate).

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Să cunoască legătura dintre înmulțirea și împărțirea numerelor naturale. Să observe că dacă împărțim produsul a două numere naturale, la unul din cele două numere, obținem celălalt număr. Să poată face probele operațiilor de înmulțire și împărțire.

Elevii să știe să obțină tabla împărțirii folosindu-se de tabla înmulțirii și să cunoască pe de rost tabla împărțirii.

Să se formeze deprinderea de recunoaștere a problemelor care se rezolvă prin împărțire. În efectuarea împărțirilor rezultate din probleme, se va folosi tabla împărțirii sau scăderea repetată.

Se va cunoaște modul de calcul al unui factor al înmulțirii cînd știm produsul și celălalt factor, și modul de calcul al unui termen al împărțirii cînd știm cîtul și celălalt termen.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 3

(Număr de ore, orientativ=7)

Elaborarea lecțiilor după programă și manual nu poate crea dificultăți.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la capitolul 3

Tema a 2-a: *Tabla împărțirii.*

Subtema (b)

Exercițiul 3

a) $20 : 2 = 10$; $12 : 2 = 6$; $16 : 2 = 8$. Etc.

Exercițiul 4

a) $20 - 2 = 18$; $12 - 2 = 10$; $16 - 2 = 14$ Etc.

Problema 9

$32 : 2 = 16$; $32 : 4 = 8$; $32 - 16 = 16$; $16 - 8 = 8$. 8 elevi joacă tenis.

Problema 12

$27 : 3 = 9$. Lățimea dreptunghiului este de 9 m.

$2 \times 27 = 27 + 27 = 54$; $2 \times 9 = 18$; $54 + 18 = 72$. Perimetrul este de 72 m.

Sau: $27 + 9 = 36$; $2 \times 36 = 36 + 36 = 72$. Perimetrul este de 72 m.

Subtema (c)

Problema 3

a) $35 : 5 = 7$; etc. b) $36 - 6 = 30$; etc. c) $36 : 6 = 6$; etc.

d) $21 : a = 7$
$a = 21 : 7$
$a = 3$

$49 : b = 7$
$b = 49 : 7$
$b = 7$

$63 : c = 7$
$c = 63 : 7$
$c = 9$

Exercițiul 4

$a \times 5 = 40$
$a = 40 : 5$
$a = 8$

$a : 5 = 10$
$a = 10 \times 5$
$a = 50$

$36 : a = 6$
$a = 36 : 6$
$a = 6$

etc.

Problema 5

$30 : 6 = 5$. În acea clasă sînt 5 fete. $30 + 5 = 35$. Sînt 35 elevi în clasă.

Problema 6

$20 : 5 = 4$. O carte costă 4 lei.
$2 \times 4 = 8$. 2 cărți costă 8 lei.

Problema 8

$35 : 7 = 5$. A doua carte are 5 ilustrații.
$35 + 5 = 40$. Cele două cărți au 40 de ilustrații.

Problema 9

Efectuînd împărțirile, relațiile date se scriu:

$5 > x$; $5 \geqslant x$; $7 + x \leqslant 10$.

Prin încercări se găsește, pe rînd:

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $\{0, 1, 2, 3\}$.

Subtema (d)

Problema 4

$9 \times a = 63$
$a = 63 : 9$
$a = 7$

Problema 5

$5 \times a = 45$
$a = 45 : 5$
$a = 9$

etc.

Problema 12

$32 : 8 = 4$. Un cearșaf are 4 m. $5 \times 4 = 20$. Pentru 5 cearșafuri sînt necesari 20 m de pînză.

Problema 14

$54 : 6 = 9$ Un kilogram de zahăr costă 9 lei.
$8 \times 9 = 72$ Pentru 8 kg zahăr se plătesc 72 lei.
$75 - 72 = 3$ De la 75 lei se primește rest 3 lei.

Problema 17

$72 : 9 = 8$ În punguță sînt 8 bomboane.
$72 - 8 = 64$ În cutie sînt 64 bomboane mai mult ca în punguță.

Problema 18

$22 - 8 = 14$
$22 + 14 = 36$
$36 : 9 = 4$ În fiecare grupă sînt 4 elevi.

Problema 19

$4 \times 9 = 36$ Zahărul a costat 36 lei.
$51 - 36 = 15$ Merele au costat 15 lei.
$15 : 3 = 5$ Kilogramul de mere a costat 5 lei.

Problema 20

13 — 5 = 8. Dacă bidonul ar conține apă cît și borcanul, împreună ar conține 8 l de apă.

8 : 2 = 4 În borcan se află 4 l de apă.
4 + 5 = 9 În bidon se află 9 l de apă.

Altă rezolvare:

13 + 5 = 18. Dacă borcanul ar conține atîta apă cît și bidonul, împreună ar conține 18 l de apă.

18 : 2 = 9 În bidon sînt 9 l de apă.
9 — 5 = 4. În borcan sînt 4 l de apă.

Problema 21

14 — 6 = 8
8 : 2 = 4 Caietul a costat 4 lei.
4 + 6 = 10 Cartea a costat 10 lei.

Sau:

14 + 6 = 20
20 : 2 = 10 Cartea a costat 10 lei.
10 — 6 = 4 Caietul a costat 4 lei.

Problema 22

Judecata ca la problemele 20 și 21. Răspuns: 9 oi negre și 28 oi albe.

Problema 23

16 : 8 = 2. Un singur segment are 2 cm.

VII. UNITĂȚI DE MĂSURĂ (8 ore)

SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Metrul, decametrul, hectometrul și kilometrul. Litrul, decalitrul, hectolitrul și kilolitrul. Kilogramul, chintalul și tona. Leul și banul. Ziua, ora, secunda, săptămîna, luna, anul. Calendarul. Citirea orei pe ceas.

Probleme diverse folosind unitățile de măsură învățate.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la partea a VII-a

După tema a 2-a

Problema 5

Figura 231. 23 dam + 17 dam = 40 dam.

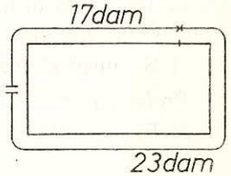


Fig. 231

Problema 7

10 × 10 = 100. Pe o parte a șoselei s-au plantat 100 de pomi.

100 + 100 = 200. Pe ambele părți ale șoselei s-au plantat 200 de pomi.

Problema 8

5 hm — 2 hm = 3 hm. Lățimea dreptunghiului este de 3 hm.
5 hm + 3 hm = 8 hm; 2 × 8 hm = 16 hm. Perimetrul este de 16 hm.
Sau: 2 × 5 hm = 10 hm; 2 × 3 hm = 6 hm; 10 hm + 6 hm = 16 hm.

După tema a 4-a, problema 5

67 kl — 38 kl = 29 kl; 67 kl + 29 kl = 96 kl.

După tema a 7-a

Problema 3

4 × 1 leu = 4 lei
4 × 10 bani = 40 bani
Costul a 4 caiete este 4 lei și 40 bani.

Problema 4

8 lei + 1 leu = 9 lei
35 bani + 55 bani = 90 bani
Costul este de 9 lei și 90 bani.

După tema a 9-a

Răspunsuri: Problema a 2-a: 7 ore; problema a 3-a: 1 oră și 30 minute; problema a 4-a: ora 10 și 30 minute; problema a 5-a: ora 12 fără 10 minute; problema a 6-a: 10 ani; problema a 7-a: 9 ani, 21 ani, 30 de ani.

VIII. EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE (10 ore)

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse

Problema 2

Intersecția mulțimilor B și C conține numerele: 96; 97; 98; 99; 100; 101.

Problema 3

a) Intersecția dintre A și B conține: r; m. Intersecția dintre C și A conține: c; m. Intersecția dintre C și B conține: m; p.

b) Diferența dintre A și B conține: a; b; c. Diferența dintre B și C conține: r; s; t. Diferența dintre C și B conține: c; d.

c) Singurul element comun mulțimilor A, B și C este m.

Problema 4

a) Figura 232. b) Figura 233. c) Figura 234. d) Figura 235.

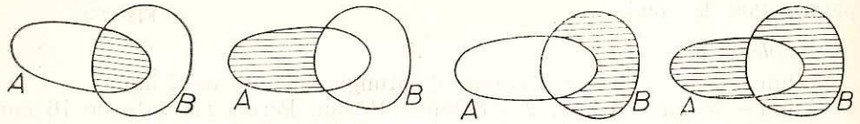


Fig. 232 Fig. 233 Fig. 234 Fig. 235

Problema 5

a) $3 + 4 + 5 = 12$ b) $2 + 6 + 8 = 16$; c) $1 + 7 = 8$;

d) $39 + 21 + 100 = 160$.

e) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$

$= (1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + + (4 + 5)$

$= 9 + 9 + 9 + 9$

$= 4 \times 9$

$= 36$

Problema 10

100 km + 30 km = 130 km. În prima zi s-au parcurs 130 km.

30 km + 130 km = 160 km. În a doua zi s-au parcurs 160 km.

130 km + 160 km = 290 km. În cele două zile s-au parcurs 290 km.

Problema 11

Mulțimea B are un singur element, 12; mulțimea C are un singur element, 25.

Problema 12

$(8 \times 3) + (4 \times 9) = 24 + 36 = 60$. Cumpărăturile au costat 60 lei.

Problema 16

$58 - (4 \times 8) = 58 - 32 = 26$. A doua zi au venit 26 muncitori.

Problema 18

$$4 \times (4 + 5) = 4 \times 9 = 36$$

Problema 20

Pentru primele două găsim prin încercări:

$\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Pentru al treilea exercițiu găsim mai întîi prin încercări $12 < (x \times 6)$ pentru oricare din numerele naturale mai mari ca 2; $\{3; 4; 5; \ldots\}$, iar apoi $(x \times 6) \leqslant 36$ pentru oricare din numerele naturale mai mici decît 7: $\{0: 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Scrierea

$$12 < (x \times 6) \leqslant 36$$

va fi adevărată pentru numerele naturale x care satisfac amîndouă condițiile de mai sus: 3, 4, 5 și 6.

* $x \in \{3; 4; 5; \ldots\} \cap \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $x \in \{3; 4; 5; 6\}$

Problema 21

a) $F = \{4; 8\}$. b) $G = \{5\}$. c) $H = \{5; 6; 10\}$.

Problema 22

$40 = (4 \times 10) + 0$; $206 = (2 \times 100) + (0 \times 10) + 6$;

$700 = (7 + 100) + (0 \times 10) + 0$ etc.

Problema 23

$20 + 16 = 36$ Sau $20 : 4 = 5$ Cu toți elevii clasei s-au format

$36 : 4 = 9$ $16 : 4 = 4$ 9 rînduri.

$5 + 4 = 9$

Problema 32

Figura 236

$A = \{1; 2; 5; 6\}$; $B = \{3; 4; 5; 6\}$

Problema 33

a) $B = \{0; 3\}$ sau $B = \{3; 4\}$ sau $B = \{11; 7\}$ etc.

b) $B = \{1; 2\}$ sau $B = \{2; 1\}$. Deși s-a obținut aceeași mulțime, prima dată am făcut $a = 1$ și $b = 2$, a doua oară am făcut $a = 2$ și $b = 1$, deci sînt rezolvări diferite.

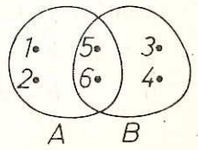


Fig. 236

Problema 34

a) $A = \{4, 5, 6, 7\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A și B au unele elemente comune: 4, 5 și 6.

b) $A = \{5, 6\}$; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. A este inclusă în B. Elemente comune: 5, 6.

Problema 35

a) $E = \{278, 279\}$; $F = \{281, 282, 283\}$. E și F sînt mulțimi disjuncte.

b) $E = \{407, 408, 409, 410\}$; $F = \{407, 408, 409, 410\}$. E și F sînt mulțimi egale.

Problema 36

$B = \{28, 35, 43, 56\}$; $C = \{15, 21, 28, 35, 43\}$. a) Intersecția lui B cu C: $\{28, 35, 43\}$; b) diferența dintre B și C: $\{56\}$; c) diferența dintre C și B: $\{15, 21\}$.

Problema 37

{Ana, Dan, Elena}

Problema 38

a) {Monica, Costel}; b) {Vlad}.
Peste 32 de ani: a) { }; b) {Elena, Vlad}.
Peste 22 de ani: a) {Monica, Costel, Ana}; b) {Vlad}.

Problema 39

Din mulțimea persoanelor:
E = {Monica, Costel, Ana, Dan, Elena, Vlad}
avînd vîrstele, respectiv, 19, 22, 28, 36, 42 și 54 de ani, alegeți submulțimea B a persoanelor din E, a căror vîrstă peste 28 de ani va trece de 50 de ani, iar cu persoanele care peste 28 de ani vor avea cel mult 70 de ani, formați o submulțime C a mulțimii E.

Găsiți mulțimea persoanelor din E care peste 28 de ani:
a) vor fi trecute de 50 de ani dar nu vor depăși 70 de ani;
b) vor fi trecute de 70 de ani;
c) nu vor fi trecute de 50 de ani.

Exercițiul 40

Exemplu de calcul pentru $a = 2 \times 3$, $b = 1 \times 9$ și $c = 2 \times 8$:

$a = 2 \times 3$ $\quad b = 1 \times 9$ $\quad c = 2 \times 8$ $\quad (a \times b) + c = (6 \times 9) + 16$

$a = 6$ $\quad b = 9$ $\quad c = 16$ $\quad = 54 + 16$

$= 70$

$(a \times b) + c = 70$

Exercițiul 41

a) $(5 + 2) \times 6 = 7 \times 6$ $\quad (5 \times 6) + (2 \times 6) = 30 + 12$

$= 42$ $\quad = 42$

$(5 + 2) \times 6 = 42$ $\quad (5 \times 6) + (2 \times 6) = 42$. Așadar, scrierea: $(5 + 2) \times 6 = (5 \times 6) + (2 \times 6)$ este adevărată.

e) $(7 \times 6) + 3 = 42 + 3$ $\quad (7 + 3) \times (6 + 3) = 10 \times 9$

$= 45$ $\quad = 90$

$(7 \times 6) + 3 = 45$ $\quad (7 + 3) \times (6 + 3) = 90$. Așadar. scrierea: $(7 \times 6) + 3\ (7 + 3) \times (6 + 3)$ este falsă.

Exercițiul 42

a) $(12 - 10) \times (12 + 10) = 2 + 22$, deci $(12 - 10) \times (12 + 10) = 44$

$= 22 + 22$

$= 44$

c) $121 + (5 \times 9) = 121 + 45$ deci $121 + (5 \times 9) = 166$

$= 166$

Problema 43

Scrierea rezolvării conduce la exercițiul (a) de la (42)

Problema 44

Scrierea rezolvărilor conduce, respectiv, la exercițiile (b), (c) și (d) de la (42).

Problema 45

a) $n + 7 = 18$
$n = 18 - 7$
$n = 11$

b) $n \times 7 = 56$
$n = 56 : 7$
$n = 8$

c) $(n + 7) \times 7 = 56$
$n + 7 = 56 : 7$
$n + 7 = 8$
$n = 8 - 7$
$n = 1$

d) $n - 7 = 18$
$n = 18 + 7$
$n = 25$

e) $(n - 7) : 7 = 7$
$n - 7 = 7 \times 7$
$n - 7 = 49$
$n = 49 + 7$
$n = 56$

f) $(n - 7) \times 7 = 49$
$n - 7 = 49 : 7$
$n - 7 = 7$
$n = 7 + 7$
$n = 14$

Notă: Se folosesc proprietățile operațiilor prin care, cunoscînd rezultatul și unul din numere se află celălalt număr.

Problema 54

a) Se vede că $n \leqslant 8$ și $p \leqslant 8$. Din $n \times p = 8$, rezultă $8 : n = p$. Făcînd pe n egal pe rînd, cu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 și 8, obținem : $n = 1$ și $p = 8$; $n = 2$ și $p = 4$; $n = 4$ și $p = 2$; $n = 8$ și $p = 1$. Calculele se pot așeza ca în tabelul :

$n \times p$	8	8	8	8	8	8	8	8	8
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$8 : n = p$	—	8	4	—	2	—	—	—	1

de unde : {(1,8), (2,4), (4,2), (8,1)}

b) Factorul $p + 3$ este egal cu numărul p găsit la întrebarea anterioară. Micșorîndu-l cu 3 obținem numărul p în cazul de față : $8 - 3 = 5$; $4 - 3 = 1$; $2 - 3 =$ imposibil ; $1 - 3 =$ imposibil.

Așadar, mulțimea perechilor (n, p) este

$$\{(1, 5), (2, 1)\}$$

Problema 55

Observăm că : $2 < n < 9$ și $2 < p < 9$. Totodată ca să putem efectua $p - 4$, este necesar să avem $p \geqslant 4$. Așadar :

$$2 < n < 9 \text{ și } 3 < p < 9$$

Produsul factorilor $n - 3$ și $p - 4$ este 0, dacă măcar unul din acești factori este 0.

În cazul $n - 3 = 0$ avem $n = 3$, p putînd fi orice număr natural cuprins între 3 și 9 obținem perechile :

$$\{(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8)\}.$$

Dacă avem $p - 4 = 0$, atunci $p = 4$, iar n poate fi orice număr cuprins între 2 și 9. Obținem perechile :

$$\{(3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (7, 4), (8, 4)\}.$$

Cum toate perechile găsite satisfac problema, avem rezultatul final :

$$\{(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (7, 4), 7, 4), (8, 4)\}$$

Problema 56

Numărul natural căutat este elemental mulțimii numerelor naturale cuprinse între 13 și 37, care se împart la 5 :

$$\{15, 20, 25, 30, 35\}$$

și, în același timp, al mulțimii numerelor naturale cuprinse între 13 și 37, care se împart la 6 :

$$\{18, 24, 30, 36\}$$

Cum singurul element comun al acestor mulțimi este 30, el va fi numărul căutat.

TRUSA PENTRU PREDAREA, PE BAZĂ DE MULȚIMI, A OPERAȚIILOR CU NUMERE NATURALE LA CLASELE I–IV

CONȚINUT

— 33 de plăcuțe dreptunghiulare din placaj, de diferite dimensiuni, unele avînd aplicate diferite profiluri din placaj și trasate diverse linii colorate. Pe spatele fiecărei plăcuțe este scris un număr de ordine. Numerotarea merge doar pînă la 28, deoarece există și cîte două plăcuțe identice, care poartă același număr : 8, 9, 14, 27 și 28.

— 4 pungi de plastic, conținînd, respectiv : 100 de „discuri" negre ; 30 de „triunghiuri" albastre ; 30 de „pătrate" roșii ; 5 „dreptunghiuri" negre.

— 1 pungă de plastic, conținînd 3 clame metalice simple și 3 clame metalice duble.

— 4 rigle paralelipipedice din lemn, prevăzute la capete cu găuri și nituri și de-a lungul cărora este practicat un canal.

— 1 cutie paralelipipedică din P.F.L. cu capac rabatabil de placaj, în care sînt depozitate toate materialele enumerate mai sus.

CE SE POATE REALIZA CU PIESELE DIN TRUSĂ

a) 15 panouri, din care :

— 11 panouri pentru predarea adunării și scăderii în mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100.

— 2 panouri pentru predarea noțiunilor de înmulțire și împărțire a numerelor naturale.

— 2 panouri pentru introducerea figurii numerice ce corespunde structurii zecimale a unei mulțimi date și folosirea ei pentru numirea și scrierea numărului de elemente al mulțimii, cînd acesta este cuprins între 9 și 1 000.

b) 4 planșete, suport pentru plăcuțele cu care se realizează cele 15 panouri sus menționate.

MODUL DE REALIZARE A PLANȘETELOR SUPORT ȘI A PANOURILOR

Pentru predarea anumitor cunoștințe din programă și manual, se caută la „CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU" dacă există un panou care poate fi folosit în acel scop*.

În caz afirmativ, se reține numărul acestuia și se trece la realizarea lui, procedînd astfel :

Pregătirea materialelor necesare

Din tabelul 2 se găsesc numerele plăcuțelor din care poate fi alcătuit acel panou și se scot aceste plăcuțe din cutia trusei. Tot din tabelul 2 se găsește numărul planșetei ce servește ca suport pentru plăcuțele care alcătuiesc panoul.

* Formularea sintetică a destinației fiecărui panou este dată în „TABELUL 1".

Se caută în tabelul 3 numerele plăcuţelor din care se asamblează planşeta, precum şi riglele şi clamele metalice necesare. Se scot din cutia trusei toate aceste piese.

Realizarea planşetelor

Asamblarea plăcuţelor pentru realizarea planşetelor suport este dată în figurile 1, 2, 3 şi 4.

Sprijinirea acestor plăcuţe, astfel încît planşeta să stea într-un plan puţin înclinat faţă de verticală, se realizează cu ajutorul celor patru rigle paralelipipedice din lemn.

Pentru planşetele 1, 2 şi 3

Se îmbină riglele de aceeaşi lungime ca plăcuţele componente, introducînd nitul din capătul unei rigle, în orificiul din capătul alteia, aşa cum ilustrează figurile 5 şi 6.

În canalul riglelor astfel asamblate se introduc, pe rînd, marginea cu dimensiunea mai mare a fiecărei plăcuţe din componenţa planşetei, aşa cum sugerează figura 7.

Aşezînd riglele cu partea opusă canalului practicat în ele pe o masă obişnuită, se obţine planşeta într-o poziţie aproape verticală, oferind vizibilitate din clasă pentru ceea ce se va aşeza pe planşetă, fără ca piesele respective să cadă, datorită înclinaţiei existente.

Pentru asigurarea rigidităţii necesare pentru planşetă, plăcuţele se prind între ele la partea superioară cu cîte o clamă metalică simplă (exemplu clama (c), figura 7).

Pentru planşeta 4

După procedeul expus, se realizează asamblarea din figura 8. Drept rigle de sprijin se folosesc cele două rigle mai lungi, în care se fixează plăcuţele cu numărul 27, introduse în canalul riglelor, cu latura cea mai scurtă. Se plasează apoi cele trei clame metalice duble (d_1,)(d_2) şi (d_3) şi în ele se introduc plăcuţele cu numerele 28, cu latura cea mai scurtă.

În partea superioară se prinde clama metalică simplă (e). Pentru asigurarea stabilităţii planşetei, aceasta se reazemă de cutia trusei, aşezată pe faţa de arie mai mică.

Realizarea panourilor

Pe planşeta suport corespunzătoare panoului respectiv, asamblată după indicaţiile anterioare, se aşază, alăturîndu-le una de alta, plăcuţele componente ale panoului care dorim să-l realizăm, aşa cum rezultă din figurile care indică „ASAMBLAREA PLĂCUŢELOR PENTRU REALIZAREA PANOURILOR".

Aşezarea se face astfel încît partea pe care este scris numărul plăcuţei să vină pe planşetă.

Facem observaţia că punctul scris jos la dreapta fiecărui număr de ordine al plăcuţelor indică „baza" numărului. Exemple : 9. (nouă) ; 6. (şase) ; 8. (opt) etc. Acest lucru este util la aşezarea plăcuţelor, deoarece, de exemplu plăcuţa indicată în figură prin numărul „8." se va aşeza la locul indicat în poziţia normală, iar dacă în figură numărul plăcuţei este scris „8.", ea va fi aşezată în acel loc în poziţie „răsturnată" (numărul venind cu „capul în jos").

După aşezarea plăcuţelor conform indicaţiilor, se compară aspectul panoului obţinut, cu aspectul care „trebuia" obţinut, existent în figurile care arată „ASPECTUL PANOURILOR CE POT FI REALIZATE".

CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU

Panoul nr. 1.

— Formarea reuniunii mulţimilor disjuncte.
— Comutativitatea reuniunii.
— Mulţimea diferenţă dintre o mulţime şi o submulţime a sa.
— Legătura dintre reuniunea a două mulţimi şi diferenţa dintre reuniune şi una din ele.
— Definiţia adunării numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulţimilor disjuncte.
— Efectuarea adunării a doi termeni în mulţimea numerelor naturale pînă la 10, folosind definiţia adunării şi numărarea.
— Comutativitatea adunării numerelor naturale ; proba adunării prin adunare.

Panoul nr. 2.

Aceeaşi utilizare ca şi a panoului 1. În plus, face posibilă evitarea numărării în scopul aflării numărului elementelor reuniunii, ducînd treptat la formarea automatismelor de efectuare a adunării în mulţimea numerelor naturale pînă la 10.

Panoul nr. 3.

— Formarea diferenţei dintre o mulţime şi o submulţime a sa.
— Necomutativitatea diferenţei dintre o mulţime şi o submulţime a sa.
— Definiţia scăderii numerelor naturale cu ajutorul diferenţei dintre o mulţime şi o submulţime a sa.
— Efectuarea scăderii în mulţimea numerelor naturale pînă la 10, folosind definiţia scăderii şi numărarea.
— Legătura dintre adunare şi scădere, pe baza legăturii dintre reuniunea a două mulţimi şi diferenţa dintre reuniune şi una din cele două mulţimi.
— Aflarea unui termen al adunării cînd ştim suma şi celălalt termen ; proba adunării prin scădere.
— Aflarea unui termen al scăderii cînd ştim diferenţa şi celălalt termen ; proba scăderii prin scădere şi prin adunare.

Panoul nr. 4.

În mulţimea numerelor naturale mai mici decît 100, folosind structura zecimală a termenilor adunării :

a) Adunarea fără trecere peste ordin a :

— două numere formate numai din zeci ;
— unui număr format numai din zeci cu un număr format numai din unităţi ;
— unui număr format din zeci şi unităţi cu un număr format numai din unităţi ;
— două numere formate, fiecare, din zeci şi unităţi.

b) Adunarea cu trecere peste ordin a:

— două numere ce se scriu cu cîte o cifră;
— unui număr format din zeci și unități cu un număr format numai din unități;
— două numere formate fiecare din zeci și unități.

Notă:
Panoul poate fi utilizat și în toate situațiile menționate pentru panoul nr. 1, referitor atît la mulțimea numerelor naturale pînă la 10, cît și la mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100.

Panoul nr. 5.

— Formarea diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, cînd mulțimea are o structură numerică zecimală, astfel încît mulțimea diferență să aibă și ea o structură numerică zecimală.

Efectuarea scăderii fără trecere peste ordin:

În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, folosind structura zecimală a termenilor scăderii, deducerea regulilor de calcul a diferenței în cazurile:
— Două numere formate numai din zeci.
— Descăzutul format din zeci și unități și scăzătorul format numai din unități.
— Două numere, fiecare format din zeci și unități.

Notă:
Pot fi explicate și situațiile menționate la panoul nr. 3, atît pentru mulțimea numerelor naturale mai mici decît 10, cît și pentru mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100.

Panoul nr. 6.

Aceeași utilizare ca și a panoului nr. 5, dar permite și explicarea în cazul *scăderii cu trecere peste ordin*, dacă:
— Descăzutul este format numai din zeci, iar scăzătorul este format numai din unități.
— Descăzutul este format din zeci și unități, iar scăzătorul este format numai din unități.
— Descăzutul este format numai din zeci, iar scăzătorul este format din zeci și unități.
— Descăzutul și scăzătorul conțin, fiecare, și zeci și unități.

Panoul nr. 7.

În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, folosind structura zecimală a termenilor, deducerea regulilor de calcul la adunarea a trei numere:
— fără trecere peste ordin;
— cu trecere peste ordin (suma numerelor reprezentate de cifrele unităților conține una sau două zeci).

Panoul nr. 8.

În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 1 000, folosind structura zecimală a termenilor, deducerea regulilor de calcul la:

Adunarea fără trecere peste ordin a:

— unui număr format numai din sute, cu un număr format din zeci și unități;
— unui număr format numai din sute, cu un număr format numai din zeci;
— unui număr format numai din sute, cu un număr format numai din unități;
— două numere formate numai din sute;
— două numere formate, fiecare, din sute, zeci și unități;
— două numere, din care cel puțin unul se scrie cu trei cifre;
— două numere în situația anterioară, în cazul în care unul, sau amîndouă, conțin unul sau două zerouri.

Adunarea cu trecere peste ordin a:

— două numere formate, fiecare, din sute, zeci și unități;
— două numere din care cel puțin unul este scris cu trei cifre;
— două numere în situația anterioară, în cazul în care unul, sau amîndouă, conțin cîte un zero.

Notă:
Pot fi explicate și situațiile menționate la panourile 1 și 4, lucrînd în oricare din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 10, mai mici decît 100 sau mai mici decît 1 000.

Panoul nr. 9.

Aceeași utilizare ca și a panoului nr. 5, dar poate fi folosit și în legătură cu mulțimea numerelor naturale mai mici decît 1 000, la:

Scăderea fără trecere peste ordin:

— a două numere formate numai din sute;
— a două numere formate, fiecare, din sute, zeci și unități;
— descăzutul este scris cu trei cifre diferite de 0, iar scăzătorul este scris cu una sau două cifre diferite de 0;
— descăzutul este scris cu trei cifre, scăzătorul este scris cu una, două sau trei cifre, în cazul în care unul, sau amîndoi termenii scăderii, conțin în scrierea lor unul sau două zerouri.

Panoul nr. 10.

Aceeași utilizare ca a panoului nr. 9, dar permite explicarea și în cazul în care avem:

Scăderea cu trecere peste ordin:

Descăzutul este scris cu trei cifre și:
— cifra unităților la scăzător arată un număr mai mare decît cea de la descăzut;

— cifra zecilor scăzătorului arată un număr mai mare decît cea de la descăzut ;
— cifra unităţilor la scăzător arată un număr mai mare decît cea de la descăzut, iar cifra zecilor scăzătorului arată un număr care nu este mai mic decît cel arătat de cifra zecilor descăzutului ;
— cifra unităţilor la scăzător arată un număr mai mare decît cea de la descăzut, cifra zecilor descăzutului fiind 0.

Panoul nr. 11.

Aceeaşi utilizare ca a panoului 7, dar permite explicarea şi în mulţimea numerelor naturale mai mici decît 1 000, pentru :

a) Adunarea a trei numere, fără trecere peste ordin.
b) Adunarea a trei numere, cu trecere peste ordin, cînd :
— suma numerelor indicate de cifrele unităţilor conţine una sau două zeci ;
— suma numerelor indicate de cifrele zecilor conţine una sau două sute ;
— se întîlnesc simultan cele două situaţii de mai sus.

Panoul nr. 12.

— Organizarea unei mulţimi, avînd pînă la 100 de elemente, cu structură numerică zecimală.
— Sugerarea ideii de a reprezenta fiecare submulţime de cîte zece elemente din organizarea anterioară, printr-un simbol (o piesă triunghiulară albastră).
— Introducerea convenţiei de numire a numerelor naturale mai mari decît zece, dar cel mult egale cu o sută.
— Înmulţirea a două numere naturale cel mult egale cu 10 :
a) folosind mulţimea produs ; b) folosind adunarea repetată.
— Împărţirea prin cuprindere şi împărţirea în părţi egale, în cazul în care împărţitorul şi cîtul nu sînt mai mari decît 10 :
a) cu ajutorul submulţimilor disjuncte ; b) cu ajutorul scăderii repetate.
— Legătura dintre înmulţire şi împărţire.

Panoul nr. 13.

— Organizarea unei mulţimi, avînd pînă la 25 de elemente, cu structură numerică în baza cinci.
— Sugerarea ideii de a reprezenta fiecare submulţime de cîte cinci elemente din organizarea anterioară, printr-un simbol (o piesă triunghiulară albastră).
— Înmulţirea a două numere naturale cel mult egale cu 5 :
a) folosind mulţimea produs ; b) folosind adunarea repetată.
— Împărţirea prin cuprindere şi împărţirea în părţi egale, în cazul în care împărţitorul şi cîtul nu sînt mai mari decît 5 :
a) cu ajutorul submulţimilor disjuncte ; b) cu ajutorul scăderii repetate.
— Legătura dintre înmulţire şi împărţire.

Panoul nr. 14.

— Introducerea figurii numerice zecimale corespunzătoare structurii zecimale a unei mulţimi cu mai puţin ca 100 de elemente, evidenţiate pe panoul 12.
— Scrierea numerelor naturale mai mari ca 9 dar mai mici decît 100.

— Unităţi de ordinul întîi. Cifra unităţilor din scrierea unui număr. Unităţi de ordinul al doilea. Cifra zecilor din scrierea unui număr.

Panoul nr. 15.

— Introducerea figurii numerice zecimale corespunzătoare structurii zecimale a unei mulţimi cu mai puţin de 1 000 de elemente.
— Convenţia de numire a numerelor mai mari decît o sută dar mai mici decît o mie.
— Scrierea numerelor mai mari decît 99, dar mai mici decît 1 000.
— Unităţi de ordinul al treilea. Cifra sutelor în scrierea unui număr.

MODUL DE FOLOSIRE A PANOURILOR

În esenţă, panourile servesc la alcătuirea unor figuri numerice, ca mulţimi model cu structură numerică zecimală pentru numerele cu care avem a face diferite operaţii. Acestea vor permite folosirea cu o mare eficienţă a intuiţiei în studiul numerelor naturale şi a operaţiilor cu ele, crescînd posibilitatea înţelegerii prin „vizualizarea" conţinutului explicat.

Figurile numerice se obţin prin plasarea pe panouri, sprijinite pe rigluţele lipite ca profiluri pe plăcuţele panoului, a discurilor negre, triunghiurilor albastre şi pătratelor roşii, aflate în cîte o pungă de plastic. (Nu este bine să fie amestecate în aceeaşi pungă, ceea ce creează greutăţi în căutarea piesei potrivite în timpul folosirii panoului).

Fiecare disc negru constituie un element al mulţimii model ; fiecare triunghi albastru reprezintă o mulţime de zece discuri negre ale mulţimii model ; fiecare pătrat roşu reprezintă o sută de discuri negre al mulţimii model, sau zece triunghiuri albastre ale figurii numerice, respectiv zece zeci.

Aşadar, mulţimea model folosită este o mulţime de discuri negre. Triunghiurile albastre şi pătratele roşii servesc pentru a sugera structura numerică zecimală a mulţimii model. În afara figurilor numerice, triunghiurile şi pătratele îşi pierd această semnificaţie, putînd fi utilizate ca obiecte obişnuite.

Dreptunghiurile negre servesc pentru a scrie pe ele cu cretă numerele ce corespund figurilor numerice realizate pe panouri, urmînd a fi plasate în dreptul săgeţilor indicatoare existente, în care scop panourile sînt prevăzute în acele locuri cu profiluri de sprijin, realizate din rigluţe de placaj.

Modul în care se foloseşte fiecare panou la predarea diverselor cunoştinţe, a căror însuşire este optimizată prin utilizarea panoului respectiv, rezultă din conţinutul manualului „Matematică manual pentru clasa a II-a", ediţia 1979, autori D. Roşca, V. Ţifui şi L. Mandric, precum şi din conţinutul lucrării „Matematică clasa a II-a — îndrumătorul învăţătorului", ediţia 1979, autor D. Roşca.

Excepţie fac panourile 1, 2, 3 şi 10, a căror utilizare nu este de loc explicată în lucrările menţionate, deoarece 1, 2 şi 3 sînt destinate mai ales utilizării lor în clasa I (chiar şi la grădiniţă), iar 10 este în legătură cu programa clasei a III-a.

Întrebuinţarea panourilor 8 şi 11 nu a fost explicată şi pentru cazul adunării cu trecere peste ordin, aceasta intrînd în programa clasei a III-a. De asemenea, lămuririle existente în legătură cu utilizarea panourilor 12, 13, 14 şi 15 sînt foarte sumare.

Din exemplele prezentate în continuare, completate cu conţinutul cărţilor amintite, se va deduce suficient de clar, sperăm, tehnica utilizării tuturor

panourilor trusei şi pentru toate situaţiile enumerate la „CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU".

Atragem atenţia că prezenta trusă nu este un dispozitiv de calculat (de tipul sorobanului japonez de pildă), ci unul destinat explicării definiţiilor operaţiilor, deducerii unor reguli şi tehnici de calcul etc. În esenţă, este un mijloc de învăţare. În consecinţă, utilizarea trusei nu urmăreşte să facă economie de timp în găsirea rezultatelor unor operaţii, ci în înţelegerea unor idei şi tehnici de lucru, urmăreşte să adîncească această înţelegere. De aceea nu are sens a urmări formarea la elevi a deprinderilor de mînuire rapidă a trusei, ci a abilităţii de a folosi pentru descifrarea unor situaţii noi, pe baza cunoştinţelor anterioare şi a orientării gîndirii prin intermediul imaginilor vizuale adecvate situaţiilor analizate.

Lucrul cu trusa este indicat numai pînă ce elevii înţeleg esenţa unor probleme legate de structura zecimală a mulţimii, numirea şi scrierea numerelor cu ajutorul figurilor numerice, definiţia fiecărei operaţii şi cum se ajunge la una sau alta din regulile de calcul.

După deducerea acestor reguli, folosirea ei nu mai este justificată, în afară de cazurile în care se constată că se menţin sau apar confuzii în legătură cu noţiunile sau regulile respective, la unii elevi.

EXEMPLE DE FOLOSIRE A TRUSEI

Exemplul 1

Organizarea unei mulţimi avînd pînă la 100 de elemente, cu structură numerică zecimală. Numirea şi scrierea numărului de elemente al mulţimii.

Se caută în „TABELUL 1", dacă există vreun panou care ar putea fi folosit în acest scop. Se pare că ar corespunde panourile 12 şi 14. Citim la „CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU", cele menţionate la panourile 12 şi 14. Ne convingem că, în adevăr, panourile 12 şi 14 pot fi folosite în scopul urmărit.

Ne uităm în „TABELUL 2" şi găsim că pentru realizarea panoului 12 avem nevoie de plăcuţele 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 şi 26, iar pentru panoul 14 avem nevoie de plăcuţele 3 şi 9. Scoatem aceste plăcuţe din trusă.

Din acelaşi tabel rezultă că panoul 12 se realizează pe planşeta suport nr. 4, iar panoul 14 se realizează pe planşeta suport nr. 1. În „TABELUL 3" vedem că pentru realizarea planşetei suport 4 avem nevoie de: două plăcuţe cu numărul 27, două plăcuţe cu nr. 28, cele două rigle mai lungi, o clamă metalică simplă, 3 clame metalice duble. (Tot din „TABELUL 3" vedem cele necesare planşetei 1 şi constatăm că intră şi în componenţa planşetei 4. Aşadar, planşetele 1 şi 4 nu vor putea fi realizate simultan). Scoatem din trusă toate aceste piese.

Realizăm planşeta suport nr. 4 şi panoul nr. 12 (figurile 4, 8, 20 şi 35), după procedeul descris la „MODUL DE REALIZARE A PLANŞETELOR SUPORT ŞI A PANOURILOR". Înainte de amplasarea cutiei trusei ca suport pentru planşeta nr. 4, scoatem din trusă pungile de plastic, conţinînd discurile negre şi dreptunghiurile albastre.

Modul de utilizare a panoului 12 pentru explicarea temei anunţate este, pe scurt, următorul:

Se iau din punga de plastic conţinînd discurile negre, o mulţime oarecare de discuri.

1) Se numără tot cîte zece discuri din mulţimea aleasă, completînd cu ele, concomitent cu numărarea, cîte o submulţime avînd zece locuri (căsuţe), din cele indicate pe panoul 12.

Alegînd exemplele în mod potrivit, se va pune în evidenţă că pînă la epuizarea discurilor din mulţimea iniţială, se pot ivi alternativele:

a) Rămîn discuri cu care nu mai putem completa o nouă mulţime de zece discuri.

b) Nu rămîn discuri în afara submulţimilor de cîte zece discuri.

Pe panoul 12 se obţin aspecte de felul figurii 39, care reprezintă organizarea mulţimii discurilor luate din punga de plastic, cu structură numerică zecimală.

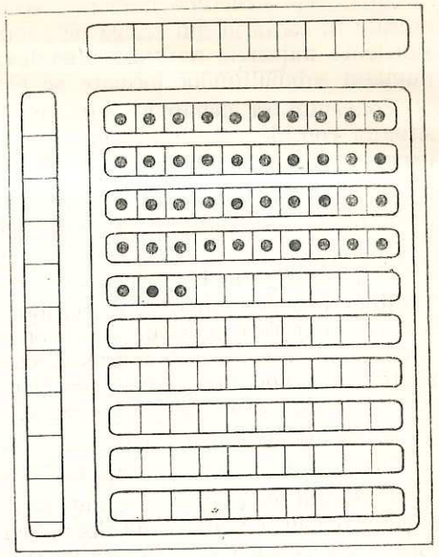


Fig. 39.T

2) Indicăm fiecare submulţime de cîte zece discuri de pe panoul 12, printr-un triunghi albastru aşezat în stînga submulţimii respective, şi fiecare disc din cele cu care nu am putut completa o submulţime de zece discuri, printr-un disc negru aşezat în conturul de deasupra mulţimii iniţiale, cum arată figura 40.

Alegînd mulţimi de discuri care să ne conducă la situaţia (b) de mai sus (fig. 41), numărăm submulţimile de cîte zece discuri din organizarea mulţimii

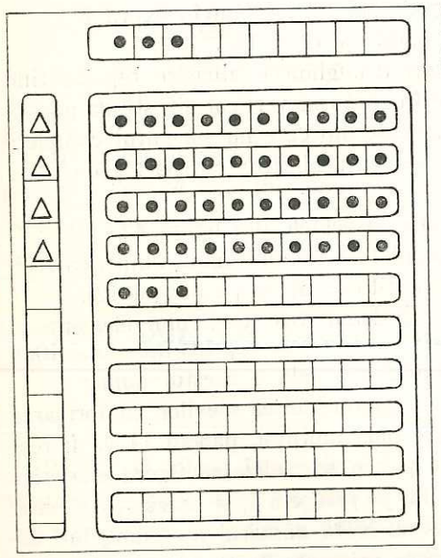


Fig. 40.T

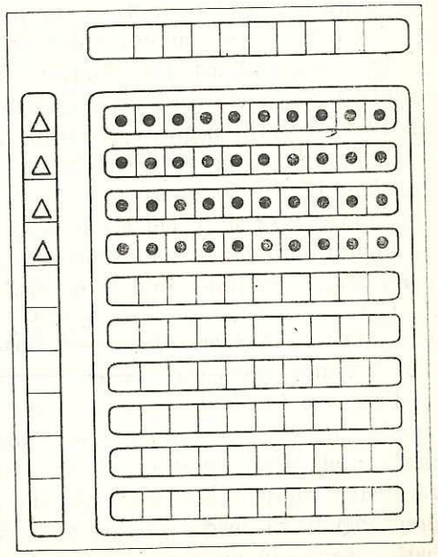


Fig. 41.T

discurilor cu structură numerică zecimală, numărînd triunghiurile albastre așezate în conturul din stînga pe panoul 12. Se observă că în acest scop sînt suficiente numerele naturale pînă la zece, învățate deja de elevi, deoarece numărul submulțimilor formate pe panou nu poate depăși zece.

Convenim să denumim numărul elementelor mulțimii inițiale aflate în situația considerată, prin cuvîntul obținut alipind la dreapta cuvîntului ce exprimă numărul submulțimilor de cîte zece, cuvîntul „zeci".

În exemplul din figura 41 : patruzeci.

Excepție face cazul în care avem zece zeci, cînd numele numărului discurilor va fi „o sută".

În cazul figurii 40, convenim a forma denumirea numărului elementelor mulțimii inițiale, introducînd conjuncția „și" între cuvîntul format ca mai sus, care exprimă numărul discurilor conținute în submulțimile de cîte zece, și cuvîntul ce exprimă numărul discurilor rămase în afara acestora (care nu poate depăși nouă) cu ocazia organizării mulțimii inițiale a discurilor cu structură numerică zecimală, pe panoul 12.

În exemplul nostru : patruzeci și trei.

Excepție fac numerele cuprinse între zece și douăzeci.

3) Panoul 12 conține la stînga și deasupra conturului în care am realizat organizarea unei mulțimi de discuri cu structură numerică zecimală, cîte un contur în care am așezat, respectiv, triunghiuri albastre și discuri negre (fig. 40).

Din convenția introdusă asupra denumirii numărului elementelor unei mulțimi date se vede că acest număr este perfect determinat dacă se cunoaște aspectul acestor două contururi, cel din stînga și cel de sus din panoul 12.

Dacă am roti convenabil cu 90° conturul vertical din stînga, alăturîndu-l orizontal și la stînga celui de sus, am obține aspectul din panoul 14. Cum contururile menționate sînt fixe pe panoul 12, nu putem executa mișcarea indicată. De aceea realizăm panoul 14 plasînd plăcuțele 3 și 9 așa cum rezultă din figura 22, pe planșeta 4, deasupra panoului 12, existent în figura 40.

Avem acum pe planșeta 4 două panouri, și 12 și 14.

În panoul 14 astfel realizat, mutăm triunghiurile albastre reprezentînd submulțimile de cîte zece discuri, aflate în conturul vertical din stînga panoului 12, și discurile negre reprezentînd pe cele din care nu s-a putut completa o submulțime cu zece elemente, aflate în conturul situat în partea de sus a panoului 12.

Panourile 12 și 14 iau acum, respectiv, aspectele din figura 42.

Figura obținută în acest mod pe panoul 14 o numim figură numerică zecimală pentru mulțimea inițială de discuri (situate acum pe panoul 12).

Figura numerică zecimală avantajează denumirea numărului elementelor mulțimii care a generat-o (în cazul noastru acesta este cuprins între 9 și 100), dar mai ales sugerează scrierea pozițională zecimală a acestui număr.

Pentru a introduce această scriere, după obișnuirea elevilor cu formarea figurii numerice zecimale corespunzătoare unei mulțimi, panoul 14 va fi realizat pe planșeta suport nr. 1. Pe acest panou se realizează figura numerică zecimală a mulțimii. Deasupra panoului 14, pe planșeta 1, se așază cîte o piesă dreptunghiulară neagră pe care s-a scris cu cretă numărul de triunghiuri albastre, respectiv numărul de discuri negre existente în figura 43.

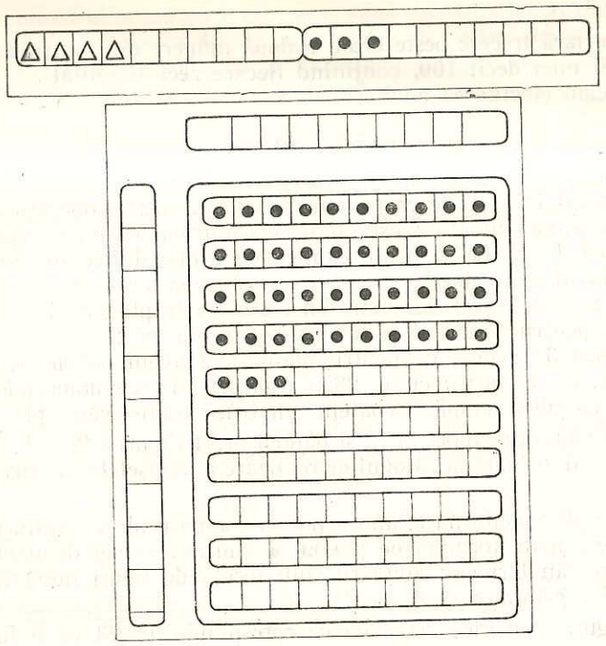


Fig. 42.T

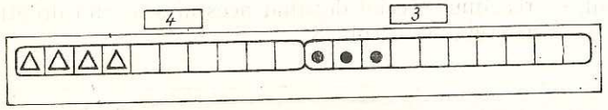


Fig. 43.T

Piesele dreptunghiulare negre purtînd cifrele scrise cu cretă sînt apoi apropiate așa cum se vede în figura 44, în care a și apărut scrierea numărului respectiv.

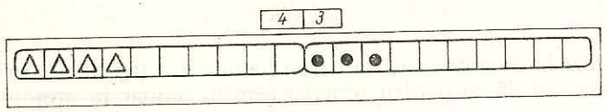


Fig. 44.T

Panoul 14 folosit în maniera de mai sus optimizează, pe bază de imagini vizuale : formarea ideii de unitate de ordinul întîi ; înțelegerea semnificației cifrei unităților în scrierea numărului ; formarea ideii de unitate de ordinul al doilea ; înțelegerea semnificației cifrei zecilor în scrierea numărului ; înțelegerea principiului scrierii poziționale în sistemul zecimal de numerație.

Exemplul 2

Adunarea fără trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, conținînd fiecare zeci și unități.

Să explicăm efectuarea adunării

$$23 + 45 =$$

și să deducem o regulă de calcul (oral și în scris).

Din „**Tabelul 1**" se vede că pentru efectuarea acestei operații ar fi posibil să servească panoul nr. 4. Acest lucru se confirmă, citind mențiunile făcute pentru panoul 4, la „**Ce se poate explica cu ajutorul fiecărui panou**".

Din „**Tabelul 2**" deducem că pentru realizarea panoului 4 sînt necesare plăcuțele 1, 2, 3, 4, 8 și 9. Scoatem din trusă aceste plăcuțe. Din același tabel observăm că pentru panoul 4 se folosește planșeta nr. 2.

În „**Tabelul 3**" vedem că pentru planșeta 2 avem nevoie de: cele două plăcuțe cu nr. 17; o plăcuță cu nr. 28; o riglă scurtă; cele două rigle mai lungi; două clame metalice simple. Scoatem din trusă toate aceste piese.

Realizăm planșeta suport nr. 2 și panoul nr. 4 (figurile 2, 5, 6, 7, 12 și 27), conform indicațiilor date la „**Modul de realizare a planșetelor suport și a panourilor**".

Pentru a aplica definiția adunării numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte, formăm pe panoul 4 mulțimi model disjuncte între ele pentru fiecare din termenii adunării, sub formă de figuri numerice zecimale ce corespund acestora.

Astfel, figura numerică zecimală ce corespunde lui 23 va fi formată din 2 triunghiuri albastre reprezentînd zeci (mulțimi de cîte zece discuri negre) și 3 discuri negre reprezentînd unități (adică discurile însăși), plasate la locul potrivit pe panou (vezi fig. 45). În dreptul săgeții corespunzătoare de pe panoul 4 așezăm, pe reazimul special destinat acestui scop, un dreptunghi negru pe care am scris cu cretă numărul 23.

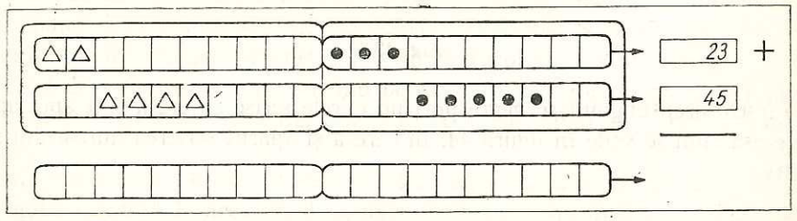


Fig. 45.T

Analog procedăm pentru realizarea pe panoul 4 a figurii numerice zecimale corespunzătoare lui 45, și pentru scrierea acestui număr în dreptul figurii respective.

Rezultatul adunării celor două numere va fi numărul elementelor reuniunii celor două mulțimi model folosite pentru termeni. Reuniunea respectivă este pusă în evidență de conturul (linia închisă) ce înconjură cele două contururi reprezentînd mulțimile model pentru termeni.

Se vede că reuniunea este o mulțime gata organizată cu structură numerică zecimală. Ea are numărul unităților, respectiv al zecilor, egal cu suma numerelor unităților, respectiv a zecilor, existente la fiecare din numerele termeni.

Scriem numărul sumă cu cretă pe o piesă dreptunghiulară neagră și o așezăm așa cum arată figura 46. În acest mod, în partea dreaptă a panoului 4 se obține așezarea convenabilă a numerelor pentru efectuarea adunării în scris. Se deduce cu ușurință regula de calcul.

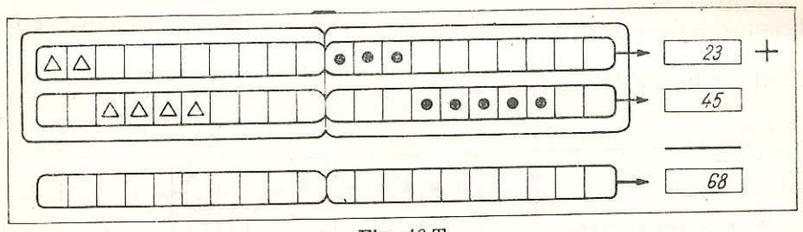


Fig. 46.T

Pentru perceperea mai clară a reuniunii mulțimilor model și a structurii sale zecimale, cît și a regulii de calcul ce de deduce, se deplasează discurile negre și triunghiurile albastre așa cum sugerează săgețile din figura 47.

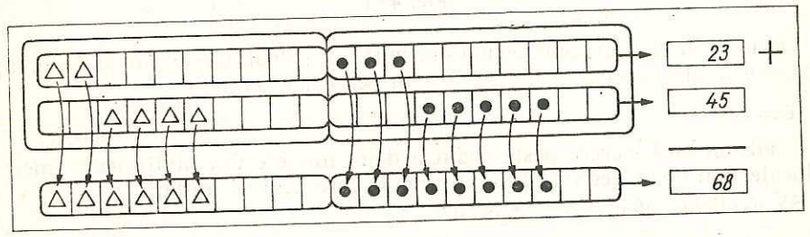


Fig. 47.T

Exemplul 3

Adunarea cu trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, conținînd fiecare zeci și unități.

Să explicăm efectuarea adunării

$$26 + 57 =$$

și să deducem o regulă de calcul.

Din cele relatate pînă acum se vede cum găsim panoul și planșeta corespunzătoare și cum le realizăm. Constatăm că avem nevoie de panoul 4.

Pe panoul 4 se realizează mulțimile model pentru termeni, așa cum s-a făcut și la exemplul anterior, obținîndu-se aspectul din figura 48.

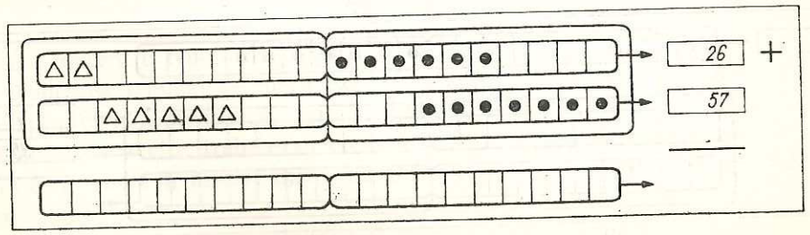


Fig. 48.T

De data aceasta însă, reuniunea mulțimilor model ale termenilor nu apare cu structură numerică zecimală, deoarece din discurile pe care le conține în afara submulțimilor de cîte zece, reprezentate prin triunghiuri albastre, mai poate fi completată încă o astfel de submulțime.

Pentru ca reuniunea menționată să devină cu structură numerică zecimală ridicăm zece discuri negre de pe panoul 4 și, în locul lor, plasăm la locul potrivit încă un triunghi albastru, pe lîngă cele deja existente. Acest lucru este sugerat pe figura 49.

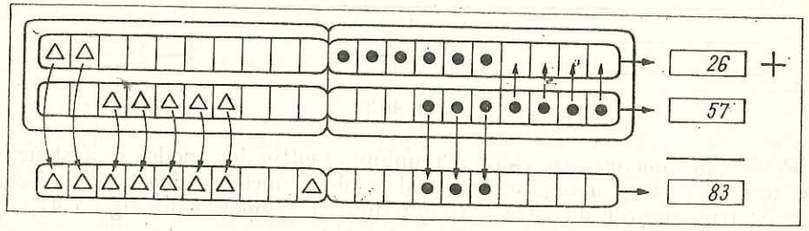


Fig. 49.T

Decurge în mod evident regula obișnuită de calcul. Observăm că în dreapta panoului apare procedeul de așezare în scris a calculului.

Exemplul 4

Scăderea fără trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, conținînd fiecare zeci și unități.

Să explicăm efectuarea scăderii

$$47 - 35 =$$

și să deducem o regulă de calcul (oral și scris).

Se găsește ușor că putem folosi panoul nr. 5, realizat pe planșeta nr. 2, pe care le executăm după recomandările anterioare.

Pentru a explica definiția scăderii numerelor naturale cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, formăm pe panoul 5 o mulțime model pentru descăzutul 47, sub formă de figură numerică zecimală (fig. 50). În stînga acestei figuri, în direcția săgeții existente, așezăm pe reazimul special destinat acestui scop un dreptunghi negru din punga de plastic, pe care am scris cu creta numărul 47. Alte două dreptunghiuri negre pe care am scris cu creta, respectiv 47 și 35, le așezăm în dreapta panoului 5, cum se vede de asemenea în figura 50.

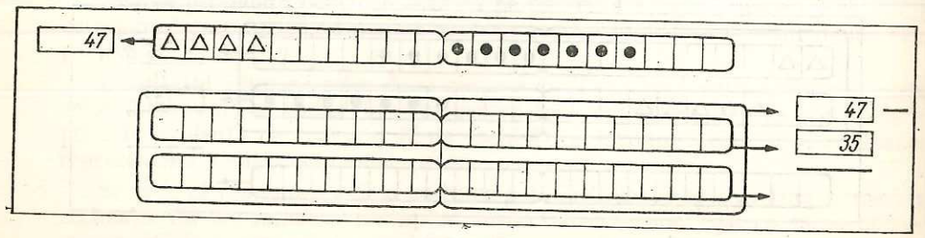


Fig. 50.T

Deplasînd discurile și triunghiurile aflate pe panoul 5 așa cum indică săgețile din figura 51, obținem separarea mulțimii model a descăzutului în două submulțimi disjuncte, din care una este mulțime model pentru scăzătorul 35 (piesele care o formează le mișcăm mai întîi); cealaltă submulțime este mulțimea diferență dintre mulțimea model a descăzutului și mulțimea model a scăzătorului.

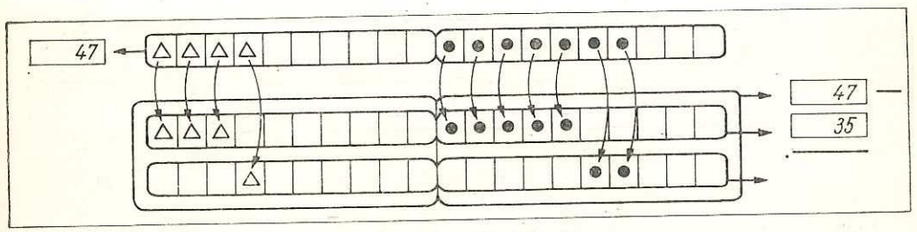


Fig. 51.T

Întrucît mulțimea diferență astfel obținută este gata organizată cu structură numerică zecimală este ușor de stabilit numărul ei de elemente, 12. Plasăm un dreptunghi negru pe care am scris cu creta numărul 12, așa cum se vede în figura 52.

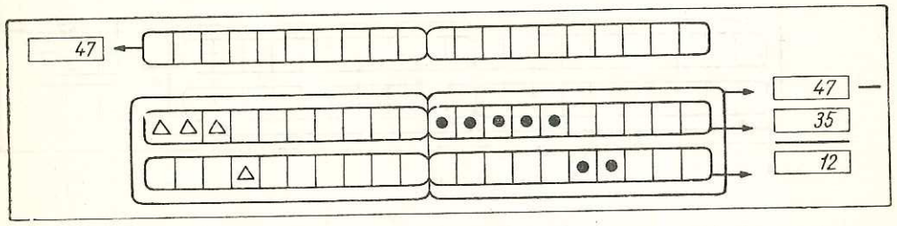


Fig. 52.T

Din modul de lucru expus mai sus rezultă clar regula de calcul. În partea dreaptă a panoului apare modul de așezare a calculului în scris.

Exemplul 5

Scăderea cu trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, conținînd fiecare zeci și unități.

Să efectuăm scăderea

$$52 - 37 =$$

și să deducem o regulă de calcul.

Aplicarea tehnicii de lucru expusă la exemplul anterior este împiedicată de faptul că nu putem alege din discurile existente în mulțimea model a descăzutului, atîtea cîte trebuie să conțină mulțimea model a scăzătorului (fapt care este bine a fi probat încercînd a efectua această scădere tot cu ajutorul panoului 5).

Panoul 6 executat pe planșeta 2 rezolvă această situație.

Realizăm pe panoul 6 mulțimea model pentru descăzutul 52, așa cum arată figura 53. Pentru a depăși dificultatea menționată, luăm un triunghi

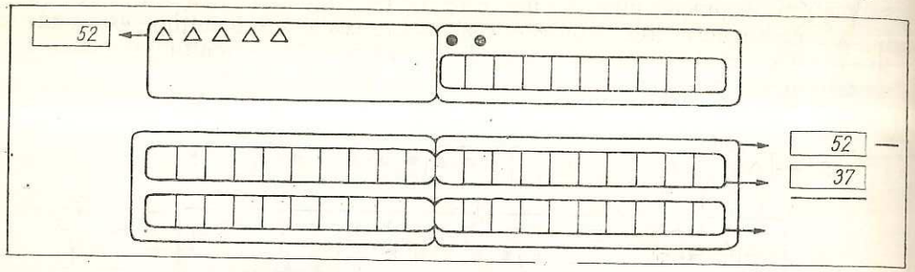


Fig. 53.T

albastru din cele existente în figura numerică a descăzutului și punem în schimb pe panou zece discuri negre, cum indică figura 54.

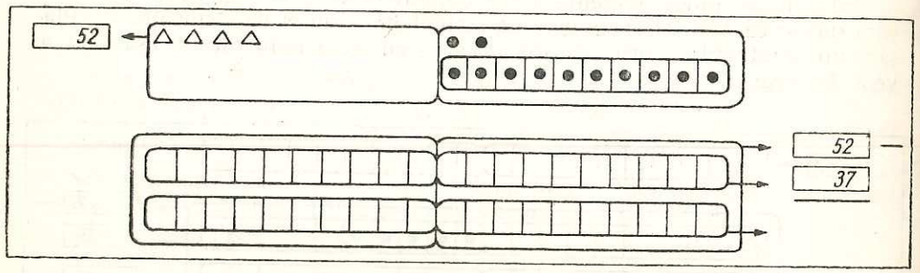


Fig. 54.T

Pentru efectuarea scăderii se procedează în continuare ca la exemplul 4, ceea ce rezultă și din figura 55.

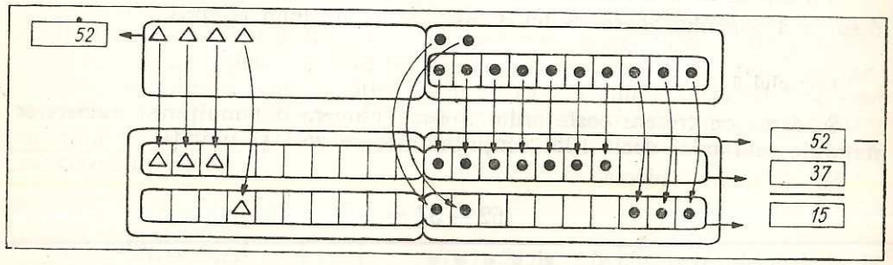


Fig. 55.T

Se deduce regula : se scad unitățile de la scăzător dintr-o zece a descăzutului ; restul obținut, adunat cu unitățile descăzutului, dă numărul de unități al diferenței ; numărul zecilor diferenței se obține scăzînd numărul zecilor scăzătorului din cele rămase la descăzut, după luarea zecii menționate mai sus.

În dreapta panoului se obține așezarea în scris a calculului.

Exemplul 6

Împărțirea numerelor naturale în cazul în care împărțitorul și cîtul nu sînt mai mari decît 10. Procedeul prin „cuprindere" și procedeul prin „părți egale".

Să efectăm împărțirea :

$$12 : 4 =$$

Avînd cîtul 3 și împărțitorul 4, observăm că putem folosi panoul 12, sau chiar 13, ultimul fiind mai comod pentru că este mai mic. Așadar, realizăm panoul 13 pe planșeta 4.

Se iau din punga de plastic conținînd discurile negre, un număr de 12 discuri și se așază pe masă. Ele vor constitui mulțimea model pentru deîmpărțit.

Aplicăm definiția împărțirii numerelor naturale cu ajutorul separării în submulțimi disjuncte a mulțimii model pentru deîmpărțitul 12, folosind :

a) Procedeul prin „cuprindere" :

Luăm de pe masă cîte un disc și îl așezăm ca element al unei submulțimi din cele figurate pe panoul 13, pînă completăm acesteia 4 discuri (fig. 56). Continuăm așezarea, după același procedeu, a cîte 4 discuri în celelalte sub-

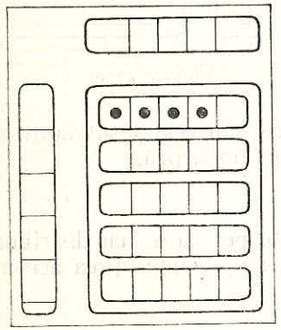


Fig. 56.T

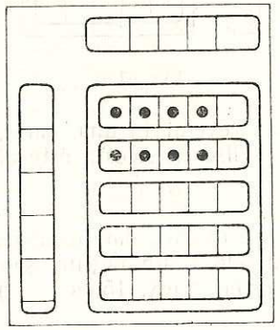


Fig. 57.T

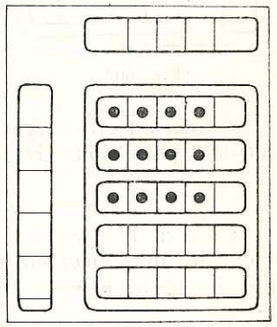


Fig. 58.T

mulțimi figurate pe panoul 13, pînă se termină discurile de pe masă (figurile 57 și 58).

Numărăm cîte submulțimi de cîte 4 elemente s-au obținut pe panoul 13, din mulțimea model a deîmpărțitului 12. Găsim 3 submulțimi. Acesta este cîtul împărțirii :

$$12 : 4 = 3$$

Numărarea submulțimilor se poate face și plasînd pe panou cîte o piesă, să zicem un triunghi albastru, pentru fiecare submulțime formată, cum se vede în figura 59, și numărînd apoi aceste triunghiuri.

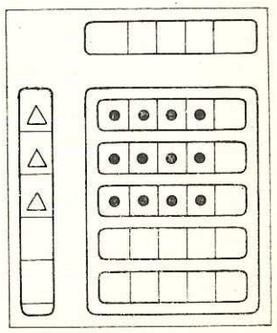


Fig. 59.T

Observație. Dacă rămîneau pe masă discuri cu care nu mai putem completa o nouă sub-

mulţime cu 4 elemente, împărţirea acelor numere naturale ar fi fost „imposibilă“ (ex. 15 : 4 =).

b) Procedeul prin „părţi egale“.

Alegem 4 contururi de submulţimi din cele figurate pe panoul 13.

Din cele 12 discuri de pe masă distribuim, pe rînd, cîte unul în fiecare din cele 4 contururi alese, ca în figura 60. Din discurile rămase pe masă mai distribuim cîte unul în fiecare din cele 4 contururi alese pe panoul 13, şi aşa mai departe, pînă se termină discurile de pe masă (figurile 61 şi 62).

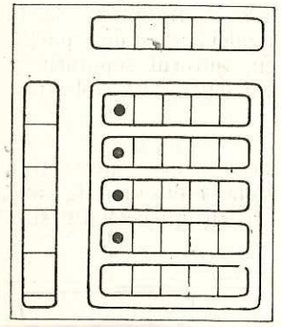


Fig. 60.T

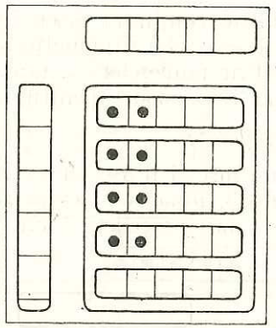


Fig. 61.T

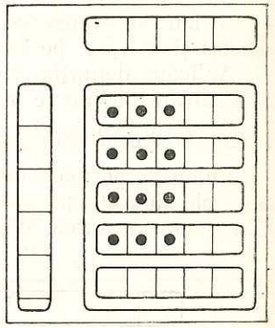


Fig. 62.T

Numărăm cîte discuri au revenit în una, oarecare, din cele 4 submulţimi formate pe panou. Găsim 3 discuri. Acesta este cîtul împărţirii.

$$12 : 4 = 3$$

Dacă ar fi rămas pe masă discuri, dar insuficiente pentru a mai distribui încă cîte unul fiecăreia din cele 4 submulţimi, spuneam că împărţirea acelor numere naturale este „imposibilă“ (ex. 15 : 4 =).

Tabelul 1

Destinaţia panourilor ce pot fi realizate

Panoul nr.	Utilizarea lui la:
	În mulţimea numerelor naturale mai mici decît 10:
1.	— adunarea a două numere;
2.	— adunarea a două numere, cu găsirea sumei fără numărare;
3.	— scăderea a două numere.
	În mulţimea numerelor naturale mai mici decît 100:
4.	— adunarea a două numere, fără şi cu trecere peste ordin;
5.	— scăderea a două numere, fără trecere peste ordin;
6.	— scăderea a două numere, cu trecere peste ordin;
7.	— adunarea a trei numere, fără şi cu trecere peste ordin.
	În mulţimea numerelor naturale mai mici decît 1 000:
8.	— adunarea a două numere, fără şi cu trecere peste ordin;
9.	— scăderea a două numere, fără trecere peste ordin;
10.	— scăderea a două numere, cu trecere peste ordin;
11.	— adunarea a trei numere, fără şi cu trecere peste ordin.
	În mulţimea numerelor naturale pînă la 100:
12.	— înmulţirea a două numere cel mult egale cu 10; — împărţirea în cazul în care împărţitorul şi cîtul nu sînt mai mari decît 10; — legătura dintre înmulţire şi împărţire; — structura numerică zecimală a mulţimii, numirea numărului ei de elemente;
13.	— citeşte la panoul (12), înlocuind 10 cu 5, „zecimală“ cu „în baza 5“ şi suprimînd „numirea numărului ei de elemente“.
14.	— *Figura numerică* care conduce la numere naturale cuprinse între 9 şi 100.
15.	— Citeşte ca la panoul (14), dar pentru numere cuprinse între 99 şi 1 000.

Tabelul 3

Alcătuirea planşetelor suport din plăcile componente

Plăci, rigle, clame / Planşeta nr.	Numărul plăcii		Numărul de plăci folosite	Rigle		Numărul de rigle folosite	Numărul de clame folosite		
	27	28		scurte	lungi		simple	duble	
1	●●	—	2	—	2	2	1	—	
2	●●	●	3	1	2	3	2	—	
3	●●	●●	4	2	2	4	3	—	
4	●●	●●	4	—	2	2	1	3	
Existente în trusă bucăţi	2	2	—	2	2	—	3	3	
La cîte planşete foloseşte	4	3	—	3	3	—	4	1	

Tabelul 2

Alcătuirea panourilor din plăci componente

Nr. panoului / Nr. plăcii	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	La cîte panouri folosește	Numărul de plăci existent în trusă
1.	●	●		●				●								4	1
2.	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●					11	1
3.	●	●	●	●	●		●	●	●		●			●	●	11	1
4.	●	●		●				●								4	1
5.		●														1	1
6.			●		●				●							3	1
7.			●		●				●							3	1
8.				●	●	●	●	●●	●	●●	●●					8	2
9.				●	●		●	●●	●		●●			●	●●	8	2
10.						●				●						2	1
11.						●				●						2	2
12.						●				●						2	2
13.						●				●						2	1
14.							●				●●					2	2
15.							●				●					2	1
16.							●				●					2	1
17.							●				●					2	1
18.										●						1	1
19.												●	●			2	1
20.												●	●			2	1
21.												●	●			2	1
22.												●	●			2	1
23.												●				1	1
24.												●				1	1
25.												●				1	1
26.												●				1	1
Numărul de plăci folosite	4	5	4	6	6	6	8	8	6	8	11	8	4	2	3	—	29
Nr. planșetei pe care se realizează	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	1	2	—	—

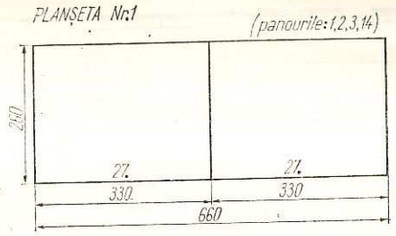


Fig. 1.T

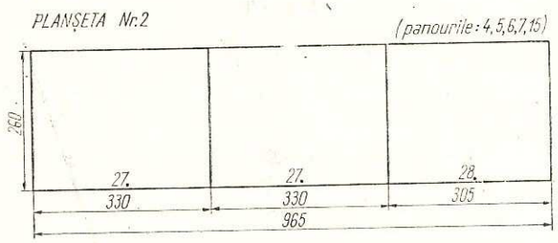


Fig. 2.T

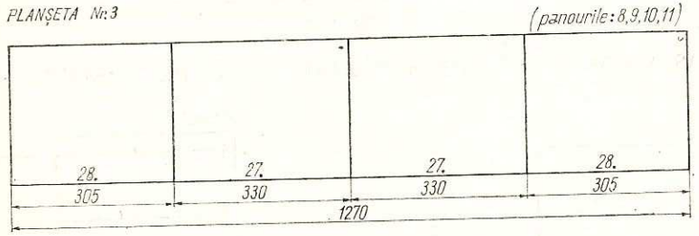


Fig. 3.T

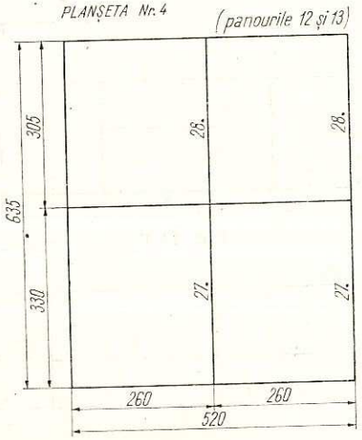


Fig. 4.T

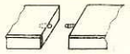


Fig. 5.T

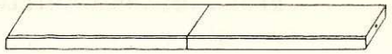


Fig. 6.T

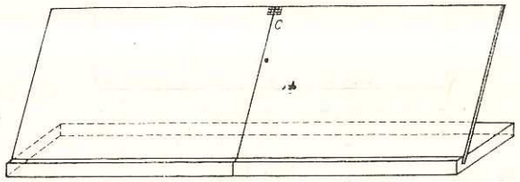


Fig. 7.T

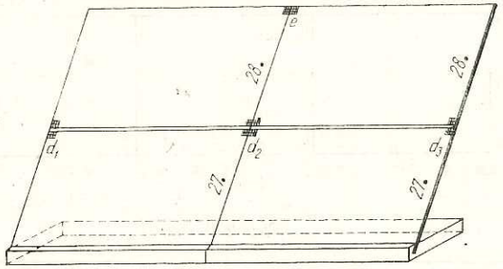


Fig. 8.T

ASAMBLAREA PLĂCUȚELOR PENTRU REALIZAREA PANOURILOR

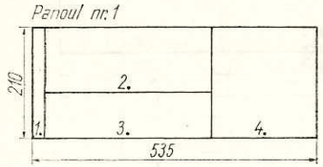


Fig. 9.T

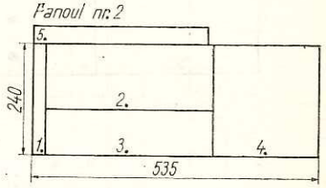


Fig. 10.T

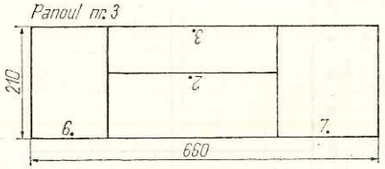


Fig. 11.T

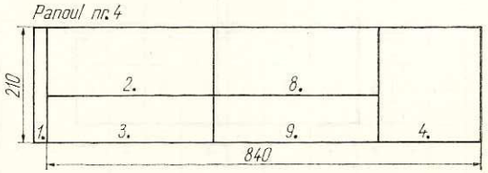


Fig. 12.T

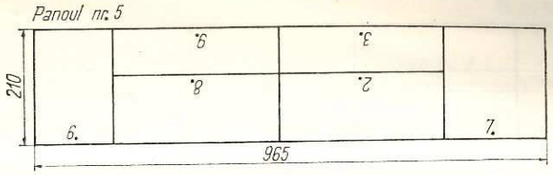


Fig. 13.T

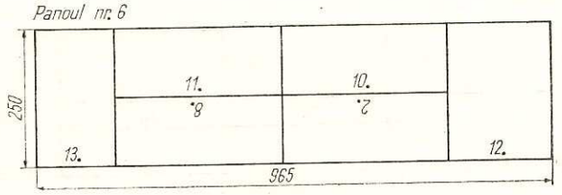


Fig. 14.T

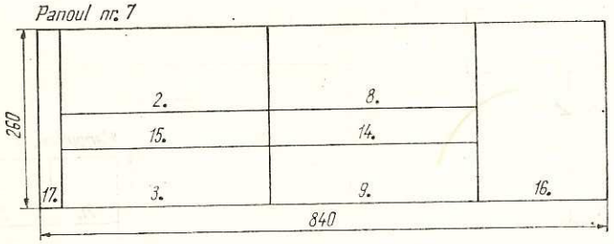


Fig. 15.T

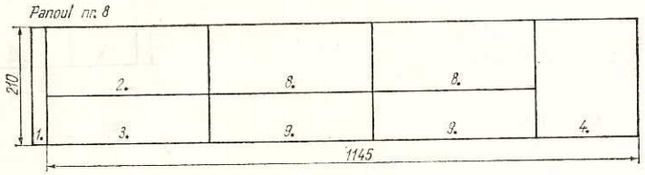


Fig. 16.T

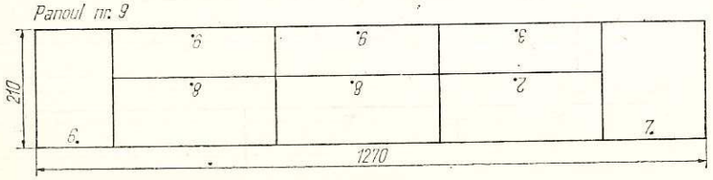


Fig. 17.T

Panoul nr. 10

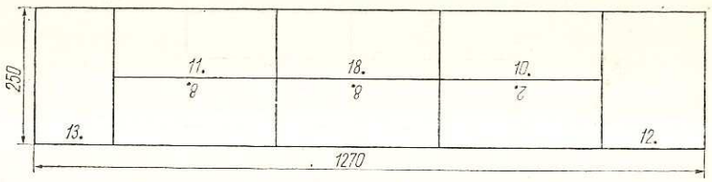


Fig. 18.T

Panoul nr. 11

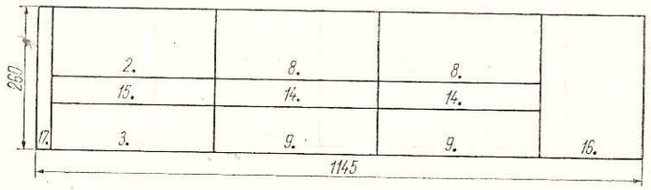


Fig. 19.T

Panoul nr. 12

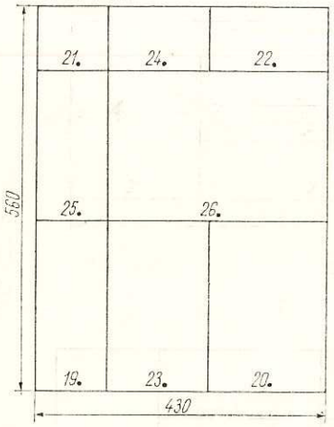


Fig. 20.T

Panoul nr. 13

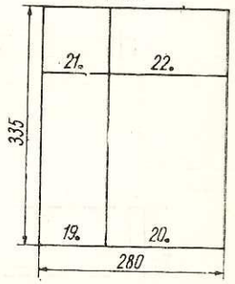


Fig. 21.T

Panoul nr. 14

Fig. 22.T

Panoul nr. 15

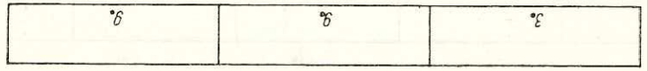


Fig. 23.T

Panoul nr. 1

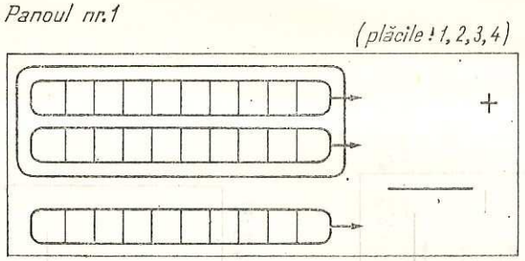


Fig. 24.T

Panoul nr. 2

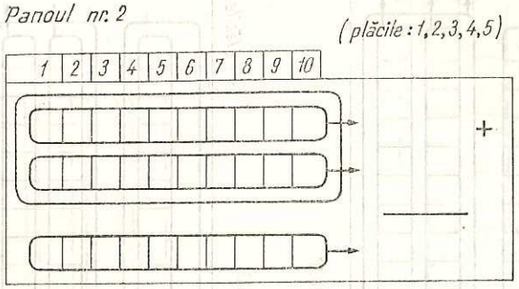


Fig. 25.T

Panoul nr. 3

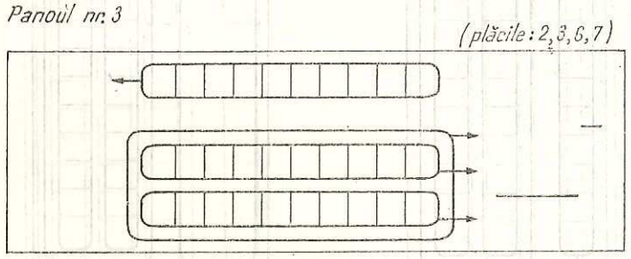


Fig. 26.T

Panoul nr. 4

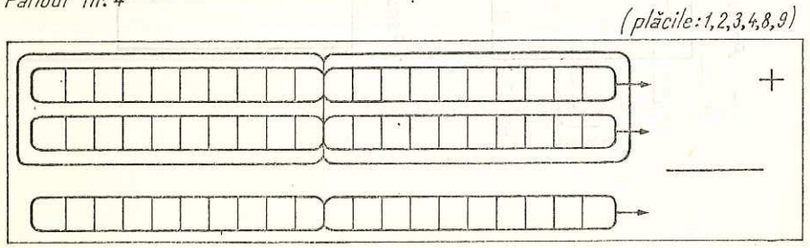


Fig. 27.T

Panoul nr. 5

(plăcile: 2,3,6,7,8,9)

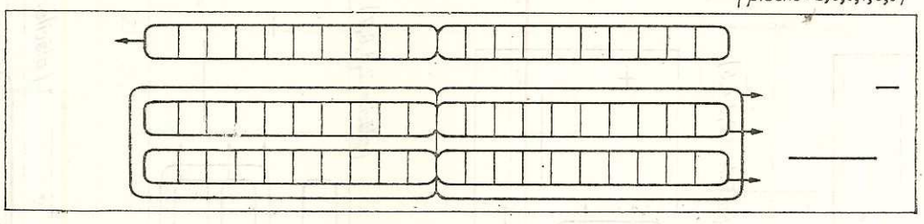


Fig. 28.T

Panoul nr. 6

(plăcile: 2,8,10,11,12,13)

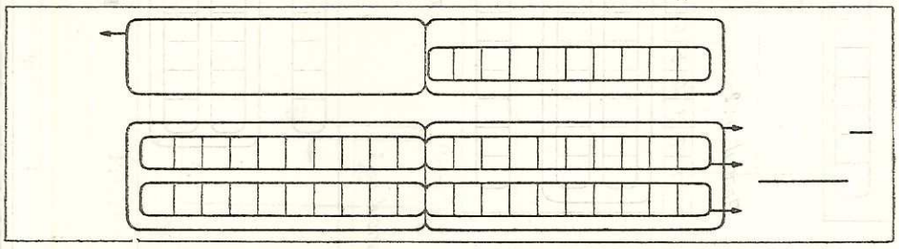


Fig. 29.T

Panoul nr. 7

(plăcile: 2,3,8,9,14,15,16,17)

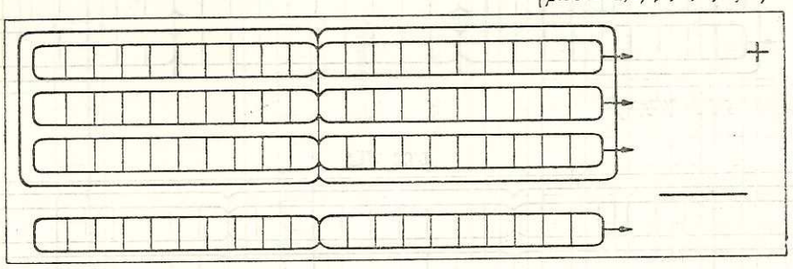


Fig. 30.T

Panoul nr. 8

(plăcile: 1,2,3,4,8,8,9,9)

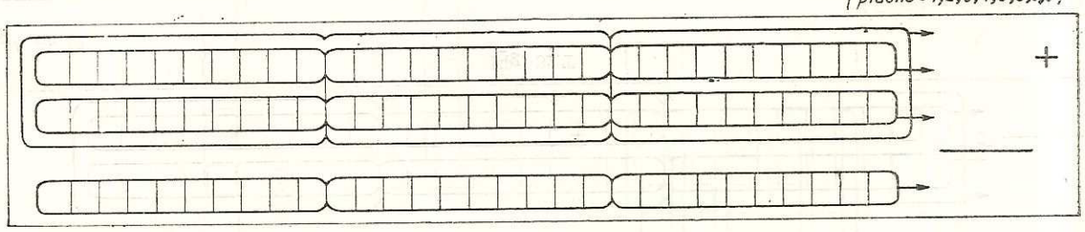


Fig. 31.T

Panoul nr. 9 (plăcile: 2,3,6,7,8,9)

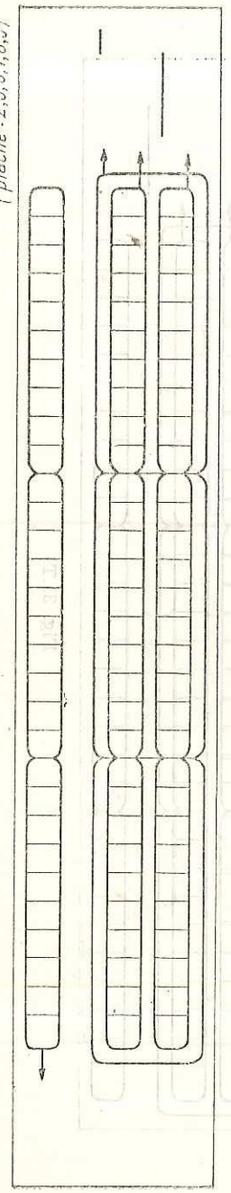


Fig. 32.T

Panoul nr. 10 (plăcile: 2,8,8,10,11,12,13,13)

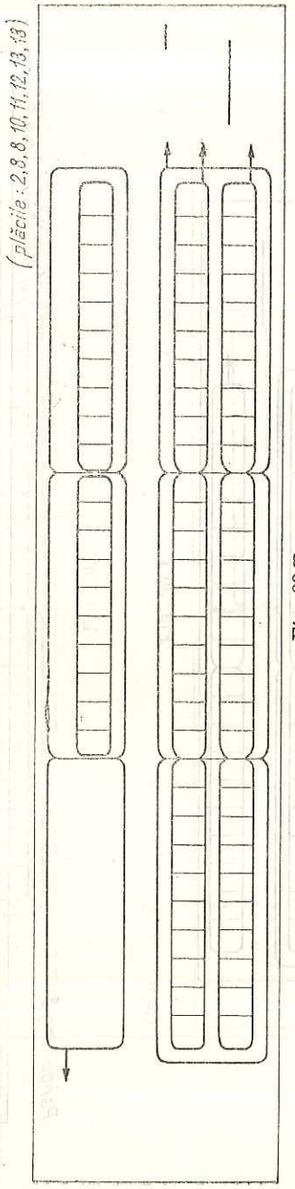


Fig. 33.T

Panoul nr. 11 (plăcile: 2,3,8,8,9,9,14,14,15,16,17)

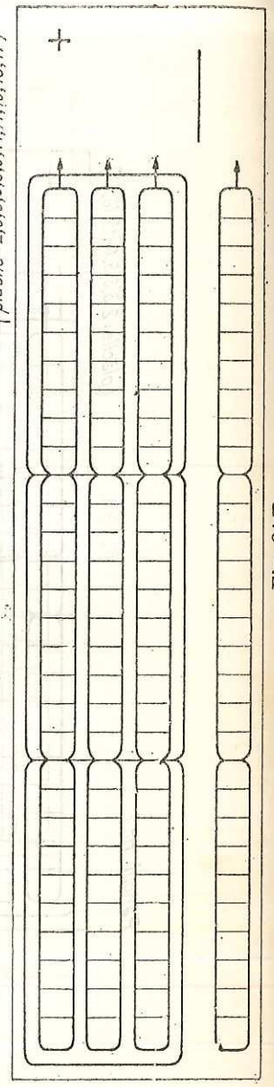


Fig. 34.T

Panoul nr. 12 (plăcile: 19,20,21,22,23,24,25,26)

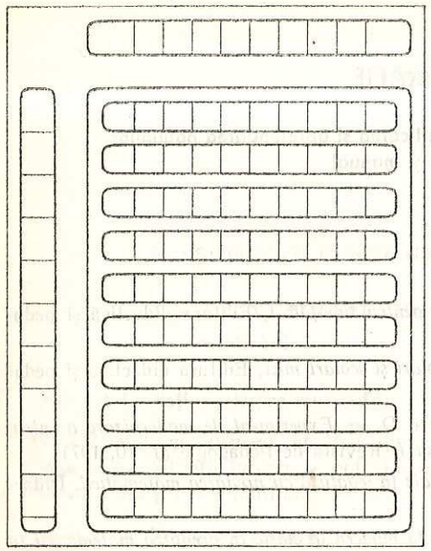


Fig. 35.T

Panoul nr. 13 (plăcile: 19,20,21,22)

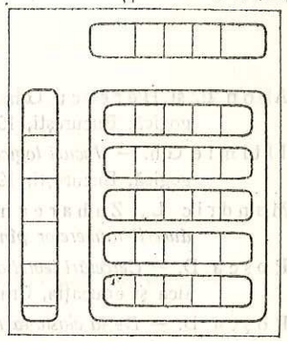


Fig. 36.T

Panoul nr. 14 (plăcile 3, 9)

Fig. 37.T

Panoul nr. 15 (plăcile 3, 9, 9)

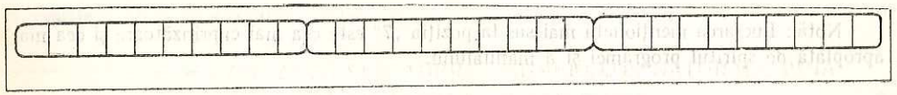


Fig. 38.T

BIBLIOGRAFIE

recomandată învăţătorilor pentru clarificarea şi aprofundarea noţiunilor din programă şi manual

1. Aron I., şi Herescu Gh. — *Aritmetică pentru învăţători*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1977.
2. Iftimie Gh. — *Jocuri logice pentru preşcolari şi şcolari mici*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.
3. Mandric L., Zahareanu S., Roşca D. — *Experiment de modernizare a introducerii numerelor pînă la 10 în clasa I*, Revista de Pedagogie nr. 10, 1971.
4. Roşca D. — *Cercetări teoretice şi experimentale în legătură cu predarea matematicii*. Didactica şi educaţia, Craiova, 1969.
5. Roşca D. — *De la clasic la modern, sau de la modern la clasic în predarea matematicii în şcoala generală?* — Probleme actuale ale modernizării învăţămîntului matematicii în ţările europene, Colocviul internaţional U.N.E.S.C.O., Buc. 1968 — — Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1970.
6. Roşca D. — *Introducerea şi utilizarea la clasele III—IV a noţiunii generale de operaţie internă binară într-o mulţime* — Preocupări didactice, editată de Casa corpului didactic, judeţul Neamţ, 1972.
7. Roşca D. — *Matematici moderne în sprijinul învăţătorilor*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1978.
8. Roşca D., Mandric L., Zahareanu S. — *Introducerea numerelor pînă la zece în clasa I pe baza unor elemente despre mulţimi şi relaţii*, planurile lecţiilor prezentate în cadrul unui experiment didactic — Preocupări didactice, editată de Casa corpului didactic, judeţul Neamţ, 1977.

*

Notă: Lucrarea menţionată mai sus la poziţia „7" este cea mai cuprinzătoare şi cea mai apropiată de spiritul programei şi a manualului.

CUPRINS

Coli de tipar 10,60. B.T. 05.08.1981.
Format 16/70×100. Apărut 1981.

I. P. „Oltenia" Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România
Plan 27478/210/1981.