

DUMITRU ROȘCA

# Matematică clasa a II-a ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI

DUMITRU ROŞCA

**Matematică clasa a II-a  
ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI**



**EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1981**

**Referenți :**

Cercet. științific doctor **SILVIU TELEMAN**

Prof. **IOANA G. BORCA**

Prof. **GHEORGHE I. HERESCU**

Inv. **VASILE MOTRESCU**

**Redactor : TUDORA GAVRILĂ**

**Tehnotedactor : ELENA PETRICĂ**

**Coperta : DUMITRU ȘMÄLENIC**

## **CONSIDERAȚII GENERALE**

### **1. CONCEPȚIA DUPĂ CARE A FOST ELABORAT MANUALUL**

Principalele trăsături comune diverselor programe de modernizare a studiului matematicii în primii ani de școală decurg din convingerea unanimă că noțiunile despre mulțimi și relații conțin valențe pedagogice a căror fructificare va determina un salt calitativ important în direcția optimizării învățării matematicii.

Un astfel de punct de vedere a fost adoptat și la noi în țară prin programa de matematică pentru clasele I—IV ce se introduce treptat, începînd din anul școlar 1978/79.

Eseňa noii concepții constă în folosirea, la nivelul de înțelegere al copiilor, a unor cunoștințe despre mulțimi și relații și a terminologiei adecvate, care să ofere posibilitatea explicării, în condiții net superioare decât se putea face pînă acum, a unor noțiuni matematice fundamentale (numere naturale, operații cu numere naturale etc.), a exprimării corecte și comode a ideilor, a folosirii mai eficiente a intuiției, concomitent cu un proces treptat de abstracțizare.

Noțiunile despre mulțimi și relații dezvoltă la copii abilitatea desprinderii situațiilor matematice din lumea înconjurătoare, creării de modele matematice și utilizării lor pentru studierea diferitelor aspecte ale realității, găsirii legăturilor esențiale între diversele mărini din enunțul problemelor, a operațiilor care duc la rezolvarea acestora, măring capacitatea elevilor de aplicare a matematicii în cele mai diverse situații și educînd, cu un excelent răbdament, supletea în gîndire a elevilor.

Modernizarea realizată de noile programe și manuale de matematică la clasele I—IV nu înseamnă înlăturarea din școală a unei matematici și introducerea alteia, cu desăvîrșire nouă. Desigur, există și lucruri noi, dar baza studiului matematicii în aceste clase o formează în continuare cunoștințele zise „clasice“, a căror utilitate a fost dovedită. Nouă este forma de prezentare a acestor cunoștințe, dintr-un alt punct de vedere, într-un context mai general,

mai apropiat de situația matematică actuală, cu o logică care mărește apreciabil posibilitățile de explicare pentru învățători și şansele de înțelegere și asimilare, pentru elevi.

Așa cum am scris și într-un proiect de programă de matematică pentru clasele I—IV pe care l-am propus Ministerului Educației și Învățământului în ianuarie 1978, șocat la prima vedere de multe elemente ce par cu totul noi pentru acest nivel de învățămînt, învățătorul se va convinge repede că de fapt noile programe și manuale sistematizează, conștientizează procese psihice și intelectuale care au fost folosite pînă acum în procesul învățării în mod inconsecvent, neexplicit, rămînînd la forme de gîndire și de exprimare echivoce.

Subliniem faptul că, deși contribuie la dezvoltarea posibilităților de exprimare a ideilor, noul sistem de prezentare a cunoștințelor are drept principală consecință nu un spor de verbalizare, ci unul de fundamentare logică a cunoștințelor matematice, pe baza cunoașterii și exersării unor procese ale gîndirii cu caracter foarte general. Ca urmare firească a creșterii conștientizării actului învățării, se vor întări deprinderile de calcul, ale cărui tehnici devin mai bine înțelese.

Cunoștințele despre mulțimi și relații, favorizînd o mai profundă ancorare a cunoștințelor matematice în realitatea încunjurătoare și, totodată, surprinderea aspectelor matematice din această realitate, dau posibilitatea realizării unui salt calitativ în aplicarea principiului intuiției. Prezentul îndrumător și manualul la care se referă constituie o încercare de folosire a materialului didactic după un program în care se comandă și se obține un anumit efect, cu un consum minim de materiale, timp și energie.

Sporind accesibilitatea cunoștințelor matematice pentru masa largă a elevilor, se va reduce eșecul școlar și diferențierea în pregătirea matematică a elevilor.

## 2. UNELE RECOMANDĂRI GENERALE

### a. CUM TREBUIE FOLOSIT MANUALUL

Este necesar ca manualul să fie studiat în întregime înainte de a se începe predarea conținutului la elevi. Aceasta va permite învățătorului să aibă o vedere de ansamblu care îi va ajuta să dozeze just timpul și efortul destinat studierii în clasă a fiecărei teme, precum și orientarea manierei de predare a temelor, astfel încît să favorizeze predarea temelor următoare.

Manualul este, desigur, un ajutor prețios pentru elevi, învățători și părinți. Toți aceștia trebuie să-l studieze cu grija, acasă. Manualul va fi folosit și în clasă în diferite etape ale lecției, în măsura în care se va considera necesar, fără însă ca lucrul cu manualul să ocupe partea principală a orelor de matematică.

Conținutul manualului va orienta pe învățător cum să-și construiască lecțiile. În nici un caz acesta nu se va limita la a reproduce, fie și pe dinafară, tutu manualului, urmând a-și organiza lecțiile prin contribuția sa personală, gîndu-și exemple proprii, potrivite condițiilor concrete ale clasei. În acest de creație o deosebită grijă trebuie avută pentru păstrarea nealterată a înținutului de idei, risc cu atât mai mare cu cît nu există o experiență a sei învățătorilor de construire a lecțiilor într-o astfel de concepție și nici s-a asigurat o pregătire corespunzătoare din timpul liceului pedagogic, bibliografia ce poate fi găsită nu corespunde încă pe deplin acestui scop. Textul din manual va fi folosit în cadrul orelor de clasă mai ales pentru area cunoștințelor și rezolvarea independentă a unor exerciții și probleme. Așă elevul va folosi manualul spre a-și aminti cele explicate de învățător pentru a rezolva exercițiile și problemele propuse ca temă pentru acasă.

#### b. SUGESTII IN LEGĂTURA CU FOLOSIREA MATERIALULUI DIDACTIC

In manual există multe figuri, care au rol efectiv în procesul înșușirii noilor iștișințe. Executarea lor la tablă și în caiete ar putea duce însă la dificultăți natură a compromite realizarea scopului cărora au fost destinate. De aceea, regulă, se va evita desenarea lor, fiind înlocuite cu planșe dinainte pregătite îstă recomandări concrete la fiecare temă, și cu trusa de material didactic destinat predării operațiilor cu numere naturale. Cu toate acestea, rămîn dese de desene care vor trebui făcute la tablă.

In afara materialului didactic sugerat de manual sau propus în acest îndrător, învățătorul poate folosi, cu mici modificări adesea numai de procesă, materialul tradițional existent în școli, sau poate confeționa altul, imat de el.

In ce privește folosirea materialului didactic este bine să se țină seama de cel că nu abundența de material hotărâște succesul unei lecții. Arta este a folosi cît mai puțin material și cît mai simplu, dar care să asigure în cel mai înalt grad lămurirea conținutului de idei, a diferitelor procedee, reguli, mici de lucru care se stabilesc, și aceasta pentru toti elevii clasei. Nu trebuie uitat că elevii cu aptitudini au prea puțină nevoie de material didactic. Todată, nu trebuie uitat că materialul didactic nu este decât un mijloc, el este un scop în sine, de aceea utilizarea sa trebuie să finalizeze totdeauna surprinderea și reținerea aspectelor matematice, desprinse de suportul material prin care s-au introdus.

#### c. SUGESTII REFERITOARE LA ÎNSUȘIREA LIMBAJULUI MATEMATIC

In legătură cu limbajul matematic pe care trebuie să și-l înșușească elevii, enunțarea corectă a definițiilor, regulilor și a altor propoziții matematice luate, menționăm că ar fi o corvoadă obosită pentru elevi cerința de

a le memora și enunța pe de rost. Tehnica înșușirii trebuie să fie altă. Prin modul de prezentare a cunoștințelor, prin folosirea unui material didactic adecvat, prin exemplele date și aplicațiile făcute, prin munca independentă a elevilor și.a., trebuie ajuns la o deplină înțelegere de către toți elevii a conținutului matematic prezentat. În timpul explicațiilor și al tuturor discuțiilor cu elevii învățătorul se va exprima îngrijit, în limbaj matematic corespunzător, păstrând în general mereu aceeași manieră de exprimare a acelorași idei. El va permite în schimb elevilor să-si exprime gândurile în limbaj propriu, cu condiția păstrării corecte a conținutului. În acest mod, elevii nu se vor simți timorați de teama uitării unor termeni, sau că nu vor reuși să reproducă identic cu formularea învățătorului niște propoziții matematice, dar vor împrumuta pe nesimțite modul de exprimare al învățătorului, în ritmul de înșuire propriu fiecărui elev.

Experiența noastră în această direcție a dat rezultate excelente. Un însemnat rol mobilizator s-a dovedit a-l avea evidențierea din cînd în cînd, de ce răspunsul dat de elev este acceptabil, dar formularea învățătorului este preferabilă (precizie, concizie, eleganță etc.).

#### d. FIXAREA CUNOȘTINȚELOR PRIN REPETARE

Este lucru curioscăt că elevii de vîrstă mică își înșușesc destul de repede cunoștințele, dar le și uită repede, dacă nu le repetă mereu. De acest lucru va trebui ținut seama dacă vrem ca anumite cunoștințe transmise elevilor să fie cu adevărat un bun cîștiagat, pe care ei să se poată sprijini în înșuirea altor cunoștințe și în diverse aplicații practice.

Respectarea principiului repetării permanente nu trebuie să ducă însă la a continua discuțiile și aplicațiile asupra unei teme, mult timp după ce aceasta a fost înșușită de elevi. Experiența arată că în acest mod intervine fenomenul de oboseală, de plăcuseală, randamentul activității scade, se irosește timpul.

Este mult mai productiv a se trece la dezbaterea altiei teme, înainte ca în legătură cu cea veche să apară fenomenul de plăcuseală, avînd grijă să se revină periodic, spre a preveni uitarea.

#### e. INSEMNAȚATEA ECONOMIEI DE CUVINTE ȘI A EVIDENȚIERII CLARE A INVENTARULUI IDEILOR TRANSMISE

Atragem atenția asupra importanței explicării cît mai clare a unei idei, asigurată cu cît mai puține cuvinte. Aceasta obligă învățătorul la o migăloasă pregătire a lecțiilor, dar el va fi răsplătit prin rezultate. Abundența de vorbe la lecții este nedorită. Dacă conținutul a 100 de cuvinte spuse de învățător poate fi exprimat numai prin 30 de cuvinte, atunci cele 70 de cuvinte

rezintă un balast de care trebuie „curățat” conținutul transmis, lucru deloc ușor, și care rămîne a fi făcut de elev. Aceasta este de natură a diminua apreciabil randamentul activității învățătorului la lecție.

In aceeași ordine de idei, menționăm buna deprindere a unor cadre didactice de a nu-și încheia pregătirea pentru lecție înainte de a întocmi o listă în care sunt enumerate ideile cu care trebuie să rămînă elevii din lecția respectivă, și deprinderile pe care doresc să le formeze la elevi în cadrul acesteia.

Deși conținutul cunoscut, sintetizarea sa sub forma acestui „inventar de idei și deprinderi” ridică adesea destule dificultăți. Odată întocmit, inevitabil existența sa își va pune amprenta asupra sistematizării lecției în clasă.

Dacă în finalul lecției elevii sunt în măsură a enumera conținutul acestui „inventar”, se poate admite că s-a făcut o treabă bună la acea lecție, deoarece elevii nu puteau reține tot ce s-a spus într-o oră.

#### f. FOLOSIREA CU RANDAMENT MAXIM A EXERCIȚIILOR ȘI PROBLEMELELOR

Pentru clarificarea și fixarea cunoștințelor, pentru antrenarea capacitateii de utilizare independentă a lor, pentru formarea de abilități și deprinderi de aplicare în cele mai diverse situații, un mare rol îl joacă rezolvarea exercițiilor și problemelor. Pe drept cuvînt, nivelul pregătirii unui elev este exprimat de ceea ce el este în stare să facă singur, pe baza cunoștințelor dobîndite, și de aceasta ne dăm seama în procesul rezolvării de exerciții și probleme.

In manual s-a acordat multă atenție formulării exercițiilor și problemelor în strînsă legătură cu cunoștințele conținute la fiecare temă și capitol, în scopul adîncirii, uneori chiar a completării lor. De aceea trebuie rezolvate toate exercițiile și problemele din manual, ele reprezentînd un minim obligatoriu. Aceasta decurge din faptul că nu s-a mers pe ideea rezolvării rapide a unui număr cît mai mare de exerciții și probleme. O astfel de procedură ar face ca mulți elevi să nu poată „ține pasul”, creîndu-se decalaje mari de la un elev la altul în ce privește cîstigul obținut din fiecare exercițiu sau problemă rezolvată în clasă, unii elevi rămînînd, în cel mai fericit caz, cu cîteva tehnici de lucru pe care le aplică mecanic, de obicei după ce li se sugerează din afară procedeul potrivit într-o anumită situație.

Principalul însă este ca elevul să găsească singur calea de urmat și să o poate parcurge independent, asigurîndu-și autocontrolul. În acest scop pare mai potrivit a se merge pe linia unei maxime conștientizări a procesului de rezolvare a exercițiilor și problemelor, în aşa fel încît elevul să poată apoi recunoaște situațiile matematice asemănătoare cu care se va întîlni mai tîrziu, situații pe care să le poată trata independent, pe baza experienței anterioare, în mod conștient.

Așadar, în rezolvarea problemelor nu cît mai mult, ci cît mai bine.

În funcție de situația din fiecare clasă este desigur posibil ca, pentru formarea deprinderilor de rezolvare a anumitor tipuri de exerciții și probleme, numărul celor existente în manual să nu fie suficient pentru unii elevi. Învățătorul va putea să formuleze singur altele, după modelul lor.

### 3. CİTEVA ASPECTE MAI DEOSEBITE CARE CARACTERIZEAZĂ MANUALUL

#### a. CİT MAI PUȚINE REGULI, DAR APLICABILE ÎN CİT MAI MULTE SITUAȚII

În redactarea manualului s-au adoptat unele soluții pentru care pledează argumente ce trebuie cunoscute de învățători, pentru ca aceștia să depună cu toată convingerea efortul necesar aplicării lor în condiții de maximă eficiență. Pe de altă parte, cunoașterea unor aspecte mai deosebite și a scopului pentru care au fost introduse va preveni trecerea cu ușurință peste ele, și deci diminuarea efectelor pe care s-a contat.

In această ordine de idei, s-a depus un mare efort pentru a nu fărâmîța în cazuri și căzulete prezentarea unei teme, mai ales la efectuarea operațiilor. Aceasta pentru a nu aglomera mintea copiilor cu reguli greu de memorat și care nu sunt strict necesare, deoarece în situațiile respective copiii pot aplica alte cunoștințe, cu caracter mai general. Dealtfel, practica arată că la efectuarea operațiilor copiii preferă aplicarea acelor procedee care sunt valabile în cît mai multe situații (probabil ca act inconștient de protejare împotriva supraîncarcării). Învățătorii pe care i-am consultat au fost unaniți în aprecierea că elevii, în fața unei operații matematice, nu au prima tendință de a recunoaște din care caz particular face parte, spre a-i aplica tehnică specifică de calcul, ci, dimpotrivă, prima tendință este de a descoperi din ce categorie mai generală face parte, spre a-i aplica procedeul general valabil în situațiile asemănătoare.

! Asadar, elevii preferă să se descurce în situații cît mai numeroase, cu reguli cît mai puține. Cîtă vreme nu sunt considerente foarte serioase care să pledeze împotrivă, este firesc să respectăm această cerință.

#### b. RECONSIDERAREA RAPORTULUI ÎNTRE CALCULUL ORAL ȘI CEL SCRIS

În legătură cu ponderea pe care trebuie să o aibă calculul oral și cel scris, cîștigă tot mai mulți adepti ideea că nu este justificat a se da o exagerată extindere calculului oral, a se devansa mult calculul oral înaintea celui scris. Risipa de timp care se produce pe această cale este departe de a fi răsplătită prin operativitatea și siguranța obținute în efectuarea calculului oral. Aceasta

fără a mai lua în considerație că stăpînirea unei excelente tehnici de calcul oral, cu ani în urmă reprezenta un avantaj incomparabil mai mare decât în zilele noastre, cind mașinile de calcul de la cele mai simple, la cele mai perfecționate, cunosc o largă răspîndire, dimensiunile și tehnica mînuirii lor făcîndu-le utilizabile pentru masele largi.

Desigur, ar fi cu totul nefericit a se ajunge în situația ca pentru cele mai simple calcule să trebuiască folosită o mașină de socotit sau cel puțin mijloace de calcul în scris. Dar nici antrenarea pînă la rafinament a unor deprinderi de calcul oral, pentru toți elevii, nu se justifică nici ca scop, nici ca volum de energie și timp cheltuite.

Urmare a unor considerente ca cele de mai sus, noul manual are în vedere efectuarea calculului oral și în scris, în același timp. Dealtfel, această cale este urmată în foarte multe țări cu un învățămînt matematic evoluat. Un motiv în plus îl constituie faptul că, deduse pe bază de mulțimi, regulile de calcul oral și în scris decurg simultan, neavînd nici un sens a atrage atenția elevilor doar asupra unora din ele.

c. NUMIREA ȘI SCRIEREA NUMERELEOR NATURALE,  
PROBLEMĂ DISTINCTĂ DE ADUNAREA LOR.  
IMPLICAȚII ÎN FORMAREA IDEII GENERALE  
DE OPERAȚIE INTERNĂ BINARĂ

In manual se rezolvă mai întîi problema determinării, numirii și scrierii numerelor naturale în sistemul zecimal de numerație în cercul 0—10, 0—100 și 0—1 000, prin introducerea unui procedeu și a unor convenții convenabile acestui scop. Numai după aceea se tratează adunarea în mulțimile respective, ale căror elemente sunt deja cunoscute ca semnificație, denumire, notație etc. În acest mod, operația de adunare asociază, după o anumită regulă, la două elemente dintr-o mulțime, un element din acea mulțime, păstrîndu-se astfel sensul general al operației interne binare într-o mulțime.

După ce elevii cunosc numerele naturale de la 0 la 10, ei fac adunarea în cercul 0—10 ca operație internă binară în mulțimea

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

fără a se introduce explicit această noțiune.

Adunări ca  $2 + 3 =$ ,  $5 + 4 =$ ,  $1 + 6 =$ , sunt posibile în această mulțime, iar adunări ca  $4 + 9 =$ ,  $8 + 7 =$ ,  $6 + 5 =$ , nu sunt posibile în mulțimea respectivă.

După ce au fost introduse numerele de la 10 la 100, se face adunarea în cercul 0—100, ca operație internă binară în mulțimea

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, 98, 99, 100\}.$$

Adunări ca  $21 + 46 =$ ,  $39 + 45 =$ , sunt posibile în această mulțime, iar adunări ca  $81 + 56 =$ ,  $23 + 98 =$ , nu sunt posibile în mulțimea respectivă.

Același sistem de lucru se folosește și la trecerea peste sută.

Trebuie remarcată distincția dintre acest punct de vedere și procedeul folosit adesea pentru introducerea numerelor naturale mai mari ca 10 (apoi mai mari ca 100), prin intermediul adunării. Un astfel de procedeu asociază la două elemente din mulțimea cunoscută

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

ceva încă necunoscut, ce nu aparține acestei mulțimi, ceva anume „inventat” pentru a funcționa ca rezultat al adunării:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$\overbrace{\hspace{1cm}}^2 + \overbrace{\hspace{1cm}}^{10} = 12$

Un astfel de procedeu nu face un bun serviciu formării ideii generale de operație internă binară într-o mulțime, care cere rezultatului operației să aparțină aceleiași mulțimi ca și componentele. În plus, această „fabricare” a rezultatului (și nu doar alegerea lui dintre elementele mulțimii, dinainte cunoscute) poate crea derută în legătură cu operațiile ce nu sunt totdeauna posibile într-o mulțime.

Din punct de vedere pedagogic, ultimul procedeu contopește două probleme distincte, aceea<sup>(1)</sup> a numirii numărului de elemente al unei mulțimi, care își are ca soluție organizarea mulțimii cu structură numerică zecimală și introducerea unor convenții de numire, cu cea<sup>(2)</sup> a adunării numerelor naturale, care își are ca soluție formarea reuniunii a două mulțimi disjuncte și numărarea ei.

Se vede că prin contopirea de care am vorbit, nici una din cele două probleme contopite nu mai este pusă clar în evidență, atenția fiind îndreptată spre formarea exclusivă a unor automatisme.

## d. FOLOSIREA MULTIMILOR MODEL CU STRUCTURĂ NUMERICĂ ZECIMALĂ SI A FIGURILOR NUMERICE

Neacordarea atenției cuvenite problemei numirii numărului de elemente al unei mulțimi, ca problemă distinctă de adunare, are și alte consecințe nedorite. În acest mod trece neobservat faptul că la efectuarea adunării (și mai ales în cazul trecerii peste ordin) nu formarea reuniunii mulțimilor disjuncte prezintă dificultatea principală, ci numirea numărului de elemente al reuniunii, în care scop numărarea nu este deloc convenabilă (și ea implică, de altfel, cunoașterea numerelor mai mari ca 10 înainte de a face adunarea cu trecere peste 10).

Orice regulă practică de adunare și scădere este, în esență, un procedeu de aflare a numărului elementelor reuniunii unor mulțimi disjuncte, sau a diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, fără a folosi numărarea. În acest scop putem folosi structura numerică zecimală a termenilor, corelată cu structura numerică zecimală a mulțimilor model folosite pentru termeni.

și, fără a strica organizarea în structuri zecimale ale acestora, să căutăm un mijloc de obținere a mulțimilor reuniune sau diferență gata organizate cu structuri numerice zecimale, spre a le putea numi cu ușurință numărul elementelor.

Un astfel de mijloc s-a dovedit a fi utilizarea mulțimilor model sub forma figurilor numerice care le-am introdus și folosit pe larg în manual, care au dus la rezultate surprinzătoare de suple, păstrînd nealterat conținutul științific și sugerînd, pe un excelent suport intuitiv, regulile de adunare și scădere oral și în scris a numerelor naturale. Totodată, ele au permis imaginarea unui material didactic extrem de simplu și de eficient în scopul predării adunării și scăderii numerelor naturale, sub forma trusei pentru predarea, pe bază de mulțimi, a operațiilor cu numere naturale la clasele I—IV.

e. PE PRIMUL PLAN IDEEA DE ÎNMULTIRE  
ȘI ÎMPĂRTIRE, ȘI APOI TABLA ÎNMULTIRII  
ȘI A ÎMPĂRTIRII

Conținutul manualelor de pînă acum referitor la înmulțirea și împărțirea numerelor naturale se rezumă aproape numai la tabla înmulțirii și a împărțirii.

Practica școlară arată însă că pînă la urmă, tabla înmulțirii și a împărțirii trebuie învățate pe de rost, fiind foarte incomod a cere unui elev să „deducă“ produsul sau cîrțul ( $8 \times 9$  de pildă, sau  $63 : 7$ ). Tot practica școlară dovedește că o dată învățate, tabla înmulțirii și a împărțirii se uită repede, de îndată ce intervin perioade (chiar nu prea lungi) în care elevul nu este pus în situația de a le utiliza.

În consecință, a reduce cunoștințele elevilor de clasa a II-a asupra înmulțirii și împărțirii doar la cunoașterea tablei înmulțirii și împărțirii, înseamnă a cheltui cu randament scăzut prea mult timp, elevii nedobîndind suficiente idei durabile, de perspectivă, care să-i ajute a înțelege esența operațiilor respective, astfel încît să fie capabili să recunoască situațiile matematice în care intervin aceste operații, să fie capabili deci să rezolve cu ușurință probleme de înmulțire și împărțire.

f. NECESITATEA UNEI REGULI DE ÎMPĂRTIRE  
CARE SĂ NE CONDUCĂ  
LA OBȚINEREA CÎRȚULUI

În legătură cu modul de prezentare a împărțirii, cîtă vreme elevii nu cunoșteau noțiuni ca acelea de submulțime, mulțimi disjuncte etc., nu li se putea prezenta ca mijloc de obținere a cîrțului, alegerea unei mulțimi model pentru deîmpărțit și separarea elementelor sale în submulțimi disjuncte între ele (ajungînd fie la procedeul împărțirii prin „cuprindere“, fie la acela al împărțirii prin „părți egale“).

Rămînea alternativa calculării cîrțului cu ajutorul scăderii repetitive. Dar manualul de pînă acum nu folosea nici această alternativă. El se rezuma doar

să arate cum putem verifica prin înmulțire dacă un anumit număr este, sau nu, cîtul unei anumite împărțiri. Elevului nu-i rămînea decît calea găsirii cîtului prin încercări. El era lăsat astfel fără un procedeu de obținere a cîtului și fără unele cunoștințe care l-ar fi ajutat să pătrundă mai adînc sensul operației de împărțire, să rezolve mai ușor anumite probleme de împărțire.

În noul manual s-a căutat să se soluționeze aceste probleme, la nivelul de înțelegere al copiilor.

#### 4. STRUCTURA ÎNDRUMĂTORULUI

Intitulat „**MATEMATICĂ PENTRU CLASA a II-a — ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI**”, el nu a fost conceput ca avînd rolul principal de a da indicații asupra modului cum trebuie înțeles conținutul manualului, ci ca avînd menirea să orienteze pe învățător cum trebuie să-și desfășoare activitatea cu elevii, sub toate aspectele, pentru ca aceștia să-și însușească în condiții cît mai bune conținutul noii programe de matematică. Desigur, în acest context se integrează și lămuririle necesare înțelegерii depline a textului din manual și folosirii eficiente a manualului în clasă și acasă.

În scopul de mai sus, îndrumătorul conține aceleași capitulo și teme, ca și manualul, și la fel intitulate și numerotate. Între numerotarea figurilor existente în îndrumător, și a celor existente în manual, nu este nici o legătură.

La fiecare capitol îndrumătorul conține, în general,

##### A. Scurte observații asupra conținutului:

1. Obiectivele prevăzute de programa școlară.
2. Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii.  
Termeni și notații noi.

##### B. Indicații metodice pentru predarea temelor (Număr de ore, orientativ = ...)

*Tema. Scopul. Material didactic:* pentru învățător ; pentru elevi.

Recomandări metodice pentru predarea temei.

a. Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului. Muncă independentă.

b. Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului. Exerciții și probleme din manual : propuse a fi rezolvate în clasă ; propuse a fi rezolvate acasă.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse în manual la tema...

**Notă :** Temele, care se pot desfășura după o tehnologie didactică asemănătoare unora care au fost prezentate anterior, nu au fost dezvoltate din nou în amănunțime, ci s-a adăugat doar ceea ce s-a considerat necesar, pentru ca învățătorul să-și poată construi lecția cu maximum de eficiență.

# I. RECAPITULAREA ȘI COMPLETAREA CUNOȘTINȚELOR DIN CLASA I

## Capitolul 1 NOȚIUNI DESPRE MULȚIMI

### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

#### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Noțiunile despre mulțimi studiate în clasa I.

#### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMINĂ ELEVII

1º Noțiunile de *mulțime* și *element* percepute intuitiv, cu utilizarea curentă a termenilor corespunzători. *Apartenența* și *neapartenența* unui element la o mulțime, exprimate cu terminologia respectivă, formate de asemenea pe cale intuitivă.

Elevii nu trebuie să facă aici teorie, ei vor trebui doar să-și exprime în limbaj corespunzător comentariile în legătură cu exemplele puse în discuție, și, mai ales, să găsească ei exemple care să ilustreze diversele situații cerute de învățător.

*Diagrama unei mulțimi*, figurată printr-o linie închisă, elementele mulțimii fiind figurate prin puncte în interiorul liniei închise. Scrierea în diagramă, lîngă punct, a simbolului elementului pe care îl reprezintă acest punct, în situațiile în care acest lucru ușurează înțelegerea ideilor, sau exprimarea gîndirii copiilor.

Elevii trebuie să cunoască precizarea unei mulțimi prin *indicarea tuturor elementelor* sale, sau prin *indicarea proprietății caracteristice* a mulțimii, adică acele proprietăți pe care le au toate elementele mulțimii și numai ele.

Se va cunoaște că *ordinea* în care sînt luate elementele unei mulțimi nu are nici o însemnatate, iar indicarea unui același element *de mai multe ori* în precizarea mulțimii, nu are rost.

2º Situațiile în care se poate găsi o mulțime față de o mulțime: fără elemente comune, sau *disjuncte*; cu unele elemente comune (fiecare mulțime avînd și elemente necomune cu celalătă); o mulțime *inclusă* într-o mulțime, submulțime sau parte a unei mulțimi; mulțimi *egale*.

Se va evita exprimarea: „Situația în care se află o mulțime față de *altă mulțime*“, deoarece, în cazul mulțimilor egale, se ia în considerație o mulțime față de ea însăși și nu față de o altă mulțime.

Elevii vor cunoaște reprezentarea a două mulțimi; în orice situație s-ar afla, cu ajutorul diagramei generale (fig. 1), figurind elementele în zonele corespunzătoare, ca în figurile 2, 3, 4 și 5.

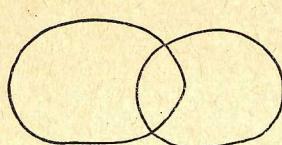


Fig. 1

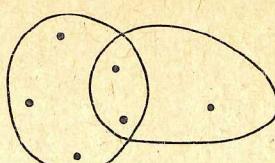


Fig. 2

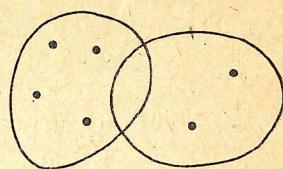


Fig. 3

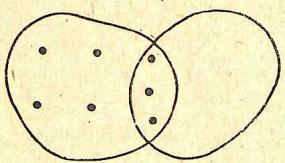


Fig. 4

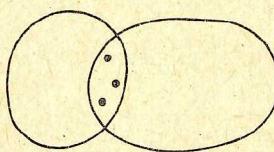


Fig. 5

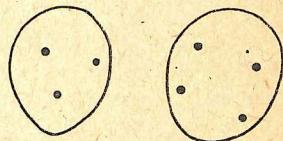


Fig. 6

În cazul mulțimilor disjuncte se vor face și diagrame ca în figura 6, iar pentru o mulțime inclusă într-o mulțime, diagrame ca în figura 7.

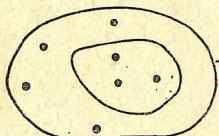


Fig. 7

*In legătură cu mulțimile egale se va observa că nu avem de fapt două mulțimi, ci o singură mulțime, indicată în moduri diferite.*

3º Mulțimile ce se pot obține cu două mulțimi date, cunoscând și formulările verbale :

*Intersecția unei mulțimi A cu o mulțime B este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin și mulțimii A și mulțimii B (și numai din acestea).*

*Diferența dintre o mulțime A și o mulțime B este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin mulțimii A, și nu aparțin mulțimii B (și numai din acestea).*

*Diferența dintre mulțimea B și mulțimea A se definește în mod asemănător.*

*Reuniunea unei mulțimi A cu o mulțime B este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin cel puțin la una din mulțimile A și B (și numai din acestea).*

Observarea *comutativității* intersecției și reuniiunii mulțimilor și a *necomutativității* diferenței mulțimilor.

4º *Mulțime pereche, mulțime cu un singur element, mulțime vidă.* Ele se vor obține cu ocazia intersecției sau a formării diferenței de mulțimi, dar se vor da și exemple de astfel de mulțimi care nu se obțin pe aceste căi.

Se vor face exerciții de alcătuire a unor noi mulțimi cu ajutorul unor mulțimi date, cînd acestea se află și în alte situații, nu numai disjuncte.

**Termeni ce vor fi folosiți:** mulțime ; element ; aparține, nu aparține ; diagramă ; simbol ; proprietate caracteristică ; mulțimi disjuncte ; mulțime inclusă într-o mulțime, submulțime, parte ; intersecție ; diferență ; reunioane ; comutativitate ; mulțime pereche ; mulțime vidă.

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL I (Număr de ore, orientativ=5)

### TEMA 1 : MULTIME, ELEMENT, APARTENENȚĂ

**Scop:** Împrospătarea noțiunilor și a termenilor corespunzători. Folosirea diagramelor și simbolurilor. Indicarea mulțimii prin lista elementelor și prin proprietate caracteristică.

#### Material didactic

**Pentru învățător:** Planșe cu figurile 8, 9 și 10: tabla magnetică; piese metalice cu forma pătrat, dreptunghi, triunghi, cerc, fiecare în patru exemplare, respectiv de culoare roșie, verde, albastră, neagră. Tabla magnetică poate fi înlocuită cu un „flanelograf” (stofă aspiră întinsă pe un cadru de lemn sau de carton, folosind în locul pieselor metalice, piese din carton având pe o parte lipit postav. Piese, așezate cu postavul pe stofa cadrului, se mențin chiar dacă acesta stă în poziție aproape verticală); cretă colorată.

**Pentru elevi:** Ovale confectionate din sîrmă; piese asemănătoare cu cele din trusa folosită de învățător, confectionate din carton, puse într-un plic.

#### Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

1) Recunoașterea atributelor: formă, culoare.

Folosind planșa cu figura 8, apoi piese din trusa cu figuri geometrice, se cere elevilor să recunoască forma figurii sau piesei respective.

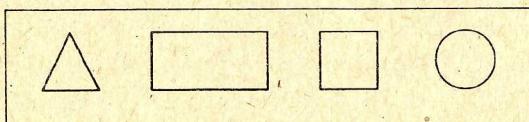


Fig. 8

Din planșa cu figura 9 vor fi recunoscute culorile: roșu, verde, albastru, galben, negru și.a.

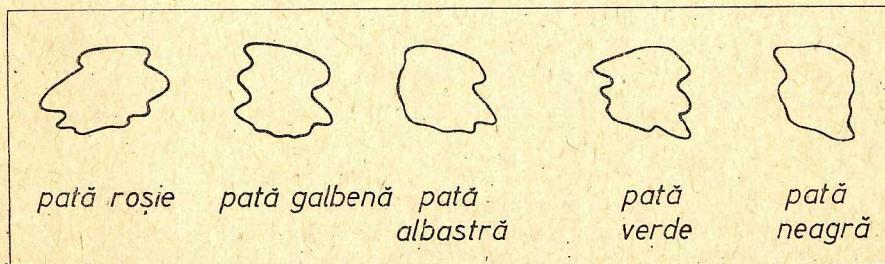


Fig. 9

Planșa cu figura 10 va folosi pentru recunoașterea a două atribute : forma și culoarea. Elevii vor răspunde, arătind pe planșă desenul potrivit : „Acesta este un triunghi galben“ etc.<sup>1</sup>

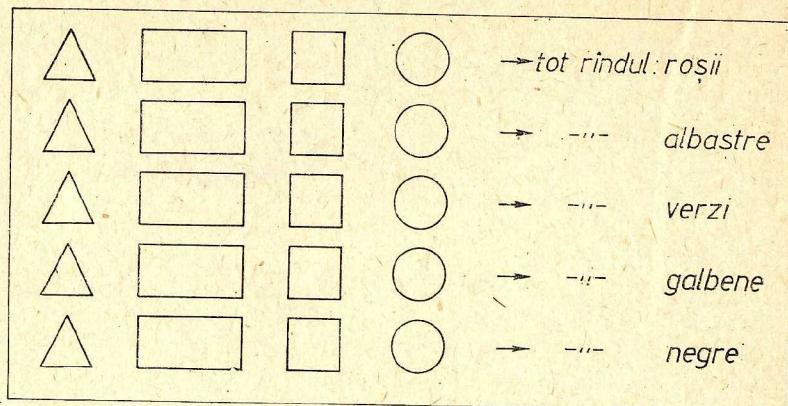


Fig. 10

Exerciții de recunoaștere a atributelor respective vor fi făcute prezentând piese din trusă și, punând elevii să aleagă din plicul cu piesele decupate din carton care le-a fost dat la începutul orei, piesa care are atributele cerute de învățător.

**2) Alcătuire de mulțimi.** Se vor așeza pe tabla magnetică diverse piese : triunghiuri, dreptunghiuri, pătrate, cercuri, de diferite culori. Apoi, învățătorul închide succesiv, printr-o linie desenată cu cretă colorată : mulțimea pieselor roșii ; mulțimea triunghiurilor etc., de fiecare dată cerînd elevilor să recunoască proprietatea după care s-a format mulțimea.

Arătînd elevilor piese situate fie în interiorul, fie în exteriorul liniei desenate, se cere ca ei să spună dacă piesa respectivă aparține, sau nu, mulțimii formate. Se va cere, de asemenea, ca elevii să arate toate piesele care sunt elemente ale acelei mulțimi, și toate piesele de pe tabla magnetică care nu sunt elemente ale mulțimii în cauză, justificînd răspunsul.

După cîteva exerciții de acest fel, menite să amintească noțiunile și termenii folosiți, se va propune elevilor să așeze pe bânci piesele din plicurile lor, și ovalul din sîrmă. La solicitarea învățătorului, copiii vor așeza în interiorul ovalului, succesiv, toate piesele care posedă atributele menționate de învățător (așezîndu-le înapoi în plic înainte de a se formula o nouă solicitare).

*Exemplu :* „Așezați în interiorul ovalului : a) toate dreptunghiurile roșii ; b) toate cercurile și triunghiurile verzi ; c) toate piesele care nu sunt roșii“ etc.

Învățătorul va verifica așezarea pieselor făcută de elevi și le va cere justificarea așezării făcute.

<sup>1</sup> Elevii vor fi atenționați că prin triunghi, cerc, dreptunghi, pătrat se înțelege forma unei figurî. Cum forma nu poate avea culoare, expresii ca „triunghi galben“, „cerc roșu“ etc., constituie abuz de limbaj în scopul prescurtării vorbirii, avînd sensul de piesă sau desen cu forma de triunghi, cerc etc., colorată în galben, roșu etc.

Se va desena pe tablă figura 11, elevii trebuind să spună care litere din cele scrise pe tablă aparțin mulțimii  $A$  și care nu aparțin acestei mulțimi. În fine, mulțimea  $A$  va fi scrisă :

$$A = \{a, b, c\}$$

\* Faptul că  $a$  aparține mulțimii  $A$  se notează  $a \in A$ . La fel  $b \in A$ ;  $c \in A$  (citind „ $a$  aparține lui  $A$ “ etc.).

\* Faptul că  $d$  nu aparține mulțimii  $A$  se notează  $d \notin A$  (citind „ $d$  nu aparține lui  $A$ “). La fel  $p \notin A$ .

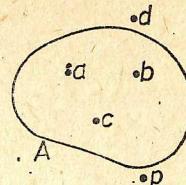


Fig. 11

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se strâng materialul didactic distribuit la elevi și se deschid manualele la prima temă.

După un scurt răgaz acordat elevilor pentru a privi prima figură, învățătorul va citi textul din manual, elevii urmărind pe cărțile lor cele citite. Vor fi solicitați apoi să răspundă la întrebările existente în lecție. În legătură cu discuțiile ce vor fi ocazionate de prima figură nu pot apărea dificultăți.

Se vor evita întrebările de felul : „Ce este o mulțime?“, „Ce este un element?“, „Ce înseamnă a aparține?“ etc., deoarece nu pot fi formulate răspunsuri satisfăcătoare, orice răspuns înlocuind, în esență, un cuvînt prin altul sinonim.

În aceeași manieră vor fi abordate și primele trei probleme, urmînd ca la problemele 4 și 5 elevii să caute soluțiile acasă, iar discutarea lor în clasă să aibă loc la începutul orei următoare.

Învățătorul va propune spre analiză și alte probleme asemănătoare cu acestea, solicitînd cît mai multe exemple de la elevi.

### Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema 1

#### Problema 1.

Elevii vor răspunde, eventual ajutați de învățător, dînd exemple ca :

Mulțimea elevilor din clasa noastră.

Mulțimea tablourilor din clasa noastră.

Mulțimea elevilor ce stau în banca a doua în clasa noastră.

Mulțimea claselor de elevi din școala noastră. (Atenție ! Aici elementele sunt la rîndul lor mulțimi).

Precizîn, avînd în vedere experiența noastră, că elevii au tendința să dea răspunsuri de felul :

• Mulțimea elevilor ; mulțimea băncilor și.a.

Acestea nu sunt mulțimi, deoarece elementele nu sunt bine precizate. Care elevi și care bănci ? Toți elevii și toate băncile din lume ? Puțin probabil că aceasta s-a ayut în vedere !

Elevii trebuie determinați să dea răspunsuri corecte :

Mulțimea elevilor din clasa noastră și.a.

<sup>1</sup> Conținutul alineatelor care încep cu \* reprezintă indicații suplimentare pentru învățător, care nu vor fi transmise elevilor.

| N.B.

### *Problema 3.*

Se va cere răspunsul complet. De exemplu : „*t* este un element al mulțimii literelor din cuvîntul „carte“.“

Dacă învățătorul va dori să analizeze și alte probleme asemănătoare, va trebui să fie atent la cuvîntul ales. De exemplu, cuvîntul „caiet“ nu creează dificultăți în plus față de cuvîntul „carte“. În schimb, cuvîntul „mama“ este alcătuit doar din două litere, *m* și *a* și nu din patru, așa cum s-ar putea crede.

### *Problema 4.*

Elementele mulțimii *A* sunt cercul roșu, pătratul negru și pătratul roșu. Cercul negru și triunghiul albastru nu aparțin mulțimii *A*, deoarece nu se află în interiorul liniei desenate cu albastru.

### *Problema 5.*

Elementele ce aparțin mulțimii *B* sunt literele : *b*; *c*; *d*, iar cele care aparțin mulțimii *C* sunt literele : *a*; *c*; *f*.

Putem scrie mulțimile *B* și *C* astfel :

$$B = \{b; c; d\}; \quad C = \{a; c; f\}.$$

Literele *m* și *p* nu aparțin nici mulțimii *B*, nici mulțimii *C*.

$$* m \notin B; \quad m \notin C; \quad p \notin B; \quad p \notin C.$$

## TEMA A 2-A : SITUAȚII IN CARE SE POT AFLA DOUĂ MULȚIMI

**Scop :** Să se înțeleagă care elemente sunt comune mai multor mulțimi și ce este aceea zonă comună, în diagramă. Să poată fi recunoscută situația în care se află o mulțime față de o mulțime și să se poată da exemple de mulțimi aflate într-o situație dată : cu unele elemente comune ; fără elemente comune sau disjuncte ; o mulțime inclusă într-o mulțime, submulțime sau parte a unei mulțimi ; mulțimi egale.

### **Material didactic**

**Pentru profesor :** Tabla magnetică cu piesele menționate ; cretă colorată ; pentru exemplificări se folosesc și elevii din clasă.

**Pentru elevi :** Același ca la tema anterioară, la care se adaugă un oval din sîrmă, de altă culoare față de cel existent, și de altă mărime, astfel încît ele să poată fi așezate unul în interiorul celuilalt pe bancă, și să rămână suficient loc pentru a așeza piese în zona cuprinsă între ele (în complementară).

### **Recomandări metodice pentru predarea temei**

#### **a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului**

**1) Mulțimi cu unele elemente comune.** Se cere ridicarea în picioare a copiilor care stau în primele două bânci din fiecare rînd. Fiecare elev ridicat în picioare este solicitat să-și spună numele. Cîțiva elevi din clasă vor spune numele tuturor elevilor care sunt elemente ale mulțimii elevilor ce stau în primele două bânci din fiecare rînd.

Numai după ce atenția întregii clase a fost îndreptată în acest mod către mulțimea respectivă privită ca un „tot“, cît și asupra fiecărui element în parte, elevii care au stat în picioare se vor așeza în bănci.

Același exercițiu se face cu mulțimea elevilor din rîndul de bănci din mijloc (presupunînd trei rînduri de bănci).

Se observă că elevii din primele două bănci ale rîndului din mijloc aparțin ambelor mulțimi. Astfel de elemente sunt numite *elemente comune* celor două mulțimi.

Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor care sunt elemente comune pentru mulțimile menționate (toți elevii clasei erau așezați în bănci la sfîrșitul celui de-al doilea exercițiu).

Cîțiva elevi din clasă vor spune numele elevilor care sunt elemente comune pentru mulțimile noastre. Toți elevii se reașază în bănci.

Se formulează concluzia că mulțimea elevilor care stau în primele două bănci, și mulțimea elevilor care stau în rîndul de bănci din mijloc, sunt *mulțimi cu unele elemente comune*.

Cîțiva elevi vor repeta această concluzie.

Învățătorul cere ridicarea în picioare a copiilor care aparțin mulțimii elevilor din primele două bănci, dar nu aparțin mulțimii elevilor din rîndul din mijloc. Elevii se reașază în bănci.

Se solicită ridicarea în picioare a copiilor care aparțin mulțimii elevilor din rîndul din mijloc, dar nu aparțin mulțimii elevilor care stau în primele două bănci. Se reașază elevii în bănci.

Activități de acest fel s-au dovedit foarte antrenante pentru copii și deosebit de eficiente pentru însușirea sau împrospătarea cunoștințelor legate de situațiile în care poate fi o mulțime față de o mulțime, de mulțimi ce se pot obține cu două mulțimi date etc. Ele se vor repeta în diverse variante pînă la însușirea conținutului dorit.

Se poate cere elevilor să formuleze ei exemple de tipul celui descris mai sus.

Învățătorul execută pe tablă figura 12.

Elevii spun elementele mulțimii *A*, pe care învățătorul le poate scrie pe tablă :

$$A = \{b, d, o\}.$$

În mod analog se procedează cu mulțimea *B* :

$$B = \{d, o, t, u, p\}.$$

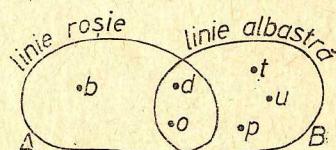


Fig. 12

Se cere elevilor să spună dacă mulțimile *A* și *B* au elemente comune. Sînt indicate literele *d* și *o*, motivind : „*d* este element comun mulțimilor *A* și *B* deoarece aparține mulțimii *A* și mulțimii *B*“. La fel despre *o*. „*b* nu este element comun mulțimilor *A* și *B*, deoarece aparține mulțimii *A* dar nu aparține mulțimii *B*“ s.a.m.d.

\* Se notează (se enunță numai verbal, dacă aceste notații nu se folosesc) :

$$b \in A, d \in A, o \in A, t \notin A, u \notin A, p \notin A,$$

$$b \notin B, d \in B, o \in B, t \in B, u \in B, p \in B.$$

Partea figurii unde sunt așezate elementele comune este numită „zonă comună“ și se hăsurează ca în figura 13.

### Muncă independentă

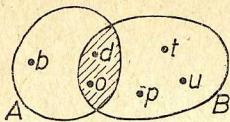


Fig. 13

Se propune elevilor să așeze pe bânci ovalele din sîrmă, așa cum arată figura 13. Se cere apoi să se așeze la locul potrivit piesele din plic, care : sunt elemente ale mulțimii  $A$  a tuturor triunghiurilor din plic ; sunt elemente ale mulțimii  $B$  a tuturor pieselor albastre din plic.

Triunghiurile albastre vor fi așezate în zona comună. Se verifică modul în care a fost îndeplinită sarcina dată elevilor.

Pentru corectarea execuției, învățătorul realizează el tema, cu piesele metalice pe tabla magnetică. Ovalele le desenează cu cretă colorată.

**2) Mulțimi fără elemente comune, sau disjuncte.** Se va proceda analog cu situația descrisă mai sus, alegînd în mod potrivit mulțimile. De exemplu, se pot lua : mulțimea elevilor ce stau în rîndul din mijloc și mulțimea elevilor care stau în rîndul de bânci de lîngă ferestre.

După ce se analizează suficiente exemple în acest fel, se execută de către învățător la tablă, succesiv figurile 14 și 15.

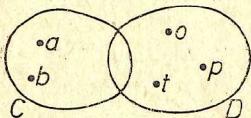


Fig. 14

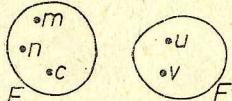


Fig. 15

Elevii vor spune, de fiecare dată, elementele fiecareia din mulțimile  $C$  și  $D$ , apoi  $E$  și  $F$ , constatănd că nu există elemente comune lui  $C$  cu  $D$ , nici lui  $E$  cu  $F$ .

De aceea, zona comună fie că nu conține elemente, fie că nu mai apare în diagramă.

Innvățătorul notează pe tablă :

$$\begin{aligned} C &= \{a, b\}; & D &= \{o, p, t\}; \\ * \quad a &\in C, b \in C, o \notin C, p \notin C, t \notin C; \\ * \quad a &\notin D, b \notin D, o \in D, p \in D, t \in D. \end{aligned}$$

Analog se procedează cu mulțimile  $E$  și  $F$

### Muncă independentă

Se cere ca elevii să așeze pe bânci ovalele din sîrmă, așa cum arată figura 14. După aceea se propune așezarea la locul potrivit a pieselor din plicurile lor, care : sunt elemente ale mulțimii  $A$  a tuturor triunghiurilor din plic ; sunt elemente ale mulțimii  $P$  a tuturor pătratelor din plic.

Cum nici un triunghi nu este în același timp și pătrat, învățătorul verifică dacă elevii nu au așezat piese în zona comună.

Pentru corectare, învățătorul execută tema pe tabla magnetică.

Se aşază apoi ovalele de sîrmă pe bânci, ca în figura 15. Se propune elevilor să plaseze și acum, la locul potrivit, elementele mulțimilor  $A$  și  $P$  formate mai sus. Se verifică îndeplinirea sarcinii făcînd aprecierile necesare.

Pentru corectare, învățătorul execută tema pe tabla magnetică.

**3) Mulțime inclusă într-o mulțime.** Se va folosi aceeași procedură ca mai sus, exemple de mulțimi putîndu-se alege : mulțimea elevilor din primele două bânci ; mulțimea elevilor din primele două bânci ale rîndului din mijloc.

În locul figurilor 14 și 15, învățătorul face acum pe tablă, succesiv, figurile 16 și 17. După ce elevii identifică elementele mulțimilor de litere  $E$  și  $P$ , se scrie pe tablă:

$$E = \{m, n, c\}; \quad P = \{n, c\};$$

$$* n \in P; n \in E; c \in P; c \in E.$$

Observându-se că orice element al mulțimii  $P$  este și element al mulțimii  $E$ , se spune despre mulțimea  $P$  că este *inclusă* în mulțimea  $E$ . Se mai spune că mulțimea  $P$  este *submulțime* sau *parte* a mulțimii  $E$ .

$$* m \in E; m \notin P.$$

\* Notația  $P \subset E$ , (citită „mulțimea  $P$  este inclusă în mulțimea  $E$ “).

Se observă că diagrama din figura 17 este mai sugestivă pentru incluziune.

### Muncă independentă

Așezîndu-se pe bânci ovalele din sîrmă așa cum arată figura 16, se cere așezarea la locul potrivit a pieselor din plicuri care sunt elemente ale: mulțimii  $A$  a triunghiurilor din plic; mulțimii  $R$  a triunghiurilor roșii aflate în plic.

Cîțiva elevi, cu ocazia verificării modului în care au executat sarcina dată, justifică așezarea pieselor. Se execută tema pe tabla magnetică.

Se cere apoi îndeplinirea aceleiași sarcini, dar cu așezarea ovalelor din sîrmă ca în figura 17. Pentru corectare se execută tema pe tabla magnetică.

**4) Mulțimi egale.** Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor clasei. Se reașază în bânci.

Se cere apoi ridicarea în picioare a tuturor elevilor din clasă care au depășit vîrstă de 5 ani.

Se constată ridicarea din nou a tuturor elevilor din clasă.

Așadar, mulțimea  $A$  a elevilor clasei noastre, și mulțimea  $B$  a elevilor clasei noastre care au depășit vîrstă de 5 ani, sunt formate exact din aceleiasi elemente.

Mulțimile formate exact din aceleiasi elemente sunt numite *mulțimi egale*.

Se notează  $A = B$  (citind: „mulțimea  $A$  este egală cu mulțimea  $B$ “).

Se observă că orice mulțime este egală cu ea însăși:  $A = A$ .

Elevii vor da și alte exemple de mulțimi egale.

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se deschid cărțile la tema a 2-a: „Situațiile în care se pot afla două mulțimi“.

Privind figura (a), se vor purta discuții cu elevii urmărind etapele:

1º Cunoașterea elementelor mulțimii  $A$ : mingile mici (albastre și roșii).

2º Cunoașterea elementelor mulțimii  $B$ : mingile roșii ( mari și mici).

3º Se identifică elementele ce aparțin și mulțimii  $A$ , și mulțimii  $B$ : mingile mici și roșii. Ele sunt elemente comune celor două mulțimi.

4º Fiecare din mulțimile  $A$  și  $B$  are și elemente care nu sunt comune cu celalaltă mulțime: mingea mare și roșie nu aparține mulțimii  $A$ ; mingile mici și albastre nu aparțin mulțimii  $B$ .

5º Se formulează concluzia că  $A$  și  $B$  sunt mulțimi cu unele elemente comune.

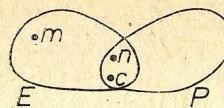


Fig. 16

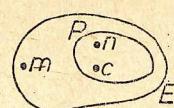


Fig. 17

Trecînd la figura (b), se vor purta discuții asemănătoare. Aici mulțimea  $C$  conține toate mingile albastre, mulțimea  $B$  conține toate mingile roșii.

Cum nici o minge nu este în același timp și albastră și roșie, mulțimile  $C$  și  $B$  nu au elemente comune. Ele sunt mulțimi disjuncte.

Se constată că în zona comună nu sunt figurate elemente.

În figura (c) avem mulțimea  $C$  a mingilor albastre, și mulțimea  $D$  a tuturor mingilor din figură. Se vede că fiecare minge albastră din  $C$ , fiind minge aparțină și mulțimii  $D$ .

Invățătorul va citi din manual, elevii urmărind pe cartea lor, textul referitor la mulțimile egale.

Se va cere elevilor, în timpul lecturii, să execute cele cerute în textul citit.

Vor fi citite în continuare și rezolvate problemele : 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Se vor propune ca temă acasă problemele : 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9. Rezolvarea lor va fi discutată, fără grabă, în lecția următoare.

**Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 2-a.**

**Problema 5.**

Elementele comune sunt literele :  $c, a, t, e$ .

\* Notînd :  $A = \{c, a, r, t, e\}$ ;  $B = \{c, a, i, e, t\}$

avem :

$$c \in A, \quad a \in A, \quad t \in A, \quad e \in A, \quad r \in A, \quad i \notin A;$$

$$c \in B, \quad a \in B, \quad t \in B, \quad e \in B, \quad r \notin B, \quad i \in B.$$

**Problema 8.**

Elementele mulțimii literelor din cuvîntul car :  $c; a; r$ .

Elementele mulțimii literelor din cuvîntul rac :  $r; a; c$ .

Se vede că cele două mulțimi sunt formate din aceleasi elemente (luate doar în altă ordine). Deci, ele sunt egale.

\* Notînd :  $E = \{c, a, r\}$ ;  $F = \{r, a, c\}$

avem :  $E = F$

În adevară :  $c \in E, \quad a \in E, \quad r \in E;$

$c \in F, \quad a \in F, \quad r \in F.$

**Problema 9**

Figura 18 face corelarea cu cea din manual.

a) Figura 19. Submulțimile sunt două cîte două disjuncte.

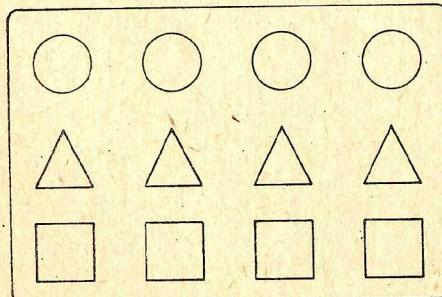


Fig. 18

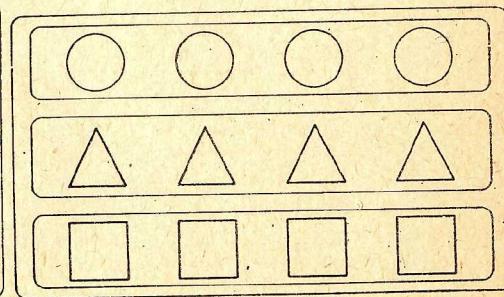


Fig. 19

- b) Figura 20. Idem.  
 c) Figura 21. Submulțimile sînt cu unele elemente comune. Cercul verde este elementul comun.

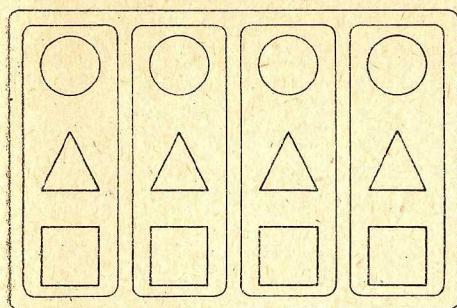


Fig. 20

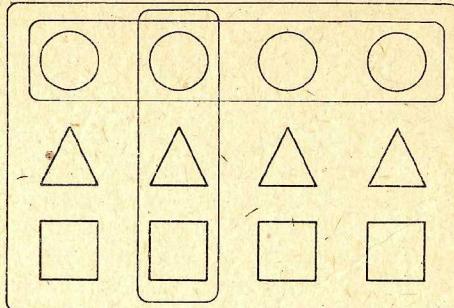


Fig. 21

Notă :

Pentru figurile : 18, 19, 20, 21 culorile din manual sunt :

- coloana 1 — negru
- coloana a 2-a — verde
- coloana a 3-a — roșu
- coloana a 4-a — albastru

### TEMELE 3 ȘI 4 : MULTIMI CE SE POT OBȚINE CU DOUĂ MULTIMI DATE. MULTIME VIDĂ

**Scop :** Să se cunoască definițiile intersecției, diferenței și reuniunii a două mulțimi, acestea putînd fi efectiv formate cu ajutorul unor mulțimi date. Să poată și folosite diagramele ca metodă de lucru și ca mijloc de intuiție.

#### Material didactic

Același ca la tema anterioară.

#### Recomandări metodice pentru predarea temelor

##### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Se reiau exemplele de la tema a 20-a după o procedură asemănătoare, dar se valorifică alte aspecte :

1) **Intersecția unei mulțimi cu o mulțime.** Mulțimea  $E$  a elevilor din primele două bânci, cu mulțimea  $F$  a elevilor din rîndul de bânci de la mijloc, au ca elemente comune toți elevii ce stau în primele două bânci în rîndul din mijloc. Ei formează o nouă mulțime, numită *intersecția celor două mulțimi*.

Se formulează definiția intersecției a două mulțimi, pe care o vor repeta cîțiva elevi.

\* Se notează noua mulțime :  $A \cap B$  (cîtit „*intersecția mulțimii  $A$  cu mulțimea  $B$* “).

**2) Diferența dintre o mulțime și o mulțime.** Se ridică în picioare elevii care stau în primele două bânci, dar nu stau în rîndul de bânci din mijloc. Se observă că ei aparțin mulțimii  $E$ , dar nu aparțin mulțimii  $F$ . Ei formează o nouă mulțime, numită *diferența dintre mulțimea  $E$  și mulțimea  $F$* .

\* Noua mulțime se notează:  $E - F$  (citit: „mulțimea diferență dintre mulțimea  $E$  și mulțimea  $F$ “).

Analog se pune în evidență mulțimea numită *diferența dintre mulțimea  $F$  și mulțimea  $E$* . Ea este formată din toți elevii ce stau în rîndul de bânci din mijloc, dar nu stau în primele două bânci.

\* Se notează  $F - E$ .

Se formulează definiția diferenței dintre o mulțime și o mulțime (nu e bine să zicem „și o altă mulțime“, putind considera și diferența dintre o mulțime și ea însăși). Cîțiva elevi vor repeta această definiție.

**3) Reuniunea unei mulțimi, cu o mulțime.** Se cere ridicarea în picioare a tuturor elevilor care îndeplinesc cel puțin una din condițiile: stau în primele două bânci; stau în rîndul de bânci din mijloc. Ei formează o nouă mulțime, numită *reuniunea mulțimilor  $E$  și  $F$* .

Se observă că unii elevi îndeplinesc doar una din cele două condiții. Alții (cei care sănătățează elemente comune), le îndeplinesc pe amândouă.

\* Se notează:  $E \cup F$  (citind: „reuniunea mulțimii  $E$  cu mulțimea  $F$ “).

Se formulează definiția reuniunii unei mulțimi cu o mulțime pe care o reprezintă cîțiva elevi.

#### Alte exemple

a) Invățătorul execută pe tablă figura 12 (și elevii în caiete). Cere apoi elevilor să găsească elementele următoarelor mulțimi:

1° Intersecția mulțimii  $A$  cu mulțimea  $B$ . Elementele sunt:  $d$ ;  $o$ .

\* Se scrie  $A \cap B = \{d, o\}$ .

O astfel de mulțime este numită „mulțime pereche“.

2° Diferența dintre mulțimea  $A$  și mulțimea  $B$ . Elementele sunt:  $b$ .

\* Se scrie  $A - B = \{b\}$ .

O astfel de mulțime este numită *mulțime cu un singur element*.

3° Diferența dintre mulțimea  $B$  și mulțimea  $A$ . Elementele sunt:  $t$ ;  $u$ ;  $p$ .

\* Se scrie  $B - A = \{t, u, p\}$ .

4° Reuniunea dintre mulțimea  $A$  și mulțimea  $B$ . Elementele sunt:  $b$ ;  $d$ ;  $o$ ;  $t$ ;  $u$ ;  $p$ .

\* Se scrie  $A \cup B = \{b, d, o, t, u, p\}$ .

5° Reuniunea dintre mulțimea  $B$  și mulțimea  $A$ . Elementele sunt:  $b$ ;  $d$ ;  $o$ ;  $t$ ;  $u$ ;  $p$ .

\* Se scrie:  $B \cup A = \{b, d, o, t, u, p\}$ .

Se observă că schimbînd ordinea în care luăm mulțimile, reuniunea lor nu se schimbă. De aceea zicem că *reuniunea mulțimilor este comutativă*.

\* Se scrie:  $A \cup B = B \cup A$ .

Elevii sănătățează să verifice dacă diferența și intersecția mulțimilor  $A$  și  $B$  sunt comutative.

Privind figura 12, se constată că diferența dintre  $A$  și  $B$  nu este aceeași cu diferența dintre  $B$  și  $A$  (elevii vor repeta elementele din care este formată fiecare). Se va conchide că *diferența mulțimilor nu este comutativă*.

\* Se scrie:  $A - B \neq B - A$ .

Se va constata că intersecția dintre mulțimile  $A$  și  $B$  are aceleași elemente ca și intersecția dintre mulțimile  $B$  și  $A$ , adică *intersecția mulțimilor este comutativă* (elevii vor spune elementele fiecărei).

\* Se scrie:  $A \cap B = B \cap A$ .

b) Învățătorul execută pe tablă figura 14, punând aceleasi întrebări ca și la figura 12. Se găsește:

1° Intersecția mulțimii  $C$  cu mulțimea  $D$  nu are nici un element.

\* Se scrie:  $C \cap D = \{ \}$  sau  $C \cap D = \emptyset$ .

Mulțimea fără nici un element este numită *mulțime vidă*.

2° Intersecția mulțimii  $D$  cu mulțimea  $C$  nu are nici un element.

\* Se scrie:  $D \cap C = \{ \}$  sau  $D \cap C = \emptyset$ .

3° Diferența dintre mulțimea  $C$  și mulțimea  $D$  are ca elemente:  $a; b$ .

\* Se scrie:  $C - D = \{a, b\} = C$ .

4° Diferența dintre mulțimea  $D$  și mulțimea  $C$  are ca elemente:  $o; p; t$ .

\* Se scrie:  $D - C = \{o, p, t\} = D$ .

5° Reuniunea dintre mulțimea  $C$  și mulțimea  $D$  are ca elemente:  $a; b; o; p; t$ .

\* Se scrie:  $C \cup D = \{a, b, o, p, t\}$ .

6° Reuniunea dintre mulțimea  $D$  și mulțimea  $C$  are ca elemente:  $a; b; o; p; t$ .

\* Se scrie:  $D \cup C = \{a, b, o, p, t\}$ .

Se va observa comutativitatea intersecției și reuniunii, și necomutativitatea diferenței.

\*  $C \cap D = D \cap C = \emptyset; C \cup D = D \cup C; C - D \neq D - C$ .

### Muncă independentă

Aceeași ca cea prevăzută la tema a 2-a pentru „Mulțime inclusă într-o mulțime”. Apoi, învățătorul va cere elevilor să ridice de pe diagrama realizată pe bânci, pe rînd (așezînd piesele înapoi de unde au fost luate, înainte de a cere ridicarea pieselor ce formează mulțimea următoare), piesele ce alcătuiesc mulțimile cerute a fi arătate și în legătură cu figurile 12 și 14 în exemplele a și b mai sus. Elevii vor arăta:

1° Pentru intersecția dintre  $A$  și  $R$ , toate triunghiurile roșii, adică tocmai mulțimea  $R$ .

2° Pentru diferența dintre  $A$  și  $R$ , toate triunghiurile care nu sunt roșii.

3° Pentru diferența dintre  $R$  și  $A$ , nu vor ridica nici o piesă. Ea este mulțimea vidă, deoarece nu există nici un triunghi roșu care să nu fie în același timp triunghi.

4° Pentru reuniunea dintre  $A$  și  $R$ , toate triunghiurile, adică tocmai mulțimea  $A$ .

După fiecare etapă discutată cu elevii, învățătorul execută aceeași sarcină folosind tabla magnetică, pentru a da posibilitate elevilor să se corecteze.

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se deschid cărțile la tema a 3-a: „Mulțimi ce se pot obține cu două mulțimi date”.

Elevii privesc prima figură. Îndrumăți de învățător, vor preciza din cine este formată mulțimea  $A$ , apoi mulțimea  $B$  (cum s-a arătat la tema a 2-a).

Vor spune apoi din ce este formată intersecția mulțimii  $A$  cu mulțimea  $B$ : toate mingile care sunt și mici, și roșii. Se vor arăta pe figură (sunt cele din zona hașurată).

La fel se va proceda, pe rînd, cu toate celelalte figuri existente la această temă.

Figura a doua arată că intersecția mulțimii  $B$  cu mulțimea  $A$  este formată din toate mingile care sunt și mici, și roșii (adică este egală cu cea anterioară, verificîndu-se comutativitatea).

Figura a treia arată că diferența dintre mulțimea  $A$  și mulțimea  $B$  este formată din toate mingile mici, care nu sunt roșii (deci din toate mingile albastre).

Figura a patra arată că diferența dintre mulțimea  $B$  și mulțimea  $A$  este formată din toate mingile roșii, care nu sunt și mici (deci din toate mingile roșii și mari).

Se va sublinia necomutativitatea diferenței mulțimilor.

A cincea și a șasea figură arată că reuniunea mulțimilor  $A$  și  $B$  este formată din toate mingile care, sunt fie mici, fie roșii.

Se subliniază comutativitatea reuniunii mulțimilor.

Se privește figura de la tema a 4-a, constăndu-se că mulțimea  $C$  este formată din toate mingile albastre. Se vede că nu există mingi care să fie în același timp și albastre, și roșii, adică  $C$  și  $B$  nu au elemente comune. Intersecția dintre  $C$  și  $B$  este, aşadar, mulțime vidă.

Se vor propune ca temă acasă problemele : 1 ; 2 ; 6 ; 7. Rezolvarea lor se va discuta amânată în ora următoare.

În clasă se vor rezolva problemele : 3 ; 4 ; 5.

#### Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la temele 3—4

##### Problema 2.

Observăm că mulțimea  $F$  este inclusă în mulțimea  $E$ .

a) Intersecția lui  $E$  cu  $F$  va conține toate elementele mulțimii  $F$ : Doru ; Anca ; Costel. b) Diferența dintre  $E$  și  $F$  are elementele : Florin ; Elena. c) Diferența dintre  $F$  și  $E$  este mulțimea vidă, neexistând nici un element care să aparțină lui  $F$  și să nu aparțină lui  $E$ , d) Reuniunea lui  $F$  cu  $E$  are elementele : Florin ; Doru ; Anca ; Costel ; Elena. Se vede că reuniunea este egală cu mulțimea  $E$ .

##### Problema 3.

a) Figura 22. Mulțimea triunghiurilor. b) Figura 23. Mulțimea figurilor albastre. c) Figura 24. Mulțimea triunghiurilor albastre. d) Figura 25. Mulțimea triunghiurilor care nu sunt albastre. e) Figura 26. Mulțimea figurilor albastre, care nu sunt triunghiuri. f) Figura 27. Mulțimea figurilor care sunt fie triunghiuri, fie albastre.

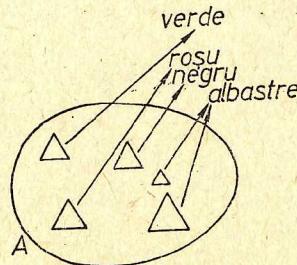


Fig. 22

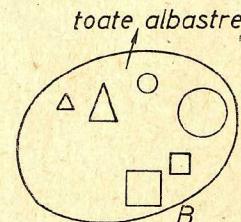


Fig. 23

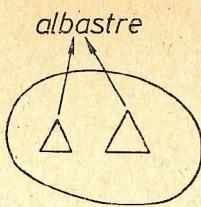


Fig. 24

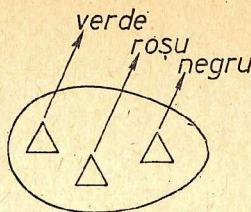


Fig. 25

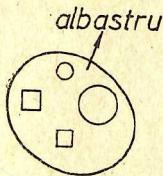


Fig. 26

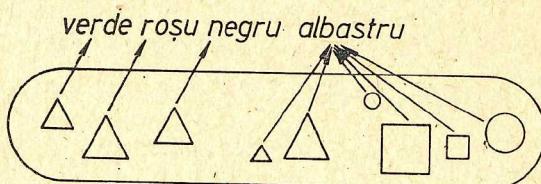


Fig. 27

#### Problema 4.

Figurile 28 și 29. Se vor arăta toate figurile existente în zona hașurată, indiferent în ce mod ar fi hașurarea.

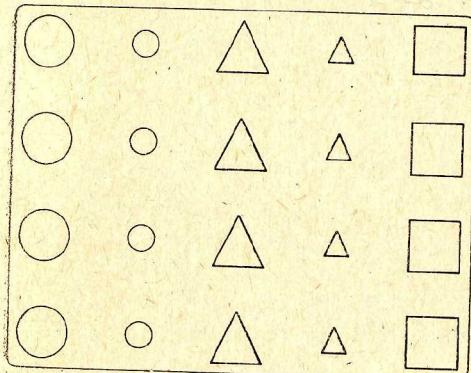


Fig. 28

**Notă:**

Pentru figurile: 28, 29, 30 culerile din manual sunt:

Rîndul 1 — negru

Rîndul al 2-lea — verde

Rîndul al 3-lea — roșu

Rîndul al 4-lea — albastru

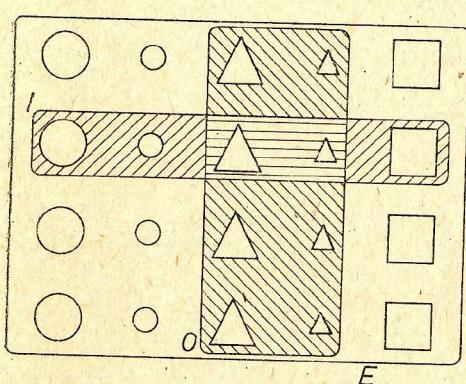


Fig. 29

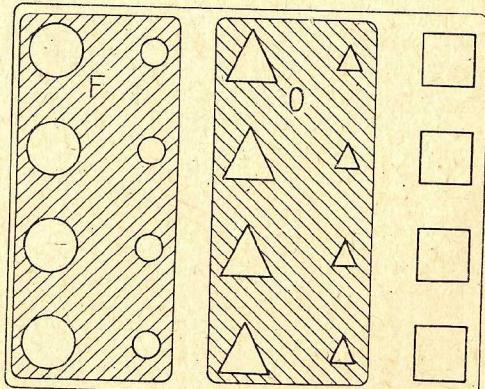


Fig. 30

*Problema 5.*

Figura 30. Intersecția este vidă, ea nu poate fi hașurată. Se arată toate figurile existente în  $F$  și în  $O$ .

Alte probleme asemănătoare se obțin alegind altfel mulțimile  $I$  și  $O$ . Exemplu:  $I$ , mulțimea pieselor albastre;  $O$ , mulțimea pătratelor. Etc. Înțrebările se păstrează aceleași.

*Problema 6.*

Intersecția, reuniunea și diferența dintre  $D$  și  $C$  au, respectiv, elementele:

$$e, p; \quad h, e, p, n, b; \quad h.$$

Diferența dintre  $C$  și  $D$  are elementele:  $n, b$ .

$$\begin{aligned} * D \cap C &= \{e, p\}; \quad D \cup C = \{h, e, p, n, b\}; \quad D - C = \{h\}; \\ C - D &= \{n, b\}. \end{aligned}$$

*Problema 7.*

Mulțimea vidă, neexistând elevi de 3 ani.

## Capitolul 2

### NUMĂRUL DE ELEMENTE AL MULȚIMII. NUMERELE PÎNĂ LA ZECE

#### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

##### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Corespondența „unu la unu“ între mulțimi. Mulțime cu tot atîtea, cu mai multe sau cu mai puține elemente decât o mulțime dată (fără numere și numărate).

Formarea, numirea și scrierea numerelor naturale pînă la zece. Ordonarea lor. Numărarea. Separarea dintr-o mulțime a unor submulțimi disjuncte între ele.

Adunarea și scăderea numerelor naturale pînă la zece, pe baza reuniunii mulțimilor disjuncte, a diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa și a numărării. Legătura dintre adunare și scădere, desprinsă din definițiile acestora pe bază de mulțimi. Proba adunării prin scădere și a scăderii prin adunare.

Se vor face exerciții și probleme cu adunări și scăderi pînă la zece, pînă la împrospătarea automatismelor de calcul.

Pe baza noțiunilor de submulțimi disjuncte, reuniune, diferență între mulțimi și a definițiilor cu mulțimi a adunării și scăderii, se vor descompune numerele în doi termeni, din care unul, eventual, este dat:

$$3 + a = 5; \quad a + b = 7; \quad 9 - a = 3; \quad a - 5 = 2$$

scriind soluțiile sub forma:

$$a = 5 - 3; \quad a = 7 - b; \quad a = 9 - 3; \quad a = 2 + 5 \text{ etc.}$$

Exercițiile se vor finaliza cu deducerea unor reguli practice, care să nu mai facă necesară apelarea la mulțimi de obiecte, de fiecare dată, ajungîndu-se la formarea automatismelor de calcul. Reuniunea mai multor mulțimi. Comutativitatea și asociativitatea. Adunarea mai multor numere naturale, cu ajutorul reuniiunii mulțimilor disjuncte. Comutativitatea și asociativitatea.

## 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RÂMINĂ ELEVII

1º Să recunoască corespondența „unu la unu“ între mulțimi, ca o legătură între mulțimi în care:

- fiecarui element din mulțimea  $A$  îi corespunde un singur element din mulțimea  $B$ ;
- fiecare element din mulțimea  $B$  corespunde la un singur element din mulțimea  $A$ .

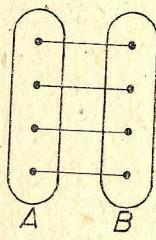


Fig. 31

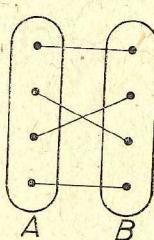


Fig. 32

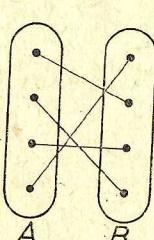


Fig. 33

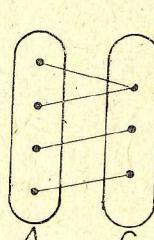


Fig. 34

Să poată stabili corespondențe element cu element între mulțimi, folosind diagramele mulțimilor (fig. 31). Trebuie să se observe că, dacă s-a putut stabili o corespondență unu la unu, de obicei se mai pot stabili și altele (fig. 32 și 33), dar, nu totdeauna se poate stabili o corespondență unu la unu între o mulțime  $A$  și o mulțime  $B$  (fig. 34, 35, 36, 37 și 38).

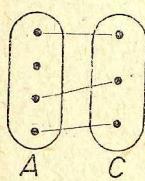


Fig. 35

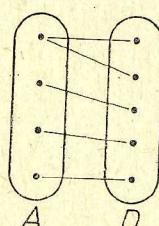


Fig. 36

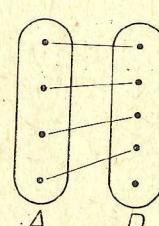


Fig. 37

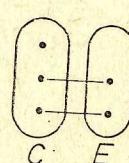


Fig. 38

2º Despre mulțimile între care se poate stabili o corespondență unu la unu spunem că *au tot atîțea elemente sau că au același număr de elemente*.

Despre mulțimile între care nu putem stabili o corespondență unu la unu, spunem că nu *au tot atîțea elemente sau că au numărul elementelor diferit*.

3º Elevii vor reține pe cale intuitivă că, dacă mulțimea  $A$  are *tot atîțea elemente* ca o submulțime a mulțimii  $B$  (diferită de  $B$ ), se zice că  $A$  are *mai puține elemente decât B*, sau că  $B$  are *mai multe elemente decât A* (fig. 39).

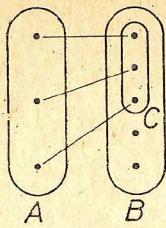


Fig. 39

Ei vor mai spune în această situație că *numărul elementelor lui A este mai mic decît numărul elementelor lui B*, sau că *numărul elementelor lui B este mai mare decît numărul elementelor lui A*.

A spune dacă mulțimea *A* are tot atîtea, mai multe sau mai puține elemente decât mulțimea *B*, înseamnă *a compara mulțimile A și B după numărul elementelor*.

4º Mulțimile cu un singur element sunt recunoscute intuitiv de către elevi, datorită experienței de viață pe care o au pînă la vîrsta școlarizării. Folosind mulțimi cu un singur element și reuniunea mulțimilor disjuncte, elevii vor cunoaște *construirea numerelor naturale* în maniera următoare:

Se ia o mulțime model cu un singur element. Numărul elementelor sale este numit „*unu*” și notat 1. Tot *unu* este numit numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență *unu* la *unu* cu ea.

Se ia o mulțime cu 1 element, și încă o mulțime cu 1 element, disjunctă de prima. Se formează reuniunea lor. Făcînd diagrama mulțimii obținute, și diagrama unei mulțimi cu un singur element, se constată, în urma încercărilor, că ele nu au tot atîtea elemente, mulțimea obținută prin reuniune avînd mai multe elemente decât mulțimea cu un singur element. Așadar, numărul elementelor din reuniune nu este *unu*. Îl vom numi „*doi*” și îl vom nota 2.

Tot „*doi*” este numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență *unu* la *unu* cu mulțimea model construită. Se notează :

$$1 < 2 \text{ (citind : „1 este mai mic decît 2“)}$$

sau

$$2 > 1 \text{ (citind : „2 este mai mare decît 1“)}$$

Reunind o mulțime cu 2 elemente, cu o mulțime cu 1 element disjunctă de prima, se obține o mulțime model care nu are nici 1, nici 2 elemente (lucru pe care elevii îl vor verifica folosind diagramele, ca în fig. 40—41). Numărul elementelor mulțimii obținute va fi numit „*trei*” și notat 3. Tot *trei* va fi numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență *unu* la *unu* cu ea.

Din figura 42 rezultă :

$$1 < 2 < 3$$

Se continuă procedeul, obținîndu-se numerele naturale mai mici ca zece :

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Numărul *zero*, notat 0, va exprima numărul elementelor mulțimii vide.

Mulțimea numerelor naturale pînă la zece, scrise în ordine crescătoare, este :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Păstrînd această ordine a elementelor, ea se va numi *șirul numerelor naturale mai mici decît zece*.

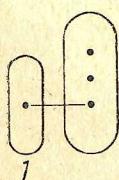


Fig. 40

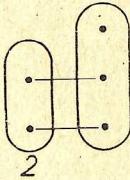


Fig. 41

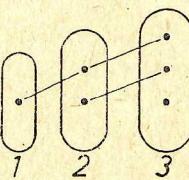


Fig. 42

5º Numărul zece se obține și se numește la fel cu numerele naturale pînă la 9. Pentru scrierea lui însă nu se acordă o nouă cifră (seană cu care scriem numerele de la 0 la 9). Tehnica scrierii lui zece este aceea folosită pentru numerele mai mari ca zece, de care ne vom ocupa într-un alt capitol.

6º *Numărarea* va fi cunoscută ca proces de punere în corespondență unu la unu a mulțimii „de numărat“, cu o submulțime a mulțimii numerelor naturale, începînd cu 1 și urmînd în ordinea din sirul numerelor naturale. Ultimul număr din acest sir intrat în corespondență respectivă este rezultatul numărării.

7º Elevii vor face exerciții de separare dintr-o mulțime cu numărul elementelor cunoscut, a două sau mai multe submulțimi disjuncte din care una să aibă, eventual, numărul elementelor de asemenea cunoscut, fără ca din mulțimea inițială să rămînă elemente necuprinse în aceste submulțimi.

Exercițiiile de acest fel fac o pregătire valoroasă pentru studiul ulterior al scăderii și împărțirii.

8º *Adunarea* a două numere naturale  $a$  și  $b$  se va face după regula : Se iau două mulțimi disjuncte oarecare, una avînd „ $a$ “ elemente și una avînd „ $b$ “ elemente.

Se formează reuniunea acestor mulțimi.

Se numără elementele reuniunii. Găsind, de exemplu, „ $c$ “ elemente, notăm :

$$a + b = c$$

Numerele  $a$  și  $b$  se numesc *termenii adunării*<sup>1</sup>, numărul  $c$  se numește *suma* numerelor  $a$  și  $b$ .

Este comod a se folosi ca mulțimi model pentru efectuarea adunării numerelor naturale, mulțimi de puncte.

De exemplu, pentru a aduna 2 cu 3, figura 43 arată că avem  $2 + 3 = 5$ . Observăm din aceeași figură că  $3 + 2 = 5$ . Așadar, *adunarea numerelor naturale este comutativă*.

9º *Scăderea* a două numere naturale  $a$  și  $b$  se face după regula :

Se ia o mulțime cu „ $a$ “ elemente, și o mulțime cu „ $b$ “ elemente, inclusă în prima (cea ce este posibil numai dacă  $a \geq b$ ).

Se formează mulțimea diferență dintre prima și a doua mulțime.

Se numără elementele mulțimii diferență astfel obținute. Găsind, de exemplu, „ $c$ “ elemente, notăm :

$$a - b = c.$$

Numerele  $a$  și  $b$  se numesc *termenii scăderii*. Numărul  $a$  se numește *descăzut*,  $b$  se numește *scăzător* iar  $c$  se numește *diferență sau rest*.

Este comod a folosi ca mulțimi model pentru efectuarea scăderii numerelor naturale, mulțimi de puncte.

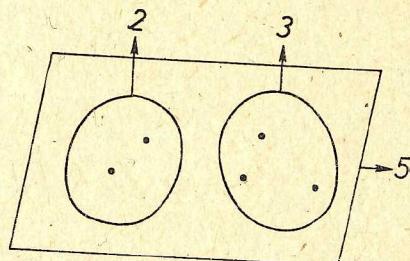


Fig. 43

<sup>1</sup> În general, dacă avem  $a * b = c$  (\* fiind o operație oarecare),  $a$  și  $b$  se numesc termeni iar  $c$  rezultatul operației. În particular, dacă operația \* este numită înmulțire,  $a$  și  $b$  sunt numiți factori.

De exemplu, figura 43 arată că avem:

$$5 - 2 = 3 \quad \text{și} \quad 5 - 3 = 2$$

10° Se constată imediat că, dacă este adevărată una din egalitățile:

$$2 + 3 = 5; \quad 3 + 2 = 5; \quad 5 - 2 = 3; \quad 5 - 3 = 2$$

atunci sunt în mod sigur adevărate și celelalte trei.

In adevăr, toate cele patru egalități se deduc dintr-o singură figură, anume, din figura 43.

De aici rezultă modalitățile de a face probele prin adunare și scădere, a operațiilor de adunare și scădere.

11° Aceeași figură (43) arată că la scădere se cunoaște suma a două numere naturale, și unul din numere, și se caută celălalt număr. De aceea se spune că *scăderea este operație inversă adunării*. Numărul căutat se află scăzind din sumă numărul cunoscut.

Pe baza observației de la (10°) se vor găsi numerele necunoscute din egalități de felul:

$$3 + a = 5; \quad a + b = 7; \quad 9 - a = 3; \quad a - 5 = 2$$

fie folosind diagrame, fie calculând direct, prin adunare sau scădere. Folosind diagrame:

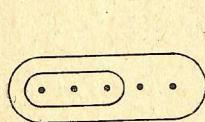


Fig. 44

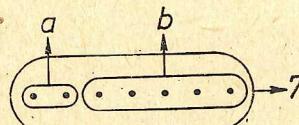


Fig. 45

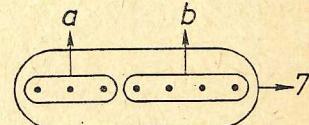


Fig. 46

Facem diagrama unei mulțimi cu 5 elemente; separăm o submulțime cu 3 elemente. Figura 44 arată că în  $3 + a = 5$  avem  $a = 2$ .

Figurile 45 și 46 arată că, făcînd diagrama unei mulțimi cu 7 elemente, pentru  $a + b = 7$  avem:  $a = 2$  și  $b = 5$  sau  $a = 3$  și  $b = 4$ .

Cu figuri asemănătoare găsim încă:  $a = 1$  și  $b = 6$ ;  $a = 4$  și  $b = 3$ ;  $a = 5$  și  $b = 2$ ;  $a = 6$  și  $b = 1$ ;  $a = 0$  și  $b = 7$ ;  $a = 7$  și  $b = 0$ .

Figura 47 arată că în  $9 - a = 3$ , făcînd diagrama unei mulțimi cu 9 elemente și separînd o submulțime cu 3 elemente, avem  $a = 6$ .

Figura 48 arată că în  $a - 5 = 2$ , luînd submulțimile disjuncte între ele una cu 5 și una cu 2 elemente, avem  $a = 7$ , adică numărul elementelor reuniunii celor două submulțimi.

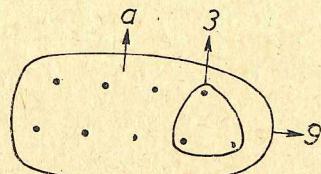


Fig. 47

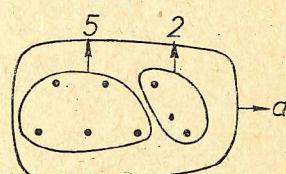


Fig. 48

Fără diagrame :

Egalitatea  $3 + a = 5$  se citește : „suma a două numere este 5, unul din numere este 3. Aflați celălalt număr“. Rezolvarea acestei probleme se scrie, înțînd seama de legătura dintre adunare și scădere (scăzînd din sumă unul din termeni, obținem celălalt termen) :

$$\begin{aligned} 3 + a &= 5, \\ a &= 5 - 3, \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Egalitatea  $a + b = 7$  se citește : „Găsiți două numere a căror sumă este 7“. Rezolvarea se scrie :

$$\begin{aligned} a + b &= 7, \\ a &= 7 - b. \end{aligned}$$

Înlocuind aici pe  $b$  cu unul din numerele :

$$0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$$

se calculează de fiecare dată,  $a$ . Rezultatele se pot sintetiza într-o tabelă de

$a$	0	1	2	3	4	5	6	7
$b$	7	6	5	4	3	2	1	0

Egalitatea  $9 - a = 3$  se citește : „Aflați scăzătorul, dacă descăzutul este 9 și diferența este 3“. Rezolvarea folosește faptul că, scăzînd din descăzut diferența obținem pe scăzător :

$$\begin{aligned} 9 - a &= 3, \\ a &= 9 - 3 \\ a &= 6. \end{aligned}$$

Egalitatea  $a - 5 = 2$  se citește : „Aflați descăzutul, dacă scăzătorul este 5 și diferența este 2“. Rezolvarea folosește faptul că, adunînd scăzătorul cu diferența, obținem pe descăzut :

$$\begin{aligned} a - 5 &= 2, \\ a &= 5 + 2, \\ a &= 7. \end{aligned}$$

12<sup>o</sup> *Reuniunea mai multor mulțimi* este o nouă mulțime formată din toate elementele ce aparțin cel puțin la una din mulțimile date.

Reuniunea mulțimilor  $A$ ,  $B$  și  $C$  din figura 49 este formată din elementele  $p$ ;  $s$ ;  $d$ ;  $f$ ;  $t$ ;  $e$ ;  $m$ .

Se vede că schimbînd ordinea în care luăm mulțimile  $A$ ,  $B$  și  $C$ , reuniunea lor rămîne formată din aceleași elemente. Așadar, *reuniunea mai multor mulțimi este comutativă*.

13<sup>o</sup> *Adunarea mai multor numere naturale*  $a$ ,  $b$  și  $c$  se face după regula :

Se iau trei mulțimi disjuncte două cîte două, una avînd  $a$  elemente, una avînd  $b$  elemente și una avînd  $c$  elemente.

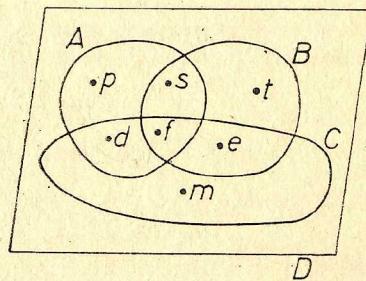


Fig. 49

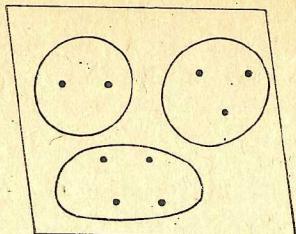


Fig. 50.

Se formează reuniunea celor trei mulțimi.

Se numără elementele reuniunii. Găsind, de exemplu,  $d$  elemente, notăm :

$$a + b + c = d.$$

Pentru adunarea numerelor 2, 3 și 4, figura 50 arată că :

$$2 + 3 + 4 = 9.$$

Având în vedere comutativitatea reuniunii mulțimilor, rezultă că și *adunarea mai multor numere naturale este comutativă*:

$$2 + 3 + 4 = 3 + 2 + 4 = 3 + 4 + 2 = \dots = 9.$$

14º Reuniunea mulțimilor  $A$ ,  $B$  și  $C$  din figura 49 poate fi obținută și pe una din căile :

a) Se formează mai întâi reuniunea mulțimilor  $A$  și  $B$  (ea are ca elemente :  $p$ ;  $s$ ;  $d$ ;  $f$ ;  $t$ ;  $e$ ), apoi aceasta se unește cu mulțimea  $C$  (obținând în final mulțimea cu elementele :  $p$ ;  $s$ ;  $d$ ;  $f$ ;  $t$ ;  $e$ ;  $m$ ).

b) Se formează mai întâi reuniunea mulțimilor  $B$  și  $C$  (ea are elementele :  $s$ ;  $t$ ;  $f$ ;  $e$ ;  $d$ ;  $m$ ), apoi se unește  $A$  cu reuniunea lui  $B$  și  $C$  (obținând în final mulțimea cu elementele :  $p$ ;  $s$ ;  $d$ ;  $f$ ;  $t$ ;  $e$ ;  $m$ ).

Se vede că pe oricare din căile de mai sus facem reuniunea mulțimilor  $A$ ,  $B$  și  $C$ , obținem același rezultat. De aceea zicem că *reuniunea mulțimilor este asociativă*.

15º Rezultă imediat *asociativitatea adunării mai multor numere naturale*:

$$2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4).$$

**Termeni și notații ce se vor folosi**

Corespondență „unu la unu” sau „element cu element”; mulțime cu tot atîtea, cu mai multe, sau cu mai puține elemente decât o mulțime dată.

Număr de elemente al mulțimii. Numere egale, cu semnul  $=$ ; număr mai mare decât un alt număr, cu semnul  $>$ ; număr mai mic decât un alt număr, cu semnul  $<$ ;  $\geq$  mai mare sau egal (nu este mai mic);  $\leq$  mai mic sau egal (nu este mai mare).

Denumirile numerelor de la zero la zece; scrierea numerelor de la zero la nouă. Numărare.

Adunare; termeni; sumă; scădere; diferență sau rest; descăzut, scăzător.

Proba adunării și scăderii. Operație inversă.

Asociativitate.

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL II (Număr de ore, orientativ = 11)

### TEMA 1 : CORESPONDENȚA ELEMENT CU ELEMENT ÎNTRE MULȚIMI

**Scop:** Recunoașterea corespondenței unu la unu între mulțimi, realizată pe diagrame. Realizarea unei corespondențe între mulțimi după o regulă dată, folosind diagramele. Realizarea unor corespondențe unu la unu între două mulțimi date.

## Material didactic

*Pentru învățător:* Planșe cu figurile 51, 54, 56 și 58. Cretă colorată. (La nevoie pot fi înlocuite cu desene făcute la tablă, cu cretă colorată).

*Pentru elevi:* Plic cu figurile geometrice decupate din carton (pătrate, dreptunghiuri, triunghiuri, cercuri, fiecare în patru exemplare, respectiv de culorile roșu, albastru, verde, negru). Două ovale din sîrmă. Patru bucați de sîrmă dreaptă, de cîte circa 20 cm fiecare.

### Recomandări metodice pentru predarea temei

#### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

1º Învățătorul prezintă planșa<sup>1</sup> cu figura 51. Prin discuții cu elevii se stabilește care sunt elementele mulțimii *A*, apoi elementele mulțimii *B*.

Învățătorul trasează o linie cu creta colorată de la cercul roșu, la triunghiul roșu, aşa cum se vede pe figura 52.

Cere apoi elevilor să traseze linii asemănătoare de la fiecare element al mulțimii *A*, la elementele mulțimii *B* care au aceeași culoare cu elementul respectiv din *A*.

Sub îndrumarea învățătorului elevii completează planșa aşa cum arată figura 53.

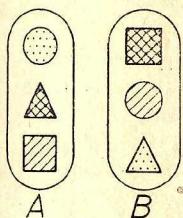


Fig. 51

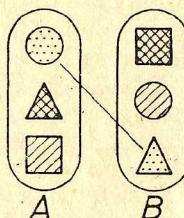


Fig. 52

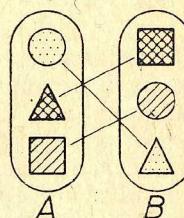


Fig. 53

Se prezintă planșa din figura 54 și se cere elevilor să unească prin linii fiecare element din mulțimea *A*, cu elementele mulțimii *C* care au aceeași culoare cu elementul respectiv din *A*.

Ajutați de învățător, elevii completează planșa cu figura 54, aşa cum se vede în figura 55.

Învățătorul prezintă, pe rînd, planșe cu figurile 56 și 58, elevii completindu-le aşa cum arată figurile 57 și 59.

Cerînd elevilor să priîvească atent cele patru planșe, li se va cere să arate pe aceleia în care, fiecare element din prima mulțime, *A*, este pus în corespondență cu un singur element din mulțimea a două.

Se arată planșele conținînd figurile 53 și 57. Elevii vor motiva de ce planșele cu figurile 55 și 59 nu îndeplinesc condițiile cerute. În adevăr, în figura 55 triunghiul verde este pus în corespondență cu două elemente din *B*, cercul verde și pătratul verde. Mai mult, nu fiecare element din *A* are corespondent

<sup>1</sup> Figurile geometrice umplute aici cu puncte, pe planșă respectivă sunt roșii; cele simplu hașurate, pe planșă sunt albastre; cele dublu hașurate, pe planșă sunt verzi.

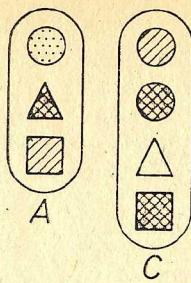


Fig. 54

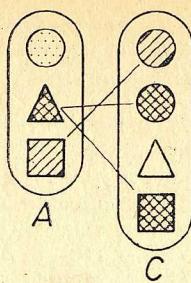


Fig. 55

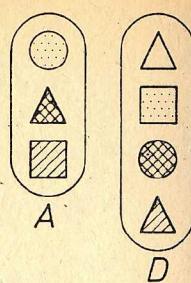


Fig. 56

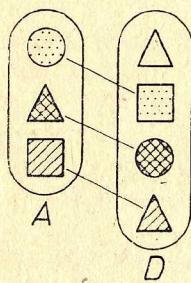


Fig. 57

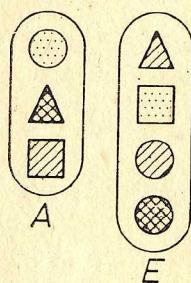


Fig. 58

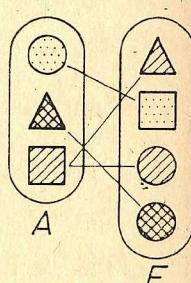


Fig. 59

în *B*. Este cazul cercului roșu. În figura 59 are fiecare element din *A* corespondent în *B*, dar nu unul singur. Este cazul pătratului albastru care are corespondent în *B* și pe triunghiul albastru, și pe cercul albastru.

Se cere apoi elevilor să spună în care din cele patru planșe, fiecare element din mulțimea a două corespunde la un singur element din prima mulțime.

Se arată planșele cu figurile 53 și 59. Justificarea răspunsului se face ca mai sus (de ce figurile 53 și 59 satisfac, iar 55 și 57 nu satisfac condițiile cerute).

In fine, se cere elevilor să arate la care din cele patru planșe sunt îndeplinite amândouă condițiile :

a) la fiecare element din prima mulțime corespunde un singur element din a doua mulțime;

b) fiecare element din a doua mulțime corespunde la un singur element din prima mulțime.

Se va arăta planșa cu figura 53.

Corespondența între mulțimi care îndeplinește aceste două condiții va fi numită *corespondență „unu la unu“* sau *corespondență „element cu element“* între mulțimi.

\* Ea se numește și *corespondență biunivocă* între mulțimi.

Corespondența unu la unu se recunoaște prin aceea că, în nici una din cele două mulțimi nu rămân elemente fără corespondent în cealaltă mulțime, și nici un element din cele două mulțimi nu are mai mult decât un corespondent în cealaltă mulțime.

2º Invățătorul execută pe tablă figura 60. El cere elevilor să pună în corespondență elemente din mulțimea *M*, cu elemente din mulțimea *N*, trăsind linii cu cretă albă, astfel încât să rezulte o corespondență unu la unu între mulțimile *M* și *N*.

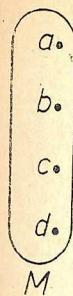


Fig. 60

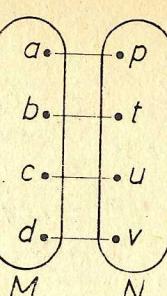
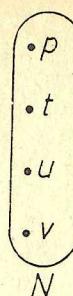


Fig. 61

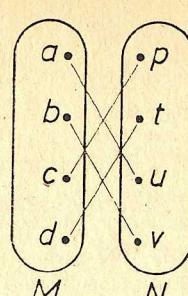


Fig. 62

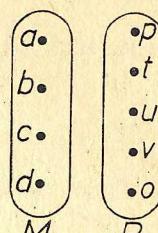


Fig. 63

Să zicem că elevii realizează corespondența unu la unu redată în figura 61.

Se va cere executarea din nou a figurii 60 și stabilirea unei corespondențe unu la unu între mulțimile  $M$  și  $N$ , care să difere de cea anterioară. Ajutați de învățător, ei vor stabili, folosind linii roșii, corespondențe ca cea din figura 62 de exemplu, apoi vor repeta exercițiul, stabilind alte corespondențe unu la unu între mulțimile  $M$  și  $N$ , diferite de cele de mai sus.

Se va trage concluzia că, dacă între două mulțimi se poate stabili o corespondență element cu element, atunci mai pot fi stabilite și altele.

3º Executând pe tablă figura 63 se va cere elevilor să realizeze o corespondență element cu element între mulțimile  $M$  și  $P$ . După cîteva încercări, se va constata că acest lucru nu este posibil.

#### *Muncă independentă*

Copiii vor așeza ovalele din sîrmă pe bânci, cum se vede în figura 64. În primul oval vor așeza toate piesele din plic care au culoarea albastră, în al doilea oval vor așeza toate piesele din plic care au culoare verde. Vor obține pe bânci aspectul din figura 65.

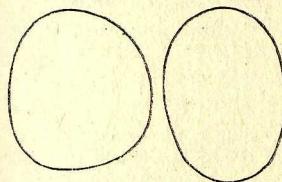


Fig. 64

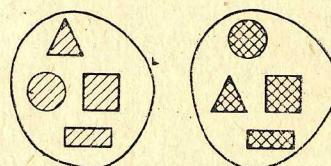


Fig. 65

Se va cere apoi să realizeze o corespondență între cele două mulțimi, așezînd cîte o sîrmă de 20 cm între elementele din cele două mulțimi, care sunt piese cu aceeași formă.

Se vor obține aspecte ca în figura 66.

Prin discuții cu elevii se va stabili că s-a realizat o corespondență unu la unu între cele două mulțimi.

Reintroducînd piesele în plicuri, se va așeza apoi în primul oval mulțimea pieselor albastre,

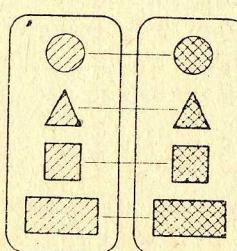


Fig. 66

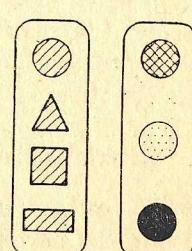


Fig. 67

iar în al doilea oval se va aşeza mulțimea cercurilor care nu sunt albastre, obținând aspectul din figura 67.

Se va cere să se stabilească, folosind sîrmele de cîte 20 cm, o corespondență unu la unu între aceste două mulțimi, indiferent în ce mod.

În urma încercărilor, elevii vor constata că lucrul nu este posibil.

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

După ce se strînge materialul didactic de pe bânci se deschid cărțile la capitolul al 2-lea, tema 1 : „Corespondență element cu element între mulțimi“.

Elevii urmăresc în cărți, iar învățătorul citește prima întrebare. Apoi, cere cîtorva elevi să răspundă la întrebarea pusă în carte. Dintre răspunsurile date se apreciază ca juste acele care indică figurile (1) și (2) din manual, ca redînd corespondență element cu element între mulțimile  $A$  și  $B$ ,

Elevii vor motiva de ce în figura (3) nu avem o corespondență element cu element între  $A$  și  $B$ : pătratul roșu din mulțimea  $E$  are corespondent și cercul roșu, și triunghiul roșu din mulțimea  $I$ . În figura (4) nu avem o corespondență element cu element între mulțimile  $B$  și  $O$ , deoarece, spre exemplu pătratul roșu din mulțimea  $B$  nu are nici un corespondent în mulțimea  $O$ .

În figurile (1) și (2) fiecare element din prima mulțime are un singur corespondent în mulțimea a două, și fiecare element din mulțimea a două corespunde la un singur element din prima mulțime. Așadar, în figurile (1) și (2) din manual avem corespondență element cu element între mulțimile  $A$  și  $B$ .

\* Două mulțimi  $A$  și  $B$  între care se poate stabili o corespondență element cu element se numesc *mulțimi echipotente*, notînd :

$A \sim B$  (cîtit „mulțimea  $A$  este echipotentă cu mulțimea  $B$ “).

\* Două mulțimi  $A$  și  $B$  între care nu se poate stabili o corespondență element cu element se numesc *mulțimi neechipotente*, notînd :

$A \not\sim B$  (cîtit : „mulțimea  $A$  nu este echipotentă cu mulțimea  $B$ “).

Exercițiul propus în carte la această temă va fi dat să se facă acasă și se va discuta în ora următoare.

## TEMA A 2-A : NUMĂRUL DE ELEMENTE AL MULȚIMII. COMPARAREA MULȚIMILOR DUPĂ NUMĂRUL DE ELEMENTE

**Scop :** Sesizarea existenței la orice mulțime a unui anumit număr de elemente.

Punerea în evidență a existenței unor mulțimi ce au același număr de elemente și a unor mulțimi ce diferă prin numărul de elemente.

Cunoașterea comparării mulțimilor după numărul de elemente : mulțime cu tot atîtea, cu mai multe sau cu mai puține elemente decît o mulțime dată.

### Material didactic

**Pentru învățător :** Planșele cu figurile 53, 55, 57 și 59 folosite în ora anterioară. (La nevoie pot fi înlocuite cu desene făcute la tablă cu cretă colorată).

**Pentru elevi :** Fișe cu figurile 72 și 73.

## Recomandări metodice pentru predarea temei

### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Se prezintă planșele cu figurile 53, 55, 57 și 59, elevii trebuind să spună în care avem o corespondență unu la unu, și să justifice răspunsul.

Învățătorul va desena apoi pe tablă figurile 68 și 69, cerînd elevilor să stabilească o corespondență unu la unu între mulțimile  $U$  și  $V$ , apoi între mulțimile  $U$  și  $I$ . Se obțin figuri ca 70 și 71 din care rezultă că între  $U$  și  $V$  se poate stabili o corespondență unu la unu, dar între  $U$  și  $I$  nu se poate stabili o astfel de corespondență.

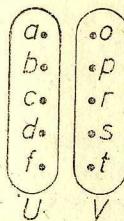


Fig. 68

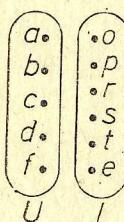


Fig. 69

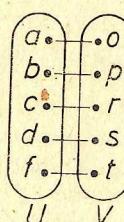


Fig. 70

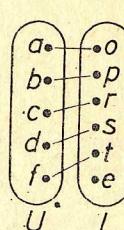


Fig. 71

Discuțiile cu elevii vor fi astfel conduse încît să se sublinieze că, între unele mulțimi se poate stabili o corespondență element cu element, între altele nu se poate stabili o astfel de corespondență.

Dacă între mulțimi se poate stabili o corespondență unu la unu, zicem că ele au același număr de elemente. Dacă între mulțimi nu poate fi stabilită o corespondență unu la unu, zicem că ele au numărul elementelor diferit.

Care dintre mulțimile  $V$  și  $I$  ar avea același număr de elemente ca mulțimea  $U$ ? Elevii vor indica mulțimea  $V$ , precizînd că numărul elementelor mulțimii  $I$  diferă de numărul elementelor mulțimii  $U$ , după cum rezultă din figura 71.

Se spune că mulțimea  $U$  are tot atîea elemente ca mulțimea  $V$ , sau că mulțimea  $U$  are același număr de elemente ca mulțimea  $V$ . Se spune însă că mulțimea  $U$  are mai puține elemente ca mulțimea  $I$ , sau că mulțimea  $I$  are mai multe elemente ca mulțimea  $U$ .

Se mai spune că numărul elementelor mulțimii  $U$  este mai mic decît numărul elementelor mulțimii  $I$ , sau că numărul elementelor mulțimii  $I$  este mai mare decît numărul elementelor mulțimii  $U$ .

\* Prin  $\bar{A}$  înțelegem numărul elementelor mulțimii  $A$ .

\* Avem:  $\bar{U} = \bar{V}$ ;  $\bar{U} < \bar{I}$ ;  $\bar{I} > \bar{U}$ .

#### Muncă independentă

Se distribuie fișe conținînd figurile 72 și 73. Elevii săn solicități a stabili corespondențe unu la unu și să spună care mulțimi au același număr de elemente. Pentru mulțimile care diferă prin numărul de elemente, ei vor spune care are mai multe și care are mai puține elemente.

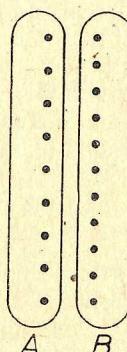


Fig. 72

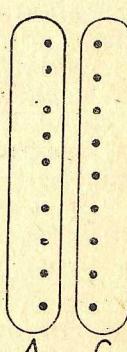


Fig. 73

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se deschide manualul, învățătorul citind exercițiul care a fost dat pentru acasă. Cîțiva elevi vor spune ce au constatat la rezolvarea lui. Răspunsul corect este că la figura (5) din manual se poate stabili o corespondență element cu element, dar la figura (6) o astfel de corespondență nu poate fi stabilită.

Discutînd cu elevii, aceștia vor preciza că la figura (6) din manual cele două mulțimi nu au același număr de elemente, prima mulțime avînd mai multe elemente decît mulțimea a doua.

Învățătorul va citi apoi temă a 2-a, elevii urmărind pe cărți cele citite. Ei vor justifica afirmațiile făcute în text, cu ajutorul figurilor respective.

### TEMA A 3-A : NUMERELE NATURALE PÂNĂ LA ZECE

**Scop :** Cunoașterea unui procedeu de obținere a numerelor naturale pînă la zece, cu ajutorul unor mulțimi model construite într-un anumit mod. Formarea ideii de succesiune a numerelor naturale. Ordonația numerelor naturale. Distincția între număr și cifră.

#### Material didactic

**Pentru învățător :** Plânse cu figurile din manual aflate la tema respectivă, una pentru numărul 1, una pentru 2 și una pentru 3. Pe fiecare planșă grupele de figuri vor fi acoperite cu hîrtie subțire lipită ușor în cele patru colțuri, astfel încît să poată fi descoperite la momentul potrivit.

**Pentru elevi :** Manualul.

#### Recomandări metodice pentru predarea temei

##### 1º Numărul și cifra 1

Se cere elevi exemplu de mulțimi cu un singur element. La exemplele date se adaugă cel reprezentat de prima figură aflată pe planșa referitoare la numărul 1, figură de pe care este ridicată foiță de hîrtie care o acoperă.

Numărul elementelor acestei mulțimi este numit „unu“ și notat cu 1. Se atrage atenția elevilor că semnele cu care se scriu numerele se numesc cifre. Cifra 1 nu este același lucru cu numărul pe care îl reprezintă.

Există și alte mulțimi al căror număr de elemente este tot unu? Răspunsul se obține descoperind pe planșa referitoare la numărul 1, al doilea grup de figuri. Ele sugerează că toate mulțimile cu un singur element pot fi puse în corespondență unu la unu între ele, deci au numărul elementelor tot unu.

Drept model de mulțime cu un singur element este comod a lua mulțimea ce are ca element un punct.

##### 2º Numărul și cifra 2

De pe planșa referitoare la numărul 2 se „descoperă“ prima grupă de figuri. Discuția cu elevii va sublinia că în aceste figuri sunt reunite o mulțime cu 1 element, cu o mulțime cu 1 element, disjunctă de prima. Numărul elementelor mulțimii rezultate este numit „doi“ și notat 2.

De pe aceeași planșă se „descoperă“ al doilea grup de figuri. Cu ajutorul lor elevii vor stabili că numărul unu este mai mic decât numărul doi, notind :

$1 < 2$  (citat : „1 este mai mic decât 2“).

Există și alte mulțimi al căror număr de elemente este tot doi ? Răspunsul se obține descoperind pe planșa referitoare la numărul 2 al treilea grup de figuri. Ele sugerează că tot 2 este numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu o mulțime cu 2 elemente. Drept model de mulțime cu două elemente este comod a-lua mulțimea ce are ca elemente două puncte.

### 3º Numărul și cifra 3

Pe planșa referitoare la numărul 3 se „descoperă“ prima grupă de figuri. Elevii vor fi determinați să observe că în aceste figuri este reunită o mulțime cu 2 elemente cu o mulțime cu 1 element, disjunctă de prima. Numărul elementelor mulțimii rezultate este numit „trei“ și notat 3.

De pe aceeași planșă se „descoperă“ al doilea grup de figuri. Cu ajutorul lor elevii vor stabili că numărul trei este mai mare decât doi și decât unu, notind :

$1 < 2 < 3$ .

„Descoperind“ al treilea grup de figuri, se observă că tot 3 este numărul elementelor oricărei mulțimi ce poate fi pusă în corespondență unu la unu cu o mulțime cu 3 elemente.

Drept model de mulțime cu trei elemente este comod a-lua mulțimea ce are ca elemente trei puncte.

### 4º Celealte numere pînă la zece

Se observă că prin același procedeu se obțin numerele :

4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

Așadar în această etapă se va studia doar formarea și numirea numărului zece. Scrierea lui însă urmează alt procedeu, pentru numărul zece nu folosim o nouă cifră, aşa cum am făcut pînă acum pentru fiecare număr mai mic decât zece. Scrierea lui zece o vom explica împreună cu scrierea numerelor mai mari ca zece.

Deoarece fiecare mulțime are un număr de elemente care primește un nume și o notație, vom proceda la fel și cu mulțimea vidă.

Numărul elementelor mulțimii vide îl numim „zero“ și îl notăm 0. El este considerat cel mai mic număr natural.

Numerele naturale mai mici decât zece, în ordine crescătoare, sunt :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Scrise în această ordine, ele formează *șirul numerelor naturale* mai mici decât zece.

Se cere să se spună numerele naturale de la zero la zece, mai întîi în ordine crescătoare, apoi în ordine descrescătoare.

Se va scrie pe caiete *șirul numerelor naturale* de la 0 la 9.

Din manual se vor rezolva în clasă problemele : 1 ; 2 ; 5, întrebările (a) și (d); celealte probleme de la sfîrșitul temei a 3-a se vor da pentru acasă, discutînd amânunțit rezolvările în lecțiile următoare.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 3-a.

*Problema 1*

Figurile 74, 75 și 76. Răspunsul se obține prin numărare.

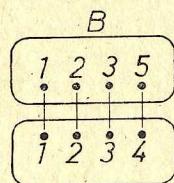


Fig. 74

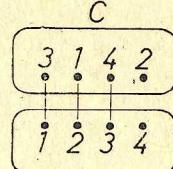


Fig. 75

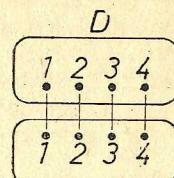


Fig. 76

*Problema 3*

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; sau  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

*Problema 4*

a, b, d, f, g sunt corecte. c, e, h nu sunt corecte și trebuie scrisă :

$$c) 7 > 6; \quad e) 9 > 8; \quad h) 4 < 6 < 9.$$

*Problema 5*

a) Figura 77 ; dacă o submulțime are 2 elemente, cealaltă are 3 elemente.



b) Figura 78     $\boxed{5} \begin{cases} \boxed{4} \\ \boxed{1} \end{cases}$ ;    figura 79     $\boxed{5} \begin{cases} \boxed{5} \\ \boxed{10} \end{cases}$ .

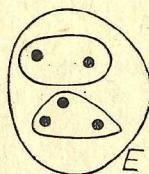


Fig. 77

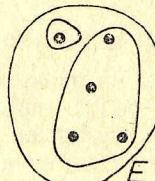


Fig. 78

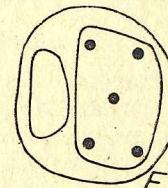


Fig. 79

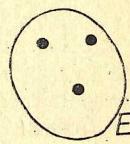


Fig. 80

c) Același text, cu întrebarea (a), mulțimea  $E$  fiind însă cea din figura 80, iar tabloul se înlocuiește cu



Etc.

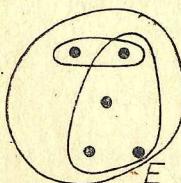


Fig. 81

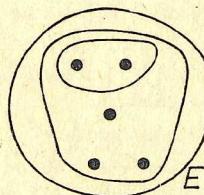
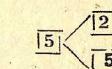


Fig. 82

d) Răspunsul la întrebarea (a) se modifică în acest caz, după cum se vede din figurile 81 și 82.



Explicația constă în aceea că submulțimile pot avea acum și

unul sau două elemente comune. Rămîne valabilă și situația în care submulțimile sănt disjuncte.

#### TEMA A 4-A : ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELEOR PÂNĂ LA ZECE

**Scop:** Cunoașterea adunării numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte; a scăderii acestor numere cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa; a legăturii dintre adunarea și scăderea numerelor naturale desprinsă din legătura ce există între două mulțimi disjuncte, reuniunea lor, și diferența dintre reuniune și fiecare din cele două mulțimi. Cunoașterea probelor adunării și scăderii numerelor naturale.

#### Material didactic

Pentru învățător: Cretă colorată.

Pentru elevi: Manualul.

#### Recomandări metodice pentru predarea temei

##### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

1º Învățătorul execută pe tablă cu cretă colorată figura 83. El cere elevilor să închidă cu o linie verde elementele mulțimii formate prin reuniunea mulțimilor  $A$  și  $B$ , și să noteze cu  $C$  această reuniune. Se obține figura 84.

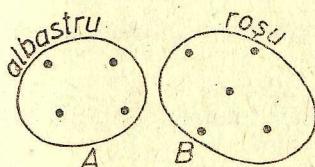


Fig. 83

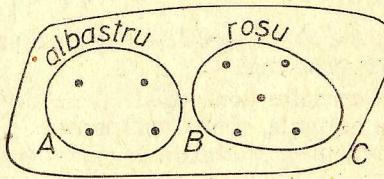


Fig. 84

$$C = A \cup B,$$

Se cere elevilor să arate pe figura 84 mulțimea diferență dintre  $C$  și  $A$ , apoi dintre  $C$  și  $B$ . Se arată, respectiv, mulțimile  $B$  și  $A$ .

$$C - A = B; \quad C - B = A.$$

2º Copiii vor fi solicitați să spună cîte elemente are mulțimea  $A$ , cîte elemente are mulțimea  $B$  și apoi cîte elemente are reuniunea mulțimilor  $A$  și  $B$ . Se va insista ca ei să explice cum au aflat fiecare din aceste trei numere: numărînd întîi elementele mulțimii  $A$ , apoi elementele mulțimii  $B$  și la urmă numărînd elementele mulțimii formată prin reuniunea mulțimilor  $A$  și  $B$  adică numărînd elementele mulțimii  $C$ .

$$\overline{\overline{A}} = 4; \quad \overline{\overline{B}} = 5; \quad \overline{\overline{C}} = 9 \text{ sau } \overline{\overline{A \cup B}} = 9.$$

3º Din cele de mai sus rezultă că numărul 9 poate fi obținut dacă se dau numerele 4 și 5, prin procedeul următor, numit adunarea numerelor naturale:

Se ia o mulțime oarecare  $A$  cu 4 elemente și o mulțime oarecare  $B$  cu 5 elemente, disjunctă de prima (de exemplu mulțimile de puncte  $A$  și  $B$  de mai sus).

Se formează reuniunea dintre mulțimile  $A$  și  $B$ .

Prin numărare se găsește că reuniunea are 9 elemente.

Notăm :  $4 + 5 = 9$

La solicitarea învățătorului elevii vor reaminti că numerele 4 și 5 care se adună se numesc termenii adunării, rezultatul adunării, 9, se numește suma dintre 4 și 5.

4° Figura 84 poate folosi la efectuarea scăderii numerelor naturale 9 și 4 :

Se ia o mulțime  $C$  având 9 elemente, și o submulțime  $A$  a mulțimii  $C$ , având 4 elemente.

Se formează mulțimea diferență dintre  $C$  și  $A$ , adică mulțimea  $B$ .

Prin numărare se găsește că diferența  $B$  are 5 elemente.

Notăm :

$$9 - 4 = 5.$$

Prin discuții se va reaminti că 9 se numește descăzut, 4 este scăzătorul iar 5 este diferența sau restul. Descăzutul și scăzătorul împreună formează termenii scăderii.

Din figura 84 se va deduce că avem și

$$9 - 5 = 4.$$

Rezumînd, se va atrage atenția elevilor că din figură 84 rezultă

$$4 + 5 = 9; 5 + 4 = 9; 9 - 4 = 5; 9 - 5 = 4.$$

Primele două egalități exprimă proprietatea de *comutativitate a adunării numerelor naturale*.

Din celelalte două egalități deducem că la scădere nu se dă suma a două numere naturale, și unul din numere, și se află celălalt număr. Datorită acestui fapt spunem că *scăderea este operația inversă adunării*.

Se atrage atenția elevilor că valabilitatea simultană a celor patru egalități dă posibilitatea să facem proba adunării prin adunare și prin scădere : dacă  $4 + 5 = 9$ , atunci :  $5 + 4 = 9; 9 - 5 = 4; 9 - 4 = 5$ , și proba scăderii prin adunare și prin scădere :

$$\text{dacă } 9 - 4 = 5, \text{ atunci : } 5 + 4 = 9; 4 + 5 = 9; 9 - 5 = 4.$$

Elevii vor reține enunțurile :

„Dacă din sumă scădem un termen al adunării, se obține celălalt termen“.

„Dacă adunăm diferența cu scăzătorul, obținem pe descăzut“.

„Dacă scădem din descăzut diferența, obținem pe scăzător“.

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Elevii deschid cărțile la tema a 4-a : „Adunarea și scăderea numerelor pînă la zece“.

Sub îndrumarea învățătorului și folosind figura din manual ei vor explica aplicarea regulilor de adunare și scădere pentru a efectua :

$$2 + 3 = 5; 5 - 2 = 3; 5 - 3 = 2$$

Vor spune termenii adunării și suma; termenii scăderilor, descăzutul scăzătorul, diferența sau restul.

Li se cere să verifice pentru numerele 2 și 3 dacă adunarea este comutativă, folosind aceeași figură din manual. Se va pune problema dacă scădere este comutativă, verificând pentru perechea de numere 5 și 2.

Se va constata că  $5 - 2 = 3$  dar  $2 - 5 =$  nu se poate efectua, neputind alege într-o mulțime cu 2 elemente, o submulțime cu 5 elemente. Se va deduce că scăderea nu este posibilă dacă descăzutul este mai mic decât scăzătorul. Dimpotrivă, adunarea este totdeauna posibilă.

Învățătorul va citi din manual, elevii urmărind textul, paragrafele (c) și (d) referitoare la probele adunării și scăderii și la adunarea și scăderea cu zero.

Se va atrage atenția asupra faptului că, dacă descăzutul este egal cu scăzătorul, diferența este 0.

Ca temă în clasă se vor efectua primele două coloane de adunări și scăderi de la exercițiile 1 și 2, restul dându-se de efectuat acasă. Aceste exerciții vor fi făcute folosind mulțimi model formate din puncte, reuniunea și diferența mulțimilor. Tot în clasă se vor rezolva exercițiile și problemele: 4; 5; 6; 7; 8; 9; 15; 17.

Pentru acasă se vor propune încă: 3; 10; 11; 12; 13; 14; 16, discutând amănuntejii rezolvarea în lecțiile următoare.

### Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 4-a

#### Exercițiul 1

$$4 + 1 = ; \quad 4 + 1 = 5$$

Figura 85. Suma 5 a lui 4 cu 1 se găsește numărind elementele reuniunii.

$$5 + 0 = ; \quad 5 + 0 = 5 \quad (\text{fig. 86});$$

$$0 + 0 = ; \quad 0 + 0 = 0 \quad (\text{fig. 87})$$

Etc.

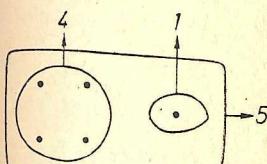


Fig. 85

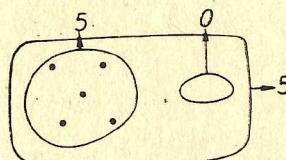


Fig. 86

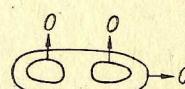


Fig. 87

#### Exercițiul 2

$6 - 4 =$ ;  $6 - 4 = 2$  (fig. 88). Diferența 2, dintre 6 și 4, se găsește numărind elementele mulțimii C, diferența dintre mulțimile A și B.

$$5 - 5 = ; \quad 5 - 5 = 0 \quad (\text{fig. 89});$$

$$8 - 0 = ; \quad 8 - 0 = 8 \quad (\text{fig. 90}).$$

$1 - 3 =$  imposibil, neputind separa dintr-o mulțime cu 1 element o submulțime cu 3 elemente.

Etc.

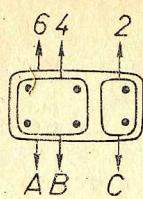


Fig. 88

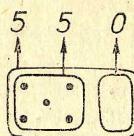


Fig. 89

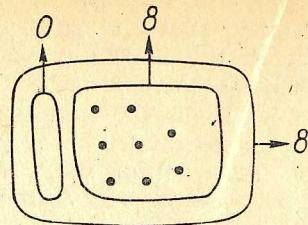


Fig. 90

*Exercițiul 3*

$$9 - 3 = 6. \quad \text{Proba: } 3 + 6 = 9 \quad \text{sau } 9 - 6 = 3.$$

$$3 + 6 = 9. \quad \text{Proba: } 6 + 3 = 9 \quad \text{sau } 9 - 6 = 3 \text{ sau } 9 - 3 = 6$$

*Problema 4*

a)  $9 - a = 3$  din prima figură;  $a - 2 = 3$  din a două;  $3 + a = 5$  din prima;  $3 + 2 = a$  din a două;  $a + 2 = 5$  din a treia;  $a - 3 = 2$  din a două;  $5 - 3 = a$  din prima;  $5 - a = 2$  din a treia;  $5 - 2 = a$  din a treia figură.

b) La toate egalitățile ce se deduc din prima figură, prin numărare găsim  $a = 2$ ; la cele deduse din figura a două, analog găsim  $a = 5$ ; la cele ce se deduc din figura a treia găsim  $a = 3$ .

Pentru calculul lui  $a$  putem scrie, privind figurile din care se deduce fiecare egalitate:

$$5 - a = 3, \quad a - 2 = 3, \quad 3 + a = 5, \quad 3 + 2 = a, \quad a + 2 = 5,$$

$$a = 5 - 3, \quad a = 2 + 3, \quad a = 5 - 3, \quad a = 3 + 2, \quad a = 5 - 2,$$

$$a = 2, \quad a = 5, \quad a = 2, \quad a = 5, \quad a = 3.$$

$$a - 3 = 2, \quad 5 - 3 = a, \quad 5 - a = 2, \quad 5 - 2 = a,$$

$$a = 3 + 2, \quad a = 5 - 3, \quad a = 5 - 2, \quad a = 5 - 2,$$

$$a = 5, \quad a = 2, \quad a = 3, \quad a = 3.$$

*Problema 5*

Termenii unei adunări sunt 1 și 3. Aflați suma lor.

$$a = 1 + 3,$$

$$a = 4.$$

Suma a două numere este 4, unul din numere este 3. Aflați celălalt număr.

$$a + 3 = 4,$$

$$a = 4 - 3,$$

$$a = 1.$$

Suma a două numere este 4, unul din numere este 1. Aflați celălalt număr.

$$a + 1 = 4,$$

$$a = 4 - 1,$$

$$a = 3.$$

Se pot găsi și alte formulări pentru probleme. De exemplu, pentru prima figură :

Două mulțimi disjuncte au, respectiv, 1 și 3 elemente. Aflați câte elemente are reuniunea lor.

Din rezolvarea problemelor formulate în legătură cu a doua și a treia figură, rezultă :

Pentru a afla un termen al adunării cînd se dă suma și celălalt termen, scădem din sumă termenul cunoscut.

Putem afla pe  $a$  din

$$4 - a = 1 \text{ și } a - 1 = 3,$$

respectiv din a treia și prima figură. Găsim :

$$4 - a = 1, \quad a - 1 = 3,$$

$$a = 4 - 1, \quad a = 1 + 3,$$

$$a = 3, \quad a = 4.$$

Determinarea lui  $a$  din  $4 - a = 1$  ne arată că :

Pentru a afla scăzătorul cînd cunoaștem descăzutul și diferența, scădem diferența din descăzut.

Determinarea lui  $a$  din  $a - 1 = 3$  ne arată că :

Pentru a afla descăzutul cînd cunoaștem scăzătorul și diferența, adunăm scăzătorul cu diferența.

### Problema 6

Avem, respectiv :

Aflați suma numerelor 2 și 7

$$2 + 7 = a; \quad a = 2 + 7; \quad a = 9.$$

Suma a două numere este 8, unul din numere este 3. Cît este celălalt număr ?

$3 + a = 8; a = 8 - 3; a = 5$  (scădem din sumă numărul cunoscut).

Cît este diferența dintre 8 și 5 ?

$$8 - 5 = a; \quad a = 8 - 5; \quad a = 3.$$

Descăzutul este 9, diferența este 5. Cît este scăzătorul ?

$9 - a = 5; a = 9 - 5; a = 4$  (dacă scădem din descăzut diferența obținem pe scăzător).

Diferența a două numere este 3, scăzătorul este 5. Să se afle descăzutul.

$a - 5 = 3; a = 5 + 3; a = 8$  (adunind scăzătorul cu diferența obținem descăzutul).

### Problema 7.

Se va observa mai întii că nici  $a$  nici  $b$  nu pot fi mai mari decît 5. În al doilea rînd, dacă presupunem că unul din numere, să zicem  $b$ , este 3, celălalt număr  $a$ , se calculează din  $a + 3 = 5$ . Avem :

$$a + 3 = 5; \quad a = 5 - 3; \quad a = 2$$

ceea ce arată că  $a$  nu poate fi orice număr natural mai mic decît 5.

Pentru a afla toate perechile de numere  $a$  și  $b$  pentru care :

$$a + b = 5$$

vom considera că unul din numere (să zicem  $b$ ) este, pe rînd, orice număr natural cel mult egal cu 5, și vom calcula ce număr natural poate fi  $a$ , în fiecare caz.

$$\begin{array}{llllll} b = 0; & a + 0 = 5; & a = 5 - 0; & a = 5 \text{ deci } a = 5; & b = 0. \\ b = 1; & a + 1 = 5; & a = 5 - 1; & a = 4 \text{ deci } a = 4; & b = 1. \\ b = 2; & a + 2 = 5; & a = 5 - 2; & a = 3 \text{ deci } a = 3; & b = 2. \\ b = 3; & a + 3 = 5; & a = 5 - 3; & a = 2 \text{ deci } a = 2; & b = 3. \\ b = 4; & a + 4 = 5; & a = 5 - 4; & a = 1 \text{ deci } a = 1; & b = 4. \\ b = 5; & a + 5 = 5; & a = 5 - 5; & a = 0 \text{ deci } a = 0; & b = 5. \end{array}$$

Mulțimea perechilor de numere naturale ( $a, b$ ) care dau

$$a + b = 5$$

este, aşadar :

$$\{(5, 0), (4, 1) (3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 5)\}$$

Observăm că sunt 6 perechi de acest fel.

**Notă :** Problemele de la 8 la 16 se vor rezolva folosind diagrame, apoi folosind notarea numărului necunoscut cu o literă. În acest mod elevii vor înțelege mai bine legăturile existente între mărimile despre care vorbește problema, deducind procedeul de rezolvare și nu „ghicind“ ce operație trebuie făcută pentru a găsi răspunsul.

### Problema 8

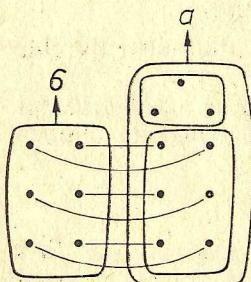
Figura 91. Prin numărare se găsește că mulțimea bilelor albastre are 9 elemente. Se observă că putem scrie :

$$a = 6 + 3; \quad a = 9.$$

### Problema 9

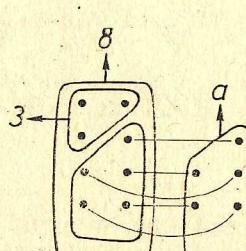
Figura 92. Prin numărare se găsește că mulțimea peștilor prinși de Dana are 5 elemente. Se observă că putem scrie :

$$a + 3 = 8; \quad a = 8 - 3; \quad a = 5.$$



Mulțimea  
bilelor roșii.

Mulțimea  
bilelor  
albastre.



Mulțimea  
peștilor  
prinși de Radu

Mulțimea  
peștilor  
prinși de Dana

Fig. 91

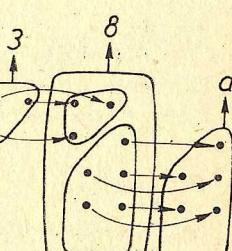


Fig. 93

*Problema 10*

Figura 93.  $3 + a = 8$ ;  $a = 8 - 3$ ;  $a = 5$ .

*Problema 11*

Figura 94.  $a + 2 = 7$ ;  $a = 7 - 2$ ;  $a = 5$ .

*Problema 12*

Figura 95.  $a = 3 + 4$ ;  $a = 7$ .

*Problema 13*

Figura 96.  $7 = 3 + a$ ;  $a = 7 - 3$ ;  $a = 4$ .

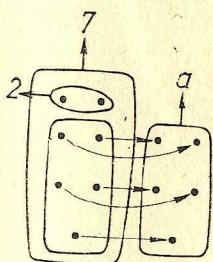


Fig. 94

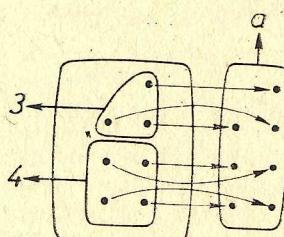


Fig. 95

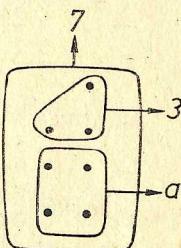


Fig. 96

*Problema 14*

Figura 95.  $4 + 3 = a$ ;  $a = 7$ .

Figura 97.  $4 - 3 = a$ ;  $a = 1$ .

*Problema 15*

Figura 98.  $b = 3 + a$ ;  $a = 3 + 2$ ;  $b = 3 + 5$ ;  
 $a = 5$ ;  $b = 8$ .

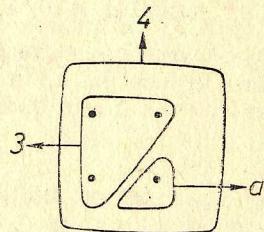


Fig. 97

*Problema 16*

Figura 99.  $b = 5 + a$ ;  $3 + a = 5$ ;  $b = 5 + 2$ ;  
 $a = 5 - 3$ ;  $b = 7$ ;  
 $a = 2$ .

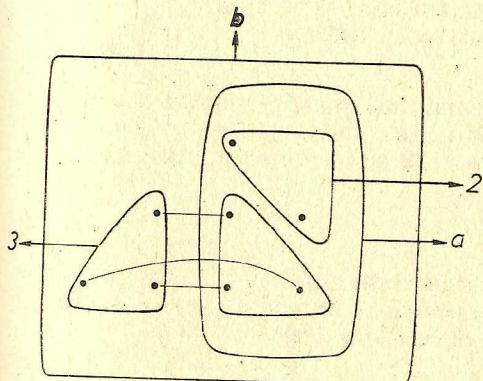


Fig. 98

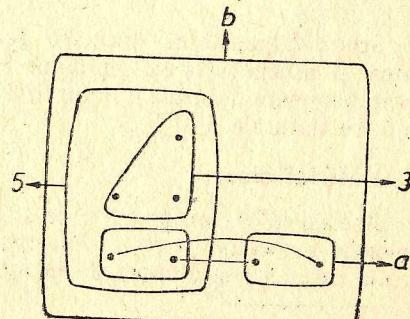


Fig. 99

*Problema<sup>1</sup> 17*

$\{0, 1, 2, 3\}$ ;  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

\* sau :  $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ ;  $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Ultimele trei exerciții se rezolvă prin încercări, admitând ca evident faptul că dacă un termen al adunării crește, crește și suma :

$$a + 2 < 5,$$

$a = 0$ ,  $0 + 2 = 2$ , cum  $2 < 5$  urmează că  $a = 0$  face inegalitatea adevărată

$a = 1$ ,  $1 + 2 = 3$ ,  $3 < 5$  deci  $a = 1$  convine problemei ;

$a = 2$ ,  $2 + 2 = 4$ ,  $4 < 5$  deci  $a = 2$  convine problemei ;

$a = 3$ ,  $3 + 2 = 5$ ,  $5 = 5$  (5 nu este mai mic decât 5) deci  $a = 3$  nu convine problemei.

Mulțimea numerelor naturale  $a$  pentru care

$$a + 2 < 5$$

este adevărată, s-a găsit :  $\{0, 1, 2\}$ .

\* Se scrie  $a \in \{0, 1, 2\}$

Pentru  $a + 2 \leq 5$  se găsește  $\{0, 1, 2, 3\}$ ,

\* scriind  $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

Se vede că  $a + 4 < 2$  nu este adevărată pentru nici un număr natural scris în locul lui  $a$ . În adevăr, cel mai mic număr natural care poate fi scris în locul lui  $a$  este 0. Dar :

$$0 + 4 = 4 \text{ și } 4 < 2 \text{ este falsă.}$$

Vom zice că mulțimea numerelor naturale care scrise în locul lui  $a$  fac adevărată

$$a + 4 < 2$$

este vidă.

**TEMA A 5-A : REUNIUNEA MAI MULTOR MULȚIMI.  
ADUNAREA CU MAI MULȚI TERMENI**

**Scop :** Cunoașterea formării reuniunii mai multor mulțimi. Comutativitatea și asociativitatea reuniunii mai multor mulțimi. Regula adunării mai multor numere naturale. Comutativitatea și asociativitatea adunării mai multor numere naturale.

**Material didactic**

Același ca la capitolul I tema 1, doar că elevii vor avea trei ovale din sîrmă, colorate respectiv în roșu, albastru și verde, și un cadru dreptunghiular din sîrmă care să poată cuprinde în interior cele trei ovale.

<sup>1</sup> Toate exercițiile de acest tip întâlnite în manual se vor rezolva prin încercări, fără a se stabili reguli de felul celor folosite în algebră la rezolvarea inecuațiilor.

## Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Învățătorul execută pe tablă figura 49, apoi serie

$$A = \{ , , , \}; \quad B = \{ , , , \}; \quad C = \{ , , , \}$$

elevii trebuie să completeze pe tablă (și în caiete) elementele din care este formată fiecare mulțime. Se obține :

$$A = \{p, s, d, f\}; \quad B = \{s, t, f, e\}; \quad C = \{d, f, e, m\}.$$

Se atrage atenția că mulțimea  $D$  este formată din toate literele care aparțin cel puțin la una din mulțimile  $A$ ,  $B$  și  $C$ .

Învățătorul scrie  $D = \{ , , , , , \}$

și elevii completează  $D = \{p, s, d, f, t, e, m\}$ .

Mulțimea  $D$  astfel formată este *reuniunea mulțimilor*  $A$ ,  $B$  și  $C$ .

\* Se notează  $D = A \cup B \cup C = \{p, s, d, f, t, e, m\}$ .

Elevii vor repeta de câteva ori care sunt elementele fiecareia din mulțimile  $A$ ,  $B$  și  $C$ , și care sunt elementele mulțimii  $D$ , reuniunea mulțimilor  $A$ ,  $B$  și  $C$ . Apoi, ei vor spune elementele reuniunii  $D$ , care figurează numai în una din mulțimile  $A$ ,  $B$  și  $C$  ( $p$  este numai în  $A$ ;  $t$  este numai în  $B$ ;  $m$  este numai în  $C$ ), cele care figurează în două din aceste mulțimi ( $s$  este în  $A$  și  $B$ ;  $d$  este în  $A$  și  $C$ ;  $f$  este în  $B$  și  $C$ ), și cele care figurează în toate trei ( $e$  este și în  $A$ , și în  $B$ , și în  $C$ ).

Se cere elevilor să găsească elementele reuniunii mulțimilor  $B$ ,  $A$  și  $C$ , apoi  $C$ ,  $B$  și  $A$  etc. Se constată că de fiecare dată reuniunea este tot mulțimea  $D$ .

Așadar, *reuniunea mai multor mulțimi este comutativă*.

\* Se va scrie :  $A \cup B \cup C = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A = \dots$

*Muncă independentă*

Se propune elevilor să așeze pe bânci ovalele din sîrmă, ca în figura 100. Într-un oval vor așeza apoi toate piesele roșii din plic, care nu sunt pătrate, în altul toate piesele albastre din plic, care nu sunt pătrate și în al treilea toate piesele verzi din plic, care nu sunt pătrate.

Se obține pe bânci aspectul din figura 101. După o sumară verificare și cîteva discuții, învățătorul va desena cu cretă pe tablă magnetică ovalele și va așeza piesele metalice ca în figura 101.

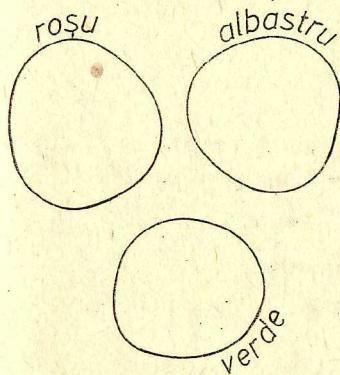


Fig. 100

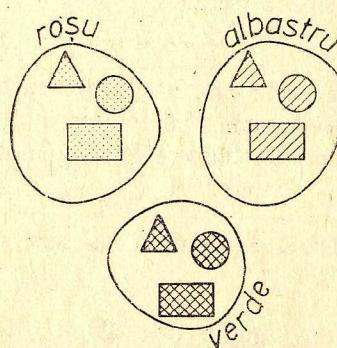


Fig. 101

Se cere apoi să se așeze pe bancă cadrul dreptunghiular din sîrmă astfel ca în interiorul lui să se afle toate piesele ce sînt în interiorul oricărui din cele trei ovale.

Se obține aspectul din figura 102. Din nou se face o sumară verificare în bârni, apoi se trasează cu cretă dreptunghiul pe tabla magnetică ca în figura 102.

Mulțimea ce are ca elemente toate piesele situate în interiorul cadrului dreptunghiular este reuniunea celor trei mulțimi avînd ca elemente, respectiv, piesele din interiorul celor trei ovale din sîrmă.

Pentru a percepe mai bine reuniunea respectivă, vor fi înlăturate cele trei ovale, rămînind pe bârni aspectul din figura 103. Se va observa că această mulțime este formată din toate piesele din pli, care nu sînt pătrate.

Invățătorul va șterge de pe tabla magnetică ovalele, rămînind figura 103.

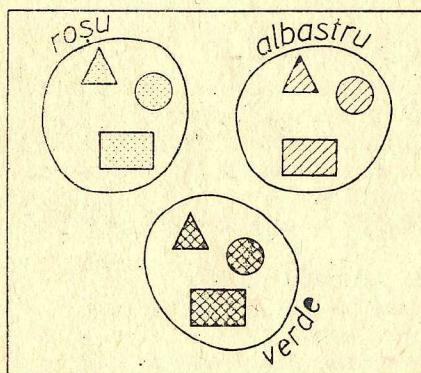


Fig. 102

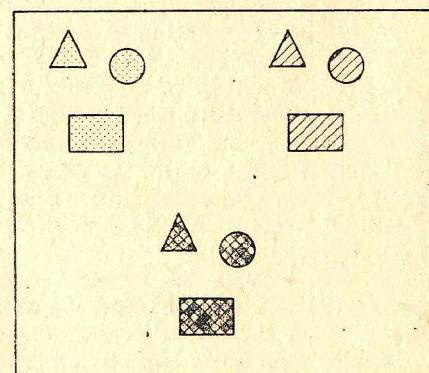


Fig. 103

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se strînge de pe bârni materialul didactic și se deschid cărțile la tema a 5-a ; „Reuniunea mai multor mulțimi. Adunarea cu mai mulți termeni“.

Elevii privesc prima figură. Conduși de întrebările învățătorului ei vor constata că în această figură se face reuniunea a trei mulțimi disjuncte, una avînd 2, una 3 și una 4 elemente. Prin numărare se găsește că reuniunea are 9 elemente scriind :

$$2 + 3 + 4 = 9.$$

Aceasta este o adunare cu trei termeni.

Reuniunea mai multor mulțimi fiind comutativă, rezultă că și adunarea mai multor numere este comutativă. Se scrie pe tablă și în caiete :

$$2 + 3 + 4 = 3 + 2 + 4 = 3 + 4 + 2 = \dots$$

După modelul de mai sus, se vor face adunările :

$$1 + 3 + 4 = \quad 2 + 1 + 5 = \quad 3 + 1 + 2 =$$

găsind (figurile 104, 105 și 106) :

$$1 + 3 + 4 = 8; \quad 2 + 1 + 5 = 8; \quad 3 + 1 + 2 = 6$$

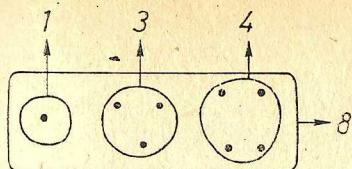


Fig. 104

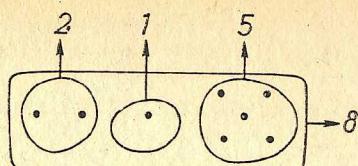


Fig. 105

Trecind la a doua și a treia figură din manual<sup>1</sup>, învățătorul le va executa pe tablă și va explica verbal asociativitatea reuniunii mulțimilor și a adunării numerelor naturale, scriind :

$$2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$$

conform textului din manual, pe care îl va citi, după ce termină explicațiile. El va cere cîtorva elevi să repete aceste explicații folosind figurile de pe tablă, restul elevilor urmărind atît la tablă, cît și pe manuale.

Figurile respective vor fi apoi executate pe caiete.

Se va observa că într-un exercițiu în care avem paranteză, prima dată trebuie să efectuăm operația din paranteză.

Se fac în clasă : exercițiul 1, prima coloană ; problemele 2 și 4.

Pentru acasă se propun ca temă celelalte coloane de la exercițiul 1 și problema 3.

**Indicații pentru rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 5-a**

#### Exercițiul 1

$$2 + (5 + 1) = 2 + 6 \\ = 8$$

$$(2 + 5) + 1 = 7 + 1... \\ = 8$$

$$1 + 2 + 3 = 3 + 3 \\ = 6$$

#### Problema 2

Figura 107.

(2 + 4) + 3 = 6 + 3  
 ↓           ↓           = 9  
 cîte timbre cîte timbre cîte timbre  
 are Victor are Dănuț au împreună

#### Problema 3

$$\text{Figura 108. } 3 + (3 + 2) = 3 + 5 \\ = 8$$

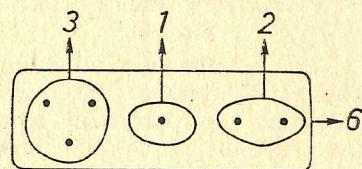


Fig. 106

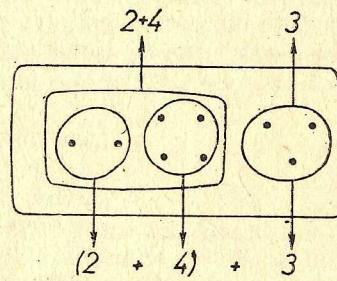


Fig. 107

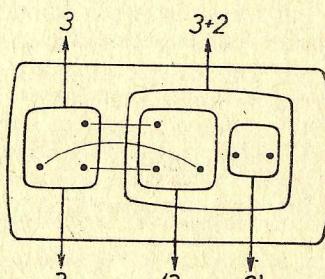


Fig. 108

<sup>1</sup> În manual, prezența unei săgeți → între figuri sugerează transformarea unei figuri în celalătă, ca urmare a parcurgerii unor etape ce rezultă clar la fiecare situație întâlnită.

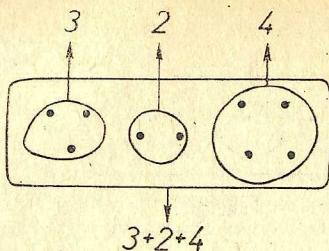


Fig. 109

Problema 4

Figura 109

$$3 + 2 + 4 = 5 + 4 \\ = 9$$

## Capitolul 3 NUMERELE NATURALE DE LA ZECE LA O SUTĂ

### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

#### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Procedeul folosit pentru numirea și scrierea numerelor mai mari ca zeci. Multimi cu elementele zeci. Multimi cu elementele zeci și unități. Cunoașterea numerelor formate numai din zeci, pînă la o sută. Ordonarea lor. Numerele formate din zeci și unități ; particularitățile denumirii lor între zeci și douăzeci ; compararea ; numărarea.

#### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RÂMINĂ ELEVII

Cu ocazia numirii și scrierii numerelor de la 0 la 9 am folosit cîte un cîvînt și cîte un semn (cifră) special pentru numirea și scrierea fiecărui număr. Dacă am continua astfel, ar trebui folosite multe denumiri și semne, devenind greu a le ține minte. De aceea oamenii au căutat și au găsit procedee de numire și scriere a numărului elementelor mulțimilor care îi interesează, folosind foarte puține denumiri și semne.

Noi am învățat unul din procedeele larg folosite în prezent, numit *sistem zecimal de numerație*.

În esență, folosind denumirile numerelor de la zero la zece și cifrele de la 0 la 9 putem denumi și scrie foarte multe alte numere, făcînd doar cîteva completări.

Iată *etapele care trebuie parcuse pentru denumirea numerelor de la zece la o sută*.

1º Din mulțimea căreia vrem să-i denumim numărul elementelor, separăm, atât cît este posibil, submulțimi disjuncte fiecare avînd cîte zece elemente (folosind în acest scop numărarea pînă la zece).

Să presupunem că am obținut 3 submulțimi de cîte zece, epuizînd în acest fel toate elementele mulțimii.

Vom numi numărul elementelor mulțimii inițiale „treizeci“.

Analog, putem găsi mulțimi cu numărul elementelor : douăzeci ; patruzeci ; cincizeci ; ... ; nouăzeci.

Despre mulțimea din care putem forma zece submulțimi de cîte zece, spunem că are numărul elementelor „o sută“.

Mulțimea <sup>1</sup> avînd ca elemente submulțimile de cîte zece elemente ale mulțimii inițiale joacă doar un rol ajutător, în scopul introducerii unei convenții comode pentru denumirea numărului elementelor mulțimii inițiale, prin numărul zecilor mulțimii ajutătoare.

2º Dacă formînd submulțimile de cîte zece, rămîn elemente ale mulțimii inițiale, pe care le numim și „unități“, cu care nu putem completa încă o zece, de exemplu obținem 2 zeci și încă 3 unități, formîm două mulțimi: una avînd ca elemente „zecile“ obținute; una avînd ca elemente unitățile obținute. În exemplul nostru o mulțime din acestea are 2 zeci, cealaltă are 3 unități.

Vom numi numărul elementelor mulțimii inițiale „douăzeci și trei“.

Analog, putem găsi mulțimi cu numărul elementelor : patruzeci și doi ; șaiseci și nouă ; optzeci și unu etc.

Mulțimea care are ca elemente „zecile“ și cea care are ca elemente „unitățile“ cu care nu s-a putut completa încă o zece joacă doar un rol ajutător, în scopul *introducerii unei convenții pentru denumirea numărului elementelor mulțimii inițiale, prin numărul zecilor și numărul unităților acestor mulțimi ajutătoare*. Formînd aceste mulțimi ajutătoare din mulțimea inițială, pregătim de fapt mulțimea inițială pentru a-i denumi și nota numărul elementelor, o organizăm într-o structură convenabilă acestui scop. Vom zice că înzestrăm mulțimea cu o *structură numerică zecimală*.

Este indicat să se repete întîi numirea numerelor formate din zeci și unități cuprinse între douăzeci și o sută și, numai după aceea, numirea numerelor cuprinse între zece și douăzeci, datorită particularităților în denumirea acestora.

Pentru scrierea numărului elementelor unei mulțimi, aceasta se organizează cu aceeași structură ca și pentru denumirea acestui număr. Trecerea la scrierea numărului se face parcurgînd etapele :

1º Construcția unei figuri numerice atașate mulțimii respective.

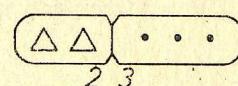


Fig. 110

Figurile numerice reprezintă mulțimi organizate cu structuri numerice zecimale, ceea ce permite a le stabili ușor numărul de elemente.

Aceste figuri numerice realizează o trecere mai „lină“ spre abstracțunea pe care o reprezintă numărul. Ele vor juca în continuare un rol foarte mare în deducerea regulilor de calcul, adîncind caracterul intuitiv al învățării și favorizînd totodată gîndirea și exprimarea în termeni specifici mulțimilor, ceea ce mărește apreciabil claritatea și profunzimea cunoștințelor, asigură o mai mare generalitate, o dezvoltare unitară, de o reală perspectivă pentru însușirea cunoștințelor matematice în viitor.

Aceste figuri numerice și modul în care le vom utiliza, se deosebesc fundamental de cele cîteva tipuri de figuri numerice întîlnite pînă acum în diverse metodici de predare a matematicii la clasele mici.

<sup>1</sup> Conținutul aliniatelor care sunt scrise cu litere mici reprezintă indicații suplimentare pentru învățător.

*Figura numerică sugerează numărul de elemente al mulțimii, prin cele două mulțimi ajutătoare: a zecilor, fiecare zece fiind reprezentată printr-un triunghi albastru (în interiorul căruia, la nevoie, pot fi figurate cele zece unități prin puncte); a unităților, fiecare element al mulțimii initiale din cele cu care nu s-a putut completa o zece, fiind reprezentat printr-un punct.*

Atunci cînd se va simți nevoia, lungimile celor două părți ale figurii numerice se vor alege astfel încît în interior să fie rezervate locuri pentru zece triunghiuri, respectiv zece puncte (fără ca toate aceste locuri să fie efectiv completate).

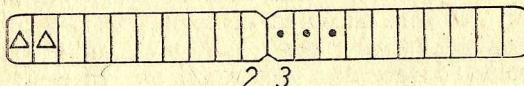


Fig. 111

*În figura numerică cifra scrisă sub mulțimea zecilor reprezintă numărul de zeci (triunghiuri), iar aceea scrisă sub mulțimea unităților reprezintă numărul de unități (puncte).*

*Din această aşezare a cifrelor, cu semnificațiile respective, se degajă firesc ideea scrierii pozitionale zecimale. Formînd submulțimi de cîte 7 sau 5 elemente, în loc de zece, s-ar obține o scriere pozitională în baza 7 sau 5 etc., pentru care figurile numerice rămîn valabile, doar că triunghiul albastru ar însemna mulțime de 7 respectiv de 5 elemente, și nu de zece.*

2° Păstrînd semnificația avută de fiecare cifră în figura numerică, putem renunța la figura numerică. În acest mod, din două cifre scrise alături :

2 3

cea din stînga va reprezenta zeci, cea din dreapta, unități.

*De exemplu :*

- 74 → 7 zeci și 4 unități → șaptezeci și patru
- 20 → 2 zeci și 0 unități → douăzeci
- 10 → 1 zeci și 0 unități → zece

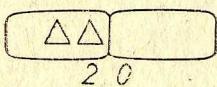


Fig. 112

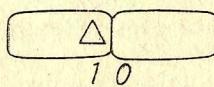


Fig. 113

Se vede că este firesc că se învețe întîi scrierea numerelor formate din zeci și unități, și numai după aceea numere formate doar din zeci. Totodată, se vede că scrierea lui zece se face după procedeul de scriere a numerelor mai mari ca zece.

Principiul comparării a două numere naturale mai mari ca 10 rămîne același ca și pentru numerele mai mici ca 10. Se iau două mulțimi model (de exemplu, mulțimi de puncte), una avînd atîtea elemente cît este primul număr și una cu atîtea elemente cît este al doilea număr. Se încearcă realizarea unei corespondențe element cu element între cele două mulțimi model. Mulțimea în care rămîn elemente fără corespondent în celalătă, are numărul elementelor mai mare.

Aplicarea acestei reguli de comparare a numerelor este greoale, mai ales dacă numerele sunt mari. Se stabilesc ușor cu ajutorul ei procedee practice foarte comode pentru a compara două numere cuprinse între zece și • sută (vezi tema „Compararea numerelor pînă la • sută“, în manual):

Dintre două numere formate numai din zeci, mai mare este acela la care cifra zecilor arată un număr mai mare; dintre două numere cu aceeași cifră a zecilor, mai mare este acela la care cifra unităților arată un număr mai mare; dintre două numere cu cifrele zecilor diferite, mai mare este acela la care cifra zecilor arată un număr mai mare.

Evident, orice număr mai mic decât 10 este mai mic decât orice număr mai mare decât 10.

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR

### DIN CAPITOLUL 3

(Număr de ore, orientativ=2)

#### TEMA 1 : NUMIREA ȘI SCRIEREA NUMERELOL

**Scop:** Cunoașterea modului în care trebuie „pregătită”, „organizată” o mulțime pentru numirea și scrierea numărului elementelor sale. Convențiile de numire și scrierea a numerelor formate din: un număr întreg de zeci; un anumit număr de zeci și încă cîteva unități cu care nu se mai poate completa o zece. Familiarizarea cu figurile numerice.

##### Material didactic

*Pentru învățător:* Asemănător cu al elevilor (este descris mai jos).

*Pentru elevi:* Pungă de celofan conținând circa 50 de bețe de chibrituri sau scobitori; papiotă cu ată; foarfece; carton alb, dreptunghiular,  $40 \times 25$  cm, pe care sunt desenate linii închise, aşa cum se vede în figura 114.

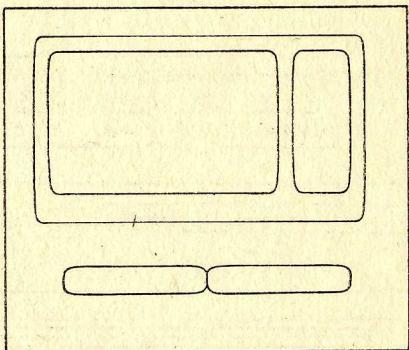


Fig. 114

##### Recomandări metodice pentru predarea temei

###### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

###### Muncă independentă

Se propune elevilor să separe din mulțimea bețisoarelor din pungă, atât cît este posibil, submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd cîte zece elemente. Aceste submulțimi vor alcătui mânunchiuri de bețisoare legate cu sfocă și așezate pe cartonul alb dreptunghiular, în interiorul liniei închise „mai mari”. Bețisoarele rămase fără a putea completa cu ele un mânunchi de zece, vor fi așezate pe carton, în interiorul liniei închise „mai mici”, alăturate.

Pe carton apare aspectul din figura 115. S-au obținut astfel cele două mulțimi ajutătoare care folosesc la numirea și scrierea numărului elementelor mulțimii bețisoarelor din pungă: mulțimea zecilor și mulțimea unităților.

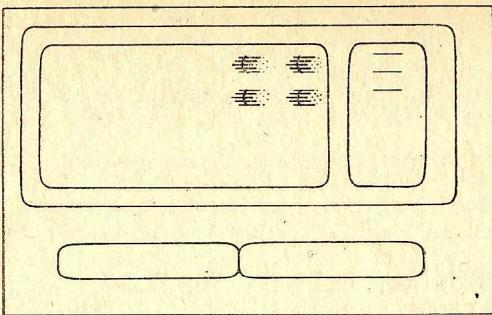


Fig. 115

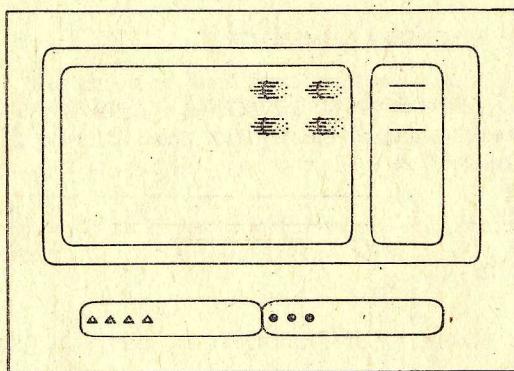


Fig. 116

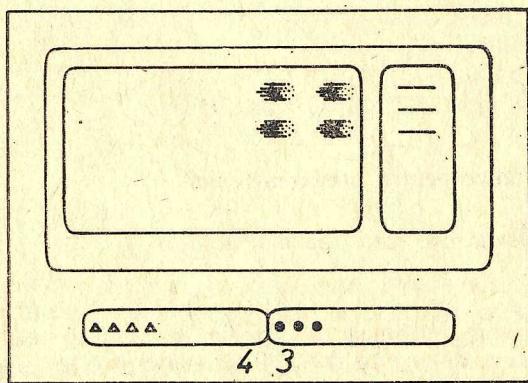


Fig. 117

care nu formează o zece, apoi vor denumi și scrie (radiind numărul anterior) numărul elementelor mulțimii bețișoarelor aflate de această dată pe cartonul din față lor.

Invățătorul face același lucru la catedră, obținând figura 118.

Invățătorul execută la catedră același lucru ca și elevii în bânci. El va folosi carton sau placaj pe care sănt fixate perechi de cuișoare ca suport pentru bețișoare și mânunchiurile de bețișoare, (bețișoarele vor fi mai mari ca ale elevilor), astfel încât să poată sta aproape vertical, spre a fi văzut de toți elevii.

Se va pune să se deseneze cîte un triunghi albastru pentru fiecare mulțime de zece bețișoare, și cîte un punct negru pentru fiecare bețișor din mulțimea celor cu care nu s-a putut forma o zece, în figura de pe carton aflată sub bețișoare, așa cum se vede în figura 116.

Figura aflată sub mulțimea bețișoarelor de pe carton, astfel completată, va fi numită *figură numerică* care arată numărul elementelor din mulțimea bețișoarelor aflate pe carton.

Acest număr va fi numit „patruzeci și trei“.

Invățătorul va controla, modul cum au lucrat elevii, cerîndu-le unora din ei să spună cîte bețișoare au pe carton.

În sfîrșit, el va scrie pe planșă sa numărul elementelor, așa cum se vede în figura 117, iar elevii vor completa cu creionul pe planșă lor numărul elementelor mulțimii bețișoarelor aflate pe cartonul din față fiecăruia.

În continuare, elevii vor ridica mulțimea bețișoarelor

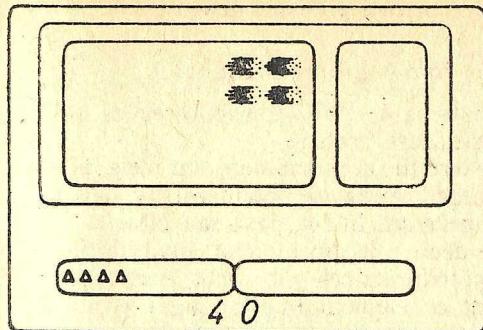


Fig. 118

Dacă situația din clasă o cere<sup>1</sup>, se vor repeta exercițiile ca cele anterioare (punind elevii să introducă în punga de celofan o parte din chibrituri), pînă cînd toți elevii își vor reaminti principiul numirii, scrierii și citirii numerelor naturale, și se vor familiariza cu construirea și interprearea figurilor numerice introduse (figurile 118\* și 118\*\*).

Se vor face și exerciții în care se va da figura numerică și se va cere alegera multîmpii betișoarelor care au numărul elementelor dat de acea figură numerică. De exemplu, pentru figura numerică 119 se găsește multîmpia de betișoare din figura 120.

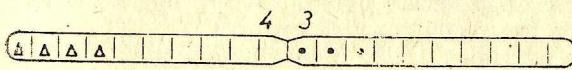


Fig. 118\*\*

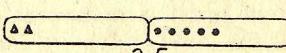


Fig. 119

**b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului**

Se strînge materialul didactic de pe bânci și se deschid cărțile la tema 1 : „Numirea și scrierea numerelor“.

Sub îndrumarea învățătorului, elevii vor explica ceea ce redau fiecare din figurile din manual, aflate la această temă, rezolvînd cele trei exerciții propuse la sfîrșit.

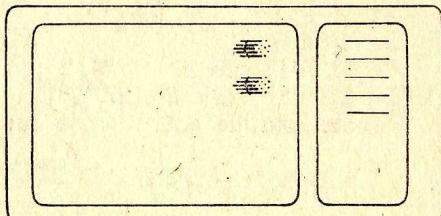


Fig. 120

**TEMA A 2-A : COMPARAREA NUMERELOR PÎNĂ LA O SUTĂ**

**Scop :** Deducerea unor reguli practice de comparare a numerelor naturale mai mari ca 10, care să nu mai facă necesară aplicarea principiului general de comparare a numerelor naturale (cu ajutorul corespondenței unu la unu).

**Material didactic**

Figurile din manualul școlar, aflate la temă respectivă.

<sup>1</sup> Poate fi folosit, din trusa învățătorului pentru predarea numerelor naturale, panoul cu aspectul din figura 186\*\* (pagina 106).

## Recomandări metodice pentru predarea temei

### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Privind figurile din manual de la tema 1, elevii explică ceea ce redă fiecare din ele, aşa cum au făcut la sfîrşitul orei trecute.

Învățătorul formulează cîteva exerciții asemănătoare cu cele aflate în manual la sfîrşitul temei 1, pe care elevii le rezolvă. Numărul lor depinde de măsura în care ele se dovedesc încă necesare într-o clasă sau alta.

În continuare, luînd alte exemple decît cele din manual, învățătorul explică, executînd desene pe tablă asemănătoare cu cele din carte, cum se încearcă realizarea unor corespondențe element cu element folosind figurile numerice, pentru compararea : numerelor formate numai din zeci ; numerelor formate din zeci și unități dar care au aceeași cifră a zecilor ; numerelor formate din zeci și unități, avînd cifrele zecilor diferite.

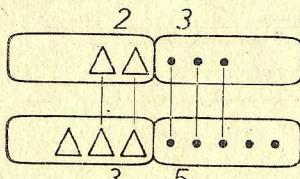


Fig. 121

In ultimul caz se atrage atenția asupra faptului că, transformarea unei zeci în unități este necesară numai dacă numărul cu mai multe zeci are mai puține unități ca celălalt. Altfel rezultatul comparării este evident, cum se observă în figura 121.

Elevii vor repeta de cîteva ori regulile practice deduse (existente în manual), trebuind să le aplice pentru a spune care este mai mare dintre perchiile de numere :

50 și 30 ;      43 și 41 ;      60 și 65 ;      32 și 36 etc.

Revenind la tema din manual, se va cere să se explice rezultatele comparării perechilor de numere scrise lîngă fiecare figură, folosind figura respectivă, și să justifice deducerea celor trei reguli practice învățate.

Se vor rezolva în clasă exercițiiile : 1 ; 2 ; 6. Acasă se vor da exercițiiile : 3 ; 4 ; 5.

**Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile propuse la tema a 2-a**

*Exercițiu 5*      {38, 39, 40, 41}

*Exercițiu 6*

{72, 73, 74} ; {26, 27} ; {24, 25} ; {32, 33, 34} ; {17, 18, 19} ; {25, 26, 27} ; {26, 27, 28} ; {25, 26, 27, 28}.

\* Toate soluțiile pot fi scrise după modelul :

$$a \cup \{72, 73, 74\}.$$

## Capitolul 4

### **ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR PÎNĂ LA O SUTĂ FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN**

#### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

##### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Adunarea și scăderea numerelor pînă la o sută, fără trecere peste ordin.

Descompunerea numerelor în sumă de doi termeni, unul format numai din zeci :  $16 = 10 + 6$  ;  $39 = 30 + 9$  etc.

Efectuarea acestor operații se va explica apelând la noțiunile cunoscute despre mulțimi și principiul numirii și scrierii numerelor mai mari ca zece, dar se va urmări formarea unor automatisme de calcul, care să nu mai facă necesară revenirea, de fiecare dată, la aceste explicații.

Exerciții și probleme simple.

## 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RÂMÎNĂ ELEVII

Cum se aplică regulile adunării și scăderii date cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte și a diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, pentru adunarea și scăderea numerelor naturale dě la zero la o sută, fără trecere peste ordin.

Folosirea în acest scop *ca mulțimi model a figurilor numerice* introduse la numirea și scrierea numerelor naturale, în *ată fel încit*, păstrînd structura numerică zecimală a mulțimilor model folosite pentru termeni, mulțimile model pentru rezultatele operațiilor să apară gata organizate cu structuri numerice zecimale. *Deducerea, pe această bază, a regulilor practice de adunare și scădere a numerelor zecimale în diversele cazuri mai importante* (reducînd numărul lor la strictul necesar), cunoșcînd și tehnica de calcul în scris.

Generalizînd aspectele comune, se va ajunge la regula: se adună sau se scad unitățile între ele și zecile între ele (cu scrierea numerelor unele sub altele în cazul calculului în scris).

Descompunerea numerelor într-o sumă de doi termeni, unul format numai din zeci și unul format numai din unități:

$$27 = 20 + 7$$

dedusă prin intermediul mulțimilor, va putea fi folosită la efectuarea calculelor cu numere naturale.

Elevii vor utiliza comutativitatea și asociativitatea reuniunii mulțimilor și a adunării numerelor naturale, pentru găsirea rezultatului unor operații. El vor fi obișnuiți să folosească parantezele pentru scrierea modului în care trebuie gîndit la efectuarea unor operații.

Calculul oral se va face paralel cu cel în scris.

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 4 (Număr de ore, orientativ=12)

### TEMA 1 : ADUNAREA NUMERELOL FORMATE NUMAI DIN ZECI

**Scop :** Efectuarea adunării acestor numere folosind definiția adunării prin intermediul reuniunii mulțimilor disjuncte; justificarea analogiei cu adunarea numerelor pînă la zece, prin folosirea mulțimilor cu elementele zeci, introduse cu ocazia organizării unei mulțimi cu o structură convenabilă pentru denumirea numărului elementelor sale; utilizarea ca mulțimi model a figurilor numerice în *ată fel*, încit, păstrînd structura mulțimilor model folosite

pentru termeni, reuniunea lor să apară gata organizată cu o structură convenabilă denumirii numărului elementelor sale; deducerea de aici a regulii practice de adunare.

### Material didactic

*Pentru învățător.* Trusa învățătorului pentru predarea adunării și scăderii numerelor naturale. Plașă cu figura 127.

### Recomandări metodice pentru predarea temei

#### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Se fac cîteva adunări cu numere pînă la zece :

$$1 + 4 =, \quad 2 + 6 =, \quad 4 + 3 =, \quad 8 + 1 =, \quad 5 + 4 =,$$

$$2 + 3 =.$$

Elevii vor spune mai întîi sumele respective, apoi vor aplica definiția cu mulțimi a adunării, pentru a efectua ultima din aceste adunări. Se va executa pe tablă și în caiete figura 122, suma fiind găsită prin numărare.

Se va propune apoi adunarea

$$20 + 30 =$$

pe care elevii, conduși de învățător, o vor gîndi :

2 zeci + 3 zeci = 5 zeci  
găsind :

$$20 + 30 = 50.$$

Învățătorul execută pe tablă figura 123, pentru a face mai sugestiv raționamentul. El se va strădui să se exprime cît mai corect și complet, în limbajul mulțimilor : luăm o mulțime cu 20 de elemente și o mulțime cu 30 de elemente, disjunctă de prima. Facem reuniunea acestor mulțimi. Obținem o mulțime în care există 5 submulțimi de cîte zece (numărul zecilor se află prin numărare). Așadar, reuniunea are 50 de elemente.

Se observă că se lucrează cu mulțimile ce au ca elemente zeci, la fel cu cele care au ca elemente unități simple (fig. 124). Aceasta permite să calculă prin analogie :

$$1 + 4 = 5, \quad 2 + 6 = 8, \quad 4 + 3 = 7, \quad 8 + 1 = 9,$$

$$10 + 40 = 50, \quad 20 + 60 = 80, \quad 40 + 30 = 70, \quad 80 + 10 = 90 \text{ etc.}$$

calcule ce vor fi făcute de elevi oral și în scris.

Învățătorul prezintă din trusă panoul cu figura 125 și anunță că el poate fi folosit pentru adunarea numerelor naturale pînă la o sută.

Se explică deocamdată adunarea numerelor formate numai din zeci.

De exemplu, pentru a găsi suma  $20 + 30$ , se așază în prima figură numerică 2 triunghiuri albastre, în a doua 3 triunghiuri de acest fel, încît ele să

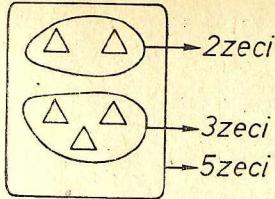


Fig. 124

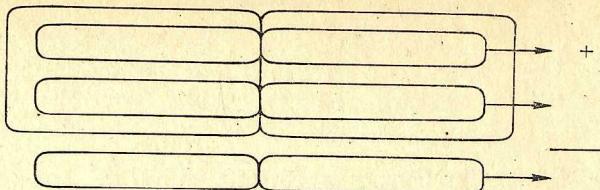


Fig. 125

devină mulțimi model, respectiv cu 20 și 30 de elemente (fig. 126). Suma va fi tocmai numărul elementelor reuniunii celor două mulțimi model formate pentru termeni. *Acest număr îl găsim fie numărînd „zecile“ (triunghiurile) existente în figura numerică ce reprezintă reuniunea mulțimilor termeni (fig. 126), fie deplasind piesele ce reprezintă mulțimile de cîte zece elemente aflate în cele două mulțimi model pentru termeni, în partea de jos a panoului, obținînd astfel figura numerică a reuniunii, fără a mai fi puse în evidență mulțimile model ale termenilor (fig. 127).*

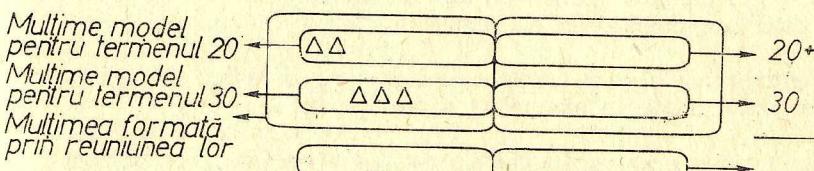


Fig. 126

În ambele cazuri se reunesc, în fond, mulțimile ce au ca elemente zeci și se obține o mulțime ce are de asemenea ca elemente zeci. Lucrul este însă mai evident pe figura 127. De aici regula : se adună numerele reprezentînd zecile termenilor.

Figura 127 sugerează scrierea numerelor unele sub altele și adunarea „unități cu unități și zeci cu zeci“ :

$$\begin{array}{r} 20 + \\ 30 \\ \hline 50 \end{array} \quad \text{se observă totodată} \quad \begin{array}{r} 30 + \\ 20 \\ \hline 50 \end{array}$$

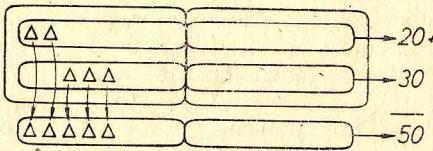


Fig. 127

#### Muncă independentă

Se cere elevilor să efectueze adunările :

$$10 + 50 = \quad 20 + 30 =$$

folosind figuri ca 123 și 124 (care se află încă executate pe tablă).

Desigur, scopul urmărit nu este aflarea sumei, lucru deja cunoscut de elevi, ci deprinderea modului de gîndire și exprimare în limbajul mulțimilor a etapelor ce trebuie parcursse pentru aflarea sumei.

Se va scoate apoi un elev la tablă care va face adunarea  $10 + 50 =$  folosind trusa învățătorului, deducind regula de adunare și scriind :

$$\begin{array}{r} 10 + \\ 50 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 50 + \\ 10 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 + 50 = 60 \\ 50 + 10 = 60 \end{array}$$

Elevii din bănci vor corecta, după caz, ceea ce au efectuat și vor serie așași lucru în caiete.

În continuare, cîțiva elevi vor fi scoși, pe rînd, să efectueze la tablă, iar restul elevilor în caiete adunări ca :

$$10 + 20 = ; \quad 30 + 30 = ; \quad 30 + 40 = ; \quad 20 + 40 = .$$

de fiecare dată efectuînd întîi oral, apoi în scris cu așezarea numerelor unele sub altele, sumele fiind găsite prin aplicarea regulii stabilite anterior.

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se cere elevilor să explice ceea ce redau figurile din manual existente la temă 1 : „Adunarea numerelor formate numai din zeci“. Elevii, ajutați de învățător, vor deduce din ele regula practică de adunare și tehnica adunării în scris.

Pentru acasă li se va propune efectuarea, prin aplicarea regulii de calcul, a exercițiilor aflate în manual la sfîrșitul temei 1.

## TEMA A 2-A : SCĂDEREA NUMERELOR FORMATE NUMAI DIN ZECI

**Scop :** Efectuarea scăderii acestor numere folosind definiția scăderii prin intermediul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa; justificarea analogiei cu scăderea numerelor pînă la zece, prin folosirea mulțimilor cu elementele zeci; utilizarea ca mulțimi model a figurilor numerice în așa fel încît, păstrînd structura mulțimilor model folosite pentru termenii scăderii, mulțimea diferență să apară gata organizată într-o structură convenabilă de denumirii numărului elementelor sale; deduceră de aici a regulii practice de scădere.

### Material didactic

**Pentru învățător :** Trusa învățătorului pentru predarea operațiilor cu numere naturale. Planșa cu figura 133.

## Recomandări metodice pentru predarea temei

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se fac cîteva scăderi cu numere pînă la zece :

$$3 - 1 = ; \quad 7 - 5 = ; \quad 9 - 4 = ; \quad 6 - 6 = ; \quad 5 - 2 = .$$

Elevii vor spune mai întîi diferențele respective, apoi vor aplica definiția cu mulțimi a scăderii numerelor naturale, pentru a efectua ultima din aceste scăderi. Se va executa pe tablă și în caiete, pe etape corespunzînd regulii de scădere, figura 128. Se va observa că diferența 3 se află numărînd elementele mulțimii diferență. Se va observa de pe aceeași figură că avem :

$$5 - 3 = 2.$$

Se propune apoi scăderea :

$$50 - 20 =$$

pe care elevii, conduși de învățător, o vor gîndi :

$$5 \text{ zeci} - 2 \text{ zeci} = 3 \text{ zeci}$$

găsind

$$50 - 20 = 30.$$

Pentru a fi mai sugestiv raționamentul, învățătorul face pe tablă figura 129, de asemenea pe etape distințe, conform regulii de scădere : luăm o mulțime cu 50 de elemente ; separăm în ea o submulțime cu 20 de elemente ; formăm diferența dintre mulțimea inițială și submulțimea pe care am ales-o în ea ; numărăm elementele mulțimii diferență și găsim rezultatul scăderii.

Se atrage atenția că, de fapt *nu este nevoie a număra decât submulțimile de cîte zece elemente, întrucît mulțimea diferență este gata organizată cu o structură care permite numirea numărului elementelor sale*. În fond, cu mulțimile de cîte zece se lucrează la fel cum s-a procedat în figura 128 cu unitățile simple, ceea ce devine clar pe figura simplificată 130 (care se face la tablă).

Aceasta permite calculul prin analogie :

$$3 - 1 = 2, \quad 7 - 5 = 2, \quad 9 - 4 = 5, \quad 6 - 6 = 0,$$

$$30 - 10 = 20, \quad 70 - 50 = 20, \quad 90 - 40 = 50, \quad 60 - 60 = 0 \text{ etc.}$$

Din figura 130 se va observa :

dacă avem  $50 - 20 = 30$ , avem și  $50 - 30 = 20$   
rezultat cunoscut în sensul că, scăzînd din descăzut pe diferență obținem pe scăzător.

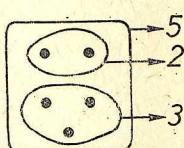


Fig. 128

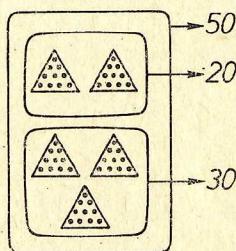


Fig. 129

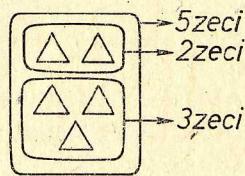


Fig. 130

Învățătorul prezintă din trusă panoul cu figura 131 și anunță că poate fi folosit pentru scăderea numerelor naturale pînă la o sută.

Deocamdată se explică folosirea sa pentru scăderea numerelor formate numai din zeci, de exemplu

$$50 - 20 =$$

Se aşază în prima figură de pe panou 5 triunghiuri albastre, obținînd o figură numerică reprezentînd mulțimea model pentru descăzutul 50 (fig. 132).

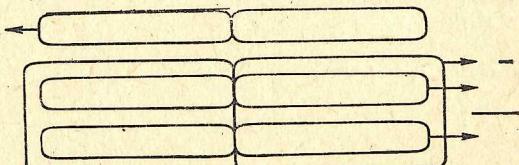


Fig. 131

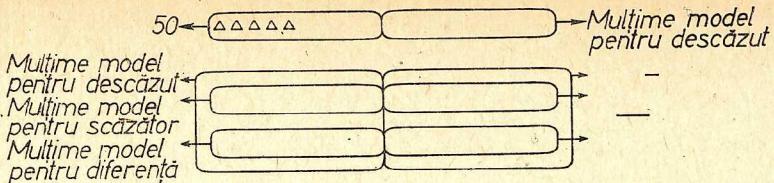


Fig. 132

Trebuie să separăm elementele mulțimii model pentru descăzut în două submulțimi disjuncte, astfel ca una din ele să aibă 20 de elemente. În acest scop vom folosi figura aflată sub mulțimea model a descăzutului. Vom deplasa 2 triunghiuri albastre din mulțimea model pentru descăzut, în figura numerică ce va reprezenta mulțimea model pentru scăzător. Celelalte triunghiuri albastre rămase din mulțimea model a descăzutului le deplasăm în figura numerică ce va reprezenta mulțimea model pentru numărul diferență. S-a realizat separarea în submulțimi pe care am dorit-o, sugerată în figura 133.

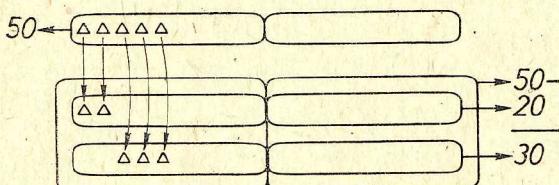


Fig. 133

Rezultatul 30 al scăderii se află numărind zecile din figura numerică reprezentând mulțimea diferență.

Se atrage atenția elevilor că, de fapt, noi am aflat diferența a două mulțimi ce au ca elemente zeci, mulțimea diferență având de asemenea elementele zeci.

De aici regula : se scad zecile scăzătorului din zecile descăzutului.

Figura 133 sugerează scrierea numerelor unele sub altele și scăderea „unității din unități și zeci din zeci“

$$\begin{array}{r} 50 \\ - 20 \\ \hline 30 \end{array}$$

se observă și

$$\begin{array}{r} 50 \\ - 30 \\ \hline 20 \end{array}$$

### Muncă independentă

Se cere elevilor să efectueze scăderea :

$$60 - 20 =$$

folosind figuri ca 129 și 130 (care se află încă executate pe tablă) după modelul folosit de învățător pentru scăderea  $50 - 20 =$ .

Prin discuții purtate concomitent cu îndrumarea lucrului elevilor în bănci, învățătorul îi ajută să exprime corect în limbajul mulțimilor, ceea ce fac. După ce elevii din clasă termină lucru, se scoate un elev la tablă care face aceeași scădere folosind trusa învățătorului, deducind regula de scădere și scriind :

$$\begin{array}{r} 60 \\ - 20 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ - 40 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 - 20 = 40 \\ 60 - 40 = 20 \end{array}$$

Restul elevilor corectează, dacă este cazul, ceea ce au efectuat și scriu același lucru pe caiete.

În continuare se fac, aplicînd direct regula, scăderi ca :

$$80 - 50 = \quad 60 - 10 = \quad 70 - 70 = \quad 90 - 50 =$$

calculînd întîi oral, apoi în scris, cu așezarea numerelor unele sub altele.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Elevii vor explica ceea ce redau figurile din manual existente la tema a 2-a „Scăderea numerelor formate numai din zeci”.

Învățătorul îi va ajuta să se exprime corect în limbajul mulțimilor și să deducă regula practică de calcul oral și în scris.

Se vor efectua în clasă exercițiile : 2 ; 5.

Acasă se vor da exercițiile : 1 ; 3 ; 4.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile propuse la tema a II-a

Exercițiul 3

$$\begin{array}{r} 20 + \text{probe} \\ 50 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{r} 70 - \\ 50 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 70 - \\ 20 \\ \hline 50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 50 + \\ 20 \\ \hline 70 \end{array} \quad \begin{array}{r} 70 - \text{probe} \\ 20 \\ \hline 50 \end{array}$$

Exercițiul 4

$$\begin{array}{l} a + 20 = 50 \quad 30 + a = 50 \\ a = 50 - 20 \quad a = 50 - 30 \\ a = 30 \quad a = 20 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Un termen al adunării se află} \\ \text{scăzînd din sumă celălalt} \\ \text{termen.} \end{array}$$

$$80 - a = 30 \quad \text{Scăzătorul se află dacă scădem din descăzut diferența.}$$

$$\begin{array}{l} a = 80 - 30 \\ a = 50 \end{array}$$

$$a - 50 = 30 \quad \text{Descăzutul se află adunînd scăzătorul cu diferența.}$$

$$\begin{array}{l} a = 50 + 30 \\ a = 80 \end{array}$$

Exercițiul 5

$$\begin{array}{l} a + b = 50 \\ a = 50 - b \end{array} \quad \text{Un termen al adunării se află scăzînd din sumă} \\ \text{celălalt termen.}$$

Acuma, vom înlocui pe  $b$  cu numere formate numai din zeci ;

$$b = 10, \quad a = 50 - 10; \quad b = 20, \quad a = 50 - 20; \quad b = 30, \quad a = 50 - 30;$$

$$a = 40 \quad a = 30 \quad a = 20$$

$$b = 40, \quad a = 50 - 40; \quad b = 50, \quad a = 50 - 50 \quad \text{care nu este un număr} \\ a = 10 \quad a = 0 \quad \text{format numai din zeci.}$$

Așadar, am găsit

$$a = 40, \quad a = 30, \quad a = 20, \quad a = 10,$$

$$b = 10, \quad b = 20, \quad b = 30, \quad b = 40.$$

\* Mulțimea perechilor de numere  $a$  și  $b$  se poate scrie :

$$(a, b) \in \{(40, 10), (30, 20), (20, 30), (10, 40)\}.$$

Acstea se vor predă după o tehnologie didactică asemănătoare cu cea folosită la temele 1 și 2, adaptată cerințelor ce decurg din următoarele observații :  
*La cazurile de adunare prezентate*

Alegând mulțimile model pentru a face adunarea în conformitate cu definiția acestia cu mulțimi, se constată că dacă mulțimile model alese pentru termeni sunt organizate în structuri convenabile numirii numerelor de elemente pe care le au, atunci reuniunea celor două mulțimi model este și ea gata organizată cu o astfel de structură. Se formează cu ușurință figura numerică reprezentind mulțimea model pentru suma celor două numere. Ca exemplu, pentru  $32 + 46 =$  avem figura 134 (care va fi prezentată sub formă de planșă, ca material didactic, împreună cu figura 136).

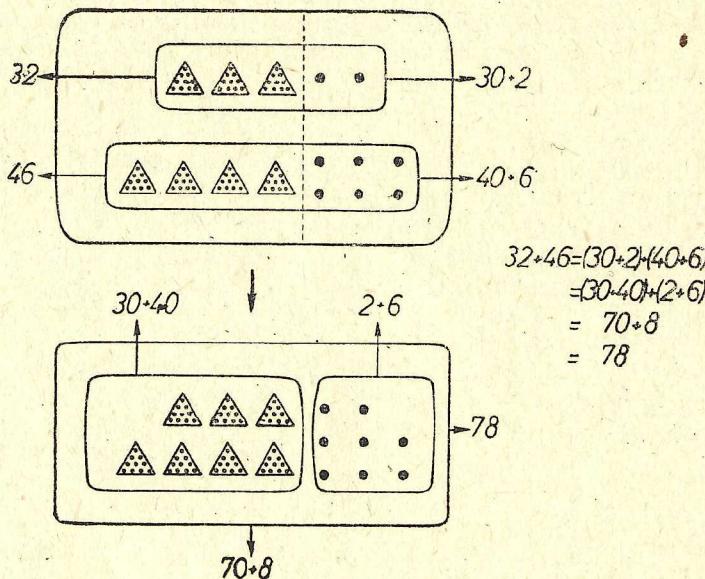


Fig. 134

Dacă se folosesc ca mulțimi model figurile numerice corespunzătoare termenilor (fig. 135), atunci apare clar că figura numerică corespunzătoare sumei se obține reunind mulțimile cu elementele zeci, între ele, și mulțimile cu elementele unități, între ele. De aici regula practică de adunare : se adună unități cu unități și zeci cu zeci.

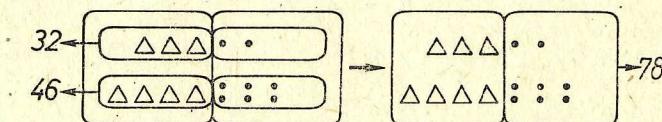


Fig. 135

Din modul cum s-a făcut reuniunea, folosind figurile numerice, rezultă și regula de calcul în scris, cu scrierea numerelor unele sub altele. Pentru

exemplul  $32 + 46 =$  lucrul pe panoul trusei este sugerat în figura 136, în locul punctelor din figură pe panou folosind discuri negre.

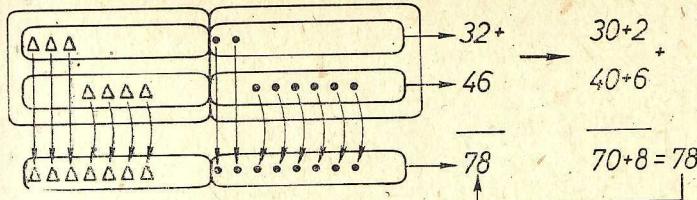


Fig. 136

În partea din lecții în care învățătorul lucrează în clasă cu elevii fără folosirea manualului, utilizând trusele menționate la temele 1 și 2, pe panou se va obține: în locul figurii a 3-a, din manual, la tema a 3-a, aspectul din figura 137; la tema a 4-a se va obține aspectul din figura 138 etc.(identice cu cele din manual).

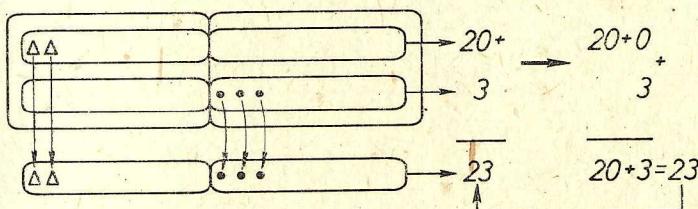


Fig. 137

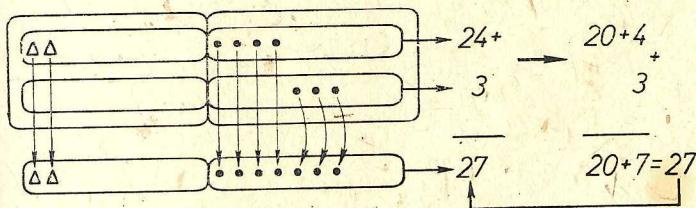
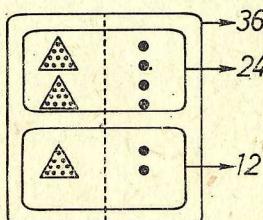


Fig. 138

#### *La cazurile de scădere prezentate*

Alegînd multimile model pentru a face scăderea în conformitate cu definiția acesteia cu multimi, dacă mulțimea model folosită pentru descăzut este organizată cu structură convenabilă numirii numărului său de elemente, atunci avem posibilitatea alegerii submulțimii corespunzătoare scăzătorului astfel încit și ea să fie gata organizată cu o asemenea structură, și mulțimea diferență care rezultă are, de asemenea, o structură convenabilă numirii numărului elementelor sale. De exemplu, pentru  $36 - 24 = 12$  avem figura 139 (care se va executa la tablă, apoi se va prezenta planșa respectivă).



$$\begin{aligned} 36-24 &= (30+6)-(20+4) \\ &= (30-20)+(6-4) \\ &= 10 + 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Fig. 139

Cele de mai sus se realizează dacă mulțimea model pentru scăzător se alege astfel: din mulțimea model a descăzutului organizată cu structură numerică zecimală, separăm din mulțimea unităților atîtea unități cîte are scăzătorul și din mulțimea zecilor atîtea zeci cîte are scăzătorul. Reunind mulțimea zecilor și mulțimea unităților astfel separate, obținem submulțimea model pentru scăzător organizată și ea cu structură numerică zecimală. Evident, ceea ce rămîne în mulțimea model a descăzutului este mulțimea diferență, organizată cu structură numerică zecimală. Numind numărul ei de elemente, spunem rezultatul scăderii.

Dacă se folosesc ca mulțimi model figuri numerice, la separarea din mulțimea model a descăzutului a celor două submulțimi model, cea pentru scăzător, cu numărul elementelor cunoscut, și cea pentru diferență, al cărei număr de elemente se caută, devine foarte clar că de fapt formăm două mulțimi diferență, una între mulțimi cu elementele zeci și una între mulțimi cu elementele unități, și că reunirea acestora două este mulțimea diferență ce funcționează ca model pentru rezultatul scăderii, fiind tocmai figura numerică corespunzătoare acestuia. Pentru  $36 - 24 = 12$  lucrul pe panoul trusei este sugerat pe figura 140.

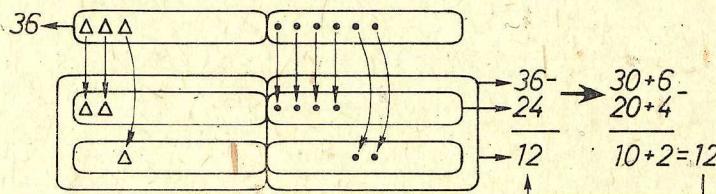


Fig. 140

Tot cu această ocazie apare limpede regula practică de scădere: se scad unitățile scăzătorului din cele ale descăzutului și zecile scăzătorului din cele ale descăzutului. În același timp, se pune în evidență comoditatea oferită de scrierea numerelor unele sub altele, deci se deduce tehnica de calcul în scris.

În partea din lecții în care se utilizează trusele despre care am mai vorbit, pe panou se va obține la tema a 5-a din manual figura 141 etc. (identice cu cele din manual).

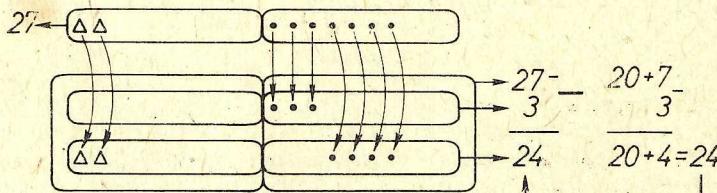


Fig. 141

Cu indicațiile de mai sus, textul din manual este suficient de clar pentru că învățătorul să-și poată construi singur lecțiile legate de temele menționate.

**Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema 7**

### Exercițiul 2

$$a + b = 98,$$

$$b = 48,$$

$$a = ?$$

$$a + 48 = 98$$

$$a = 98 - 48$$

$$a = 50$$

Se caută un termen cunoscând suma și celălalt termen.

### Problema 4

Notăm cu  $a$  numărul de pagini citite a doua zi. Din enunțul problemei rezultă că putem scrie fie :  $a + 11 = 24$ , fie :  $a = 24 - 11$ .

Dacă am scris prima egalitate, pentru găsirea lui  $a$  observăm că știm suma și un termen și căutăm celălalt termen. Avem :

$$a = 24 - 11; \quad a = 13.$$

### Problema 5

Notăm numărul de lei care i-au rămas cu  $a$ . În baza enunțului problemei, avem :

$$\begin{array}{r} a = 79 - 53 \\ a = 26 \\ \hline 26 \end{array} \quad \begin{array}{r} 79 - \\ 53 \\ \hline 26 \end{array}$$

### Problema 6

Se rezolvă la fel ca problema 5.

### Problema 8

Unele exerciții se rezolvă cerînd elevilor să le formuleze ca probleme :

Aflați termenul necunoscut  $a$  al unei adunări, știind că suma este 78 și celălalt termen este 26.

Aflați scăzătorul unei scăderi știind că descăzutul este 57 și diferența este 32.

Aflați descăzutul dacă scăzătorul este 20 și diferența este 41.

Se scrie, respectiv :

$$\begin{array}{lll} 26 + a = 78 & 78 - 57 - a = 32 & 57 - a - 20 = 41 \\ a = 78 - 26 & \begin{array}{l} 26 \\ \hline 52 \end{array} & a = 57 - 32 \quad \begin{array}{l} 32 \\ \hline 25 \end{array} \quad a = 20 + 41 \\ a = 52 & & a = 25 \leftarrow \quad a = 61 \end{array}$$

Celelalte exerciții se rezolvă prin încercări :

$$a - 15 \leq 2.$$

Se vede că  $a$  nu poate fi un număr natural mai mic decît 15, deoarece nu s-ar putea face scăderea. Așadar, avem :

$$\begin{array}{llll} a = 15; & 15 - 15 = 0; & 0 < 2 & \text{deci } a = 15 \text{ face scrierea adevărată} \\ a = 16; & 16 - 15 = 1; & 1 < 2 & \text{și } a = 16 \text{ face scrierea adevărată} \\ a = 17; & 17 - 15 = 2; & 2 = 2 & \text{și } a = 17 \text{ face scrierea adevărată} \\ a = 18; & 18 - 15 = 3; & 3 > 2 & \text{se vede că } a = 18 \text{ nu face scrierea adevărată.} \end{array}$$

Ceea ce s-a întîmplat pentru  $a = 18$ , se va întîmpla și pentru orice număr natural  $a$  mai mare decât 18. Așadar, mulțimea numerelor naturale care fac scrierea adevărată este :

$$\{15, 16, 17\}.$$

\* Se scrie și  $a \in \{15, 16, 17\}$ .

În  $12 + a < 15$   $a$  poate fi orice număr natural de la 0 la 2 (se fac încercări).

\*  $a \in \{0, 1, 2\}$ .

În  $47 + a < 49$ ,  $a$  poate fi : 0 și 1.

\*  $a \in \{0, 1\}$ .

În  $35 - a > 32$ ,  $a$  poate fi : 0; 1; 2

\*  $a \in \{0, 1, 2\}$ .

În  $a + 13 \leq 17$ ,  $a$  poate fi : 0; 1; 2; 3; 4

\*  $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

### Problema 9

Vasilică a rezolvat 47 probleme.

Sora lui a rezolvat  $a$  probleme, având  $a = 47 - 17$ .

Împreună au rezolvat  $b$  probleme, având  $b = 47 + a$ .

Puteam scrie :

$$\begin{array}{rcl} b = 47 + a & & 47 - \\ b = 47 + (47 - 17) & & 17 \\ b = 47 + 30 & & \hline 30 \\ b = 77 & & 77 \end{array}$$

Rezolvarea se poate scrie și :

$47 - 17 = 30$  probleme a rezolvat sora lui Vasilică.

$47 + 30 = 77$  probleme au rezolvat împreună.

### Problema 12

12 kg roșii în prima lădă.

$a$  kg roșii în a doua lădă, și  $a = 12 + 5$ ;  $a = 17$  kg.

$b$  kg roșii în cele două lăzi, cu  $b = 12 + a$ ;  $12 + b = 29$  kg.

$$\begin{array}{rcl} b = 12 + 17 & & 17 \\ & & \hline b = 29 & 29 \end{array}$$

Rezolvarea se poate scrie și :

$$12 + 5 = 17$$

$12 + 17 = 29$  În cele două lăzi sunt 29 kg de roșii.

### Problema 13

$50 + 34 + a = 96$  Mai trebuie să se cumpere 12 m de

$$84 + a = 96 \quad 84$$

$$a = 96 - 84 \quad \hline 12$$

$$a = 12$$

Altă scriere a rezolvării :

$$50 + 34 = 84; \quad 96 - 84 = 12.$$

**Problema 14**

$$45 + (45 - 3) = 45 + 42 = 87.$$

Rezolvarea se poate scrie :

$$45 - 3 = 42$$

$45 + 42 = 87$ . S-au consumat 87 l de lapte.

**Problema 15**

Figura 142.

$$17 - 3 = 14 \text{ bile mari albe};$$

$$3 + 2 = 5 \text{ bile mici};$$

$$17 + 2 = 19 \text{ bile sunt în total}.$$

Trebuie încă 12 m de sărmă.

S-au consumat 87 l de lapte.

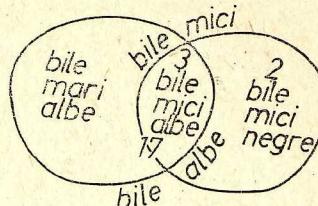


Fig. 142

## II. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA O SUTĂ CU TRECERE PESTE ORDIN

### Capitolul 1

#### ADUNAREA ȘI SCĂDEREA PÎNĂ LA 20 CU TRECERE PESTE ZECE

##### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

###### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Formarea, pe bază de activități practice, a reuniunii a două mulțimi disjuncte, fiecare având numărul elementelor mai mic ca 10, dar reuniunea având între 10 și 20 elemente. Numirea numărului de elemente al reuniunii, prin separarea în ea a două submulțimi disjuncte, una având 10 elemente.

Pe baza pregătirii astfel făcute, se fac adunări de tipul  $8 + 5 = 13$ , mănuind nemijlocit mulțimi de obiecte, făcind reuniuni, separări de submulțimi disjuncte (din care una cu 10 elemente), numirea și scrierea numărului elementelor reuniunii.

Treptat, din explicațiile date folosind mulțimile și operațiile cu mulțimi, se vor degaja etapele de rezolvare :

$$\begin{array}{r} 8 + 5 = 13 \\ \hline 10 - 8 = 2 \text{ cu cît trebuie completat } 8 \text{ pînă la } 10; \\ 5 - 2 = 3 \text{ cît rămîne din } 5, \text{ după completarea la } 8 \text{ cu } 2 \text{ unități.} \\ 10 + 3 = 13 \text{ cîte zeci și unități sînt în total.} \end{array}$$

Prin exerciții repetate se vor forma automatisme de calcul, spunîndu-se direct rezultatul unor adunări de acest fel, fără a mai apela la mulțimi de obiecte și operații cu ele.

Utilizînd nemijlocit mulțimi cu elementele zeci și unități, separarea de submulțimi disjuncte și alte noțiuni cunoscute despre mulțimi, se vor face scăderi de tipul  $15 - 8 = 7$ , distingînd etapele :

$$\begin{array}{r} 15 - 8 = 7 \\ \hline 10 - 8 = 2 \\ 2 + 5 = 7 \end{array}$$

și ajungînd la automatisme de calcul. Pentru însușirea tipului de exerciții prezentate mai sus, nu se va economisi timp și efort, ele fiind temelia calculului ce urmează a fi învățat mai departe.

###### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RÂMÎNĂ ELEVII

La cele expuse în obiectivele prevăzute de programă, facem următoarele completări :

Formarea automatismului de recunoaștere a perechilor de numere a căror sumă este 10.

Cunoașterea modului de calcul a numărului care adunat cu un număr dat, dă suma zece (completarea zecii, prin scădere). Formarea automatismului

de găsire a numărului care adunat cu un număr dat, dă suma zece (completarea zecii în mod direct, fără a mai face calculul prin scădere).

La adunarea a două numere mai mici ca 10, a căror sumă este mai mare ca 10, numărul elementelor reuniunii se va găsi prin procedeele (exemplificăm pentru  $7 + 5 =$ ):

— Se face reuniunea mulțimilor model, aşa cum cere definiția adunării, apoi se numără elementele reuniunii (vezi prima figură de la tema a 4-a din manual). Găsim  $7 + 5 = 12$ .

— Se scurtează procesul de găsire a sumei dacă aflarea numărului elementelor reuniunii are loc în același timp cu formarea acesteia. Este suficient să pune în reuniune elementele mulțimii model folosite pentru unul din termeni, de exemplu pentru 7, apoi punem în continuare, pe rând, elementele mulțimii model folosite pentru al doilea termen, în exemplul nostru 5, numărindu-le începînd cu 8, ca și cum au fost numărate și elementele primei mulțimi (vezi figură din dreapta primei figuri, la tema a 4-a din manual).

— Se face reuniunea mulțimilor, iar pentru aflarea numărului elementelor ei, ea se organizează cu structură numerică decimală. Aceasta revine la a trece în reuniune de la o separare a sa în submulțimi disjuncte, fiecare avînd atîtea elemente cît sînt termenii adunării, la o altă separare în submulțimi disjuncte, una avînd 10 elemente (pentru exemplul  $7 + 5 =$  vezi figura situată sub primul rînd de figuri, la tema a 4-a din manual).

Se va observa că nu formarea reuniunii mulțimilor model este lucru dificil, la efectuarea adunării, ci aflarea numărului elementelor reuniunii, ceea ce ne obligă la organizarea acesteia cu o structură numerică decimală. Aceasta este însă incomod și vom căuta mijloace de a evita realizarea practică a organizării respective a reuniunii, găsind alte căi de a afla structura decimală a ei, prin folosirea structurilor zecimale ale mulțimilor model folosite pentru termeni.

Se va cunoaște modul în care poate fi găsită structura numerică decimală a reuniunii folosind figuri numerice pentru termeni și sumă, aşa cum rezultă din figura 143 (care reproduce ultima figură de la tema a 4-a din manual).

Elevii vor ști să recunoască cu ajutorul acestei figuri dacă suma celor două numere trece peste zece, datorită modului în care sunt amplasate punctele care reprezintă unitățile. Avînd în vedere că într-o figură numerică

aceste puncte încep din stînga, iar în cealaltă ele încep din dreapta, suma va trece de zece dacă cele două rînduri de puncte „se depășesc“ unul pe altul, și nu va trece de zece dacă cele două rînduri de puncte „nu ajung“ unul la altul.

Se deduce că  $7 + 5$  se poate efectua prin calcul cu următoarele operații ajutătoare<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} 10 - 7 &= 3; \quad 5 - 3 = 2; \\ 7 + 5 &= 7 + (3 + 2) \\ &= (7 + 3) + 2 \\ &= 10 + 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

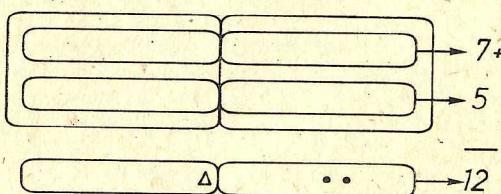


Fig. 143

deci :

<sup>1</sup> Manualul și înstrumătorul recomandă diverse procedee menite să ducă la însușirea conștientă a unor tehnici de calcul. Pe măsura formării automatismelor în efectuarea acestor calcule, se va renunța la procedeele utilizate în perioada deducerii regulilor respective.

La scăderea cu trecere peste zece a unui număr scris cu o cifră, dintr-un număr cuprins între 10 și 20, este firesc să folosim drept model pentru descăzut o mulțime organizată cu structură numerică zecimală. În adevăr, trebuie să alegem o mulțime cu numărul de elemente cunoscut, cuprins între 10 și 20. În procesul constituirii mulțimii model cu acest număr de elemente, ea rămâne în final cu o structură numerică zecimală.

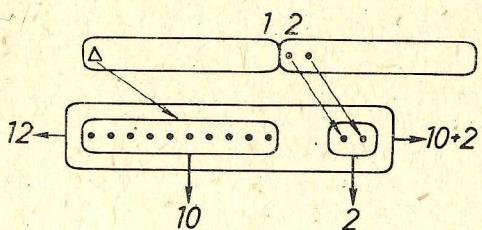


Fig. 144

La scăderi ca  $12 - 7 =$ , alegind mulțimea model pentru descăzutul 12, aceasta apare deja organizată ca reuniune a două mulțimi disjuncte, una cu 10 elemente și una cu 2 elemente (fig. 144). Pentru a efectua scăderea trebuie să alegem, din mulțimea model a descăzutului, o submulțime cu 7 elemente. *Mulțimea model a descăzutului prezintăndu-se cu structura din figura 144, este firesc să alegem submulțimea cu 7 elemente din mulțimea celor 10 elemente, aşa cum sugerează figura 145.*

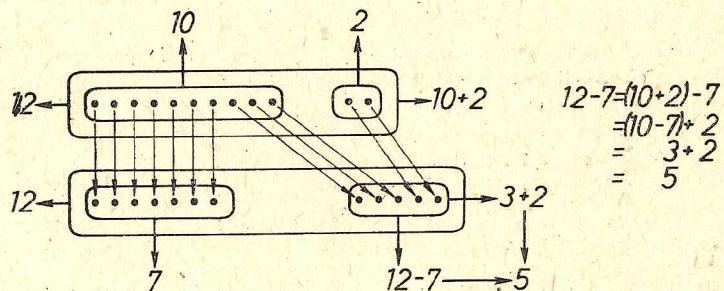


Fig. 145

Scăderea  $12 - 7 =$

poate fi efectuată prin calcul, astfel:

$$\begin{aligned} 12 - 7 &= (10 + 2) - 7 \\ &= (10 - 7) + 2 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Raționamentul va putea fi urmărit pe figura 145\*.

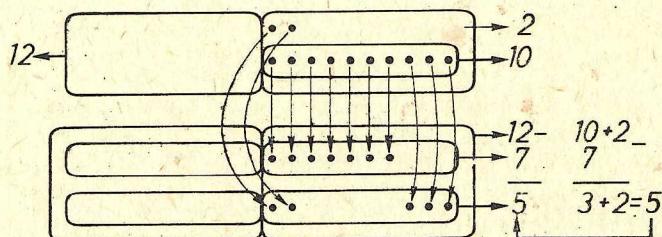


Fig. 145\*

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 1

(Număr de ore, orientativ=11)

TEMELE : 1, 2 și 3 DIN MANUAL

**Scop:** Cunoașterea raționamentului și formarea automatismelor de calcul pentru completarea zecii.

### Material didactic

Manualul, cretă colorată.

#### Recomandări metodice pentru predarea temei

Lecția se poate desfășura lucrînd cu manualul. Desenele de la temele 1, 2 și 3 din manual vor fi executate de învățător la tablă, cu cretă colorată, la momentul oportun.

##### *La tema 1 se parcurg etapele:*

— Elevii arată pe figură: cele două mulțimi disjuncte care se folosesc pentru a afla sumele  $9 + 1$  și  $1 + 9$ ; reuniunea lor.

Se procedează analog pentru:  $8 + 2$  și  $2 + 8$ ;  $7 + 3$  și  $3 + 7$ ;  $6 + 4$  și  $4 + 6$ ;  $5 + 5$ .

— Se vor arăta perechile de adunări la care sumele se pot scrie de la una la cealaltă, datorită comutativității adunării.

##### *La tema a 2-a se parcurg etapele:*

— Elevii arată pe figură: mulțimea model pentru descăzut și mulțimea model pentru scăzător, pentru a face scăderea  $10 - 9 =$ ; diferența celor două mulțimi anterioare, pe care o numără, afînd rezultatul scăderii  $10 - 9 =$ .

— Se arată apoi: mulțimea model pentru descăzut și mulțimea model pentru scăzător, pentru a face scăderea  $10 - 1 =$ ; diferența celor două mulțimi anterioare, pe care o numără, afînd rezultatul scăderii  $10 - 1 =$ .

Se procedează analog pentru:

$$10 - 8 = \quad \text{și} \quad 10 - 2 = ; \quad 10 - 7 = \quad \text{și} \quad 10 - 3 = ;$$

$$10 - 6 = \quad \text{și} \quad 10 - 4 = ; \quad 10 - 5 =$$

##### *La tema a 3-a*

Elevii vor fi de prinși să citească

$$7 + a = 10$$

ca problemă: „7 adunat cu cît fac 10?“; „Ce număr adunat cu 7 face suma 10?“; „Suma a două numere este 10, unul din numere este 7. Aflați celălalt număr.“

Ei vor explica găsirea lui  $a$  folosind legătura dintre adunare și scădere rezultată din definițiile cu mulțimi ale acestora, aşa cum decurge ea din figura existentă în manual: luăm o mulțime cu 10 elemente; separăm în ea o submulțime cu 7 elemente; formăm mulțimea diferență, care are, deocamdată, numărul elementelor necunoscut, pe care îl notăm cu  $a$ ; numărăm elementele mulțimii diferență, găsind  $a = 3$ .

Din figură rezultă scrierile :

$$7 + a = 10$$

$$a = 10 - 7$$

$$a = 3$$

care sînt, de altfel, cunoscute de copii.

### Observație

Mai sus s-a cerut ca elevii să îndeplinească cerințele învățătorului folosind manualul. După fiecare etapă, învățătorul va executa la tablă desenul existent în manual și va arăta el (sau va scoate un elev să arate) răspunsul corect, spre a da posibilitatea verificării și îndreptării răspunsurilor inițiale ale elevilor.

În clasă se vor face exerciții asemănătoare cu cele din manual, urmînd ca cele din manual să fie propuse ca temă acasă.

(Acest procedeu va fi extins și la alte lecții, diminuînd pe cit posibil numărul exercițiilor și problemelor din manual recomandate în acest Îndrumător să fie efectuate în clasă, recomandări care au doar un caracter orientativ).

## TEMA A 4-A : ADUNAREA CU TRECERE PESTE ZECE A DOUĂ NUMERE SCRISE CU CÎTE O CIFRĂ

**Scop :** Cunoașterea diferențelor căi de aflare a numărului elementelor reuniunii rezultate prin aplicarea definiției cu mulțimi a adunării numerelor naturale; utilizarea ca mulțimi model a figurilor numerice în aşa fel, încît reuniunea mulțimilor model folosite pentru termeni să apară gata organizată cu o structură numerică zecimală, care să permită numirea și scrierea numărului său de elemente.

### Material didactic

*Pentru învățător :* Trusa învățătorului pentru predarea operațiilor cu numere naturale. Planșă cu figura 147.

*Pentru elevi :* Pungă de material plastic cu 20 de bețișoare (chibrituri sau scobitorii); sfoară.

### Recomandări metodice pentru predarea temei

#### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

##### *Muncă independentă*

Învățătorul scrie pe tablă adunările pe care le propune a fi efectuate :

$$7 + 5 = ; \quad 8 + 6 = ; \quad 2 + 9 =$$

El propune elevilor următorul procedeu de lucru, pentru fiecare adunare : *se aleg ca mulțimi model pentru termeni, cerute de regula adunării numerelor naturale, mulțimi de bețișoare din punga cu bețișoare avută de fiecare elev (elevul formează efectiv aceste mulțimi pe bancă, în fața lui); se face reuniunea acestor mulțimi; se numără elementele reuniunii obținute, scriind rezultatul adunării :  $7 + 5 = 12$ .*

La prima adunare,  $7 + 5 =$ , elevii execută în bânci după fiecare etapă, cele explicate de învățător în etapa respectivă. Numai după terminarea lucrului în bânci, învățătorul explică etapa următoare.

La sfîrșitul efectuării primei adunări, cîțiva elevi explică modul în care au procedat. După ce există certitudinea că au înțeles cu toții ce trebuie făcut, se propune elevilor efectuarea în mod asemănător a celorlalte două adunări. Cind au terminat cu toții, se cer rezultatele obținute de cîțiva elevi, cerîndu-le să explice cum au procedat. Se indică rezultatele corecte, dacă este necesar se dau explicații separate unor elevi care mai întîmpină dificultăți, în timp ce celorlalți elevi li se propun alte exerciții asemănătoare cu acestea.

Se scriu apoi pe tablă adunările :

$$9 + 4 = ; \quad 3 + 8 = ; \quad 6 + 7 =$$

Pentru efectuarea lor se propune următorul procedeu, diferit puțin de primul : *Se aleg ca mulțimi model pentru termeni, mulțimi de bețișoare luate din punga de pe bancă*. Pentru prima adunare se obține pe bancă o mulțime cu 9 bețișoare și una cu 4 bețișoare. *Se ia în mînă una din cele două mulțimi de bețișoare (de preferință aceea cu mai puține bețișoare), să zicem mulțimea celor 4 bețișoare. Se pune din ea cîte un bețișor, pe rînd, peste mulțimea cu 9 bețișoare, numărînd bețișoarele puse, începînd cu 10 (ca și cum au fost deja numărate elementele primei mulțimi, și se continuă numărarea cu elementele mulțimii a doua)*. La epuizarea bețișoarelor din mînă, rezultatul numărării este tocmai numărul elementelor reuniunii, deci rezultatul adunării, scriind  $9 + 4 = 13$ .

După ce se face în acest mod prima adunare, sub îndrumarea învățătorului, elevii le vor efectua asemănător pe celelalte două.

Se vor face scurte verificări și aprecieri asupra modului în care au lucrat elevii, apoi li se va cere părerea care dintre cele două procedee folosite pînă acum, li se pare mai ușor.

*În urmă discuțiilor învățătorul va sublinia că la adunările făcute, partea dificilă este numărarea elementelor reuniunii, aceasta neobînindu-se gata pregătită pentru a-i numi și scrie numărul elementelor sale (nu are structură numerică zecimală).*

Această pregătire trebuie făcută de noi, după ce s-a obținut reuniunea. Ca exercițiu în acest sens se propune efectuarea adunărilor :

$$9 + 3 = \quad 5 + 8 = \quad 7 + 5 =$$

Se recomandă următorul procedeu de lucru :

*Se aleg ca mulțimi model pentru termeni, mulțimi de bețișoare din punga de pe bancă*. Pentru prima adunare se obține pe bancă o mulțime cu 9 bețișoare și una cu 3 bețișoare. *Se face reuniunea lor, obținînd pe bancă o singură mulțime de bețișoare, al cărei număr de elemente dorim să-l aflăm*.

Pentru aflarea numărului elementelor ei, aplicăm procedeul cunoscut de la numirea și scrierea numerelor mai mari ca zece : separăm din mulțimea noastră o submulțime de zece bețișoare (pe care le legăm cu sfoară într-un mânunchi) ; numărăm mulțimea bețișoarelor râmase în afara zecii. Găsim structura numerică zecimală a reuniunii : 1 zece și 2 bețișoare. Pe baza ei, numim numărul elementelor reuniunii, doisprezece, și scriem  $9 + 3 = 12$ .

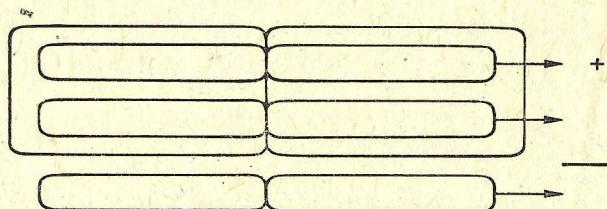
După ce, sub îndrumarea învățătorului, se face prima adunare pe această cale, elevii vor face asemănător celelalte două adunări, urmate de o scurtă verificare și apreciere a rezultatelor și a modului de lucru, de către învățător.

### Deducerea regulii de calcul

Discutînd cele trei modalități de lucru folosite, învățătorul va atrage atenția că toate rămîn greoaie. Ar fi necesară o regulă de adunare care să ne ducă mai repede la rezultat, fără a fi nevoie să mai folosim mulțimi model. El anunță elevii că de găsirea unei astfel de reguli se va ocupa în continuare.

Elevii strîng materialul didactic de pe bănci.

Se prezintă panoul cu figura 125, din trusa învățătorului pentru predarea operațiilor cu numere naturale :



Se scriu pe tablă adunările :

$$7 + 5 = ; \quad 8 + 6 = ; \quad 2 + 9 =$$

Pentru efectuarea primei adunări, se completează cu discuri panoul astfel încît să formăm figurile numerice ale termenilor. Obținem figura 146. Se

observă că 3 elemente din a doua mulțime sunt necesare pentru a completa o zece, împreună cu cele 7 elemente ale primei mulțimi.

Se iau cele 3 discuri negre de pe panou, împreună cu cele 7 cu care am completat o zece, și în locul lor punem un triunghi verde în figura numerică de sub reuniunea mulțimilor model folosite pentru termeni

(care este chiar figura numerică ce dă numărul elementelor reuniunii respective). Au rămas două discuri negre din cele 5 cîte a avut mulțimea a două, pe care le coborîm în figura numerică de jos. Cele spuse mai sus sunt sugerate în figura 147. Această figură, sub formă de planșă, va fi expusă în fața clasei.

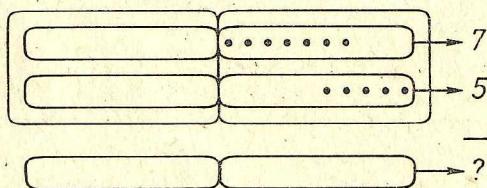


Fig. 146

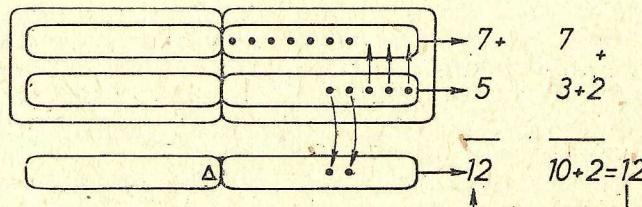


Fig. 147

După ce se fac transformările respective, panoul arată ca în figura 148. Se scrie pe tablă:  $7 + 5 = 12$ .

Se propune unor elevi ca, folosind trusa învățătorului, să facă în mod asemănător celelalte două adunări.

Elevii vor fi puși să efectueze și alte adunări de acest fel în scopul deprinderii modului de lucru.

După ce toți elevii și-au înșisit tehnica de lucru, învățătorul, prin discuții cu clasa, va evidenția etapele principale în adunările de acest fel, și modul în care sunt rezolvate:

— găsirea numărului cu cît trebuie completat un termen pînă la 10. În cazul nostru, ca să aflăm cu cît trebuie completat 7 pînă la 10 este necesară operația:

$$10 - 7 = 3$$

care se face în minte, sau se scrie;

— găsirea numărului ce rămîne din termenul din care am luat ca să completem pe celălalt pînă la 10. În cazul nostru, acesta se află prin operația:

$$5 - 3 = 2$$

care se face în minte, sau se scrie;

— ceea formată și unitățile rămase (2 în cazul nostru) ne dău numărul ce reprezintă suma căutată

$$10 + 2 = 12.$$

Rezumînd cele de mai sus, rezultă că putem face adunarea  $7 + 5 =$  prin calcul, fără a folosi mulțimi model, ci anumite operații ajutătoare. Calculul respectiv<sup>1</sup> se poate aseza astfel:

$$\begin{array}{r} 7 + 5 = \\ \hline 10 - 7 = 3 \end{array}$$

cu cît trebuie completat 7 pînă la 10;

$$5 - 3 = 2$$

cît rămîne din 5 după completarea zecii;

$$\begin{aligned} 7 + 5 &= 7 + (3 + 2) \\ &= (7 + 3) + 2 \\ &= 10 + 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

cît este suma  $7 + 5$ .

Numeai după ce învățătorul se convinge, prin discuții cu clasa și prin efectuarea la tablă de către elevi a celorlalte două adunări propuse, că toți elevii au înțeles efectuarea adunărilor de acest fel scriind operații ajutătoare, le va propune exerciții asemănătoare ca muncă independentă și le va permite treptat să facă oral operații ajutătoare, scriind doar rezultatul.

Intr-o etapă ulterioară, după ce tehnica de calcul dată mai sus va fi perfect înșisită, se va permite elevilor care sesizează direct cu cît trebuie completată zecă și cît rămîne din celălalt număr (în exemplul nostru, atunci cînd elevii

<sup>1</sup> În sistemul de numerație zecimal.

sesizează descompunerea convenabilă a lui  $5$  în  $5 = 3 + 2$ , pentru a efectua  $7 + 5 =$  ), să spună direct rezultatul adunării, fără a mai face nici în scris, nici oral, operații ajutătoare.

**Observație:** Toată dificultatea adunării cu trecere peste  $10$ , ca  $7 + 5 =$ , constă în a găsi descompunerea  $5 = 3 + 2$ .

Dacă elevii găsesc această descompunere, nu pot întâmpina nici o dificultate pentru a spune direct suma. A-i obligă să scrie operații ajutătoare de felul:

$$\begin{array}{r} 7 + 5 = \\ \hline 7 + 3 = 10 \\ 10 + 2 = 12 \\ \text{deci } 7 + 5 = 12 \end{array}$$

nu înseamnă a le da un mijloc de găsire a sumei (mijloc care trebuia să-i învețe cum să-l descompună pe  $5$  în  $3 + 2$ ), ci a-i pedepsi pe copii cu corvoada scrierii inutile a unor lucruri deja cunoscute.

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Pe bânci rămîn doar manualele de matematică, care se deschid la tema a 4-a : „Adunarea a două numere scrise cu câte o cifră“. Elevii, îndrumați de învățător, vor spune ce sugerează fiecare din figurile existente la această temă.

Ei vor rezolva pe caiete exercițiile date ca exemple în manual, scriind și operațiile ajutătoare, apoi își vor verifica lucrul urmărind rezolvarea din manual.

În clasă se vor lucra exercițiile : 1 și 2, primele două coloane din fiecare ; 7

Acasă se vor propune : 1 și 2, restul exercițiilor ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9. Ele vor fi amânunțit discutate în orele următoare.

### Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 4-a

#### Problema 7

Figura 149.

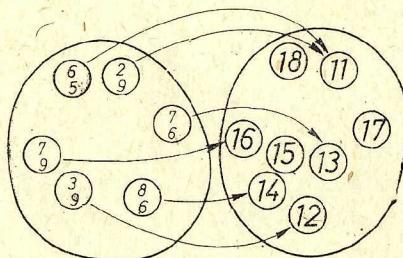


Fig. 149

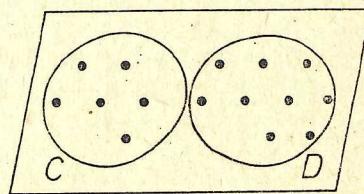


Fig. 150

#### Problema 8

Nu a ales mulțimile disjuncte, așa cum cere regula adunării. Figura 150.

#### Problema 9

In cutie nu există alte piese, care să nu fie nici roșii, nici cercuri. Deci, piesele care nu sunt cercuri sunt triunghiuri roșii. Numărul maxim de piese este realizat cînd intersecția mulțimii pieselor roșii, cu a cercurilor, este vidă (fig. 151). În acest caz, în cutie avem  $6 + 7 = 13$  piese.

Numărul minim de piese este realizat cînd intersecția are cel mai mare număr posibil de piese, deci cînd avem 5 cercuri roșii (fig. 152). În acest caz avem  $1 + 7 = 8$  piese în cutie. (Nu pot fi 6 cercuri roșii, pentru că atunci nu am mai putea avea măcar un triunghi roșu).

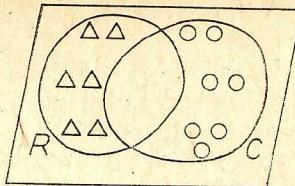


Fig. 151

**TEMA A 5-A : SCĂDEREA CU TRECERE PESTE ZECE  
A UNUI NUMĂR SCRIS CU O CIFRĂ, DINTR-UN  
NUMĂR CUPRINS ÎNTRE 10 ȘI 20**

**Scop :** Deducerea unui procedeu de calcul aplicînd definiția cu mulțimi a scăderii numerelor naturale.

**Material didactic**

*Pentru învățător:* Planșe cu figurile 144, 145, 145\*. Trusa învățătorului pentru adunarea și scăderea numerelor naturale.

*Pentru elevi:* Punga cu bețișoare (20 bucăți).

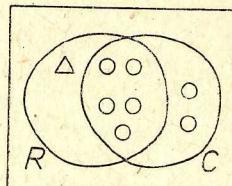


Fig. 152

**Recomandări metodice pentru predarea temei**

**a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului**

Se scriu pe tablă scăderile care urmează a fi efectuate

$$18 - 5 = \quad 17 - 9 = \quad 14 - 8 = \quad 13 - 9 =$$

Elevii încearcă efectuarea după regula cunoscută; se scad unitățile scăzătorului din cele ale descăzutului :

$$\begin{array}{r} 18 - \\ 5 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 - \\ 9 \\ \hline ? \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 - \\ 8 \\ \hline ? \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 - \\ 5 \\ \hline ? \end{array}$$

*Se constată că aplicarea acestei reguli este posibilă numai în primul caz. Pentru celelalte scăderi este necesar un alt procedeu de lucru.*

Deocamdată vom folosi definiția cu mulțimi a scăderii a numerelor naturale. În acest scop, prin discuțiile învățătorului cu elevii este reamintită această definiție :

- Se alege o mulțime model cu atîtea elemente cît este descăzutul.
- Se alege în ea o submulțime cu atîtea elemente cît este scăzătorul.
- Se formează mulțimea diferență între mulțimea model și cea a scăzătorului. Numărul elementelor acestei mulțimi este rezultatul scăderii.

Se propune ca, folosind drept mulțimi model, mulțimi de bețișoare din pungile lor, elevii să efectueze scăderea  $17 - 9 =$  aplicînd definiția de mai sus. În acest scop definiția este reluată pe etape, elevii executînd în bănci ceea ce se cere în ea, iar învățătorul verificînd prin sondaj corectitudinea celor

executate de ei. Numai după aceea se trece la etapa următoare. Se obține  $17 - 9 = 8$ , rezultat ce se scrie pe tablă.

Asemănător se efectuează scăderile  $14 - 8 =$  și  $13 - 5 =$ .

Învățătorul cere apoi elevilor să efectueze scăderea  $12 - 7 =$ , folosind pentru descăzut mulțimi model ce sunt pregătite pentru numirea numărului elementelor lor (au structură numerică zecimală). Procedeul de lucru este sugerat în figurile 144 și 145 care se prezintă sub formă de planșă.

Discutând figura 144 se stabilește că mulțimea model pentru descăzut trebuie să conțină 1 zece și 2 unități. Elevii aleg o astfel de mulțime de bețișoare din pungile lor, așezând-o pe bânci astfel încât submulțimea de 10 să fie separată de aceea de 2 bețișoare.

Trebuie acum aleasă o submulțime model pentru scăzător, având 7 elemente. De unde vom lua cele 7 elemente, din cele 10, din cele 2 bețișoare aflate pe bancă? Desigur, există și alte posibilități, dar este firesc a le lua de unde este posibil fără alte complicații, deci din cele 10 bețișoare. Luând 7 din ele și așezându-le separat pe bancă ca mulțime model pentru scăzător, din celea respectivă rămîn:

$$10 - 7 = 3 \text{ (se scrie pe tablă și în caiete)}$$

Figura 145 sugerează formarea mulțimii diferență între cele două mulțimi model, a descăzutului și a scăzătorului: se reunesc mulțimea celor 3 elemente rămase din zece, cu mulțimea celor 2 elemente aflate inițial în mulțimea model a descăzutului. Este evident că numărul elementelor mulțimii diferență este  $3 + 2 = 5$ .

Discutând cele scrise la dreapta figurii 145 pe planșă, se constată că sînt tocmai calculele ce trebuie efectuate pentru a efectua scăderea:

$$\begin{aligned} 12 - 7 &= (10 + 2) - 7 \\ &= (10 - 7) + 2 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Folosind același procedeu, elevii vor efectua  $15 - 6 =$ , scriind în final modul de calcul.

Scăderile  $13 - 8 =$ ;  $14 - 6 =$ ;  $17 - 8 =$ , vor fi efectuate doar prin calcul, fără a mai folosi mulțimi model:

$15 - 6 = (10 + 5) - 6$	$13 - 8 = (10 + 3) - 8$	$14 - 6 = (10 + 4) - 6$	$17 - 8 = (10 + 7) - 8$
$= (10 - 6) + 5$	$= (10 - 8) + 3$	$= (10 - 6) + 4$	$= (10 - 8) + 7$
$= 4 + 5$	$= 2 + 3$	$= 4 + 4$	$= 2 + 7$
$= 9$	$= 5$	$= 8$	$= 9$

În scopul consolidării modului în care se face scăderea și a sintetizării sub forma unei reguli de calcul căt mai comode, se va folosi din trusa învățătorului pentru predarea adunării și scăderii, panoul cu aspectul din figura 145 a.

Innvățătorul îl folosește pentru a efectua, de exemplu,  $12 - 7 =$

a) Așază pe panou un triunghi albăstru și două discuri negre, aşa cum se vede în figura 145, a, realizînd mulțimea model pentru descăzut.

b) Neputînd alege pentru scăzător mulțimea model cu 7 elemente, din mulțimea „unităților” descăzutului 12, se înlocuiește triunghiul albăstru care

reprezintă o zece, cu 10 discuri negre, mulțimea model a descăzutului arătând acum ca în figura 145 b.

c) Din mulțimea celor 10 discuri negre care au înlocuit zecea, se alege o submulțime de 7 discuri negre care sunt puse în figura numerică ce reprezintă scăzătorul (fig. 145 c).

d) Mulțimea celor  $10 - 7$  discuri rămase din zecea menționată, reunită cu mulțimea celor 2 discuri existente inițial în mulțimea model a descăzutului, formează mulțimea diferență.

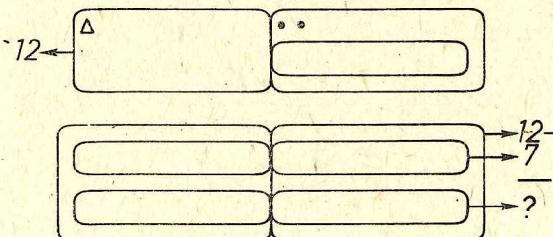


Fig. 145 a

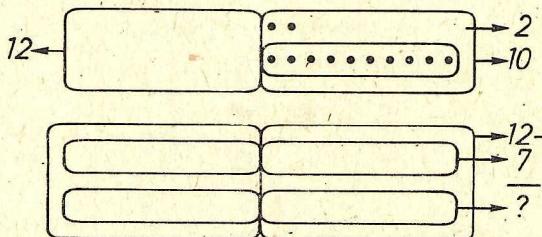


Fig. 145 b

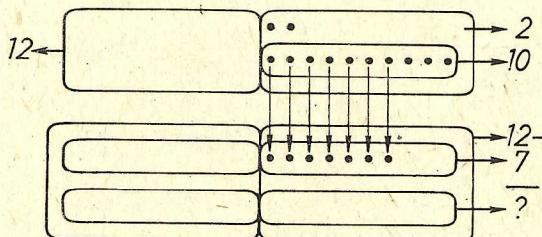


Fig. 145 c

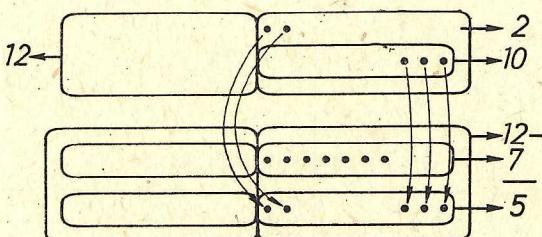


Fig. 145 d

Elementele ei se vor așeza cum arată figura 145 d în care este realizată separarea, din mulțimea model a descăzutului, a mulțimii model a scăzătorului și este pusă în evidență mulțimea diferență dintre primele două.

Toate aceste etape vor fi recapitulate pe figura 145\* care se va prezenta sub formă de planșă. Apoi, elevii vor efectua singuri alte scăderi de acest fel, folosind trusa învățătorului, pînă vor deprinde modul de lucru.

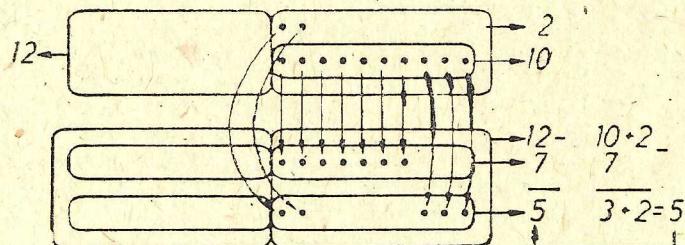


Fig. 145\*

Discuțiile se vor încheia observînd că în dreapta figurii pe planșa 145\* sunt scrise prescurtăt operațiile prin care s-a găsit rezultatul scăderii. Ele se vor scrie pe tablă și în caiete, în ordinea indicată de săgeți (acestea nu se vor desena, la urmă trecînd rezultatul la locul potrivit):

$$\begin{array}{r} 12 - \\ \underline{- 7} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 10 + 2 - \\ \underline{3 + 2} = 5 \\ \uparrow \end{array}$$

In acest mod se va obține scris:

$$12 - \underline{\quad} \qquad 10 + 2 = \underline{\quad}$$
$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ 3 + 2 \\ \hline \end{array} =$$

Se vor efectua  $11 - 4 =$  ;  $14 - 7 =$  ;  
 $15 - 8 =$  exclusiv prin acest calcul.

Acest mod de scriere va fi folosit ca etapă de trecere către calcularea diferenței, gîndind : 7 din 10. fac 3 ; 3 plus 2 fac 5, sugerată și de scrierile :

$$\begin{array}{r} \boxed{10} \\ 12 - \\ 7 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \text{sau} \qquad \begin{array}{r} 12 - \\ 7 \\ \hline 5 \end{array}$$

prin intermediul cărora se va ajunge treptat la formarea automatismului de găsire directă a diferenței  $12 - 7 = 5$  (lucru ce se va urmări și la adunarea cu trecere peste zece).

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Elevii vor explica ceea ce redau figurile din manual existente la tema respectivă, și scrierile alăturate fiecăreia.

Se vor citi (de către elevi) și explica exemplele date în manual. Scrierile :

$$\begin{array}{r} \overline{10} \\ 15 - \\ 6 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 - \\ 6 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 - \\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$$

arată că 6 se scade din 10, diferența obținută, 4, se adună cu 5, obținând rezultatul final 9.

În clasă se fac exercițiile și problemele : 1, 2, 3 și 4, primele două coloane ; 5 ; 6.

Pentru acasă se propun : 1, 2, 3 și 4, restul exercițiilor ; 7 ; 8 ; 9 ; 10. Ele se vor discuta amănunțit în lecțiile următoare.

**Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 5-a.**

### Exercițiul 1

$$\begin{array}{r} 17 - 8 = \\ 10 - 8 = 2 \\ 2 + 7 = 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 - 8 = \\ 8 \\ \hline 9 \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{r} 17 - \\ 8 \\ \hline 9 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 10 + 7 - \\ 8 \\ \hline 2 + 7 = 9 \end{array}$$

deci :  $17 - 8 = 9$

Etc.

### Problemele 5, 6 și 7

Se va folosi limbajul mulțimilor. De exemplu, pentru problema 5 : mulțimea florilor din vază are 16 elemente. În această mulțime există o submulțime formată din toate garoafele din vază, care are 9 elemente. Restul florilor din vază formează mulțimea diferență dintre mulțimea florilor din vază și mulțimea garoafelor din vază. Numărul elementelor mulțimii diferență se află prin scăderea :

$$16 - 9 =$$

Se poate folosi figura 153.

Pentru problema 7 se poate folosi o figură asemănătoare cu figura 92.

### Exercițiile 9 și 10

Se fac după modelului exercițiului 8 de la tema a 7-a, capitolul 4, partea I. Se obține pentru :

$$\begin{aligned} 5 + a < 12; \quad 14 - a > 8; \\ a - 7 < 8 \end{aligned}$$

respectiv :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}; \quad \{7, 8, 9, \dots, 13, 14\}$$

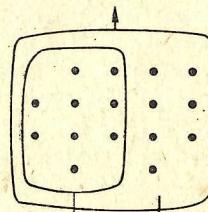
și pentru :

$$5 + a \leq 12; \quad 14 - a \geq 8; \quad a - 7 \leq 8$$

respectiv :

$$\{0, 1, 2, \dots, 6, 7\}; \quad \{0, 1, 2, \dots, 5, 6\}; \quad \{7, 8, \dots, 14, 15\}.$$

Mulțimea florilor  
din vază



Mulțimea garoafelor din restul florilor din vază

Fig. 153

## Capitolul 2

### ADUNAREA ȘI SCĂDEREA CU TRECERE PESTE ORDIN A NUMERELOR NATURALE PÂNĂ LA O SUTĂ

#### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

##### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Folosind cunoștințele despre mulțimi și alegând mulțimi cu elemente zeci și unități în mod potrivit, se vor face adunări și scăderi pînă la 100 cu trecere peste ordin, ajungîndu-se la automatisme de calcul și la tehnica de calcul în scris, cu așezarea numerelor unele sub altele.

Trecînd de la operații cu mulțimi, la operații cu numere, pentru a ușura urmărirea ideilor se vor folosi în scriere parantezele rotunde.

Se vor rezolva exerciții de tipul :  $9 + a = 16$ ;  $13 - a = 8$ ;  $a - 15 = 12$ , scriind soluțiile sub forma  $a = 16 - 9$ ;  $a = 13 - 8$ ;  $a = 12 + 15$ .

Exerciții și problemele de adunare și scădere pînă la 100 cu trecere peste ordin, făcîndu-le și probele acestor operații. De asemenea, se vor rezolva exerciții de forma :  $5 + a < 15$ ;  $17 + a < 25$ ;  $35 - a > 24$ ;  $21 - a \geq 15$ ;  $a + 13 \leq 19$ .

##### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RÂMÎNĂ ELEVII

*La adunare, să cunoască avantajul pentru găsirea sumei, a alegerii unor mulțimi model pentru termeni, avînd structuri numerice zecimale. În acest mod, mulțimea model pentru sumă găsită prin formarea reuniunii cerute de aplicarea regulii de adunare, apare aproape organizată cu structură numerică zecimală. Singurul lucru care râmîne să se mai facă după formarea reuniunii este separarea unei noi zeci, din mulțimea obținută prin reunirea celor două mulțimi de unități existente în mulțimile model ale termenilor.*

Ideea poate fi ușor urmărită privind figurile existente în manual la tema 1 și figurile din manual existente la tema a 2-a.

Pe baza acestei tehnici de găsire a mulțimii model pentru sumă, organizată cu structură numerică zecimală, devine comod a numi și scrie numărul sumă, și de dedus regula practică de adunare. Se adună unitățile între ele, rezultînd un număr format dintr-o zece și un anumit număr de unități. Numărul respectiv de unități se scrie la locul unităților din numărul sumă. Cifra zecilor numărului sumă se află adunînd 1 zece rezultată din adunarea unităților, cu numerele de zeci de existente la fiecare termen.

*La scădere, utilizarea unor mulțimi model pentru descăzut organizate cu structuri numerice zecimale face firească alegerea mulțimii model pentru scăzător tot cu structură numerică zecimală. Alegerea respectivă se va face astfel (nu este singura posibilitate) : întrucît scăzătorul are mai multe unități decît descăzutul, nu putem separa, din mulțimea unităților de la mulțimea model a descăzutului, atîtea unități cîte sunt la scăzător, și, în consecință, le vom separa din una din zecile mulțimii model a descăzutului ; din mulțimea zecilor rămase în mulțimea model a descăzutului se separă atîtea zeci cîte sunt la scăzător ; mulțimi*

*mea diferență rămîne gata organizată cu structură numerică zecimală, așa cum se vede în figurile din manual la temele a 3-a și a 4-a.*

Aceasta face să putem numi și scrie comod numărul diferență și să deducem regula practică de calcul la scădere: se scad unitățile scăzătorului dintr-o zece a descăzutului; unitățile rămase din zecea respectivă se adună cu unitățile descăzutului și obținem cifra unităților din numărul diferență; cifra zecilor numărului diferență se obține scăzînd zecile scăzătorului din cele rămase la descăzut (după luarea de aici a zecii menționate anterior).

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 2

(Număr de ore, orientativ=18)

Pe baza textului din manual, lecțiile vor putea fi construite după o tehnologie didactică asemănătoare cu cea folosită pînă acum, mai ales începînd de la Capitolul 4, partea I, ținînd seama și de următoarele recomandări:

— Ca material didactic principal se vor folosi: trusele pentru predarea adunării și scăderii numerelor naturale; planșe cu figurile din manual de la temele 1, 2, 3 și 4; pungi de plastic conținînd circa 100 de bețișoare (chibrituri sau scobitori pentru elevi).

— Ca muncă independentă, după ce învățătorul prin discuții cu elevii a clarificat ideile, se vor aplica definițiile cu mulțimi ale adunării și scăderii, folosind ca mulțimi model pentru termeni, mulțimi de bețișoare din puñgă, organizate cu structuri numerice zecimale prin legarea a cîte 10 bețișoare. Etapele sunt sugerate, respectiv, de figurile din manual existente la temele 1, 2, 3 și 4. Pe baza acestor etape se va deduce calculul:

$$\begin{array}{rcl} 27 + 5 & = & (20 + 7) + 5 \\ & = & 20 + (7 + 5) \\ & = & 20 + 12 \\ & = & 32 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 28 + 36 & = & (20 + 8) + (30 + 6) \\ & = & (20 + 30) + (8 + 6) \\ & = & 50 + 14 \\ & = & 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 42 - 7 & = & (30 + 10 + 2) - 7 \\ & = & 30 + (10 - 7) + 2 \\ & = & 30 + 3 + 2 \\ & = & 30 + 5 \\ & = & 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 82 - 37 & = & (70 + 10 + 2) - (30 + 7) \\ & = & (70 - 30) + (10 - 7) + 2 \\ & = & 40 + 3 + 2 \\ & = & 40 + 5 \\ & = & 45 \end{array}$$

care se va folosi doar scurt timp după prezentarea cazului respectiv, și în continuare numai la calculul oral.

— După demonstrația făcută de învățător cu trusa sa, elevii vor face singuri, folosind trusa învățătorului, operații asemănătoare celor explicate în manual pe figurile existente la temele 1, 2, 3 și 4, deducîndu-se regulile de calcul corespunzătoare.

— Ca etapă intermedieră lucrului cu mulțimile model formate pe panourile trusei, și aceea a aplicării exclusive a regulilor obișnuite de calcul, se vor folosi scrieri de forma :

$$\begin{array}{r} 27 + \quad 20 + 7 \\ \frac{5}{?} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{20 + 12} = 32 \\ \uparrow \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{r} \frac{11}{27 + \quad 27 +} \\ \frac{5}{\frac{5}{32}} \end{array}}$$

introduce treptat, în această ordine, care favorizează automatizarea calculului și păstrarea în final a tehnicii obișnuite.

Primul mod de scriere de mai sus, pentru situațiile de la temele 2, 3 și 4 va putea arăta astfel :

$$\begin{array}{r} 28 + \quad 20 + 8 \quad \rightarrow \quad 42 - \quad 30 + 10 + 2 \\ \frac{36}{?} \quad \frac{30 + 6}{50 + 14} = 64 \quad \frac{7}{?} \quad \frac{7}{30 + \frac{3}{3} + 2 = 35} \\ \uparrow \end{array} \qquad \begin{array}{r} 82 - \quad 70 + 10 + 2 \\ \frac{37}{?} \quad \frac{30 + 7}{40 + 3 + 2 = 45} \\ \uparrow \end{array}$$

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la Capitolul 2

#### *Exercițiul 5 (tema a 3-a)*

Pentru :  $a + 2 = 31$ ;  $8 + a = 75$ ;  $a - 9 = 43$ ;  $67 - a = 8$  avem, respectiv :  $a = 29$ ;  $a = 67$ ;  $a = 52$ ;  $a = 59$ .

Pentru :  $a + 9 < 21$  găsim prin încercări :

$$\{0, 1, 2, \dots, 10, 11\}.$$

Pentru :  $30 < a + 5 < 38$  căutăm întâi, prin încercări, mulțimea numerelor naturale  $a$  care fac adevărată  $30 < a + 5$ . Se găsește  $B = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, \dots\}$ .

Căutăm acum mulțimea numerelor naturale  $a$  care fac adevărată  $a + 5 < 38$ . Prin încercări, găsim :

$$C = \{0, 1, 2, 3, \dots, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32\}.$$

Mulțimea numerelor naturale  $a$ , pentru care sunt îndeplinite amândouă condițiile cerute, va fi alcătuită din toate numerele naturale ce aparțin și mulțimii  $B$  și mulțimii  $C$ , adică este intersecția celor două mulțimi  $B$  și  $C$  :  $\{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32\}$ .

Exercițiul  $42 < a - 8 < 53$ .

Pentru  $42 < a - 8$  se găsește mulțimea  $D = \{51, 52, 53, 54, \dots\}$ . Pentru  $a - 8 < 53$  se găsește mulțimea  $E = \{8, 9, 10, \dots, 57, 58, 59, 60\}$ . Scrierea  $42 < a - 8 < 53$  va fi făcută adevărată de orice număr natural  $a$  care apare și la  $D$  și la  $E$ , deci intersecției lor :  $\{51, 52, \dots, 58, 59, 60\}$ .

Asemănător se rezolvă  $20 < a - 7 < 25$ .

*Exercițiul 3 (tema a 4-a).*

Prin încercări, se găsește pentru :

$$17 + a < 25; \quad 21 - a \geq 15; \quad a + 48 \leq 51$$

respectiv :

$$\{0, 1, 2, \dots, 6, 7\}; \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$\{0, 1, 2, 3\}.$$

*Problema 12 (tema a 4-a).*

Soluțiile rezultă din figura 154 în care se reprezintă întii cele 5 elemente din intersecție :

a)  $12 - 5 = 7$ ; b)  $13 - 5 = 8$ ; c)  $7 + 8 + 5 = 20$

*Problema 13 (tema a 4-a).*

a)  $72 - 58 = 14$ ; b) 58; c) 72.

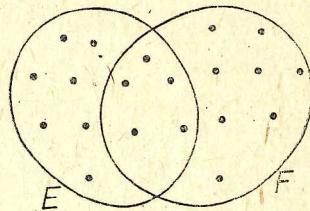


Fig. 154

### Capitolul 3

## ADUNAREA MAI MULTOR NUMERE NATURALE

### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

#### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Adunarea mai multor numere naturale.

#### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Să cunoască posibilitatea adunării mai multor numere naturale prin adunarea a cîte două numere (aplicînd deci asociativitatea adunării), eventual schimbînd mai întii convenabil ordinea termenilor (în baza comutativității adunării).

Să cunoască regula practică : se adună unitățile între ele și zecile între ele. Este comod în acest scop să se scrie numerele unele sub altele, unități sub unități și zeci sub zeci.

Dacă adunînd unitățile obținem un număr format din zeci și unități, unitățile respective dau cifra unităților de la rezultat, zecile adunîndu-se împreună cu zecile ce se găsesc la termeni.

### B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 3

(Număr de ore, orientativ=4)

Invățătorul își poate construi cu ușurință lecțiile din acest capitol, pe baza textului din manual, la care va adopta tehnologia didactică folosită la lecțiile anterioare.

- Ca material didactic este suficientă trusa învățătorului pentru predarea operațiilor cu numere naturale, din care se vor folosi panourile conținînd cele două figuri existente în manual la capitolul respectiv. Aceste figuri vor fi prezentate și sub formă de planșe, pe care se va urmări, la fixare, deducerea regulilor de calcul.

Manualul va fi folosit, de asemenea, pentru fixarea ideilor, elevii trebuind să explice tehniciile de lucru scrise și să spună ceea ce redau figurile.

### Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la Capitolul 3

#### Problema 3

$10 +$  se face adunarea înlocuind, pe rînd,\* cu una din cifrele :

15

2\*      0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

#### Problema 6

Figura 155.

$$32 + 18 + 28 = 78.$$

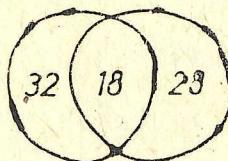


Fig. 155

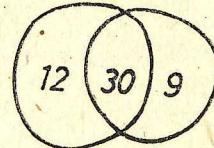


Fig. 156

#### Problema 7

Figura 156.

$$12 + 30 + 9 = 51; \quad 12 + 30 = 42; \quad 30 + 9 = 39.$$

### **III. NOIUNI DE GEOMETRIE (8 ore)**

#### **SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONTINUTULUI**

##### **1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ**

Cunoașterea intuitivă a centimetru și milimetru, cu ajutorul riglei gradate, fără transformări. Măsurarea lungimii unor segmente sau construirea unor segmente de lungime dată.

Elemente intuitive de geometrie. Linii drepte, frânte, curbe; linii închise și deschise; interiorul și exteriorul unei linii închise (intuitiv). Măsurarea lungimilor unor linii frânte date. Noțiunea de perimetru (intuitiv), pe baza figurilor plane cunoscute. Calculul perimetrului unor figuri date. Noțiunile de lungime, lățime, înălțime, intuire, pe baza corpurilor geometrice cunoscute în clasa I. Folosirea riglei gradate.

##### **2. CUNOȘTINȚE SI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII**

Cunoștințele și deprinderile prevăzute mai sus, formate pe cale intuitivă, fără a se cere definiții riguroase și verbalizări obosităre.

## IV. NUMERELE NATURALE PÂNĂ LA O MIE

### Capitolul 1 NUMIREA, SCRIREA ȘI CITIREA

#### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

##### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Cu mulțimi ce au între 100 și 1 000 elemente, se fac exerciții practice de separare de submulțimi disjuncte a către 10 elemente. Se consideră mulțimea având ca elemente toate zecile obținute și i se aplică același procedeu, numind fiecare mulțime de 10 zeci, o sută. Se obține astfel o mulțime cu elementele sute și o mulțime cu mai puțin de 10 zeci (deci cu elementele zeci), din mulțimea zecilor. Se formează trei mulțimi din mulțimea inițială: a sutelor, a zecilor și a unităților. Sutele sunt numite unități de ordinul al treilea.

Se numește numărul elementelor mulțimii inițiale, enunțind căte sute, căte zeci și căte unități sunt în fiecare din cele trei mulțimi formate după procedeul de mai sus. Scrierea de forma 374. Cazurile de forma 407; 630; 300.

Sublinierea faptului că fiecare mulțime ce formează o unitate de un anumit ordin este formată din zecă elemente ce sunt mulțimi reprezentând un ordin imediat mai mic, cu excepția unităților de ordinul unu.

Numerele de la 100 la 200 în ordine crescătoare. Numărarea de la 100 la 200. Numărarea din zece în zece de la 100 la 200 în ordine crescătoare și descreșcătoare. Analog se va proceda cu celealte numere din sută în sută, pînă la 1 000, nu insistîndu-se asupra enunțării tuturor numerelor, ci asupra principiului formării, numirii și scrierii lor. Numărarea din sută în sută pînă la 1 000, în ordine crescătoare și descreșcătoare.

##### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RÂMINĂ ELEVII

 Ideea organizării ca structură numerică zecimală a unei mulțimi având numărul elementelor între o sută și o mie.

Folosirea structurii numerice zecimale pentru numirea și scrierea numerelor de la o sută la o mie. Unitățile de ordinul unu, doi și trei și locul lor în scrierea numărului. Figura numerică corespunzătoare unui număr scris cu trei cifre, ca mulțime model pentru acel număr.

 Cum putem obține toate numerele naturale de la o sută la o mie, în ordine crescătoare. Reguli pentru compararea acestor numere.

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 1

(Număr de ore, orientativ=7)

Pentru predarea temelor din acest capitol se va folosi o tehnologie didactică asemănătoare cu cea de la capitolul 3, „Numerele naturale pînă la o sută”, bineînțeles, adaptată noilor cerințe. Aceste cerințe decurg împede din conținutul manualului la capitolul respectiv.

Ca exemple de mulțimi cu peste o sută de elemente și de organizare a acestora cu structură numerică zecimală, se vor folosi mulțimi de bețișoare, adecvate demonstrațiilor făcute de învățător. Ele pot fi aduse gata legate în mânunchiuri de cîte zece, și încă cîteva bețișoare. Legarea zecilor în mânunchiuri de cîte o sută trebuie să aibă loc în fața elevilor. Sutele, zecile și unitățile vor fi apoi puse pe un panou, prevăzut din timp cu cuișoarele necesare și pe care sînt traseate linii, obținîndu-se aspectul din figura 157.

In figura numerică din partea de jos a panoului sutele sint indicate prin patrate roșii, zecile prin triunghiuri albastre și unitățile prin discuri negre (in figura 157 reprezentate prin puncte).

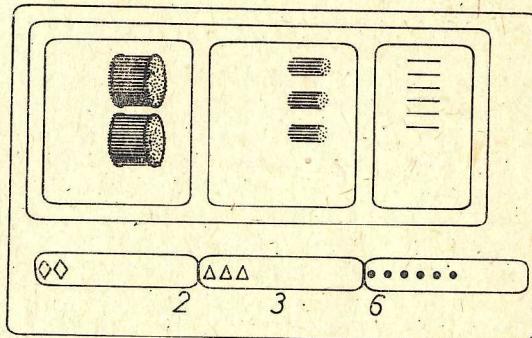


Fig. 157

In funcție de condițiile concrete ale clasei, se va aprecia dacă este sau nu necesar a cere elevilor să aducă o pungă cu bețișoare pregătită în mânunchiuri de cîte zece, aşa cum s-a recomandat pentru învățător, și să se execute că muncă independentă în bârni, organizarea unei mulțimi cu peste o sută de elemente, cu structură numerică zecimală.

Se va acorda toată atenția intuirii figurilor din manual, pentru perceperea vizuală a zecii, sutei și miei, comparativ una cu alta. Elevii vor explica ceea ce redau figurile din manual, insistîndu-se asupra cazurilor cînd lipsesc unități de un anumit ordin.

Se va observa că scrierea sutei are loc după procedeul folosit pentru scrierea numerelor mai mari decît o sută.

## Capitolul 2

### ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELElor NATURALE PÎNĂ LA O MIE FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN (20 ore)

#### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Apelind la definițiile adunării și scăderii numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte și diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, folosind mulțimi model organizate cu structuri numerice zecimale și

convențiile de numire și scriere a numerelor naturale în sistemul zecimal, se fac adunări și scăderi pînă la o mie, fără trecere peste ordin.

Se va ajunge la automatisme de calcul și la tehnica de calcul în scris, cu scrierea numerelor unele sub altele.

Subliniind din nou legătura dintre adunare și scădere pe baza legăturii dintre reuniune și submulțimile disjuncte care o formează, se face proba adunării prin scădere și a scăderii prin adunare și prin scădere.

Adunarea mai multor numere naturale, fără trecere peste ordin, cînd suma nu depășește o mie.

Exerciții de tipul:  $a + 600 = 724$ ;  $945 - a = 800$ , soluțiile scriindu-le sub forma  $a = 724 - 600$ ;  $a = 945 - 800$ ; etc.

Exerciții și probleme, nu prea complicate (probleme cu cel mult două operații).

### NOTĂ

Cunoștințele și deprinderile cu care trebuie să rămînă elevii, precum și tehnologia didactică după care pot fi prezentate în clasă temele acestui capitol, rezultă clar din prevederile programei expuse mai sus, din conținutul manualului și din tehnologia didactică recomandată în acest îndrumător, pentru adunarea și scăderea numerelor mai mici decît o sută.

Avinđ în vedere deprinderile dobîndite pînă acum de elevi, materialul didactic se poate reduce la planșe și la folosirea trusei pentru studiul adunării și scăderii numerelor naturale, completate cu cele necesare utilizării la adunarea și scăderea numerelor de trei cifre.

O mare atenție se va acorda fixării ideilor în partea finală a lecțiilor, prin interpretarea de către elevi a ceea ce redau figurile din manual, deducerii regulilor de calcul, interpretării diverselor modalități de scriere folosite.

Ca mulțimi model pentru efectuarea operațiilor se vor folosi figurile numerice, ceea ce se realizează comod datorită trusei, cu a cărei mînuire elevii sunt deja familiarizați pentru numerele de două cifre. La nevoie, înaintea folosirii trusei pentru efectuarea operațiilor ca:

$$200 + 300 \text{ (tema a 2-a)}; \quad 500 - 200 \text{ (tema a 3-a)};$$

$$325 + 461 \text{ (tema a 4-a)}; \quad 786 - 461 \text{ (tema a 5-a)};$$

$$300 + 200 + 400 \quad și \quad 231 + 324 + 143 \text{ (tema a 6-a).}$$

se pot revedea după manual (sau chiar repeta calculul cu ajutorul trusei învățătorului), operațiile:

$20 + 30$  (tema 1, capitolul 4, partea I);  $50 - 20$  (tema a 2-a, capitolul 4, partea I);  $32 + 46$  (tema a 6-a, capitolul 4, partea I);  $78 - 32$  (tema a 7-a, capitolul 4, partea I);  $24 + 12 + 43$  (tema 1, capitolul 3, partea a 2-a).

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la capitolul 2

*Exercițiul 2* (tema 1 la sfîrșit).

$$532 = 500 + 30 + 2; \quad 790 = 700 + 90; \quad 304 = 300 + 4; \quad 27 = 20 + 7 \text{ etc.}$$

*Problema 8* (tema a 4-a, sub titlul „Exerciții și probleme“).

$$270 + 204 = 474; \quad 204 + 103 = 307.$$

*Problema 9* (idem).

$$320 + 210 = 530; \quad 210 + 107 = 317.$$

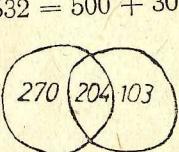


Fig. 158

*Problema 5* (tema a 5-a, sub titlul „Exerciții și probleme“).

a)  $\{50, 51, 52, \dots, 58, 59\}$ .

b) Se calculează pe rînd:  $999 - 50 =$  ;  $999 - 51 =$  ;  
 $999 - 52 =$  etc.

*Problema 7* (idem).

Prin încercări, se găsesc, respectiv:

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}; \quad \{0, 1, 2, 3\}; \quad \{201, 202, 203\}.$$

*Problema 10* (sub titlul „Exerciții probleme“ la sfîrșitul capitolului).

Figura 159.

$$321 + 105 + 403 = 829$$

$$321 + 105 = 426;$$

$$105 + 403 = 508.$$

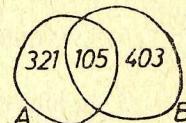


Fig. 159

## V. ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE DE LA 0 LA 10

### Capitolul 1

#### ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE FOLOSIND MULTIMEA PRODUS

##### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

###### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Exerciții de aflare a mulțimii tuturor perechilor (ordonate) la care primul element aparține unei mulțimi date și al doilea aparține altei mulțimi date. Mulțimi factori, mulțime produs (cartezian). Notarea mulțimii produs și scrierea elementelor ei (numite și cupluri).

Legătura între numărul elementelor mulțimilor factori și cel al mulțimii produs. Definirea înmulțirii numerelor naturale folosind mulțimea produs. Factorii înmulțirii. Produsul. Exerciții de aflare a produsului.

Comutativitatea înmulțirii.

###### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII<sup>1</sup>

Noțiunea de *cuplu sau pereche ordonată*, determină prin stabilirea unei corespondențe oarecare de la un element la un element. Dacă elementul de la care pleacă corespondența este notat cu  $a$  și cel la care se poate ajunge este notat cu  $b$ , atunci perechea ordonată care se formează este *notată*  $(a, b)$ .

Reprezentarea grafică a perechii ordonate printr-o săgeată (fig. 160).

Observați că perechea ordonată  $(a, b)$  diferă de  $(b, a)$ , deoarece ele nu au nici același element de plecare, nici același element de sosire (fig. 161).

Pentru mulțimile  $A = \{c, d, f\}$  și  $B = \{p, s\}$ , figura 162 arată *toate perechile ordonate ce pot fi formate astfel încât fiecare din ele să aibă primul element din A și al doilea din B*. Mulțimea de cupluri obținută se notează  $A \times B$  și este numită *mulțime produs (cartezian) al mulțimilor A și B*.

S-au putut forma 6 cupluri de acest fel, indicate prin cele 6 săgeți :  
$$A \times B = \{(c, p), (c, s), (d, p), (d, s), (f, p), (f, s)\}.$$



Fig. 160

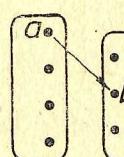


Fig. 161

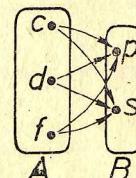


Fig. 162

<sup>1</sup> În legătură cu înmulțirea, ca peste tot în carte, nu se va urmări ca elevii să reproducă fidel diversele propoziții formulate, ci să sesizeze faptul matematic conținut în ele, pe baza exemplelor ce se vor analiza.

Mulțimile  $A$  și  $B$  se numesc *mulțimi factori* pentru mulțimea  $A \times B$ .

Diagrama mulțimii  $A \times B$  este dată în figura 163.

Un *procedeu mai sugestiv* pentru formarea mulțimii produs cartezian  $A \times B$ , dacă se dă mulțimile factori  $A$  și  $B$ , este arătat în figura 164, în care apar diagramele mulțimilor factori și diagrama mulțimii produs.

Elevii vor deprinde utilizarea acestui procedeu. Ei vor face exerciții de aflare a numărului elementelor mulțimii produs, prin numărare. După un suficient număr de exerciții se va trage concluzia că, înlocuind mulțimile factori cu altele, dar păstrând nemodificat numărul elementelor din fiecare, mulțimea produs se schimbă păstrând același număr de elemente ca cea anterioară.

Aceasta arată că între numerele elementelor mulțimilor factori și numărul elementelor mulțimii produs există o legătură stabilă. *Regula de formare a mulțimii produs face să corespundă la un cuplu de numere naturale, reprezentând numerele elementelor mulțimilor factori, un număr natural unic, reprezentând numărul elementelor mulțimii produs.*

Dacă 3 și 2 sunt, respectiv, numerele elementelor mulțimilor factori, atunci numărul elementelor mulțimii produs se notează  $3 \times 2$  și se găsește prin numărarea elementelor mulțimii produs (fig. 165).

Din cele de mai sus se deduce că, pentru a afla numărul elementelor mulțimii produs, cunoscând numerele elementelor mulțimilor factori, nu are nici o importanță care anume sunt elementele acestor trei mulțimi. De aceea este convenabil a folosi în acest scop *procedul simplificat ilustrat în figura 166*.

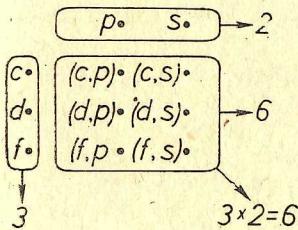


Fig. 165

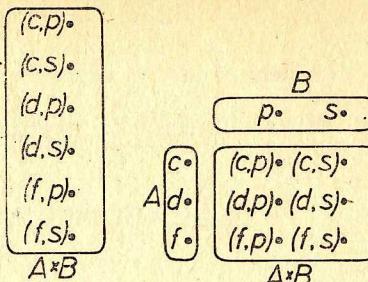


Fig. 163

Fig. 164

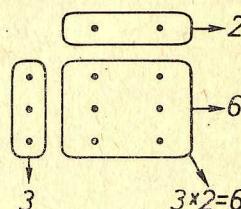


Fig. 166

Această figură are aceeași semnificație ca cea anterioară, dar nu au mai fost notate elementele reprezentate de fiecare punct, acest lucru neavând nici o importanță în scopul urmărit de noi.

Pe baza cunoștințelor de mai sus se introduce *operația de înmulțire a numerelor naturale* conform regulii date în manual la partea a 5-a, capitolul 1, tema a 2-a punctul (c), regulă al cărei enunț va trebui cunoscut de elevi.

Aplicarea regulii se va face luând mulțimi model oarecare pentru factorii înmulțirii, notând elementele acestora prin litere, scriind mulțimea produs și numărind elementele ei. Pentru scrierea mulțimii produs se va folosi aranjamentul sugerat în figura 165.

După cunoașterea acestui mod de aplicare a regulii, va fi folosit mai ales procedeul simplificat sugerat de figura 166.

### Termeni și notații ce se vor folosi

Pereche ordonată (și cuplu), cu notații de felul  $(a, b)$ . Multime produs, cu notația  $A \times B$ . Multimi factori. Înmulțire, factori, produs.

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 1

(Număr de ore, orientativ = 5)

### TEMA 1 : PERECHÉ ORDONATĂ, MULTIMI FACTORI, MULTIME PRODUS

**Scop.** Cunoașterea noțiunilor conținute în titlul temei. Formarea mulțimii produs, cînd se cunosc mulțimile factori. Constatarea că schimbarea mulțimilor factori cu păstrarea numărului elementelor fiecareia duce la modificarea mulțimii produs, fără modificarea numărului elementelor sale.

#### Recomandări metodice pentru predarea temei

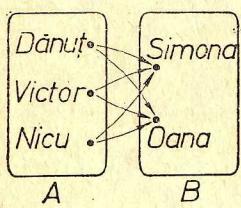
##### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Lecția poate începe cu o problemă de felul următor :

Simona, Oana, Dănuț, Victor și Nicu sunt colegi de clasă și prieteni buni. Băieții, plecind într-o tabără sportivă, s-au înțeles ca fiecare să trimită cîte o vedere celor două prietene ale lor. Să se spună pentru toate vederile trimise, de la ce băiat pleacă și la ce fată sosește.

Se obțin răspunsuri de felul : O vedere pleacă de la Dănuț la Simona ; o vedere pleacă de la Dănuț la Oana ; o vedere pleacă de la Victor la Simona ; și.a.m.d.

Rezumînd răspunsul la problemă, învățătorul face pe tablă, și elevii în caiete, figura 167. Mulțimea băieților a fost notată cu  $A$ , cea a fetelor cu  $B$ , legătura de la un băiat la o fată stabilită cu ajutorul vederii trimise este reprezentată printr-o săgeată cu sensul orientat de la cine pleacă corespondența, la cine sosește ea.



Se atrage atenția elevilor că fiecare corespondență de la un element (băiat) la alt element (fată) stabilită în acest mod determină o pereche de elemente formată din elementul de plecare și cel de sosire în acea corespondență, pe care o putem scrie sub forma

(Dănuț, Simona).

Astfel de perechi sunt numite *perechi ordonate*, deoarece elementele lor sunt luate totdeauna în această ordine : primul este elementul de plecare, al doilea este elementul de sosire în corespondență de la un element la un element care determină acea pereche ordonată.

Din figura 167 se deduce ușor mulțimea tuturor perechilor ordonate ce pot fi formate astfel încît fiecare să aibă primul element din  $A$  și al doilea

din  $B$ , mulțime pe care o notăm  $A \times B$  și o numim *mulțime produs (cartezian)* pentru mulțimile  $A$  și  $B$ :

$$A \times B = \{(Dănuț, Simona), (Dănuț, Oana), (Victor, Simona), (Victor, Oana), (Nicu, Simona), (Nicu, Oana)\}.$$

Se va atrage atenția elevilor că elementele acestei mulțimi sunt perechi ordonate (sau cupluri). Ei, îndrumați de învățător, vor număra câte elemente are mulțimea  $A \times B$ , găsind 6 elemente.

Elevii vor fi puși să spună, pe rînd, elementele mulțimii  $A \times B$ : un element al mulțimii  $A \times B$  este perechea ordonată (Dănuț, Simona); un alt element al mulțimii  $A \times B$  este perechea ordonată (Dănuț, Oana etc.).

Pentru a ușura vorbirea și scrierea, vom nota fiecare copil care formează mulțimile  $A$  și  $B$  cu litera inițială a prenumelui său<sup>1</sup>, învățătorul scriind pe tablă și elevii în caiete:

$$A = \{d, v, n\}; \quad B = \{s, o\};$$

$$A \times B = \{(d, s), (d, o), (v, s), (v, o), (n, s), (n, o)\}.$$

Se va executa figura 168, ca model simplificat pentru figura 167.

Mulțimile  $A$  și  $B$  vor fi numite *mulțimi factori* pentru mulțimea produs  $A \times B$ .

Se va arăta elevilor că pentru mulțimea produs  $A \times B$  se poate face o diagramă ca pentru orice mulțime, cum se vede în figura 169, unde fiecare cuplu este reprezentat printr-un punct.

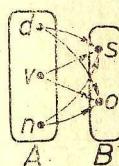


Fig. 168

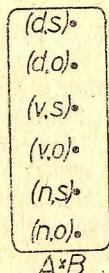


Fig. 169

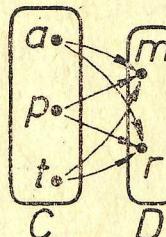


Fig. 170

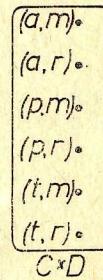


Fig. 171

După modelul figurii 168, se va cere elevilor să formeze mulțimea produs  $C \times D$ , dacă mulțimile factori sunt mulțimile de litere:

$$C = \{a, p, t\}; \quad D = \{m, r\}.$$

Se obține figura 170. Se scriu elementele mulțimii  $C \times D$ :

$$C \times D = \{(a, m), (a, r), (p, m), (p, r), (t, m), (t, r)\}.$$

Se face diagrama mulțimii  $C \times D$  ca în figura 171.

Elevii sunt condași să observe că: în primul exemplu mulțimile factori au fost  $A$  și  $B$ , avînd respectiv 3 și 2 elemente, iar mulțimea produs  $A \times B$  a avut 6 elemente; în al doilea exemplu mulțimile factori sunt  $C$  și  $D$ , dar au, respectiv, tot 3 și 2 elemente. Mulțimea produs  $C \times D$  diferă de  $A \times B$ , dar

<sup>1</sup> Se va folosi prilejul pentru a preciza că elementele mulțimii se notează obișnuit cu litere mici, în timp ce mulțimea se notează cu literă mare.

are tot 6 elemente ca și  $A \times B$ . Li se spune elevilor că înlocuind mulțimile factori cu altele, dar păstrând numărul elementelor fiecareia, mulțimea produs se înlocuiește cu alta, care păstrează același număr de elemente ca cea anterioară. Acest lucru se va constata și în exercițiul următor :

Pentru fiecare pereche de mulțimi :

$$E = \{a, b, c\} \text{ și } F = \{m, p, s, t\}; M = \{d, r, f\} \text{ și } R = \{i, g, o, u\}$$

se va forma mulțimea produs folosind diagramele mulțimilor factori și reprezentarea perechilor ordonate prin săgeți, apoi scriind mulțimea tuturor perechilor ordonate din care este alcătuită mulțimea produs. Se vor face, la urmă, diagramele fiecareia din mulțimile produs.

De fiecare dată, prin numărare, se va spune câte elemente are fiecare din mulțimile factori și câte elemente are mulțimea produs, observîndu-se că, păstrînd numărul elementelor mulțimilor factori, se păstrează și numărul elementelor mulțimii produs.

Se vor relua toate exemplele de formare a mulțimii produs care s-au analizat pînă acum și se va forma din nou mulțimea produs, dar folosind aranjamentul sugerat de figura 164, ilustrat pentru primul exemplu de învățător, apoi vor lucra elevii, îndrumați de învățător.

### Muncă independentă

Se cere elevilor ca, folosind modul de formare a mulțimii produs sugerat de figura 162 sau 164, să determine toate modurile în care se pot așeza într-o bancă de două locuri elevii

{Ina, Ana, Mona, Dana} și {Petru, Radu, Costică}

astfel ca în stînga băncii să fie o fată și în dreapta un băiat.

Soluția este dată de figura 172 sau 173, unde fiecare elev este notat cu inițiala prenumelui său. Numărul așezărilor posibile coincide cu numărul perechilor ordonate care au primul element o fată și al doilea un băiat, din mulțimile date mai sus.

Figurile 172 și 173 vor fi desenate apoi pe tablă, sub îndrumarea învățătorului, pentru corectarea lucrului independent al copiilor.

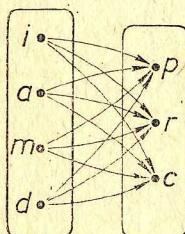


Fig. 172

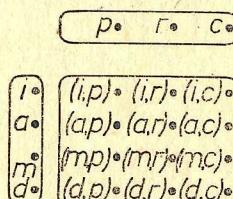


Fig. 173

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se deschid cărțile la partea a 5-a, capitolul 1, tema 1 : „Pereche ordonată. Mulțimi factori, mulțime produs“.

Se privesc ilustrațiile, cerînd copiilor să spună ce conțin ele. Apoi învățătorul citește, elevii urmărind pe cărți, exemplul (a). Se propune să se închidă cărțile și să se încerce rezolvarea problemei citite, fiecare copil lucrînd singur, pe caietul său. După răgazul necesar în acest scop, se cer cîteva din răspunsurile obținute de elevi, care sănt scrise pe tablă de învățător, fără

comentarii. Apoi se deschid iarăși cărțile și se citește textul pînă la exemplul (b).

Se apreciază soluțiile scrise pe tablă și alte rezultate scrise de elevi în caiete.

Se citește încă o dată exemplul (b), explicîndu-se soluția conținută în figura din manual.

Cele două probleme din manual se propun ca temă pentru acasă.

**Indicații privind rezolvarea unor din problemele propuse la tema 1.**

*Problema 1*

c)  $A \times B = \{(b, o), (c, o)\}$ , figura 172\*.

*Problema 2*

Figura 173\*.

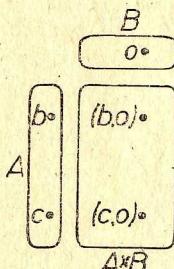


Fig. 172\*

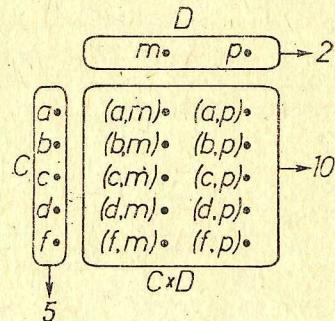


Fig. 173\*

$C \times D = \{(a, m), (a, p), (b, m), (b, p), (c, m), (c, p), (d, m), (d, p), (e, m), (e, p)\}.$

Figura 174

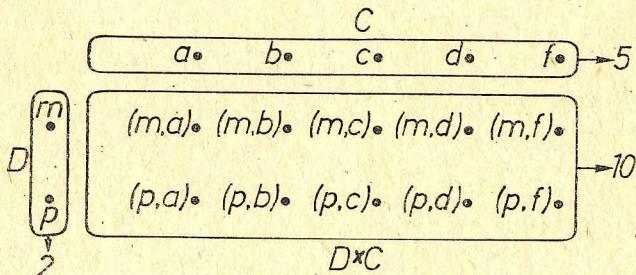


Fig. 174

$D \times C = \{(m, a), (m, b), (m, c), (m, d), (m, e), (p, a), (p, b), (p, c), (p, d), (p, e)\}.$

#### TEMA A 2-A : ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE (CU AJUTORUL MULTIMII PRODUS)

**Scop:** Cunoașterea înmulțirii numerelor naturale folosind mulțimi model pentru factori, formînd mulțimea produs și numărînd elementele acesteia.

## Recomandări metodice pentru predarea temei

### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Studiul temei poate începe cerînd elevilor să formeze mulțimea produs pentru perechi de mulțimi date, cum ar fi:

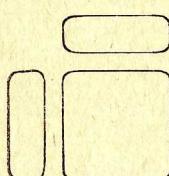


Fig. 175

$$\begin{array}{ll} A = \{c, d\} & \text{și } B = \{f, g, i\}; \\ E = \{-, +\} & \text{și } P = \{*, O, \Delta\}; \\ R = \{1, 2\} & \text{și } T = \{5, 7, 8\}, \end{array}$$

folosind diagramele lor și ale mulțimii produs, după modelul sugerat de figura 175.

După răgazul acordat pentru lucru independent în bânci, se va comenta realizarea sarcinii date, scoțînd la tablă elevi care execută sub îndrumarea învățătorului figurile 176, 177 și 178. Ceilalți elevi corectează în caiete.

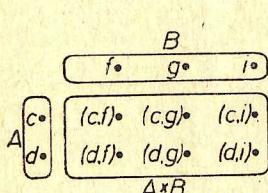


Fig. 176

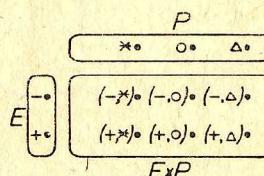


Fig. 177

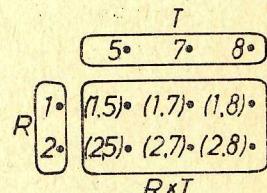


Fig. 178

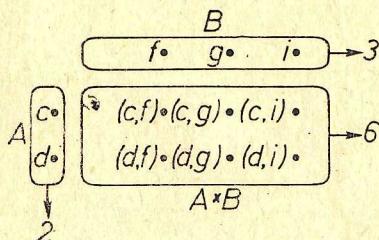


Fig. 179

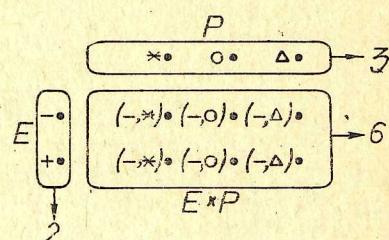


Fig. 180

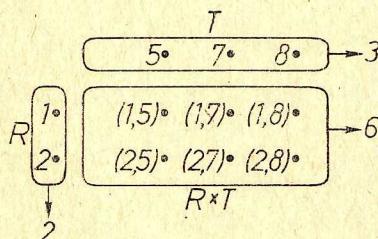


Fig. 181

Se cere apoi să se spună, în fiecare caz, numărul elementelor mulțimilor factori și numărul elementelor mulțimii produs. Acestea se vor afla prin numărare, completîndu-se pe tablă și în caiete figurile 176, 177 și 178, aşa cum arată figurile 179, 180 și 181.

Observînd ultimele trei figuri se va constata că la aceleași numere de elemente pentru mulțimile factori, în cazul

nostru 2 și 3, se obține totdeauna același număr de elemente pentru mulțimea produs, în cazul nostru 6.

Pentru a pune în evidență faptul observat mai sus, vom scrie numărul elementelor mulțimii produs, cînd cunoaștem pe 2 și 3, numerele elementelor mulțimilor factori, sub forma  $2 \times 3$  (cîtit „2 ori 3“).

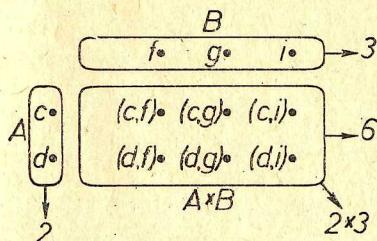


Fig. 182

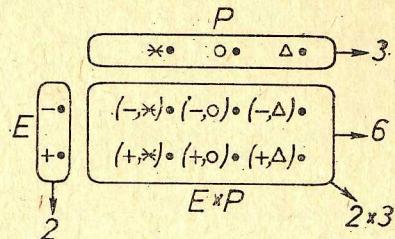


Fig. 183

Se completează figurile 179, 180 și 181  
asa cum arată figurile 182, 183 și 184.  
Se observă imediat că avem:

$$2 \times 3 = 6$$

Punem acum elevilor problema de a afla cîte elemente are mulțimea produs, dacă mulțimile factori au 2, și respectiv 4 elemente. Numărul căutat îl putem nota  $2 \times 4$ . Pentru a afla care este acest număr ei vor fi îndrumați să observe că este necesar:

1º Să aleagă două mulțimi model, una cu 2 și una cu 4 elemente, pe care să le noteze simbolic, să zicem:

$$M = \{a, b\};$$

$$N = \{c, d, f, i\}$$

(mai comod este să se aleagă dintr-o dată mulțimi de simboluri, pentru a scrie cu ușurință mulțimea produs).

2º Să formeze mulțimea produs  $M \times N$ , de exemplu ca în figura 185.

3º Să numere elementele mulțimii produs. Vor găsi:

$$2 \times 4 = 8$$

Li se vor propune cîteva exerciții asemănătoare, cu numere nu prea mari, pînă ce elevii deprind acest mod de aflare a numărului elementelor mulțimii produs, cunoscînd numerele elementelor mulțimilor factori. Nu se va insista însă foarte mult frecîndu-se destul de repede la arătarea procedeului simplificat, la care nu se mai scriu elementele, ci doar reprezentarea lor prin puncte, cum se vede în figurile 186 și 187.

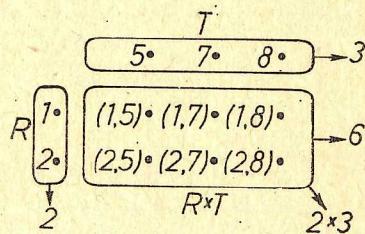


Fig. 184

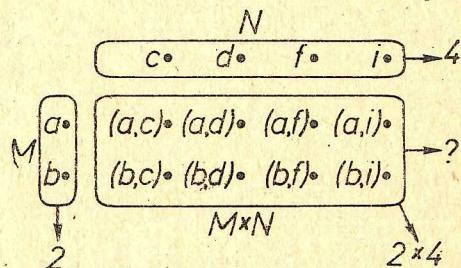


Fig. 185

El va fi ilustrat cu trusa pentru predarea operațiilor cu numere naturale, folo-sind panourile cu aspectele din figurile 186\* și 186\*\*, după caz. În figurile 187\*

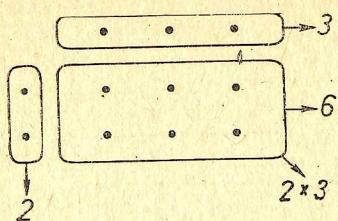


Fig. 186

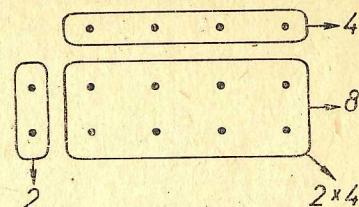


Fig. 187

și 187\*\* s-a arătat așezarea discurilor albastre pentru a ilustra  $3 \times 4 = 12$  și  $6 \times 8 = 48$ .

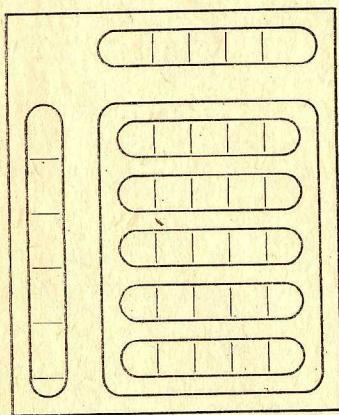


Fig. 186\*

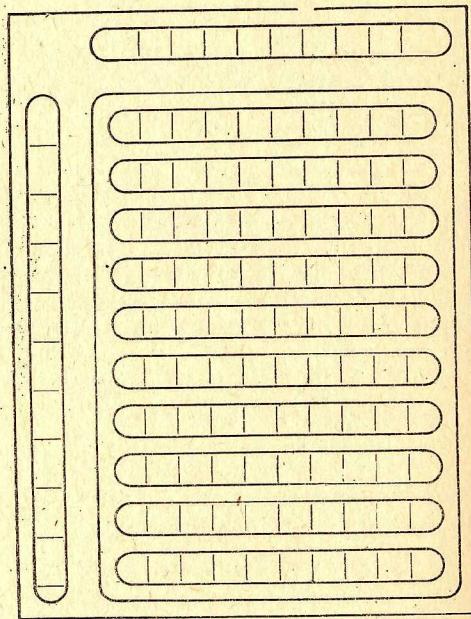


Fig. 186\*\*

Asupra acestui procedeu se va insista pînă ce va fi depriins de toți elevii. Problemele cu acest conținut vor fi date și prin scrieri de forma :

$$2 \times 5 = ; \quad 3 \times 4 = ; \quad 4 \times 2 = ; \quad 5 \times 3 =$$

sau prin figuri ca 188 și 189.

Numai după ce toți elevii rezolvă fără dificultăți problemele de acest tip, se va arăta că tehnica rezolvării lor permite introducerea unei noi operații cu numere naturale, numită *înmulțire*. Elevii cunosc deja enunțul și aplicarea regulii :

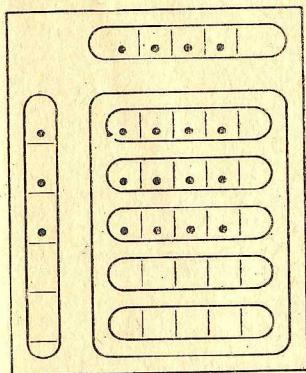


Fig. 187\*

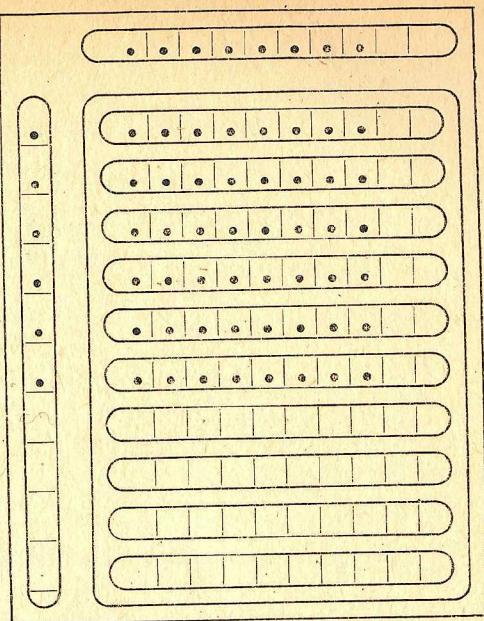


Fig. 187\*\*

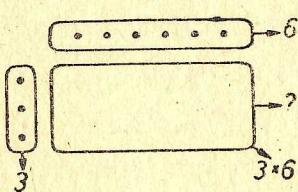


Fig. 188

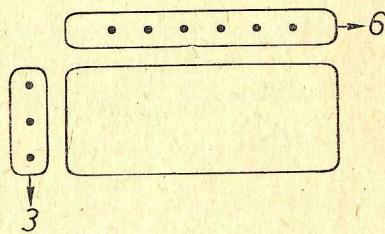


Fig. 189

A înmulți numerele naturale  $m$  și  $p$  înseamnă a găsi un număr natural notat  $m \times p$  („ $m$  ori  $p$ “ sau „ $m$  înmulțit cu  $p$ “), astfel:

1º Se iau două mulțimi model oarecare  $A$  și  $B$ ,  $A$  cu  $m$  elemente și  $B$  cu  $p$  elemente.

2º Se formează mulțimea produs  $A \times B$ .

3º Se numără elementele mulțimii produs. Rezultatul numărării este numărul  $m \times p$ .

Se atrage atenția că  $\times$  este semnul înmulțirii. Uneori este folosit în locul lui un simplu punct  $m \times p = m \cdot p$ .

Numerele  $m$  și  $p$  se numesc factorii înmulțirii. Rezultatul se numește produs.

Se poartă discuții cu elevii legate de exemplele date, sau de alte exemple noi, pînă ce există certitudinea justei înțelegeri a celor de mai sus.

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se deschid cărțile la tema: „Înmulțirea numerelor naturale, cu ajutorul mulțimii produs“. Se citește textul, explicindu-se ideile conținute și figurile existente, rezolvându-se exercițiile de la sfîrșitul exemplului (b).

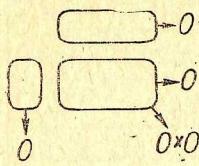


Fig. 190

Exercițiile 1 și 2 de la sfîrșit se vor da ca temă pentru acasă.

Pentru exercițiul  $0 \times 0 =$  soluția este dată în figura 190.

TEMA A 3-A : COMUTATIVITATEA ÎNMULȚIRII

**Scop:** Cunoașterea conținutului proprietății de comutativitate a înmulțirii numerelor naturale.

Recomandări metodice pentru predarea temei

a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Se propune efectuarea înmulțirilor

$$2 \times 3 = \quad \text{și} \quad 3 \times 2 =$$

folosind pentru factori mulțimile model:  $A = \{c, d\}$ ;  $B = \{f, g, h\}$ .

Sub îndrumarea învățătorului, elevii găsesc mulțimile produs cum arată figurile 191 și 192. Se constată că  $A \times B \neq B \times A$ , nefiind formate din ace-

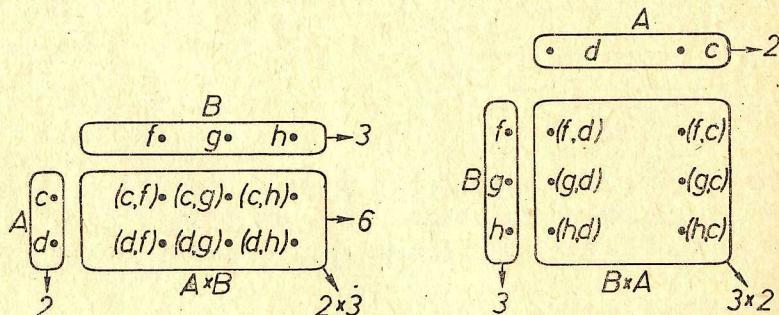


Fig. 191

Fig. 192

leasi elemente, deoarece, de exemplu  $(c, f) \neq (f, c)$ . În schimb mulțimile  $A \times B$  și  $B \times A$  au tot atîțea elemente, după cum se constată ușor, făcînd să corespundă un cuplu de forma  $(c, f)$  din  $A \times B$ , cu  $(f, c)$  din  $B \times A$ , aşa cum arată figura 193 (care va fi executată de învățător).

Rezultă că avem  $2 \times 3 = 3 \times 2$ . Ceea ce s-a arătat despre numerele 2 și 3, se poate arăta despre oricare alte numere diferite de zero, pe aceeași cale.

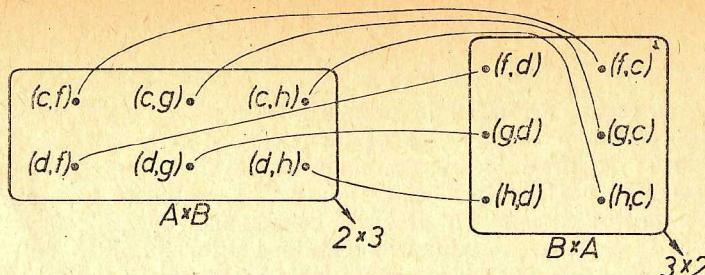


Fig. 193

Dacă unul din factori este 0, produsul este 0, aşa cum arată figurile 194 și 195:  $0 \times 3 = 3 \times 0$ .

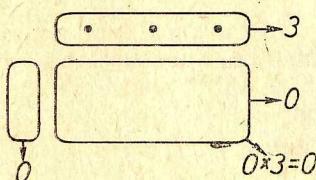


Fig. 194

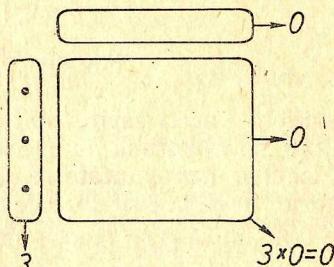


Fig. 195

Deducem că oricare ar fi numerele naturale  $a$  și  $b$  avem:

$$a \times b = b \times a$$

adică *înmulțirea numerelor naturale este comutativă*.

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Deschizînd manualul la tema respectivă, se urmărește cum s-a făcut judecata.

Primul exercițiu se face în clasă ca muncă independentă. Celelalte două se dau ca temă pentru acasă.

## Capitolul 2

### ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE FOLOSIND ADUNAREA REPEATĂ

#### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

##### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Definirea înmulțirii numerelor naturale ca adunare repetată de termeni egali. Ilustrarea legăturii dintre această definiție și aceea care folosește mulțimea produs, prin scrierea convenabilă a mulțimii produs ca reuniune de submulțimi disjuncte, fiecare conținînd toate perechile ordonate la care primul element este același.

**2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE  
SĂ RĂMÎNĂ ELEVII**

Se va cunoaște: semnificația adunării repetitive cu ajutorul mulțimilor; procedee de calcul al sumei; tipurile de probleme care se rezolvă prin adunare repetată; legătura dintre adunarea repetată și înmulțire, cu scrierea adunării repetitive ca înmulțire, și a înmulțirii ca adunare repetitive (în două moduri); înmulțiri care nu pot fi scrise ca adunări repetitive:  $0 \times 0$ ;  $0 \times 1$ ;  $1 \times 0$ ;  $1 \times 1$ ; scrierea ca adunări repetitive a altor înmulțiri care au factor pe 0; tipuri de probleme care se rezolvă prin înmulțire, deduse din tipurile de probleme care se rezolvă prin adunare repetată.

**B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR  
DIN CAPITOLUL 2**

(Număr de ore, orientativ=6)

Temele din acest capitol sunt astfel redactate în manual, încit nu pot crea dificultăți învățătorului în înțelegerea conținutului, în conceperea și realizarea lecțiilor corespunzătoare. Figurile 187\* și 187\*\* sugerează modul de folosire a trusei pentru predarea acestui capitol.

Ne limităm să dăm modele de rezolvare pentru:

*Exercițiul 2, tema 1*

$$\begin{array}{r} a) 9 + 9 + 9 = 27 \text{ etc.} \\ \hline 9 + 9 = 18 \\ 18 + 9 = 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) 8 + 8 + 8 + 8 = 32 \text{ etc.} \\ \hline 8 + 8 = 16 \\ 16 + 8 = 24 \\ 24 + 8 = 32 \end{array}$$

$$c) \begin{array}{r} 11 + 11 + 11 = 33 \text{ etc.} \\ \hline 11 + 11 = 22 \\ 22 + 11 = 33 \end{array}$$

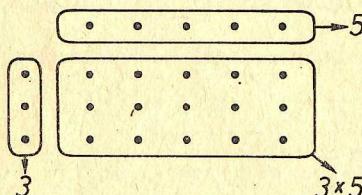


Fig. 196

*Exercițiul 1, tema a 2-a*

$$14 + 14 + 14 + 14 = 4 \times 14 \text{ etc.}$$

*Exercițiul 2, tema a 2-a*

$5 + 5 + 5 = 3 \times 5$ . Pentru găsirea numărului  $3 \times 5$  folosim figura 196 care ne dă, prin numărare  $3 \times 5 = 15$ . La fel se face  $7 + 7 + 7 + 7 =$

*Exercițiul 1, tema a 3-a* (sub titlul „Exerciții și probleme“).

$$\begin{aligned} 7 \times 3 &= 7 + 7 + 7; 7 \times 3 = && 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \text{ etc.} \\ &= 14 + 7 && = 6 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \\ &= 21 && = 9 + 3 + 3 + 3 + 3 \\ & && = 12 + 3 + 3 + 3 \\ & && = 15 + 3 + 3 \\ & && = 18 + 3 \\ & && = 21 \end{aligned}$$

*Exercițiul 2, tema a 3-a*

$$200 \times 4 = 200 + 200 + 200 + 200 = 800$$

$$3 \times 221 = 221 + 221 + 221 = 663$$

etc.

$$\begin{array}{r} 200 + \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ \hline 800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 221 + \\ 221 \\ 221 \\ \hline 663 \end{array}$$

*Exercițiul 3, tema a 3-a*

$$\begin{aligned} 5 \times 3 &= 3 + 3 + 3 + 3 + 3 & 3 \times 5 &= 5 + 5 + 5 \\ &= 6 + 3 + 3 + 3 & &= 10 + 5 \\ &= 9 + 3 + 3 & &= 15 \\ &= 12 + 3 & & \\ &= 15 & & \end{aligned}$$

*Exercițiul 4, tema a 3-a*

$5 \times 3 = 15$ . Se calculează cu mulțimea produs sau prin adunare repetată etc.

*Exercițiul 9, tema a 3-a*

a)  $5 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$  În al doilea mod nu este posibil, deoarece nu putem aduna pe 5 cu el însuși o singură dată (adunarea presupune minimum 2 termeni).

$$\begin{aligned} &= 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$1 \times 1 = ; 0 \times 0 = ; 1 \times 0 =$  nu se poate calcula prin adunare repetată.

$6 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ . În al doilea mod nu este posibil.

b)  $5 \times 1 = 5$  (fig. 197);  $1 \times 1 = 1$  (fig. 198);  $0 \times 0 = 0$  (fig. 190) etc.

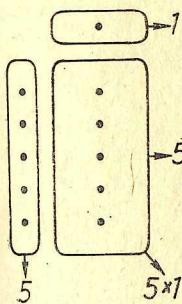


Fig. 197

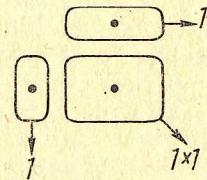


Fig. 198

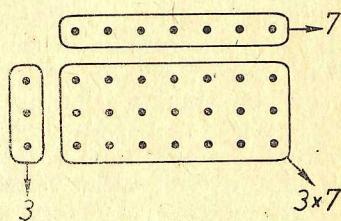


Fig. 199

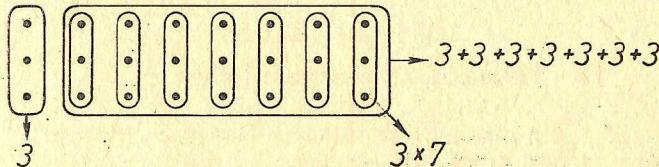
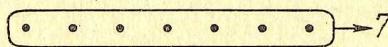


Fig. 200

*Exercițiul 11, tema a 3-a*  
 $3 \times 7$ ; a) fig. 199; b) fig. 200;  
 c) fig. 201.

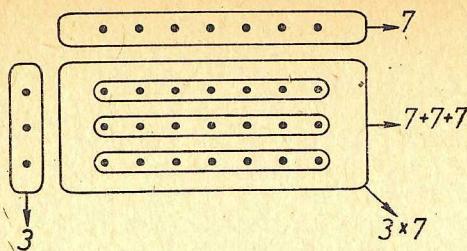


Fig. 201

## Capitolul 3 TABLA ÎNMULȚIRII

### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

#### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Înmulțirea cînd avem factor pe 0 sau 1. Ideea întocmirii tablei înmulțirii cu ajutorul adunării repetate a comutativității înmulțirii numerelor naturale. Învățarea tablei înmulțirii.

Exerciții și probleme simple de înmulțire.

#### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RÂMINĂ ELEVII

Să cunoască modalități de calcul a produsului a două numere de la 0 la 10, dar să-și formeze automatisme de enunțare a produsului direct, fără calcul. În procesul învățării tablei înmulțirii, să dobîndească deprinderea recunoașterii problemelor care se rezolvă prin înmulțire. În scrierea rezolvării problemelor cu ajutorul operației de înmulțire, să se obișnuiască a scrie numărul ce se repetă ca termen al adunării, ca al doilea factor al înmulțirii, primul factor arătînd de cite ori se repetă al doilea ca termen al adunării (în marea majoritate a problemelor înmulțirea intervine în locul unei adunări repetitive). În orice caz, se va observa că produsul reprezintă același fel de unități ca și numărul ce se repetă ca termen al adunării scrise prescurtat prin acea înmulțire.

### B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 3

(Număr de ore, orientativ=15)

Textul lecțiilor din manual este suficient pentru ca învățătorul să-și poată construi singur lecțiile prezentate elevilor, fără dificultăți. De aceea ne vom limita la a da indicații de rezolvare a unor exerciții și probleme.

### Tema a 4-a

Exercițiu 2:  $2 \times 2 = 4$ ;  $2 \times 4 = 8$ ;  $2 \times 6 = 12$ .

Exercițiu 3:  $2 + 2 = 4$ ;  $4 + 2 = 6$ ;  $6 + 2 = 8$ .

Exercițiu 4:  $3 \times 2 = 6$ ;  $5 \times 2 = 10$ ;  $8 \times 2 = 16$ .

Exercițiu 5:  $2 \times 1 = 2$ ;  $2 \times 2 = 4$ ;  $2 \times 7 = 14$ .

Problema 6:  $2 \times 6 = 12$ . Maria are 12 nuci.

Problema 7:  $2 \times 8 = 16$ . Florin are acum în colecție 16 timbre.

Problema 8:  $1 \times 2 = 2$ ;  $8 \times 2 = 16$ ;  $2 \times 2 = 4$ ;  $6 \times 2 = 12$ ;

$4 \times 2 = 8$ . Se vede că elementele mulțimii  $A$  care înmulțite cu 2 dau produsul mai mare ca 10 sunt 8 și 6.

Problema 9:  $2 \times 4 = 8$ ;  $2 \times 3 = 6$ ;  $2 \times 5 = 10$ ;  $2 \times 8 = 16$ .

Segmentul căutat are respectiv: 8 cm; 6 cm; 10 cm; 16 cm.

### Tema a 5-a

Problema 3:  $3 \times 6 = 18$ . În al doilea coș sunt 18 kg de mere.

Exercițiu 4:  $7 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$ ;  $7 \times 2 = 7 + 7 = 14$  etc.

Problema 6: Figura 202.

Problema 7: b)  $3 \times 2 = 6$ . Lungimea segmentului construit va avea 6 laturi de pătrățele de caiet.

### Tema a 7-a

Problema 4:  $5 \times 3 = 15$ . Pe toate caietele dă 15 lei.

### Tema a 8-a

Problema 5:  $5 \times 8 = 40$ . Orezul a costat 40 lei.

$4 \times 9 = 36$ . Zahărul a costat 36 lei.

$40 + 36 = 76$ . Orezul și zahărul împreună au costat 76 lei.

Problema 6:  $4 \times 8 = 32$ . Cărțile au costat 32 lei.

$42 - 32 = 10$ . Mărioarei i-au mai rămas 10 lei.

Problema 7: Fie că se completează figura din manual, după ce a fost făcută mai întâi pe caiet, și numărând găsim 45 de gropi, fie că se observă operația  $5 \times 9 = 45$ .

Partea a doua a problemei cere, în fond, perimetrul:

$27 + 27 = 54$ ;  $15 + 15 = 30$ ;  $54 + 30 = 84$ . Gardul va avea 84 m.

Sau:  $27 + 15 = 42$ ;  $42 + 42 = 84$ . Același rezultat.

### Tema a 13-a

Problema 14:  $4 \times 7 = 28$ . Tatăl Oanei are 28 ani.

$8 \times 7 = 56$ . Bunicul Oanei are 56 ani.

Problema 15:  $9 \times 4 = 36$ . Pe raft sunt 36 kg făină.

$5 \times 4 = 20$ . Pe al doilea raft sunt 20 kg făină.

$36 + 20 = 56$ . Pe ambele rafturi sunt 56 kg făină.

Problema 17: Prin încercări găsim, respectiv:

$\{0, 1, 2, 3\}$ ;  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;  $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ;  $\{4, 5, 6\}$ .

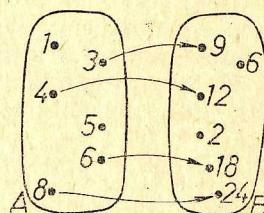


Fig. 202

## VI. ÎMPĂRTIREA NUMERELOR NATURALE

### Capitolul 1

#### ÎMPĂRTIREA NUMERELOR NATURALE FOLOSIND SEPARAREA DE SUBMULȚIMI DISJUNCTE, FIECARE AVÂND ACELAȘI NUMĂR DE ELEMENTE

##### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

###### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Separarea unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele, având fiecare același număr de elemente, folosind: procedeul prin „cuprindere“ (dacă ni se dă cîte elemente trebuie să fie într-o submulțime); procedeul prin „părți egale“ (dacă ni se dă cîte submulțimi trebuie formate).

Definirea împărtirii numerelor naturale folosind procedeul „prin cuprindere“ și procedeul prin „părți egale“.

Deîmpărțit, împărțitor, cît, termenii împărtirii.

Pe bază de exemple se va deduce că, fiind adevărată una din scriserile:  $20 : 4 = 5$ ;  $20 : 5 = 4$ ;  $4 \times 5 = 20$ ;  $5 \times 4 = 20$ , sint adevărate și celelalte trei.

Exerciții și probleme simple de împărtire.

###### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMINĂ ELEVII\*

Sint cele conținute în programa expusă mai sus și în manual, fiind nevoie să evidențierea unor aspecte nementionate în mod explicit.

Trebuiu observat că la separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, fiecare având același număr de elemente, alegerea procedeului „prin cuprindere“ sau a celui prin „părți egale“ nu este o chestiune de preferință, după voia noastră, ci se impune unul sau altul din aceste procedee, după conținutul problemei practice care trebuie rezolvată.

In adevăr, în problemele de această natură ni se spune fie care sunt elementele mulțimii și numărul de elemente ce trebuie să fie într-o submulțime — caz în care se folosește procedeul „prin cuprindere“ (vezi descrierea lui la indicațiile metodice) — fie care sunt elementele mulțimii și numărul submulțimilor care trebuie obținut — caz în care se folosește procedeul prin „părți egale“ (de asemenea descris la indicațiile metodice).

Deoarece marea majoritate a problemelor de împărtire întâlnite la acest nivel de învățămînt sint desprinse din situații practice de viață de felul unuia din cele două tipuri de probleme menționate mai sus, rezultă că nu putem lipsi elevii de niciunul din procedeele zise prin „cuprindere“ sau prin „părți egale“, fără a le reduce şansele de rezolvare a problemelor de împărtire.

\* În legătură cu împărtirea, ca peste tot în carte, nu se va urmări ca elevii să reproducă fidel diversele propoziții formulate, ci să sesizeze faptul matematic conținut în ele, pe baza exemplelor ce se vor analiza.

*Se va observa că înlocuind mulțimea ce a fost împărțită în submulțimi disjuncte între ele, fiecare având același număr de elemente, cu alta având tot atâtea elemente ca ea:*

a) dacă păstrăm același număr de elemente într-o submulțime, nu se modifică numărul de submulțimi obținute;

b) dacă păstrăm același număr de submulțimi, nu se modifică numărul elementelor obținut într-o submulțime.

Această observație creează posibilitatea efectuării împărțirii numerelor naturale, de exemplu 18 : 6, prin :

*Procedeul prin „cuprindere“:*

1° Se ia o mulțime model cu 18 elemente (de exemplu, o mulțime de puncte).

2° Se separă în ea, atât cât este posibil, submulțimi disjuncte, fiecare având același număr de elemente, egal cu 6.

3° Dacă nu au rămas elemente necuprinse în submulțimile respective, cu care să nu mai putem completa o nouă submulțime, numărăm cîte submulțimi s-au obținut.

Rezultatul numărării este cîțul împărțirii 18 : 6.

$$18 : 6 = 3.$$

Dacă rămîn elemente cu care nu putem face o nouă submulțime, zicem că împărțirea numerelor respective nu este posibilă. (Exemple: 8 și 3; 10 și 4 etc.).

*Procedeul prin „părți egale“:*

1° Se ia o mulțime model cu 18 elemente (de exemplu o mulțime de puncte).

2° Se „distribuie“ elementele mulțimii model în 6 submulțimi disjuncte toate având același număr de elemente.

3° Dacă nu au rămas elemente care nu mai pot fi „distribuite“ cu păstrarea aceluiasi număr de elemente în fiecare submulțime, numărăm cîte elemente au revenit într-o submulțime.

Rezultatul numărării este cîțul împărțirii 18 : 6.

$$18 : 6 = 3.$$

Dacă au rămas elemente care nu mai pot fi distribuite în submulțimile formate, cu păstrarea aceluiasi număr de elemente în aceste submulțimi, zicem că împărțirea numerelor respective nu este posibilă. (Exemple: 7 și 2; 15 și 6 etc.).

*Din exemple se va desprinde observația că, la separarea unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele fiecare având același număr de elemente, numărul submulțimilor obținute cu cîte  $n$  elemente fiecare, cu ocazia aplicării procedeului prin „cuprindere“, este egal cu numărul elementelor obținute într-o submulțime, cu ocazia aplicării procedeului prin părți „egale“, dacă formăm  $n$  submulțimi. (Elevii nu vor reține enunțul ci faptul sesizat).*

Această observație ne asigură că, la împărțirea a două numere naturale obținem același rezultat fie că o efectuăm cu procedeul prin „cuprindere“, fie că o efectuăm cu procedeul prin „părți egale“. Cunoașterea ambelor procedee este însă necesară pentru a putea recunoaște că o anumită problemă practică se rezolvă prin împărțire.

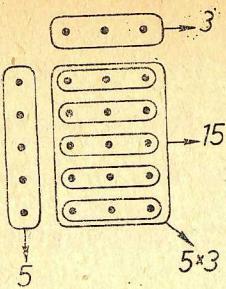


Fig. 203

Valorificând figuri de felul figurii 203, obținute cu ocazia separării unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele, fiecare având același număr de elemente, se va observa că sunt simultan adevărate scrierile :

$$5 \times 3 = 15; 15 : 3 = 5 \text{ (efectuată prin cuprindere)}$$

$$3 \times 5 = 15; 15 : 5 = 3 \text{ (efectuată prin părți egale)}$$

ceea ce arată existența unei strînse legături între operațiile de înmulțire și împărțire și oferă posibilitatea de a face probele operațiilor de înmulțire și împărțire.

**Termeni și notații ce se vor folosi:**

Procedeul prin „cuprindere“ și prin „părți egale“; împărțire, deîmpărțit, împărțitor, cît, termenii împărțirii.

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 1 (Număr de ore, orientativ=8)

### TEMA 1 : EXERCȚII ȘI PROBLEME PREGĂTITOARE

**Scop :** Reamintirea noțiunii de submulțime sau parte a unei mulțimi și a definiției scăderii numerelor naturale cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa. Introducerea noțiunii de scădere repetată. Cunoașterea separării unei mulțimi date în submulțimi disjuncte între ele, având fiecare același număr de elemente, folosind : a) procedeul prin „cuprindere“; b) procedeul prin „părți egale“.

#### Recomandări metodice pentru predarea temei

Ne vom ocupa doar de separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, fiecare având același număr de elemente, deoarece realizarea celorlalte obiective menționate mai sus nu poate întâmpina dificultăți.

#### Procedeul prin „cuprindere“

##### c) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Pe catedră este așezată o cutie conținând 15 discuri negre (din cele de la trusa pentru adunarea și scăderea numerelor naturale).

Se cere elevilor să separe multimea discurilor din cutie în submulțimi disjuncte, fiecare submulțime având cîte 3 discuri (aceste submulțimi urmînd a fi așezate pe catedră separat una de alta).

După scurte discuții asupra modului în care poate fi înndeplinită cerința formulată, se stabilește următorul procedeu de lucru : se iau din cutie tot cîte 3 discuri negre și se așază pe catedră, sub formă de „grămezi“, separate de cele așezate anterior, pînă se termină discurile din cutie.

Un elev este scos la catedră și execută practic cele spuse mai sus. Se observă că în cutie nu rămîne nici un disc. De asemenea, se observă că s-au obținut

5 submulțimi pe catedră, adică tocmai de cîte ori am putut lua cîte 3 discuri din cele 15 aflate în cutie.

Vom spune că 3 se cuprinde în 15 de 5 ori, iar procedeul de separare în submulțimi pe care l-am folosit îl numim „prin cuprindere“.

Elevii vor executa în bânci, sub formă de muncă independentă, aceeași sarcină, folosind: boabe de grâu, castane etc.

Se fac probleme asemănătoare alegînd alte mulțimi, dar avînd grijă de fiecare dată a lua numărul elementelor dintr-o submulțime astfel încît, în final, să nu rămînă elemente ale mulțimii alese, necuprinse în aceste submulțimi.

După ce procedeul de lucru va fi bine cunoscut de elevi, învățătorul va face, pe rînd, separarea în submulțimi disjuncte între ele fiecare avînd același număr de elemente, egal cu 4, a mulțimilor formate din 12: discuri negre; 12 triunghiuri albastre; 12 pătrate roșii.

De fiecare dată se va constată că se obțin 3 submulțimi. Așadar, *numărul submulțimilor obținute este perfect determinat numai de numărul elementelor mulțimii inițiale și de numărul elementelor dintr-o submulțime, și nu este influențat de natura acestor elemente.*

Această observație va deveni mai evidentă cînd învățătorul, după rezolvarea practică a problemei de către elevi, va explica de fiecare dată procedeul ce s-a folosit, în felul următor:

1° Execută pe tablă diagrama Euler-Venn a mulțimii date inițial pentru a fi separată în submulțimi, ca în figura 204.

2° Execută pe tablă, alăturat, figura 205 în care sunt 3 linii închise reprezentînd 3 mulțimi: cea

de sus în care s-au figurat 4 puncte arată cîte elemente trebuie să luăm în fiecare submulțime; în cea din stînga vom desena cîte un punct pentru fiecare submulțime separată din mulțimea inițială; în celalătă linie închisă rămasă vom figura tot cîte o submulțime de 4 puncte, de fiecare dată cînd separăm din mulțimea indicată în figura 204 cîte o submulțime de 4 puncte.

3° Se trece la realizarea practică a celor explicite mai sus, pe etape.

*Etapa 1:* Figura 204 ia aspectul figurii 206 și figura 205 ia aspectul figurii 207, după separarea primei submulțimi de 4 elemente.

*Etapa a 2-a:* Figura 206 ia aspectul figurii 208 și figura 207 ia aspectul figurii 209, după separarea celei de a doua submulțimi de 4 elemente.

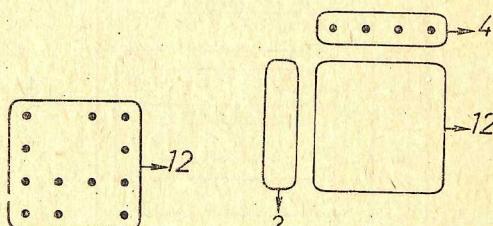


Fig. 204

Fig. 205

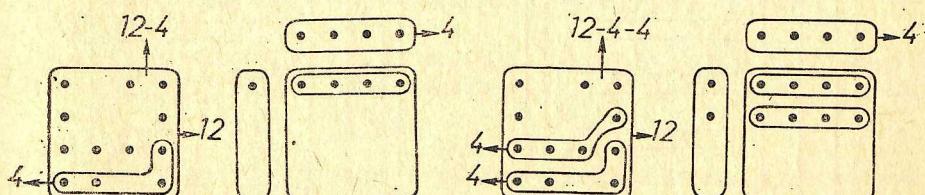


Fig. 206

Fig. 207

Fig. 208

Fig. 209

*Etapa a 3-a:* Figura 208 ia aspectul figurii 210 și figura 209 ia aspectul figurii 211, după separarea celei de treia submulțimi, cind, în cazul nostru, procedeul nu mai poate fi continuat.

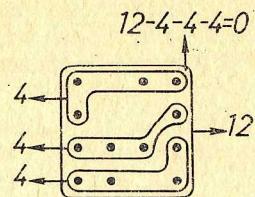


Fig. 210

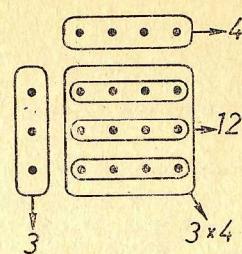


Fig. 211

Etapele de mai sus pot fi realizate pe un panou al trusei, ca în figurile 205\*, 207\*, 209\* și 211\*.

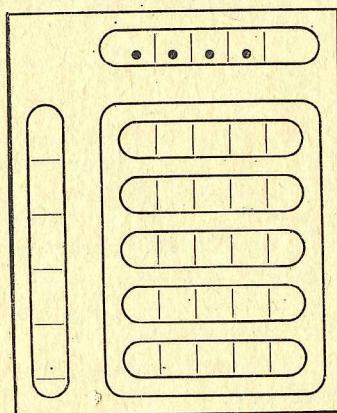


Fig. 205\*

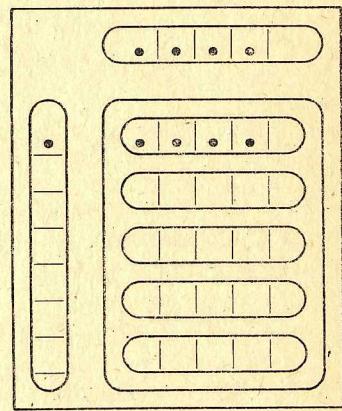


Fig. 207\*

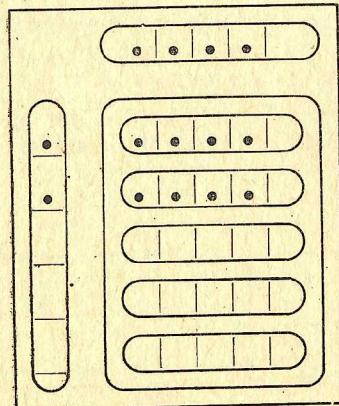


Fig. 209\*

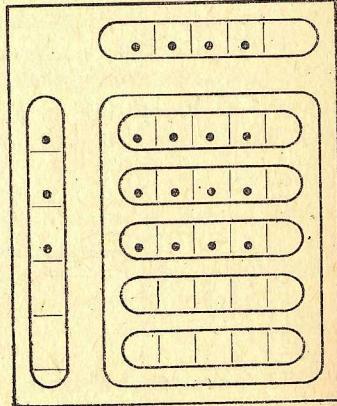


Fig. 211\*

Se constată că, repetând procedeul de mai sus utilizat în cazul în care mulțimea initială a constat din 12 discuri negre, pentru cazul cind ea a fost înlocuită cu 12 triunghiuri albastre, cu 12 pătrate roșii etc., pe tablă se obțin de fiecare dată aceleasi figuri (iar pe panoul trusei, același aspect).

Așadar, separând dintr-o mulțime de 12 elemente (indiferent care ar fi acestea), submulțimi disjuncte între ele de cîte 4 elemente fiecare, se obțin totdeauna 3 submulțimi.

Observăm că în figura 211 mulțimea din stînga are 3 elemente, atîtea cîte submulțimi s-au obținut, iar mulțimea de sus are 4 elemente, atîtea cîte s-au separat în fiecare submulțime.

Tinînd seama de aspectul figurii 211 și de definiția înmulțirii cu ajutorul mulțimii produs, se vede că avem:

$$12 = 3 \times 4.$$

#### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se deschid manualele la partea a 6-a, cap. 1, tema 1, subtema : „b) Separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, avînd numărul elementelor cunoscut“.

Se privesc cele două ilustrații. Prin discuții se subliniază că împărțirea fructelor în farfurioare s-a făcut prin procedeul zis prin „cuprindere“.

Se citește apoi problema din manual. Conduși de învățător, elevii vor observa că rezolvarea pe etape sugerată de figurile din manual este identică cu cele explicate la tablă prin figurile de la 204 la 211.

Se rezolvă în clasă exercițiile 1 și 2 din manual.

#### Procedeul prin „părți egale“

##### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Se aşază pe catedră aceeași cutie conținînd 15 discuri negre. Se cere elevilor să separe mulțimea discurilor din cutie în 3 submulțimi disjuncte, fiecare avînd același număr de elemente (aceste submulțimi urmînd a fi așezate pe catedră separat una de alta, fiecare pe cîte o carte, de exemplu).

După scurte discuții asupra modului în care poate fi îndeplinită cerința formulată, se stabilește următorul procedeu de lucru: *se aşază pe catedră 3 cărți* (cîte submulțimi trebuie formate); *se iau din cutie 3 discuri negre și se distribuie cîte unul pe fiecare carte*; *se iau apoi 3 discuri negre din cele rămase în cutie și se distribuie cîte unul pe fiecare carte*; *se continuă același procedeu pînă se epuizează discurile din cutie*<sup>1</sup>.

Un elev este scos la catedră și execută practic cele spuse mai sus. Se observă că în cutie nu rămîne nici un disc albastru (dacă ar fi rămas spuneam că cerința formulată nu poate fi îndeplinită).

<sup>1</sup> Discurile din cutie pot fi luate și succesiv (cum se arată în îndrumările pentru folosirea trusei). Elevii vor fi determinați să observe că pentru distribuirea a cîte un disc pe fiecare carte trebuie luate din cutie 3 discuri, ceea ce se poate face și simultan. Se ajunge la procedeul expus mai sus.

De asemenea, se observă că procedeul folosit asigură obținerea același număr de elemente în fiecare din cele 3 submulțimi, motiv pentru care el se numește prin „părți egale“. (Este un abuz de limbaj, deoarece cele 3 submulțimi obținute nu sunt egale, nefiind formate din exact aceleași elemente. Numai numerele de elemente ale lor sunt egale).

Se mai observă că în fiecare submulțime vom pune de atâtea ori cîte un element, de cîte ori putem lua cîte 3 elemente din cele 15 elemente. Așadar, dintr-o mulțime cu 15 elemente revin tot atâtea elemente în 3 submulțimi echipotente disjuncte între ele, cîte submulțimi de cîte 3 elemente disjuncte între ele pot fi formate din mulțimea celor 15 elemente. (Elevii nu vor reține enunțul ci faptul semnalat).

Astfel de observații vor fi făcute cu răbdare la toate exemplele următoare, pînă ideile respective vor fi sesizate și reținute de elevi, trecînd cu vederea eventualele imperfecțiuni în exprimare, mai ales la început.

Elevii vor execuța în bânci sub formă de muncă independentă aceeași sarcină, folosind boabe de grîu, castane etc.

Se fac probleme asemănătoare alegînd alte mulțimi, dar avînd grija de fiecare dată să se ia numărul de submulțimi astfel încît, în final, să nu rămînă elemente ale mulțimii alese, necuprinse în aceste submulțimi.

După ce procedeul de lucru va fi bine însușit de elevi, se va propune, pe rînd, separarea în 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, a mulțimilor formate din : 12 discuri negre ; 12 triunghiuri albastre ; 12 pătrate roșii (toate fiind luate din trusa învățătorului).

De fiecare dată se va constata că se obțin 3 elemente într-o submulțime. Așadar, numărul elementelor obținut într-o submulțime este perfect determinat numai de numărul elementelor mulțimii inițiale și de numărul de submulțimi ce trebuie formate, și nu este influențat de natura elementelor.

Această observație va deveni mai evidentă cînd învățătorul, după rezolvarea practică a problemei de către elevi, va explica de fiecare dată procedeul care s-a folosit, în felul următor :

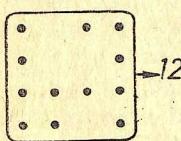


Fig. 212

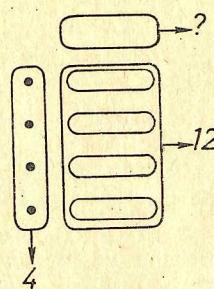


Fig. 213

1° Execută pe tablă diagrama Euler-Venn a mulțimii date inițial pentru a fi separată în submulțimi, ca în figura 212.

2° Execută pe tablă, alăturat, figura 213, în care : linia închisă situată „vertical“ în stînga conține 4 puncte, arătînd cîte submulțimi trebuie separate din mulțimea inițială ; în dreapta ei este o linie închisă ce reprezintă mulțimea inițială cu 12 elemente, în interior fiind figurate prin linii

închise cele 4 submulțimi disjuncte ce trebuie formate (necunoscînd cîte elemente are una din ele, elementele lor nu pot fi încă figurate) ; deasupra acesteia este o linie închisă în care vom desena cîte un punct de fiecare dată cînd vom distribui cîte un element în submulțimile ce trebuie formate, din cele 4 elemente pe care le luăm, succesiv, din mulțimea inițială indicată în figura 212.

3° Se trece la realizarea practică, pe etape, a celor explicate mai sus.

*Etapa 1 :* Se separă în figura 212 o submulțime de 4 elemente, aceasta luînd aspectul din figura 214. Prin distribuirea lor în cele 4 submulțimi, arătate în figura 213, figura 213 ia aspectul din figura 215.

*Etapa a 2-a*: Figura 214 ia aspectul din figura 216 și figura 215 ia aspectul din figura 217, după separarea celei de a doua submulțimi din mulțimea inițială și distribuirea elementelor ei în cele 4 submulțimi din figura 215.

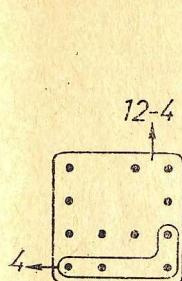


Fig. 214

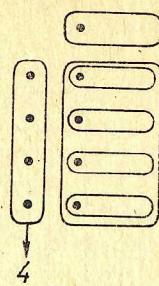


Fig. 215

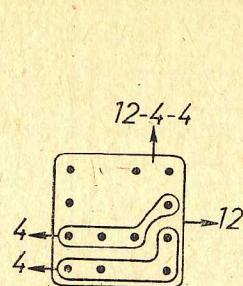


Fig. 216

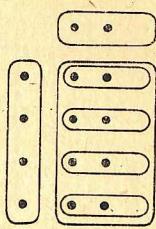


Fig. 217

*Etapa a 3-a*: Figura 216 ia aspectul din figura 218 și figura 217 ia aspectul din figura 219, după separarea celei de a treia submulțimi din mulțimea inițială și distribuirea elementelor ei în cele 4 submulțimi din figura 217. Se vede că procedeul nu mai poate fi continuat, elementele mulțimii inițiale fiind epuizate.

Etapele de mai sus pot fi realizate pe un pariu al trusei, ca în figurile 213\*, 215\*, 217\* și 219\*.

Dacă aplicăm procedeul de mai sus în cazul în care înlocuim mulțimea celor 12 discuri negre, cu 12 triunghiuri albastre sau cu 12 pătrate roșii, se constată că de fiecare dată pe tablă se obțin aceleși figuri (iar pe panoul trusei, același aspect).

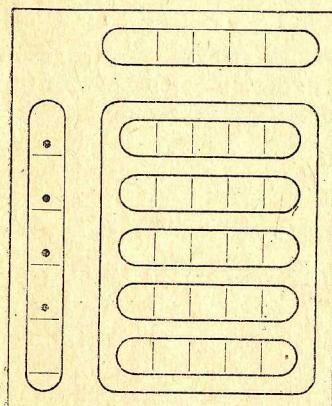


Fig. 213 \*

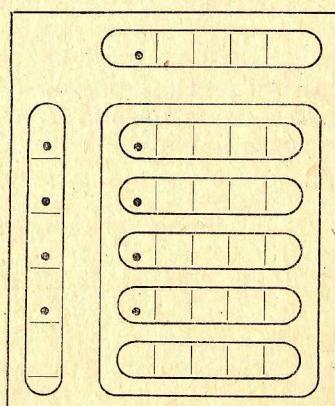


Fig. 215 \*

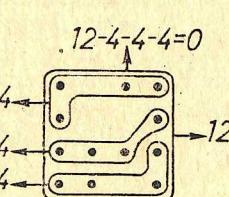


Fig. 218

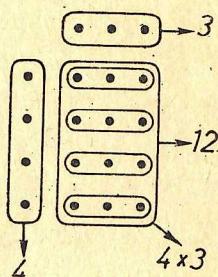


Fig. 219

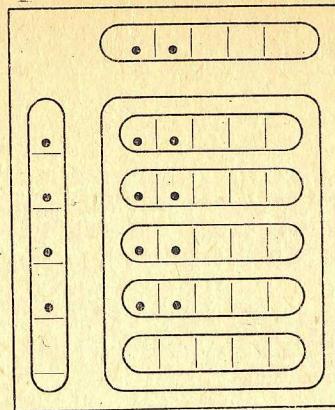


Fig. 217 \*

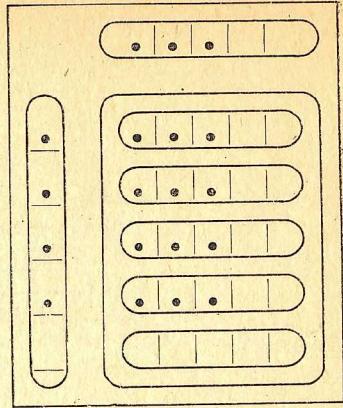


Fig. 219 \*

Așadar, separând dintr-o mulțime cu 12 elemente (indiferent care ar fi aceasta) 4 submulțimi disjuncte între ele fiecare având același număr de elemente, se obțin totdeauna cîte 3 elemente într-o submulțime.

Observăm că în figura 219 mulțimea din stînga (desenată „vertical“) are 4 elemente, atîtea cîte submulțimi au trebuit formate, iar mulțimea de „deasupra“ are 3 elemente, atîtea cîte s-au obținut în fiecare submulțime.

Tinînd seama de aspectul figurii 219 și de definiția înmulțirii cu ajutorul mulțimii produs, se vede că avem

$$12 = 4 \times 3.$$

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Se organizează prin analogie cu cele recomandate în legătură cu procedeul prin „cuprindere“.

#### TEMA A 2-A : ÎMPĂRTIREA NUMERELOR NATURALE CU AJUTORUL SEPARĂRII DE SUBMULȚIMI DISJUNCTE, AVIND ACELAȘI NUMĂR DE ELEMENTE

**Scop:** Cunoașterea modului de efectuare a împărțirii prin „cuprindere“ și a împărțirii prin „părți egale“. Observarea independenței cîțului de procedeul de efectuare a împărțirii, pentru o aceeași pereche de numere naturale ca deîmpărțit și împărțitor.

#### Recomandări metodice pentru predarea temei

##### a) Activități desfășurate cu elevii, fără folosirea manualului

Prezentarea temei poate începe cu cerința ca elevii să separe dintr-o mulțime de 8 bețișoare (luate dintr-o pungă cu bețișoare dinainte pregătită), submulțimi disjuncte între ele, de cîte 4 bețișoare. Se observă că pentru îndeplinirea acestei cerințe se folosește procedeul prin „cuprindere“, obținîndu-se 2 submulțimi.

Prin discuții cu elevii se va aminti din alte lecții că înlocuind cele 8 bețișoare cu 8 grăunțe, 8 monede etc., și separând tot submulțimi disjuncte de cîte 4 elemente, se obțin de fiecare dată 2 submulțimi. Numărul acestor submulțimi se notează și

$$8 : \square$$

și el depinde numai de numărul 8 al elementelor mulțimii în care dorim să separăm submulțimile disjuncte între ele și de numărul 4 al elementelor unei astfel de submulțimi, și nu depinde de natura elementelor respective. Se vede că

$$8 : 4 = 2.$$

Pe baza celor de mai sus, scrierile de forma  $15 : 3$  vor reprezenta numărul de submulțimi disjuncte între ele ce pot fi formate dintr-o mulțime oarecare cu 15 elemente, astfel ca fiecare din ele să aibă 3 elemente.

Scrierile de acest fel arată o nouă operație cu numere naturale numită împărțire. Avem :

$$15 : 3 = 5$$

↓      ↓      ↓  
 deîmpărțit    împărțitor    cît

: este semnul operației de împărțire. Procedeul expus aici pentru găsirea lui 5, rezultatul împărțirii lui 15 la 3, se numește împărțire prin „cuprindere“. Zicem că 3 se cuprinde în 15 de 5 ori.

Se vor efectua mai multe exerciții de împărțire prin cuprindere, folosind pentru deîmpărțit mulțimi model (bețișoare, discuri din trusă, boabe de grâu etc.), pentru ca toți elevii să deprindă acest mod de aflare a cîțului împărțirii a două numere :

$$12 : 4 = ; \quad 15 : 5 = ; \quad 18 : 6 = [; \quad \text{etc.}$$

Astfel de împărțiri vor fi efectuate și cu ajutorul panourilor corespunzătoare din trusa învățătorului.

Cu ocazia acestor exerciții se va avea grija a fi puse clar în evidență etapele de efectuare a împărțirii prin cuprindere, care au fost expuse mai înainte la „Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii“.

Se va propune apoi ca elevii să separe dintr-o mulțime de 8 bețișoare, 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare conținând același număr de elemente. Se observă că pentru îndeplinirea acestei cerințe se folosește procedeul prin „părți egale“, obținându-se 2 bețișoare în fiecare submulțime.

Prin discuții se va aminti că numărul elementelor obținute într-o submulțime depinde numai de numărul elementelor mulțimii inițiale și de numărul de submulțimi ce trebuie formate, și nu depinde de natura elementelor.

Se va aminti totodată că numărul elementelor obținute într-o submulțime este același cu numărul de submulțimi disjuncte între ele de cîte 4 elemente fiecare, ce pot fi formate dintr-o mulțime cu 8 elemente.

Ultima observație arată că numărul elementelor obținut într-o submulțime poate fi notat  $8 : 4$ , ca și numărul submulțimilor menționate.

De aici rezultă că împărțirea  $8 : 4$  = poate fi efectuată și prin procedeul zis prin „părți egale“. Se vor face și prin acest procedeu împărțirile făcute mai înainte prin „cuprindere“, folosind pentru deîmpărțit același mulțimi model ca și prin procedeul anterior :

$$12 : 4 = ; \quad 15 : 5 = ; \quad 18 : 6 = ; \quad \text{etc.}$$

Astfel de împărțiri vor fi efectuate și cu ajutorul panourilor corespunzătoare din trusa învățătorului.

Cu ocazia efectuării acestor împărțiri se va avea grija să fie puse clar în evidență etapele de efectuare a împărțirii prin „părți egale”, care au fost expuse de asemenea la „Cunoștințe și deprinderi cu care trebuie să rămînă elevii”.

### b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

În funcție de modul în care vor putea fi dozate cunoștințele în cadrul orelor, tema respectivă va fi citită din manual și analizat conținutul din perspectiva, celor studiate fără folosirea manualului, în trei reprezentații: una se va referi la împărțirea prin cuprindere; una se va referi la împărțirea în „părți egale”; una se va referi la efectuarea exercițiilor și problemelor cuprinse în manual, din care o parte se vor face în clasă cu rolul de fixare a cunoștințelor, restul vor fi propuse ca temă pentru acasă, dar vor fi discutate amănuntit în clasă în orele următoare.

**Indicații pentru rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 2-a**

#### *Exercițiile ce urmează după „Exemplu”*

Se iau mulțimi model pentru deîmpărțit (de exemplu mulțimi de puncte), se separă în submulțimi disjuncte fiecare având atâtea elemente cât este împărțitorul. Cîtul se află numărind cîte submulțimi s-au obținut.

$$15 : 3 = 5 \text{ (fig. 220) etc.}$$

#### *Exercițiile ce urmează după „Alt exemplu”*

##### *Exercițiul 1*

Se iau mulțimi model pentru deîmpărțit (de exemplu mulțimi de puncte) și se folosește procedeul prin „părți egale”.

$$15 : 3 = 5 \text{ (fig. 221) etc.}$$

##### *Exercițiul 3*

Se va folosi, pe rînd, procedeul prin „cuprindere” și procedeul prin „părți egale”, aplicate pentru o mulțime model aleasă după voie pentru deîmpărțit.

*Exercițiile și problemele de la sfîrșitul temei a 2-a*

##### *Problema 3*

$6 : 3 = 2$  efectuată prin cuprindere;  $6 : 2 = 3$  efectuată prin părți egale;  $2 \times 3 = 6$  conform definiției înmulțirii cu mulțimea

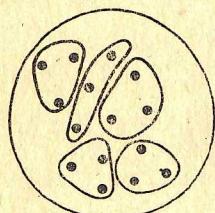


Fig. 220

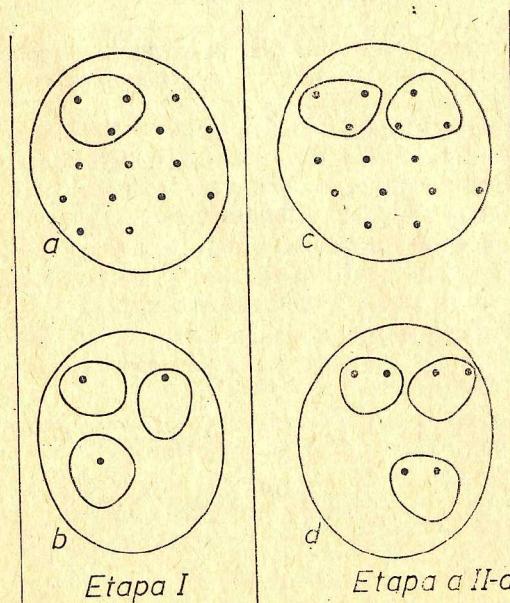


Fig. 221

produs;  $3 \times 2 = 6$  conform aceleiasi definiții sau scriind întii din figură  $2 \times 3 = 6$  și aplicînd comutativitatea înmulțirii.

#### Problema 4

- a)  $21 : 7 = 3$      $20 : 5 = 4$ .    b)  $21 : 3 = 7$ ;     $20 : 4 = 5$ .  
 c)  $3 \times 7 = 21$  și  $7 \times 3 = 21$ ;     $4 \times 5 = 20$  și  $5 \times 4 = 20$ .

#### Problema 5

$24 : 8 = 3$  efectuată prin cuprindere;  $24 : 3 = 8$  efectuată prin părți egale;  
 $3 \times 8 = 24$  efectuată prin adunare repetată;  $8 \times 3 = 24$ , din figură deducem  
 $3 \times 8 = 24$  și aici folosim comutativitatea.

#### Problema 6

- a)  $10 : 5 = 2$ ;  $24 : 6 = 4$ ;  $27 : 9 = 3$ . b)  $10 : 2 = 5$ ;  $24 : 4 = 6$ ;  $27 : 3 = 9$ .  
 c)  $2 \times 5 = 10$ ;  $4 \times 6 = 24$ ;  $3 \times 9 = 27$  și, respectiv, prin comutativitate  
 $5 \times 2 = 10$ ;  $6 \times 4 = 24$ ;  $9 \times 3 = 27$ .

*Observație:* Aici și la problema 5 mai sus, înmulțirile ce pot fi făcute se deduc și completînd figurile ca în figura 222; etc.

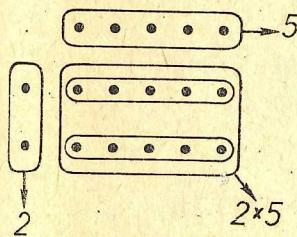


Fig. 222

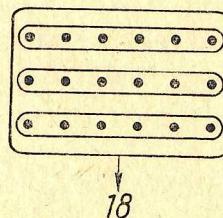


Fig. 223

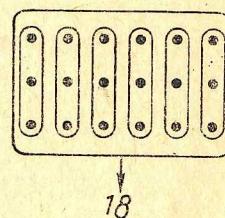


Fig. 224

#### Problema 7

Figura 223.  $18 : 3 = 6$ ; Fig. 224.  $18 : 6 = 3$ ;

Figura 225.  $18 : 3 = 6$ ; Fig. 226.  $18 : 6 = 3$ .

#### Problema 8

Figura 227.  $28 : 4 = 7$  efectuată prin cuprindere.

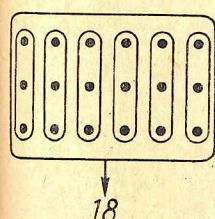


Fig. 225

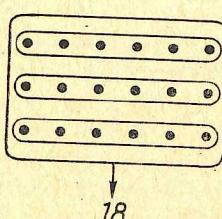


Fig. 226

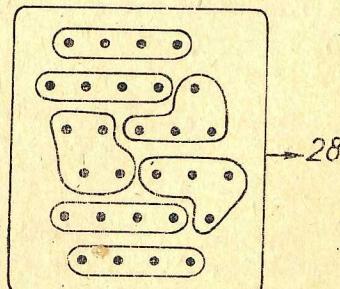


Fig. 227

### Problema 9

Figura 228.  $42 : 7 = 6$  efectuată prin părți egale (procedeul este același care a fost sugerat în figura 221).

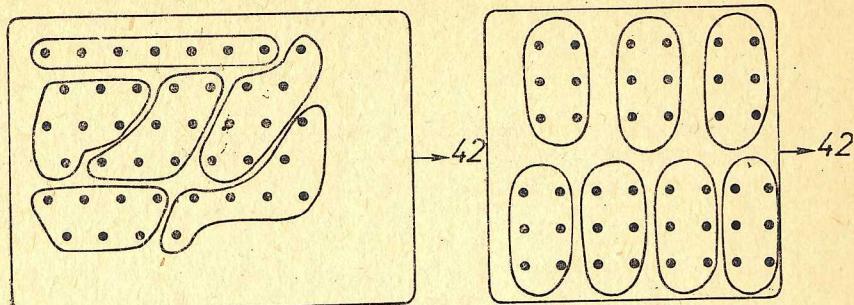


Fig. 228

## C apitolul 2 ÎMPĂRTIREA NUMERELOR NATURALE PRIN SCĂDERE REPETATĂ

### A. SCURTE OBSERVĂȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

#### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Analizînd modul de efectuare a împărțirii numerelor naturale cu ajutorul unei mulțimi model pentru deîmpărțit și folosind procedeul prin „cuprindere“ sau cel prin „părți egale“, se va deduce posibilitatea de calcul a cîțului prin scădere repetată a împărtitorului din deîmpărțit. Cîtul este tocmai numărul scăderilor ce pot fi făcute pînă se obține restul 0. Împărțirea prin 0 nu este definită. Împărțirea prin 1.

Exerciții și probleme simple.

#### 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RÂMINĂ ELEVII

Sînt cele prevăzute mai sus în programă și conținute în manual. Se va sublinia avantajul oferit de scăderea repetată pentru efectuarea împărțirii numerelor naturale prin calcul, folosirea mulțimilor model fiind foarte incomodă.

## B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 2 (Număr de ore, orientativ=3)

Elaborarea lecțiilor de către învățător, folosindu-se de programă și manual, nu poate crea dificultăți.

**Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la capitolul 2**

### *Exercițiu 7*

a) Se va folosi procedeul prin „cuprindere“, apoi procedeul prin „părți egale“.

### *Problema 8*

a) Figura 229.  $6 : 2 = 3$  efectuată prin „cuprindere“;

$$b) 6 - 2 = 4$$

$$4 - 2 = 2$$

$$2 - 2 = 0$$

Prin scădere repetată am găsit  $6 : 2 = 3$

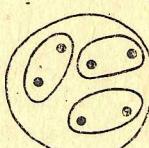


Fig. 229

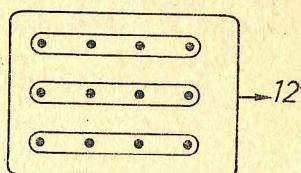


Fig. 230

### *Problema 9*

a) Figura 230.  $12 : 3 = 4$  efectuată prin „părți egale“; b)  $12 - 3 = 9$

$$9 - 3 = 6$$

$$6 - 3 = 3$$

$$3 - 3 = 0$$

Prin scădere repetată am găsit  $12 : 3 = 4$ .

## Capitolul 3

### LEGĂTURA DINTRE ÎNMULȚIRE ȘI ÎMPĂRTIRE

#### A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

##### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Pe baza observației făcute anterior că egalitățile:

$$20 : 4 = 5; \quad 20 : 5 = 4; \quad 4 \times 5 = 20; \quad 5 \times 4 = 20$$

sînt adevărate în același timp, se va face proba înmulțirii prin înmulțire și împărțire, și proba împărțirii prin înmulțire și împărțire.

Tabla împărțirii. Ideea întocmirii ei, folosind legătura dintre împărțire și înmulțire. Învățarea tablei împărțirii.

Exerciții și probleme simple de împărțire. Exerciții de tipul  $5 \times a = 20$ ;  $a \times 7 = 42$ ;  $48 : x = 8$ , cu scrierea soluțiilor  $a = 20 : 5$ ;  $a = 42 : 7$ ;  $x = 48 : 8$ .

Exerciții și probleme cu toate operațiile învățate (nu prea complicate).

## 2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMINĂ ELEVII

Să cunoască legătura dintre înmulțirea și împărțirea numerelor naturale. Să observe că dacă împărțim produsul a două numere naturale, la unul din cele două numere, obținem celălalt număr. Să poată face probele operațiilor de înmulțire și împărțire.

Elevii să știe să obțină tabla împărțirii folosindu-se de tabla înmulțirii și să cunoască pe de rost tabla împărțirii.

Să se formeze deprinderea de recunoaștere a problemelor care se rezolvă prin împărțire. În efectuarea împărțirilor rezultate din probleme, se va folosi tabla împărțirii sau scăderea repetată.

Se va cunoaște modul de calcul al unui factor al înmulțirii cînd știm produsul și celălalt factor, și modul de calcul al unui termen al împărțirii cînd știm cîțul și celălalt termen.

### B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL 3 (Număr de ore, orientativ=7)

Elaborarea lecțiilor după programă și manual nu poate crea dificultăți.  
**Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la capitolul 3**

**Tema a 2-a: Tabla împărțirii.**

*Subtema (b)*

*Exercițiul 3*

a)  $20 : 2 = 10$ ;  $12 : 2 = 6$ ;  $16 : 2 = 8$ . Etc.

*Exercițiul 4*

a)  $20 - 2 = 18$ ;  $12 - 2 = 10$ ;  $16 - 2 = 14$ . Etc.

*Problema 9*

$32 : 2 = 16$ ;  $32 : 4 = 8$ ;  $32 - 16 = 16$ ;  $16 - 8 = 8$ . 8 elevi joacă tenis.

*Problema 12*

$27 : 3 = 9$ . Lățimea dreptunghiului este de 9 m.

$2 \times 27 = 27 + 27 = 54$ ;  $2 \times 9 = 18$ ;  $54 + 18 = 72$ . Perimetru este de 72 m.

Sau:  $27 + 9 = 36$ ;  $2 \times 36 = 36 + 36 = 72$ . Perimetru este de 72 m.

*Subtema (c)*

*Problema 3*

a)  $35 : 5 = 7$ ; etc. b)  $36 - 6 = 30$ ; etc. c)  $36 : 6 = 6$ ; etc.

d)  $21 : a = 7$

$a = 21 : 7$

$a = 3$

$49 : b = 7$

$b = 49 : 7$

$b = 7$

$63 : c = 7$

$c = 63 : 7$

$c = 9$

*Exercițiul 4*

$$\begin{array}{l} a \times 5 = 40 \\ a = 40 : 5 \\ a = 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} a : 5 = 10 \\ a = 10 \times 5 \\ a = 50 \end{array} \quad \begin{array}{l} 36 : a = 6 \\ a = 36 : 6 \\ a = 6 \end{array} \quad \text{etc.}$$

*Problema 5*

$30 : 6 = 5$ . În acea clasă sînt 5 fete.  $30 + 5 = 35$ . Sînt 35 elevi în clasă.

*Problema 6*

$20 : 5 = 4$ . O carte costă 4 lei.  
 $2 \times 4 = 8$ . 2 cărți costă 8 lei.

*Problema 8*

$35 : 7 = 5$ . A doua carte are 5 ilustrații.  
 $35 + 5 = 40$ . Cele două cărți au 40 de ilustrații.

*Problema 9*

Efectuînd împărțirile, relațiile date se scriu :

$$5 > x; \quad 5 \geq x; \quad 7 + x \leq 10.$$

Prin încercări se găsește, pe rînd :

$$\{0, 1, 2, 3, 4\}; \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}; \quad \{0, 1, 2, 3\}.$$

*Subtema (d)*

*Problema 4*

$$\begin{array}{l} 9 \times a = 63 \\ a = 63 : 9 \\ a = 7 \end{array}$$

*Problema 5*

$$\begin{array}{l} 5 \times a = 45 \\ a = 45 : 5 \\ a = 9 \end{array} \quad \text{etc.}$$

*Problema 12*

$32 : 8 = 4$ . Un cearșaf are 4 m.  $5 \times 4 = 20$ . Pentru 5 cearșafuri sînt necesari 20 m de pînză.

*Problema 14*

$54 : 6 = 9$  Un kilogram de zahăr costă 9 lei.  
 $8 \times 9 = 72$  Pentru 8 kg zahăr se plătesc 72 lei.  
 $75 - 72 = 3$  De la 75 lei se primește rest 3 lei.

*Problema 17*

$72 : 9 = 8$  În punguță sînt 8 bomboane.  
 $72 - 8 = 64$  În cutie sînt 64 bomboane mai mult ca în punguță.

*Problema 18*

$22 - 8 = 14$   
 $22 + 14 = 36$   
 $36 : 9 = 4$  În fiecare grupă sînt 4 elevi.

*Problema 19*

$4 \times 9 = 36$  Zahărul a costat 36 lei.  
 $51 - 36 = 15$  Merele au costat 15 lei.  
 $15 : 3 = 5$  Kilogramul de mere a costat 5 lei.

## VII. UNITĂȚI DE MĂSURĂ (8 ore)

### SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

#### 1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Metrul, decametrul, hectometrul și kilometrul. Litrul, decalitrul, hectolitrul și kilolitrul. Kilogramul, chintalul și tona. Leul și banul. Ziua, ora, secunda, săptămâna, luna, anul. Calendarul. Citirea orei pe ceas.

Probleme diverse folosind unitățile de măsură învățate.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la partea a VII-a

După tema a 2-a

Problema 5

$$\text{Figura 231. } 23 \text{ dam} + 17 \text{ dam} = 40 \text{ dam.}$$

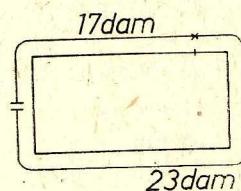


Fig. 231

Problema 7

$10 \times 10 = 100$ . Pe o parte a șoselei s-au plantat 100 de pomi.

$100 + 100 = 200$ . Pe ambele părți ale șoselei s-au plantat 200 de pomi.

Problema 8

$5 \text{ hm} - 2 \text{ hm} = 3 \text{ hm}$ . Lățimea dreptunghiului este de 3 hm.  
 $5 \text{ hm} + 3 \text{ hm} = 8 \text{ hm}$ ;  $2 \times 8 \text{ hm} = 16 \text{ hm}$ . Perimetru este de 16 hm.  
Sau:  $2 \times 5 \text{ hm} = 10 \text{ hm}$ ;  $2 \times 3 \text{ hm} = 6 \text{ hm}$ ;  $10 \text{ hm} + 6 \text{ hm} = 16 \text{ hm}$ .

După tema a 4-a, problema 5

$$67 \text{ kl} - 38 \text{ kl} = 29 \text{ kl}; \quad 67 \text{ kl} + 29 \text{ kl} = 96 \text{ kl.}$$

După tema a 7-a

Problema 3

$$4 \times 1 \text{ leu} = 4 \text{ lei}$$
$$4 \times 10 \text{ bani} = 40 \text{ bani}$$

Costul a 4 caiete este 4 lei și 40 bani.

Problema 4

$$8 \text{ lei} + 1 \text{ leu} = 9 \text{ lei}$$
$$35 \text{ bani} + 55 \text{ bani} = 90 \text{ bani}$$

Costul este de 9 lei și 90 bani.

După tema a 9-a

Răspunsuri: Problema a 2-a: 7 ore; problema a 3-a: 1 oră și 30 minute; problema a 4-a: ora 10 și 30 minute; problema a 5-a: ora 12 fără 10 minute; problema a 6-a: 10 ani; problema a 7-a: 9 ani, 21 ani, 30 de ani.

## VIII. EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE (10 ore)

**Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse**

*Problema 2*

Intersecția mulțimilor  $B$  și  $C$  conține numerele : 96 ; 97 ; 98 ; 99 ; 100 ; 101.

*Problema 3*

- a) Intersecția dintre  $A$  și  $B$  conține :  $r ; m$ . Intersecția dintre  $C$  și  $A$  conține :  $c ; m$ . Intersecția dintre  $C$  și  $B$  conține :  $m ; p$ .
- b) Diferența dintre  $A$  și  $B$  conține :  $a ; b ; c$ . Diferența dintre  $B$  și  $C$  conține :  $r ; s ; t$ . Diferența dintre  $C$  și  $B$  conține :  $c ; d$ .
- c) Singurul element comun mulțimilor  $A$ ,  $B$  și  $C$  este  $m$ .

*Problema 4*

- a) Figura 232.      b) Figura 233.      c) Figura 234.      d) Figura 235.

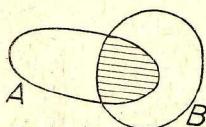


Fig. 232

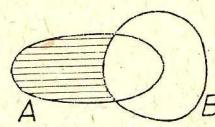


Fig. 233

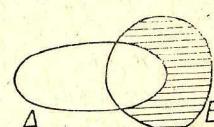


Fig. 234

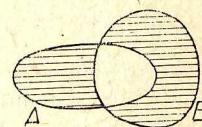


Fig. 235

*Problema 5*

- a)  $3 + 4 + 5 = 12$
- b)  $2 + 6 + 8 = 16$  ;      c)  $1 + 7 = 8$  ;
- d)  $39 + 21 + 100 = 160$ .
- e)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 =$   
 $= (1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + + (4 + 5)$   
 $= 9 + 9 + 9 + 9$   
 $= 4 \times 9$   
 $= 36$

*Problema 10*

$$\begin{aligned}100 \text{ km} + 30 \text{ km} &= 130 \text{ km}. \\30 \text{ km} + 130 \text{ km} &= 160 \text{ km}. \\130 \text{ km} + 160 \text{ km} &= 290 \text{ km}.\end{aligned}$$

În prima zi s-au parcurs 130 km.  
În a doua zi s-au parcurs 160 km.  
În cele două zile s-au parcurs 290 km.

### Problema 11

Mulțimea  $B$  are un singur element, 12; mulțimea  $C$  are un singur element, 25.

### Problema 12

$(8 \times 3) + (4 \times 9) = 24 + 36 = 60$ . Cumpărăturile au costat 60 lei.

### Problema 16

$58 - (4 \times 8) = 58 - 32 = 26$ . A doua zi au venit 26 muncitori.

### Problema 18

$$4 \times (4 + 5) = 4 \times 9 = 36$$

### Problema 20

Pentru primele două găsim prin încercări:

$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \quad \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Pentru al treilea exercițiu găsim mai întâi prin încercări  $12 < (x \times 6)$  pentru oricare din numerele naturale mai mari ca  $2; \{3; 4; 5; \dots\}$ , iar apoi  $(x \times 6) \leq 36$  pentru oricare din numerele naturale mai mici decât 7:  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Scrierea

$$12 < (x \times 6) \leq 36$$

va fi adevărată pentru numerele naturale  $x$  care satisfac amândouă condițiile de mai sus: 3, 4, 5 și 6.

$$* x \in \{3; 4; 5; \dots\} \cap \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}; x \in \{3; 4; 5; 6\}$$

### Problema 21

$$\text{a)} F = \{4; 8\}. \quad \text{b)} G = \{5\}. \quad \text{c)} H = \{5; 6; 10\}.$$

### Problema 22

$$40 = (4 \times 10) + 0; \quad 206 = (2 \times 100) + (0 \times 10) + 6; \\ 700 = (7 + 100) + (0 \times 10) + 0 \text{ etc.}$$

### Problema 23

$$20 + 16 = 36 \quad \text{Sau} \quad 20 : 4 = 5 \quad \text{Cu toți elevii clasei s-au format} \\ 36 : 4 = 9 \quad 16 : 4 = 4 \quad 9 \text{ rînduri.} \\ 5 + 4 = 9$$

### Problema 32

#### Figura 236

$$A = \{1; 2; 5; 6\}; B = \{3; 4; 5; 6\}$$

### Problema 33

- a)  $B = \{0; 3\}$  sau  $B = \{3; 4\}$  sau  $B = \{11; 7\}$  etc.  
 b)  $B = \{1; 2\}$  sau  $B = \{2; 1\}$ . Deși s-a obținut aceeași mulțime, prima dată am făcut  $a = 1$  și  $b = 2$ , a doua oară am făcut  $a = 2$  și  $b = 1$ , deci sunt rezolvări diferite.

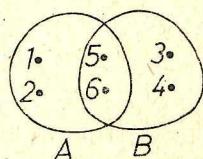


Fig. 236

*Problema 34*

- a)  $A = \{4, 5, 6, 7\}$ ;  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .  $A$  și  $B$  au unele elemente comune: 4, 5 și 6.
- b)  $A = \{5, 6\}$ ;  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .  $A$  este inclusă în  $B$ . Elemente comune: 5, 6.

*Problema 35*

- a)  $E = \{278, 279\}$ ;  $F = \{281, 282, 283\}$ .  $E$  și  $F$  sunt mulțimi disjuncte.
- b)  $E = \{407, 408, 409, 410\}$ ;  $F = \{407, 408, 409, 410\}$ .  $E$  și  $F$  sunt mulțimi egale.

*Problema 36*

$B = \{28, 35, 43, 56\}$ ;  $C = \{15, 21, 28, 35, 43\}$ .

a) Intersecția lui  $B$  cu  $C$ :  $\{28, 35, 43\}$ ;

b) diferența dintre  $B$  și  $C$ :  $\{56\}$ ;

c) diferența dintre  $C$  și  $B$ :  $\{15, 21\}$ .

*Problema 37*

{Ana, Dan, Elena}

*Problema 38*

a) {Monica, Costel}; b) {Vlad}.

Peste 32 de ani: a) { }; b) {Elena, Vlad}.

Peste 22 de ani: a) {Monica, Costel, Ana}; b) {Vlad}.

*Problema 39*

Din mulțimea persoanelor:

$E = \{\text{Monica, Costel, Ana, Dan, Elena, Vlad}\}$

având vîrstele, respectiv, 19, 22, 28, 36, 42 și 54 de ani, alegeti submulțimea  $B$  a persoanelor din  $E$ , a căror vîrstă peste 28 de ani va trece de 50 de ani, iar cu persoanele care peste 28 de ani vor avea cel mult 70 de ani, formați o submulțime  $C$  a mulțimii  $E$ .

Găsiți mulțimea persoanelor din  $E$  care peste 28 de ani:

- a) vor fi trecute de 50 de ani dar nu vor depăși 70 de ani;
- b) vor fi trecute de 70 de ani;
- c) nu vor fi trecute de 50 de ani.

*Exercițiul 40*

Exemplu de calcul pentru  $a = 2 \times 3$ ,  $b = 1 \times 9$  și  $c = 2 \times 8$ :

$$\begin{array}{llll} a = 2 \times 3 & b = 1 \times 9 & c = 2 \times 8 & (a \times b) + c = (6 \times 9) + 16 \\ a = 6 & b = 9 & c = 16 & = 54 + 16 \\ & & & = 70 \end{array}$$

$$(a \times b) + c = 70$$

### Exercițiul 41

$$\begin{aligned} \text{a) } (5 + 2) \times 6 &= 7 \times 6 \\ &= 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5 \times 6) + (2 \times 6) &= 30 + 12 \\ &= 42 \end{aligned}$$

$$(5 + 2) \times 6 = 42$$

$$(5 \times 6) + (2 \times 6) = 42.$$

Scrierea:  $(5 + 2) \times 6 = (5 \times 6) + (2 \times 6)$  este adevărată.

$$\begin{aligned} \text{e) } (7 \times 6) + 3 &= 42 + 3 \\ &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7 + 3) \times (6 + 3) &= 10 \times 9 \\ &= 90 \end{aligned}$$

$$(7 \times 6) + 3 = 45$$

$$(7 + 3) \times (6 + 3) = 90.$$

Scrierea:  $(7 \times 6) + 3 (7 + 3) \times (6 + 3)$  este falsă.

### Exercițiul 42

$$\begin{aligned} \text{a) } (12 - 10) \times (12 + 10) &= 2 + 22, \text{ deci } (12 - 10) \times (12 + 10) = 44 \\ &= 22 + 22 \\ &= 44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 121 + (5 \times 9) &= 121 + 45 \text{ deci } 121 + (5 \times 9) = 166 \\ &= 166 \end{aligned}$$

### Problema 43

Scrierea rezolvării conduce la exercițiul (a) de la (42).

### Problema 44

Scrierea rezolvărilor conduce, respectiv, la exercițiile (b), (c) și (d) de la (42).

### Problema 45

$$\begin{array}{lll} \text{a) } n + 7 = 18 & \text{b) } n \times 7 = 56 & \text{c) } (n + 7) \times 7 = 56 \\ n = 18 - 7 & n = 56 : 7 & n + 7 = 56 : 7 \\ n = 11 & n = 8 & n + 7 = 8 \\ & & n = 8 - 7 \\ & & n = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d) } n - 7 = 18 & \text{c) } (n - 7) : 7 = 7 & \text{f) } (n - 7) \times 7 = 49 \\ n = 18 + 7 & n - 7 = 7 \times 7 & n - 7 = 49 : 7 \\ n = 25 & n - 7 = 49 & n - 7 = 7 \\ & n = 49 + 7 & n = 7 + 7 \\ & n = 56 & n = 14 \end{array}$$

**N o t ā:** Se folosesc proprietățile operațiilor prin care, cunoscând rezultatul și unul din numere se află celălalt număr.

*Problema 54*

a) Se vede că  $n \leq 8$  și  $p \leq 8$ . Din  $n \times p = 8$ , rezultă  $8 : n = p$ . Făcind pe  $n$  egal pe rînd, cu  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  și  $8$ , obținem:  $n = 1$  și  $p = 8$ ;  $n = 2$  și  $p = 4$ ;  $n = 4$  și  $p = 2$ ;  $n = 8$  și  $p = 1$ . Calculele se pot așeza ca în tabelul:

$n \times p$	8	8	8	8	8	8	8	8
$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$8 : n = p$	—	8	4	—	2	—	—	1

de unde:  $\{(1,8), (2,4), (4,2), (8,1)\}$

b) Factorul  $p + 3$  este egal cu numărul  $p$  găsit la întrebarea anterioară. Micșorîndu-l cu  $3$  obținem numărul  $p$  în cazul de față:  $8 - 3 = 5$ ;  $4 - 3 = 1$ ;  $2 - 3 = \text{imposibil}$ ;  $1 - 3 = \text{imposibil}$ .

Așadar, mulțimea perechilor  $(n, p)$  este

$$\{(1, 5), (2, 1)\}$$

*Problema 55*

Observăm că:  $2 < n < 9$  și  $2 < p < 9$ . Totodată ca să putem efectua  $p - 4$ , este necesar să avem  $p \geq 4$ . Așadar:

$$2 < n < 9 \text{ și } 3 < p < 9$$

Produsul factorilor  $n - 3$  și  $p - 4$  este  $0$ , dacă măcar unul din acești factori este  $0$ .

În cazul  $n - 3 = 0$  avem  $n = 3$ ,  $p$  putînd fi orice număr natural cuprins între  $3$  și  $9$  obținem perechile:

$$\{(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8)\}.$$

Dacă avem  $p - 4 = 0$ , atunci  $p = 4$ , iar  $n$  poate fi orice număr cuprins între  $2$  și  $9$ . Obținem perechile:

$$\{(3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (7, 4), (8, 4)\}.$$

Cum toate perechile găsite satisfac problema, avem rezultatul final:

$$\{(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (7, 4), (7, 4), (8, 4)\}$$

*Problema 56*

Numărul natural căutat este elemental mulțimii numerelor naturale cuprinse între  $13$  și  $37$ , care se împart la  $5$ :

$$\{15, 20, 25, 30, 35\}$$

și, în același timp, al mulțimii numerelor naturale cuprinse între  $13$  și  $37$ , care se împart la  $6$ :

$$\{18, 24, 30, 36\}$$

Cum singurul element comun al acestor mulțimi este  $30$ , el va fi numărul căutat.

**TRUSA**  
**PENTRU PREDAREA, PE BAZĂ DE MULTIMI, A OPERAȚIILOR**  
**CU NUMERE NATURALE LA CLASELE I–IV**

**CONTINUT**

— 33 de plăcuțe dreptunghiulare din placaj, de diferite dimensiuni, unele având aplicate diferite profiluri din placaj și trasate diverse linii colorate. Pe spatele fiecărei plăcuțe este scris un număr de ordine. Numerotarea merge doar pînă la 28, deoarece există și cîte două plăcuțe identice, care poartă același număr : 8, 9, 14, 27 și 28.

— 4 pungi de plastic, conținînd, respectiv : 100 de „discuri“ negre ; 30 de „triunghiuri“ albastre ; 30 de „pătrate“ roșii ; 5 „dreptunghiuri“ negre.

— 1 pungă de plastic, conținînd 3 clame metalice simple și 3 clame metalice duble.

— 4 rigle paralelipipedice din lemn, prevăzute la capete cu găuri și nituri și de-a lungul cărora este practicat un canal.

— 1 cutie paralelipipedică din P.F.L. cu capac rabatabil de placaj, în care sînt depozitate toate materialele enumerate mai sus.

**CE SE POATE REALIZA CU PIESELE DIN TRUSA**

a) 15 panouri, din care :

— 11 panouri pentru predarea adunării și scăderii în mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100.

— 2 panouri pentru predarea noțiunilor de înmulțire și împărțire a numerelor naturale.

— 2 panouri pentru introducerea figurii numerice ce corespunde structurii zecimală a unei mulțimi date și folosirea ei pentru numirea și scrierea numărului de elemente al mulțimii, cînd acesta este cuprins între 9 și 1 000.

b) 4 planșete, suport pentru plăcuțele cu care se realizează cele 15 panouri sus menționate.

**MODUL DE REALIZARE  
A PLANŞETELOR SUPORT ȘI A PANOURILOR**

Pentru predarea anumitor cunoștințe din programă și manual, se caută la „CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU“ dacă există un panou care poate fi folosit în acel scop\*.

În caz afirmativ, se reține numărul acestuia și se trece la realizarea lui, procedînd astfel :

**Pregătirea materialelor necesare**

Din tabelul 2 se găsesc numerele plăcuțelor din care poate fi alcătuit acel panou și se scot aceste plăcuțe din cutia trusei. Tot din tabelul 2 se găsește numărul planșetei ce servește ca suport pentru plăcuțele care alcătuiesc panoul.

\* Formularea sintetică a destinației fiecăruia panou este dată în „TABELUL 1“.

Se caută în tabelul 3 numerele plăcuțelor din care se asamblează planșeta, precum și rglele și clamele metalice necesare. Se scot din cutia trusei toate aceste piese.

#### Realizarea planșetelor

Asamblarea plăcuțelor pentru realizarea planșetelor suport este dată în figurile 1, 2, 3 și 4.

Sprijinirea acestor plăcuțe, astfel încât planșeta să stea într-un plan puțin inclinat față de verticală, se realizează cu ajutorul celor patru rigle paralelipipedice din lemn.

#### Pentru planșetele 1, 2 și 3

Se îmbină rglele de aceeași lungime ca plăcuțele componente, introducând nitul din capătul unei rigle, în orificiul din capătul alteia, aşa cum ilustrează figurile 5 și 6.

În canalul rglelor astfel asamblate se introduc, pe rînd, marginea cu dimensiunea mai mare a fiecărei plăcuțe din componența planșetei, aşa cum sugerează figura 7.

Așezind rglele cu partea opusă canalului practicat în ele pe o masă obișnuită, se obține planșeta într-o poziție aproape verticală, oferind vizibilitate din clasă pentru ceea ce se va așeza pe planșetă, fără ca piesele respective să cadă, datorită înclinației existente.

Pentru asigurarea rigidității necesare pentru planșetă, plăcuțele se prind între ele la partea superioară cu cîte o clamă metalică simplă (exemplu clama (c), figura 7).

#### Pentru planșeta 4

După procedeul expus, se realizează asamblarea din figura 8. Drept rgle de sprijin se folosesc cele două rgle mai lungi, în care se fixează plăcuțele cu numărul 27, introduse în canalul rglelor, cu latura cea mai scurtă. Se plasează apoi cele trei clame metalice duble ( $d_1$ ,  $d_2$ ) și  $d_3$  și în ele se introduc plăcuțele cu numerele 28, cu latura cea mai scurtă.

În partea superioară se prinde clama metalică simplă (e). Pentru asigurarea stabilității planșetei, aceasta se rezernă de cutia trusei, așezată pe față de arie mai mică.

#### Realizarea panourilor

Pe planșeta suport corespunzătoare panoului respectiv, asamblată după indicațiile anterioare, se așază, alăturîndu-le una de alta, plăcuțele componente ale panoului care dorim să-l realizăm, aşa cum rezultă din figurile care indică „ASAMBLAREA PLĂCUȚELOR PENTRU REALIZAREA PANOURILOR“.

Așezarea se face astfel încît partea pe care este scris numărul plăcuței să vină pe planșetă.

Facem observația că punctul scris jos la dreapta fiecărui număr de ordine al plăcuțelor indică „baza“ numărului. Exemple : 9. (nouă) ; 6. (șase) ; 8. (opt) etc. Acest lucru este util la asezarea plăcuțelor, deoarece, de exemplu plăcuța indicată în figură prin numărul „8.“ se va așeza la locul indicat în poziția normală, iar dacă în figură numărul plăcuței este scris „8.“, ea va fi așezată în acel loc în poziție „răsturnată“ (numărul venind cu „capul în jos“).

După așezarea plăcuțelor conform indicațiilor, se compară aspectul panoului obținut, cu aspectul care „trebuia” obținut, existent în figurile care arată „ASPECTUL PANOURILOR CE POT FI REALIZATE”.

#### CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU

##### Panoul nr. 1.

- Formarea reuniunii mulțimilor disjuncte.
- Comutativitatea reuniunii.
- Mulțimea diferență dintre o mulțime și o submulțime a sa.
- Legătura dintre reuniunea a două mulțimi și diferența dintre reuniune și una din ele.
- Definiția adunării numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte.
- Efectuarea adunării a doi termeni în mulțimea numerelor naturale pînă la 10, folosind definiția adunării și numărarea.
- Comutativitatea adunării numerelor naturale ; proba adunării prin adunare.

##### Panoul nr. 2.

Aceeași utilizare ca și a panoului 1. În plus, face posibilă evitarea numărării în scopul aflării numărului elementelor reuniunii, ducînd treptat la formarea automatismelor de efectuare a adunării în mulțimea numerelor naturale pînă la 10.

##### Panoul nr. 3.

- Formarea diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa.
- Necomutativitatea diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa.
- Definiția scăderii numerelor naturale cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa.
- Efectuarea scăderii în mulțimea numerelor naturale pînă la 10, folosind definiția scăderii și numărarea.
- Legătura dintre adunare și scădere, pe baza legăturii dintre reuniunea a două mulțimi și diferența dintre reuniune și una din cele două mulțimi.
- Aflarea unui termen al adunării cînd știm suma și celălalt termen ; proba adunării prin scădere.
- Aflarea unui termen al scăderii cînd știm diferența și celălalt termen ; proba scăderii prin scădere și prin adunare.

##### Panoul nr. 4.

În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, folosind structura zecimală a termenilor adunării :

###### a) Adunarea fără trecere peste ordin a :

- două numere formate numai din zeci ;
- unui număr format numai din zeci cu un număr format numai din unități ;
- unui număr format din zeci și unități cu un număr format numai din unități ;
- două numere formate, fiecare, din zeci și unități.

b) Adunarea cu trecere peste ordin a:

- două numere ce se scriu cu câte o cifră;
- unui număr format din zeci și unități cu un număr format numai din unități;
- două numere formate fiecare din zeci și unități.

**N o t ă :**

Panoul poate fi utilizat și în toate situațiile menționate pentru panoul nr. 1, referitor atât la mulțimea numerelor naturale pînă la 10, cât și la mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100.

**Panoul nr. 5.**

— Formarea diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, cînd mulțimea are o structură numerică zecimală, astfel încît mulțimea diferență să aibă și ea o structură numerică zecimală.

*Efectuarea scăderii fără trecere peste ordin :*

În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, folosind structura zecimală a termenilor scăderii, deducerea regulilor de calcul a diferenței în cazurile :

- Două numere formate numai din zeci.
- Descăzutul format din zeci și unități și scăzătorul format numai din unități.
- Două numere, fiecare format din zeci și unități.

**N o t ă :**

Pot fi explicate și situațiile menționate la panoul nr. 3, atât pentru mulțimea numerelor naturale mai mici decît 10, cât și pentru mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100.

**Panoul nr. 6.**

Aceeași utilizare ca și a panoului nr. 5, dar permite și explicarea în cazul scăderii cu trecere peste ordin, dacă :

- Descăzutul este format numai din zeci, iar scăzătorul este format numai din unități.
- Descăzutul este format din zeci și unități, iar scăzătorul este format numai din unități.
- Descăzutul este format numai din zeci, iar scăzătorul este format din zeci și unități.
- Descăzutul și scăzătorul conțin, fiecare, și zeci și unități.

**Panoul nr. 7.**

În mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, folosind structura zecimală a termenilor, deducerea regulilor de calcul la adunarea a trei numere :

- fără trecere peste ordin ;
- cu trecere peste ordin (suma numerelor reprezentate de cifrele unităților conține una sau două zeci).

#### Panoul nr. 8.

În mulțimea numerelor naturale mai mici decât 1 000, folosind structura zecimală a termenilor, deducerea regulilor de calcul la :

##### *Adunarea fără trecere peste ordin a :*

- unui număr format numai din sute, cu un număr format din zeci și unități ;
- unui număr format numai din sute, cu un număr format numai din zeci ;
- unui număr format numai din sute, cu un număr format numai din unități ;
- două numere formate numai din sute ;
- două numere formate, fiecare, din sute, zeci și unități ;
- două numere, din care cel puțin unul se scrie cu trei cifre ;
- două numere în situația anterioară, în cazul în care unul, sau amândouă, conțin unul sau două zerouri.

##### *Adunarea cu trecere peste ordin a :*

- două numere formate, fiecare, din sute, zeci și unități ;
- două numere din care cel puțin unul este scris cu trei cifre ;
- două numere în situația anterioară, în cazul în care unul, sau amândouă, conțin cîte un zero.

#### **N o t ă :**

Pot fi explicate și situațiile menționate la panourile 1 și 4, lucrînd în oricare din mulțimea numerelor naturale mai mici decât 10, mai mici decât 100 sau mai mici decât 1 000.

#### Panoul nr. 9.

Aceeași utilizare ca și a panoului nr. 5, dar poate fi folosit și în legătură cu mulțimea numerelor naturale mai mici decât 1 000, la :

##### *Scăderea fără trecere peste ordin :*

- a două numere formate numai din sute ;
- a două numere formate, fiecare, din sute, zeci și unități ;
- descăzutul este scris cu trei cifre diferite de 0, iar scăzătorul este scris cu una sau două cifre diferite de 0 ;
- descăzutul este scris cu trei cifre, scăzătorul este scris cu una, două sau trei cifre, în cazul în care unul, sau amîndoi termenii scăderii, conțin în scrierea lor unul sau două zerouri.

#### Panoul nr. 10.

Aceeași utilizare ca a panoului nr. 9, dar permite explicarea și în cazul în care avem :

##### *Scăderea cu trecere peste ordin :*

Descăzutul este scris cu trei cifre și :

- cifra unităților la scăzător arată un număr mai mare decât cea de la descăzut ;

- cifra zecilor scăzătorului arată un număr mai mare decât cea de la descăzut ;
- cifra unităților la scăzător arată un număr mai mare decât cea de la descăzut, iar cifra zecilor scăzătorului arată un număr care nu este mai mic decât cel arătat de cifra zecilor descăzutului ;
- cifra unităților la scăzător arată un număr mai mare decât cea de la descăzut, cifra zecilor descăzutului fiind 0.

**Panoul nr. 11.**

Aceeași utilizare ca a panoului 7, dar permite explicarea și în multimea numerelor naturale mai mici decât 1 000, pentru :

- a) *Adunarea a trei numere, fără trecere peste ordin.*
- b) *Adunarea a trei numere, cu trecere peste ordin, cînd :*
  - suma numerelor indicate de cifrele unităților conține una sau două zeci ;
  - suma numerelor indicate de cifrele zecilor conține una sau două sute ;
  - se întâlnesc simultan cele două situații de mai sus.

**Panoul nr. 12.**

- Organizarea unei mulțimi, avînd pînă la 100 de elemente, cu structură numerică zecimală.
- Sugerarea ideii de a reprezenta fiecare submulțime de cîte zece elemente din organizarea anterioară, printr-un simbol (o piesă triunghiulară albastră).
- Introducerea convenției de numire a numerelor naturale mai mari decât zece, dar cel mult egale cu o sută.
- Înmulțirea a două numere naturale cel mult egale cu 10 :
- a) folosind mulțimea produs ; b) folosind adunarea repetată.
- Împărțirea prin cuprindere și împărțirea în părți egale, în cazul în care împărțitorul și cîtul nu sunt mai mari decât 10 :
- a) cu ajutorul submulțimilor disjuncte ; b) cu ajutorul scăderii repetitive.
- Legătura dintre înmulțire și împărțire.

**Panoul nr. 13.**

- Organizarea unei mulțimi, avînd pînă la 25 de elemente, cu structură numerică în baza cinci.
- Sugerarea ideii de a reprezenta fiecare submulțime de cîte cinci elemente din organizarea anterioară, printr-un simbol (o piesă triunghiulară albastră).
- Înmulțirea a două numere naturale cel mult egale cu 5 :
- a) folosind mulțimea produs ; b) folosind adunarea repetată.
- Împărțirea prin cuprindere și împărțirea în părți egale, în cazul în care împărțitorul și cîtul nu sunt mai mari decât 5 :
- a) cu ajutorul submulțimilor disjuncte ; b) cu ajutorul scăderii repetitive.
- Legătura dintre înmulțire și împărțire.

**Panoul nr. 14.**

- Introducerea figurii numerice zecimale corespunzătoare structurii zecimală unei mulțimi cu mai puțin ca 100 de elemente, evidențiate pe panoul 12.
- Scrierea numerelor naturale mai mari ca 9 dar mai mici decât 100.

— Unități de ordinul întâi. Cifra unităților din scrierea unui număr. Unități de ordinul al doilea. Cifra zecilor din scrierea unui număr.

#### Panoul nr. 15.

- Introducerea figurii numerice zecimale corespunzătoare structurii zecimale a unei mulțimi cu mai puțin de 1 000 de elemente.
- Convenția de numire a numerelor mai mari decât o sută dar mai mici decât o mie.
- Scrierea numerelor mai mari decât 99, dar mai mici decât 1 000.
- Unități de ordinul al treilea. Cifra sutelor în scrierea unui număr.

### MODUL DE FOLOSIRE A PANOURILOR

În esență, panourile servesc la alcătuirea unor figuri numerice, ca mulțimi model cu structură numerică zecimală pentru numerele cu care avem a face diferite operații. Acestea vor permite folosirea cu o mare eficiență a intuiției în studiul numerelor naturale și a operațiilor cu ele, crescând posibilitatea înțelegerii prin „vizualizarea“ conținutului explicat.

Figurile numerice se obțin prin plasarea pe panouri, sprijinite pe rigluțele lipite ca profiluri pe plăcuțele panoului, a discurilor negre, triunghiurilor albastre și pătratelor roșii, aflate în cîte o pungă de plastic. (Nu este bine să fie amestecate în aceeași pungă, ceea ce creează greutăți în căutarea piesei potrivite în timpul folosirii panoului).

Fiecare disc negru constituie un element al mulțimii model; fiecare triunghi albastru reprezintă o mulțime de zece discuri negre ale mulțimii model; fiecare pătrat roșu reprezintă o sută de discuri negre al mulțimii model, sau zece triunghiuri albastre ale figurii numerice, respectiv zece zeci.

Așadar, mulțimea model folosită este o mulțime de discuri negre. Triunghiurile albastre și pătratele roșii servesc pentru a sugera structura numerică zecimală a mulțimii model. În afara figurilor numerice, triunghiurile și pătratele își pierd această semnificație, putind fi utilizate ca obiecte obișnuite.

Dreptunghiurile negre servesc pentru a scrie pe ele cu cretă numerele ce corespund figurilor numerice realizate pe panouri, urmînd a fi plasate în dreptul săgeților indicatoare existente, în care scop panourile sunt prevăzute în acele locuri cu profiluri de sprijin, realizate din riglute de placaj.

Modul în care se folosește fiecare panou la predarea diverselor cunoștințe, a căror însușire este optimizată prin utilizarea panoului respectiv, rezultă din conținutul manualului „Matematică manual pentru clasa a II-a“, ediția 1979, autori D. Roșca, V. Țifui și L. Mandric, precum și din conținutul lucrării „Matematică clasa a II-a — îndrumătorul învățătorului“, ediția 1979, autor D. Roșca.

Excepție fac panourile 1, 2, 3 și 10, a căror utilizare nu este de loc explicitată în lucrările menționate, deoarece 1, 2 și 3 sunt destinate mai ales utilizării lor în clasa I (chiar și la grădiniță), iar 10 este în legătură cu programa clasei a III-a.

Întrebuirea panourilor 8 și 11 nu a fost explicitată și pentru cazul adunării cu trecere peste ordin, aceasta intrînd în programa clasei a III-a. De asemenea, lămuririle existente în legătură cu utilizarea panourilor 12, 13, 14 și 15 sunt foarte sumare.

Din exemplele prezentate în continuare, completate cu conținutul cărților amintite, se va deduce suficient de clar, sperăm, tehnica utilizării tuturor

## panourilor trusei și pentru toate situațiile enumerate la „CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU“.

Atragem atenția că prezenta trusă nu este un dispozitiv de calculat (de tipul sorobanului japonez de pildă), ci unul destinat explicării definițiilor operațiilor, deducerii unor reguli și tehnici de calcul etc. În esență, este un mijloc de învățare. În consecință, utilizarea trusei nu urmărește să facă economie de timp în găsirea rezultatelor unor operații, ci în înțelegerea unor idei și tehnici de lucru, urmărește să adîncească această înțelegere. De aceea nu are sens a urmări formarea la elevi a deprinderilor de mînuire rapidă a trusei, ci a abilității de a folosi pentru descifrarea unor situații noi, pe baza cunoștințelor anterioare și a orientării gîndirii prin intermediul imaginilor vizuale adecvate situațiilor analizate.

Lucrul cu trusa este indicat numai pînă ce elevii înțeleg esența unor probleme legate de structura zecimală a mulțimii, numirea și scrierea numerelor cu ajutorul figurilor numerice, definiția fiecărei operații și cum se ajunge la una sau alta din regulile de calcul.

După deducerea acestor reguli, folosirea ei nu mai este justificată, în afară de cazurile în care se constată că se mențin sau apar confuzii în legătură cu noțiunile sau regulile respective, la unii elevi.

### EXEMPLE DE FOLOSIRE A TRUSEI

#### Exemplul 1

Organizarea unei mulțimi avînd pînă la 100 de elemente, cu structură numerică zecimală. Numirea și scrierea numărului de elemente al mulțimii.

Se caută în „TABELUL 1“, dacă există vreun panou care ar putea fi folosit în acest scop. Se pare că ar corespunde panourile 12 și 14. Citim la „CE SE POATE EXPLICA CU AJUTORUL FIECĂRUI PANOU“, cele menționate la panourile 12 și 14. Ne convingem că, în adevăr, panourile 12 și 14 pot fi folosite în scopul urmărit.

Ne uităm în „TABELUL 2“ și găsim că pentru realizarea panoului 12 avem nevoie de plăcuțele 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 și 26, iar pentru panoul 14 avem nevoie de plăcuțele 3 și 9. Scoatem aceste plăcuțe din trusă.

Din același tabel rezultă că panoul 12 se realizează pe planșeta suport nr. 4, iar panoul 14 se realizează pe planșeta suport nr. 1. În „TABELUL 3“ vedem că pentru realizarea planșetei suport 4 avem nevoie de : două plăcuțe cu numărul 27, două plăcuțe cu nr. 28, cele două rigle mai lungi, o clamă metalică simplă, 3 clame metalice duble. (Tot din „TABELUL 3“ vedem cele necesare planșetei 1 și constatăm că intră și în componența planșetei 4. Așadar, planșetele 1 și 4 nu vor putea fi realizate simultan). Scoatem din trusă toate aceste piese.

Realizăm planșeta suport nr. 4 și panoul nr. 12 (figurile 4, 8, 20 și 35), după procedeul descris la „MODUL DE REALIZARE A PLANŞETELOR SUPORT ȘI A PANOURILOR“. Înainte de amplasarea cutiei trusei ca suport pentru planșeta nr. 4, scoatem din trusă pungile de plastic, conținînd discurile negre și dreptunghiurile albastre.

Modul de utilizare a panoului 12 pentru explicarea temei anunțate este, pe scurt, următorul :

Se iau din punga de plastic conținînd discurile negre, o mulțime oarecare de discuri.

1) Se numără tot cîte zece discuri din mulțimea aleasă, completînd cu ele, concomitent cu numărarea, cîte o submulțime avînd zece locuri (căsuțe), din cele indicate pe panoul 12.

Alegînd exemplele în mod potrivit, se va pune în evidență că pînă la equizarea discurilor din mulțimea inițială, se pot ivi alternativele :

a) Rămîn discuri cu care nu mai putem completa o nouă mulțime de zece discuri.

b) Nu rămîn discuri în afara submulțimilor de cîte zece discuri.

Pe panoul 12 se obțin aspecte de felul figurii 39, care reprezintă organizarea mulțimii discurilor luate din punga de plastic, cu structură numerică zecimală.

2) Indicăm fiecare submulțime de cîte zece discuri de pe panoul 12, printr-un triunghi albastru așezat în stînga submulțimii respective, și fiecare disc din cele cu care nu am putut completa o submulțime de zece discuri, printr-un disc negru așezat în conturul de deasupra mulțimii inițiale, cum arată figura 40.

Alegînd mulțimi de discuri care să ne conducă la situația (b) de mai sus (fig. 41), numărăm submulțimile de cîte zece discuri din organizarea mulțimii

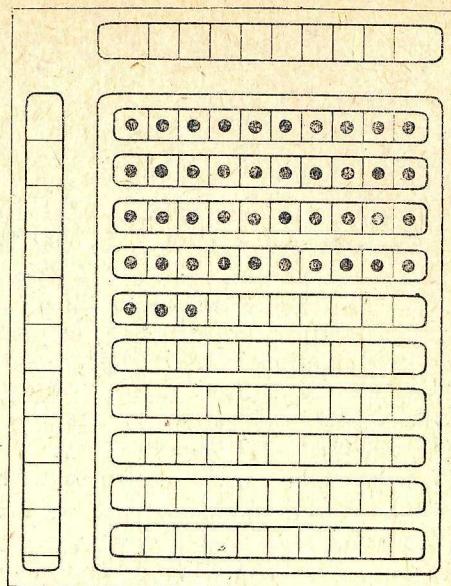


Fig. 39.T

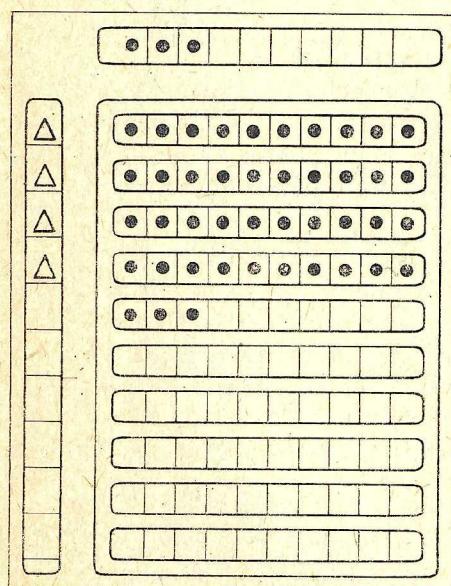


Fig. 40.T

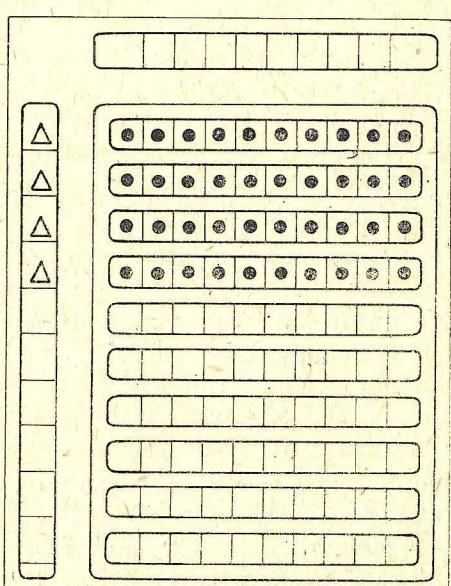


Fig. 41.T

discurilor cu structură numerică zecimală, numărind triunghiurile albastre așezate în conturul din stînga pe panoul 12. Se observă că în acest scop sunt suficiente numerele naturale pînă la zece, învățate deja de elevi, deoarece numărul submulțimilor formate pe panou nu poate depăși zece.

Convenim să denumim numărul elementelor mulțimii inițiale aflate în situația considerată, prin cuvîntul obținut alipind la dreapta cuvîntului ce exprimă numărul submulțimilor de cîte zece, cuvîntul „zece“.

În exemplul din figura 41 : patruzeci.

Excepție face cazul în care avem zece zeci, cînd numele numărului discurilor va fi „o sută“.

În cazul figurii 40, convenim a forma denumirea numărului elementelor mulțimii inițiale, introducînd conjuncția „și“ între cuvîntul format ca mai sus, care exprimă numărul discurilor conținute în submulțimile de cîte zece, și cuvîntul ce exprimă numărul discurilor rămase în afara acestora (care nu poate depăși nouă) cu ocazia organizării mulțimii inițiale a discurilor cu structură numerică zecimală, pe panoul 12.

În exemplul nostru : patruzeci și trei.

Excepție fac numerele cuprinse între zece și douăzeci.

3) Panoul 12 conține la stînga și deasupra conturului în care am realizat organizarea unei mulțimi de discuri cu structură numerică zecimală, cîte un contur în care am așezat, respectiv, triunghiuri albastre și discuri negre (fig. 40).

Din convenția introdusă asupra denumirii numărului elementelor unei mulțimi date se vede că acest număr este perfect determinat dacă se cunoaște aspectul acestor două contururi, cel din stînga și cel de sus din panoul 12.

Dacă am roti convenabil cu  $90^\circ$  conturul vertical din stînga, alăturîndu-l orizontal și la stînga celui de sus, am obține aspectul din panoul 14. Cum contururile menționate sunt fixe pe panoul 12, nu putem executa mișcarea indicată. De aceea realizăm panoul 14 plasînd plăcuțele 3 și 9 așa cum rezultă din figura 22, pe planșeta 4, deasupra panoului 12, existent în figura 40.

Avem acum pe planșeta 4 două panouri, și 12 și 14.

În panoul 14 astfel realizat, mutăm triunghiurile albastre reprezentînd submulțimile de cîte zece discuri, aflate în conturul vertical din stînga panoului 12, și discurile negre reprezentînd pe cele din care nu s-a putut completa o submulțime cu zece elemente, aflate în conturul situat în partea de sus a panoului 12.

Panourile 12 și 14 iau acum, respectiv, aspectele din figura 42.

Figura obținută în acest mod pe panoul 14 o numim figură numerică zecimală pentru mulțimea inițială de discuri (situate acum pe panoul 12).

Figura numerică zecimală avantajează denumirea numărului elementelor mulțimii care a generat-o (în cazul noastru acesta este cîprins între 9 și 100), dar mai ales sugerează scrierea pozițională zecimală a acestui număr.

Pentru a introduce această scriere, după obișnuirea elevilor cu formarea figurii numerice zecimale corespunzătoare unei mulțimi, panoul 14 va fi realizat pe planșeta suport nr. 1. Pe acest panou se realizează figura numerică zecimală a mulțimii. Deasupra panoului 14, pe planșeta 1, se aşază cîte o piesă dreptunghiulară neagră pe care s-a scris cu cretă numărul de triunghiuri albastre, respectiv numărul de discuri negre existente în figura 43.

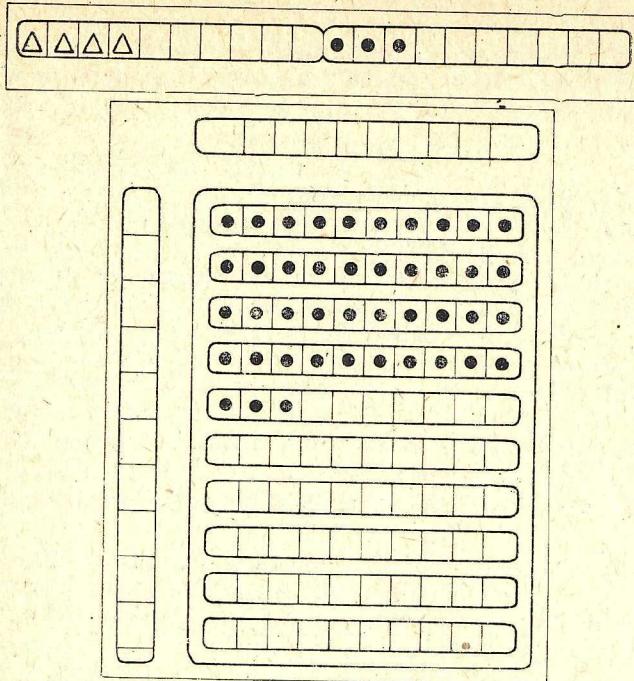


Fig. 42.T

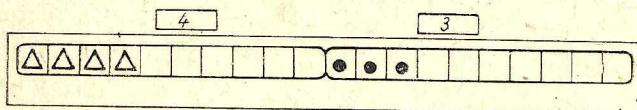


Fig. 43.T

Pieselete dreptunghiulare negre purtînd cifrele scrise cu cretă sînt apoi apropriate aşa cum se vede în figura 44, în care a și apărut scrierea numărului respectiv.

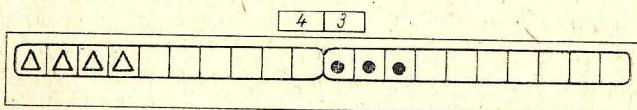


Fig. 44.T

Panoul 14 folosit în maniera de mai sus optimizează, pe bază de imagini vizuale : formarea ideii de unitate de ordinul întâi ; înțelegerea semnificației cifrei unităților în scrierea numărului ; formarea ideii de unitate de ordinul al doilea ; înțelegerea semnificației cifrei zecilor în scrierea numărului ; înțelegerea principiului scrierii poziționale în sistemul zecimal de numerație.

**Exemplul 2**

Adunarea fără trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decât 100, conținând fiecare zeci și unități.  
Să explicăm efectuarea adunării

$$23 + 45 =$$

și să deducem o regulă de calcul (oral și în scris).

Din „Tabelul 1“ se vede că pentru efectuarea acestei operații ar fi posibil să servească panoul nr. 4. Acest lucru se confirmă, citind mențiunile făcute pentru panoul 4, la „Ce se poate explica cu ajutorul fiecarui panou“.

Din „Tabelul 2“ deducem că pentru realizarea panoului 4 sunt necesare plăcuțele 1, 2, 3, 4, 8 și 9. Scoatem din trusă aceste plăcuțe. Din același tabel observăm că pentru panoul 4 se folosește planșeta nr. 2.

In „Tabelul 3“ vedem că pentru planșeta 2 avem nevoie de: cele două plăcuțe cu nr. 17; o plăcuță cu nr. 28; o riglă scurtă; cele două rigle mai lungi; două clame metalice simple. Scoatem din trusă toate aceste piese.

Realizăm planșeta suport nr. 2 și panoul nr. 4 (figurile 2, 5, 6, 7, 12 și 27), conform indicațiilor date la „Modul de realizare a planșetelor suport și a panourilor“.

Pentru a aplica definiția adunării numerelor naturale cu ajutorul reuniunii mulțimilor disjuncte, formăm pe panoul 4 mulțimi model disjuncte între ele pentru fiecare din termenii adunării, sub formă de figuri numerice zecimale ce corespund acestora.

Astfel, figura numerică zecimală ce corespunde lui 23 va fi formată din 2 triunghiuri albastre reprezentând zeci (mulțimi de cîte zece discuri negre) și 3 discuri negre reprezentând unități (adică discurile însăși), plasate la locul potrivit pe panou (vezi fig. 45). În dreptul săgeții corespunzătoare de pe panoul 4 așezăm, pe rezărimul special destinat acestui scop, un dreptunghi negru pe care am scris cu cretă numărul 23.

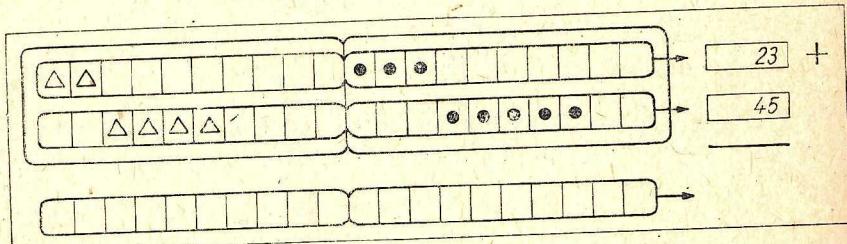


Fig. 45.T

Analog procedăm pentru realizarea pe panoul 4 a figurii numerice zecimale corespunzătoare lui 45, și pentru scrierea acestui număr în dreptul figurii respective.

Rezultatul adunării celor două numere va fi numărul elementelor reuniunii celor două mulțimi model folosite pentru termeni. Reuniunea respectivă este pusă în evidență de conturul (linia închisă) ce înconjură cele două contururi reprezentând mulțimile model pentru termeni.

Se vede că reuniunea este o mulțime gata organizată cu structură numerică zecimală. Ea are numărul unităților, respectiv al zecilor, egal cu suma numerelor unităților, respectiv a zecilor, existente la fiecare din numerele termeni.

Scriem numărul sumă cu cretă pe o piesă dreptunghiulară neagră și o aşezăm așa cum arată figura 46. În acest mod, în partea dreaptă a panoului 4 se obține aşezarea convenabilă a numerelor pentru efectuarea adunării în scris. Se deduce cu ușurință regula de calcul.

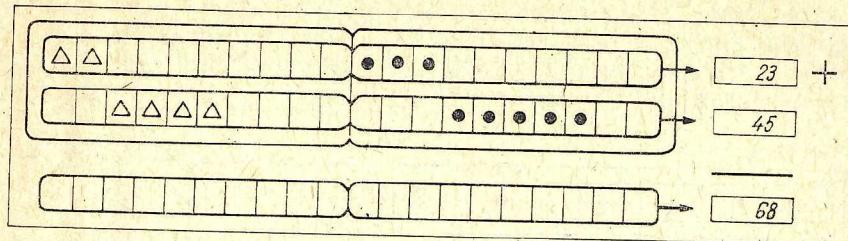


Fig. 46.T

Pentru perceperea mai clară a reuniunii mulțimilor model și a structurii sale zecimale, cît și a regulii de calcul ce de deduce, se deplasează discurile negre și triunghiurile albastre așa cum sugerează săgețile din figura 47.

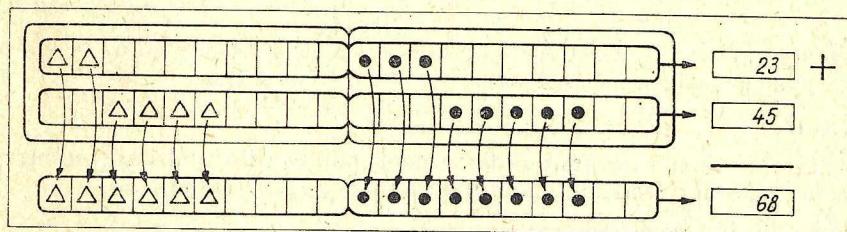


Fig. 47.T

### Exemplul 3

**Adunarea cu trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decât 100, conținînd fiecare zeci și unități.**

Să explicăm efectuarea adunării

$$26 + 57 =$$

și să deducem o regulă de calcul.

Din cele relatate pînă acum se vede cum găsim panoul și planșeta corespunzătoare și cum le realizăm. Constatăm că avem nevoie de panoul 4.

Pe panoul 4 se realizează mulțimile model pentru termeni, așa cum s-a făcut și la exemplul anterior, obținîndu-se aspectul din figura 48.

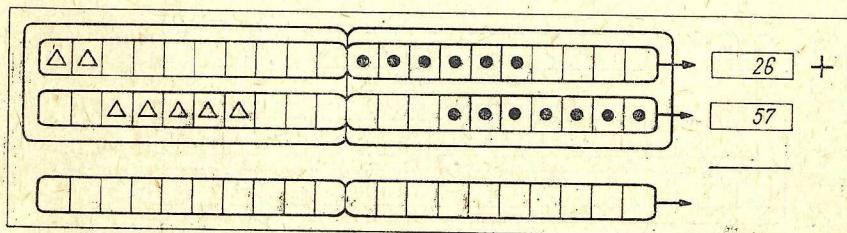


Fig. 48.T

De data aceasta însă, reuniunea mulțimilor model ale termenilor nu apare cu structură numerică zecimală, deoarece din discurile pe care le conține în afara submulțimilor de cîte zece, reprezentate prin triunghiuri albastre, mai poate fi completată încă o astfel de submulțime.

Pentru ca reuniunea menționată să devină cu structură numerică zecimală ridicăm zece discuri negre de pe panoul 4 și, în locul lor, plasăm la locul potrivit încă un triunghi albastru, pe lîngă cele deja existente. Acest lucru este sugerat pe figura 49.

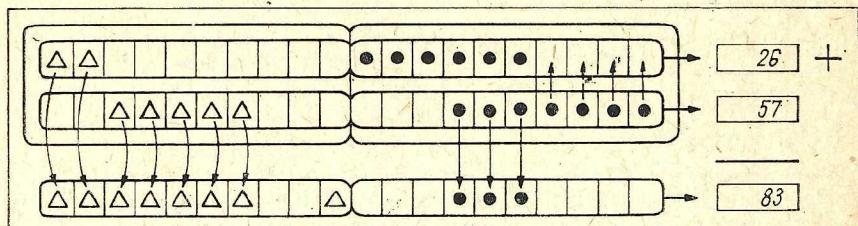


Fig. 49.T

Decurge în mod evident regula obișnuită de calcul. Observăm că în dreapta panoului apare procedeul de așezare în scris a calculului.

#### Exemplul 4

**Scăderea fără trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, conținînd fiecare zeci și unități.**

Să explicăm efectuarea scăderii

$$47 - 35 =$$

și să deducem o regulă de calcul (oral și scris).

Se găsește ușor că putem folosi panoul nr. 5, realizat pe planșeta nr. 2, pe care le executăm după recomandările anterioare.

Pentru a explica definiția scăderii numerelor naturale cu ajutorul diferenței dintre o mulțime și o submulțime a sa, formăm pe panoul 5 o mulțime model pentru descăzutul 47, sub formă de figură numerică zecimală (fig. 50). În stînga acestei figuri, în direcția săgeții existente, așezăm pe reazimul special destinat acestui scop un dreptunghi negru din punga de plastic, pe care am scris cu creta numărul 47. Alte două dreptunghiuri negre pe care am scris cu creta, respectiv 47 și 35, le așezăm în dreapta panoului 5, cum se vede de asemenea în figura 50.

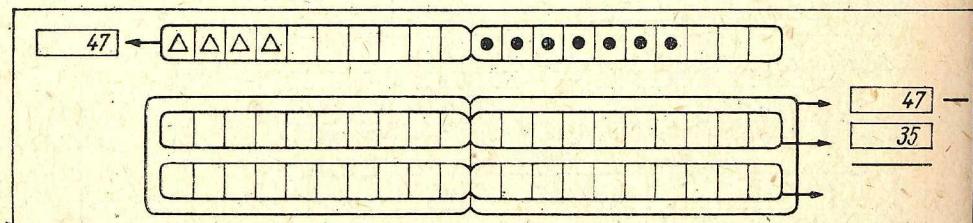


Fig. 50.T

Deplasînd discurile și triunghiurile aflate pe panoul 5 așa cum indică săgețile din figura 51, obținem separarea mulțimii model a descăzutului în două submulțimi disjuncte, din care una este mulțimea model pentru scăzătorul 35 (piesele care o formează le mișcăm mai întâi); cealaltă submulțime este mulțimea diferență dintre mulțimea model a descăzutului și mulțimea model a scăzătorului.

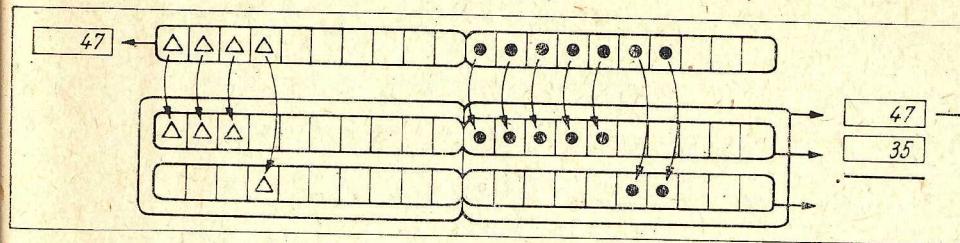


Fig. 51.T

Intrucît mulțimea diferență astfel obținută este gata organizată cu structură numerică zecimală este ușor de stabilit numărul ei de elemente, 12. Plasăm un dreptunghi negru pe care am scris cu creta numărul 12, așa cum se vede în figura 52.

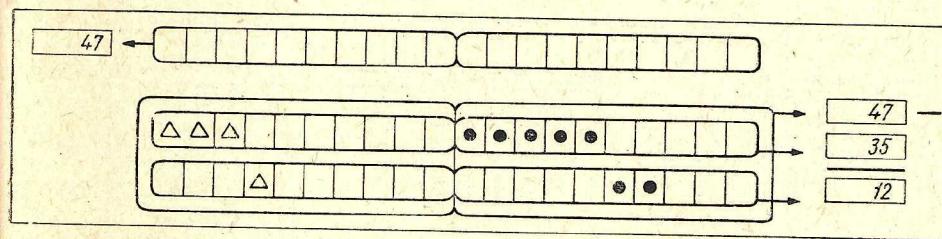


Fig. 52.T

Din modul de lucru expus mai sus rezultă clar regula de calcul. În partea dreaptă a panoului apare modul de așezare a calculului în scris.

#### Exemplul 5

Scăderea cu trecere peste ordin a două numere din mulțimea numerelor naturale mai mici decît 100, conținînd fiecare zeci și unități.

Să efectuăm scăderea

$$52 - 37 =$$

și să deducem o regulă de calcul.

Aplicarea tehnicii de lucru expusă la exemplul anterior este împiedicată de faptul că nu putem alege din discurile existente în mulțimea model a descăzutului, atîtea cîte trebuie să conțină mulțimea model a scăzătorului (fapt care este bine a fi probat încercînd a efectua această scădere tot cu ajutorul panoului 5).

Panoul 6 executat pe planșeta 2 rezolvă această situație.

Realizăm pe panoul 6 multimea model pentru descăzutul 52, aşa cum arată figura 53. Pentru a depăşi dificultatea menţionată, luăm un triunghi

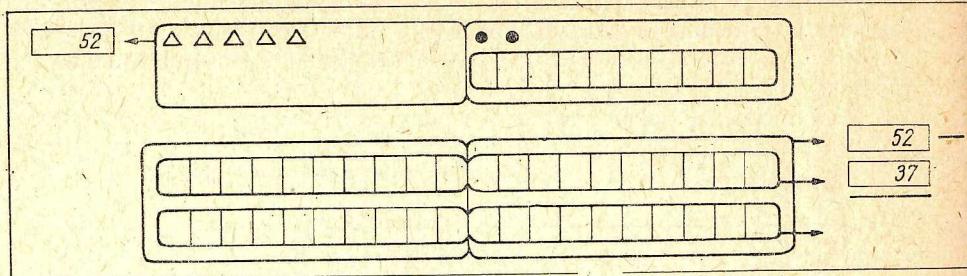


Fig. 53.T

albastru din cele existente în figura numerică a descăzutului și punem în schimb pe panou zece discuri negre, cum indică figura 54.

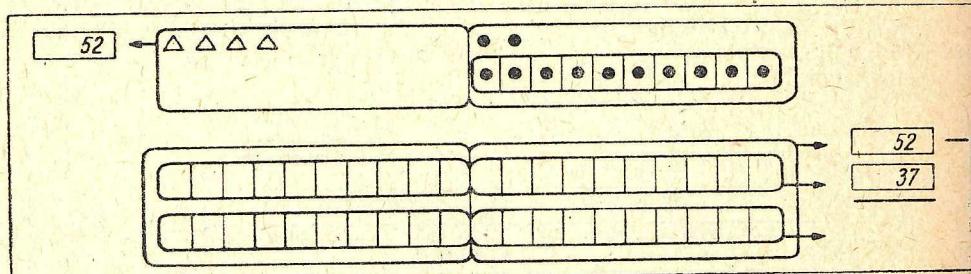


Fig. 54.T

Pentru efectuarea scăderii se procedează în continuare ca la exemplul 4, ceea ce rezultă și din figura 55.

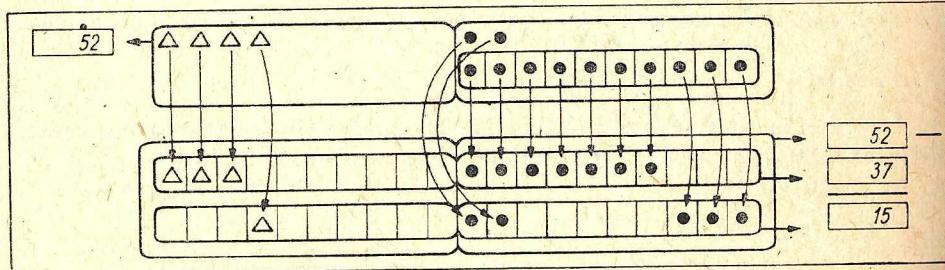


Fig. 55.T

Se deduce regula : se scad unităile de la scăzător dintr-o zece a descăzutului ; restul obținut, adunat cu unităile descăzutului, dă numărul de unități al diferenței ; numărul zecilor diferenței se obține scăzind numărul zecilor scăzătorului din cele rămase la descăzut, după luarea zecii menționate mai sus.

În dreapta panoului se obține așezarea în scris a calculului.

**Exemplul 6**

Împărțirea numerelor naturale în cazul în care împărțitorul și cîtuș nu sunt mai mari decît 10. Procedeul prin „cuprindere“ și procedeul prin „părți gale“.

Să efectăm împărțirea :

$$12 : 4 =$$

Avînd cîtuș 3 și împărțitorul 4, observăm că putem folosi panoul 12, sau chiar 13, ultimul fiind mai comod pentru că este mai mic. Așadar, realizăm panoul 13 pe planșeta 4.

Se iau din punga de plastic conținînd discurile negre, un număr de 12 discuri și se aşeză pe masă. Ele vor constitui mulțimea model pentru deîmpărțit.

Aplicăm definiția împărțirii numerelor naturale cu ajutorul separării în submulțimi disjuncte a mulțimii model pentru deîmpărțitul 12, folosind :

*a) Procedeul prin „cuprindere“:*

Luăm de pe masă cîte un disc și îl aşezăm ca element al unei submulțimi din cele figurate pe panoul 13, pînă completăm acesteia 4 discuri (fig. 56). Continuăm aşezarea, după același procedeu, a cîte 4 discuri în celealte sub-

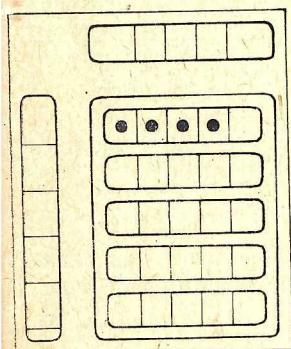


Fig. 56.T

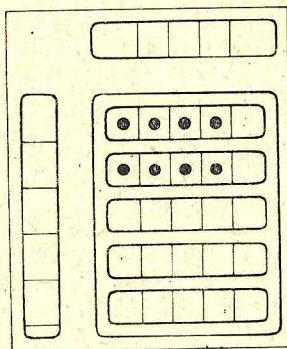


Fig. 57.T

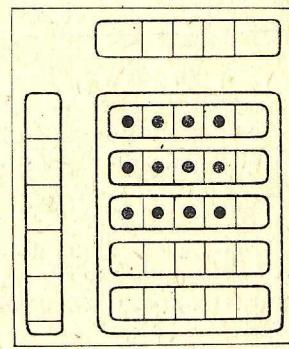


Fig. 58.T

mulțimi figurate pe panoul 13, pînă se termină discurile de pe masă (figurele 57 și 58).

Numărăm cîte submulțimi de cîte 4 elemente s-au obținut pe panoul 13, din mulțimea model a deîmpărțitului 12. Găsim 3 submulțimi. Acesta este cîtuș împărțirii :

$$12 : 4 = 3$$

Numărarea submulțimilor se poate face și plasînd pe panou cîte o piesă, să zicem un triunghi albastru, pentru fiecare submulțime formată, cum se vede în figura 59, și numărînd apoi aceste triunghiuri.

**O b s e r v a t i e.** Dacă rămîneau pe masă discuri cu care nu putem completa o nouă sub-

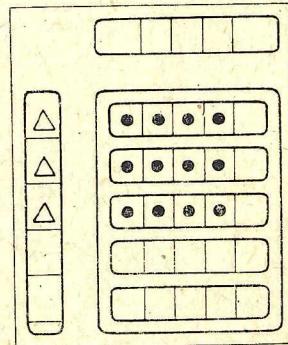


Fig. 59.T

mulțime cu 4 elemente, împărțirea acelor numere naturale ar fi fost „imposibilă“ (ex.  $15 : 4 = \underline{\hspace{1cm}}$ ).

b) *Procedeul prin „părți egale“.*

Alegem 4 contururi de submulțimi din cele figurate pe panoul 13.

Din cele 12 discuri de pe masă distribuim, pe rînd, câte unul în fiecare din cele 4 contururi alese, ca în figura 60. Din discurile rămase pe masă mai distribuim câte unul în fiecare din cele 4 contururi alese pe panoul 13, și aşa mai departe, pînă se termină discurile de pe masă (figurile 61 și 62).

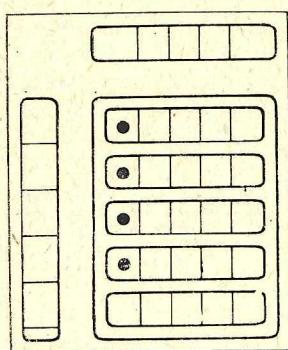


Fig. 60.T

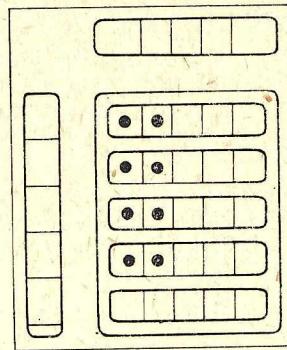


Fig. 61.T

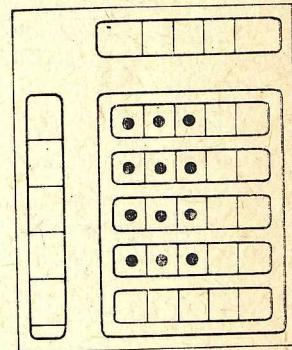


Fig. 62.T

Numărăm câte discuri au revenit în una, oarecare, din cele 4 submulțimi formate pe panou. Găsim 3 discuri. Aceasta este cîtul împărțirii.

$$12 : 4 = 3$$

Dacă ar fi rămas pe masă discuri, dar insuficiente pentru a mai distribui încă câte unul fiecareia din cele 4 submulțimi, spuneam că împărțirea acelor numere naturale este „imposibilă“ (ex.  $15 : 4 = \underline{\hspace{1cm}}$ ).

Tabelul 1

## Destinația panourilor ce pot fi realizate

Panoul nr.	Utilizarea lui la :
	<i>In mulțimea numerelor naturale mai mici decât 10 :</i> — adunarea a două numere ; — adunarea a două numere, cu găsirea sumei fără numărare ; — scăderea a două numere.
1. 2. 3.	<i>In mulțimea numerelor naturale mai mici decât 100 :</i> — adunarea a două numere, fără și cu trecere peste ordin ; — scăderea a două numere, fără trecere peste ordin ; — scăderea a două numere, cu trecere peste ordin ; — adunarea a trei numere, fără și cu trecere peste ordin.
4. 5. 6. 7.	<i>In mulțimea numerelor naturale mai mici decât 1 000 :</i> — adunarea a două numere, fără și cu trecere peste ordin ; — scăderea a două numere, fără trecere peste ordin ; — scăderea a două numere, cu trecere peste ordin ; — adunarea a trei numere, fără și cu trecere peste ordin.
8. 9. 10. 11.	<i>In mulțimea numerelor naturale pînă la 100 :</i> — înmulțirea a două numere cel mult egale cu 10 ; — împărțirea în cazul în care împărtitorul și cîstul nu sunt mai mari decât 10 ; — legătura dintre înmulțire și împărțire ; — structura numerică zecimală a mulțimii, numirea numărului ei de elemente ; — citește la panoul (12), înlocuind 10 cu 5, „zecimală“ cu „în baza 5“ și suprimînd „numirea numărului ei de elemente“. — Figura numerică care conduce la numere naturale cuprinse între 9 și 100. Citește ca la panoul (14), dar pentru numere cuprinse între 99 și 1 000.
12. 13. 14. 15.	

Tabelul 3

## Alcătuirea planșetelor suport din plăcile componente

Plăci, rigle, clame	Numărul plăcii		Numărul de plăci folosite	Rigle		Numărul de rigle folosite	Numărul de clame folosite	
	27	28		scurte	lungi		simple	duble
Planșeta nr.								
1	••	—	2	—	2	2	1	—
2	••	•	3	1	2	3	2	—
3	••	••	4	2	2	4	3	—
4	••	••	4	—	2	2	1	3
Existente în trusă bucăți	2	2	—	2	2	—	3	3
La cîte planșete folosește	4	3	—	3	3	—	4	1

Tabelul 2

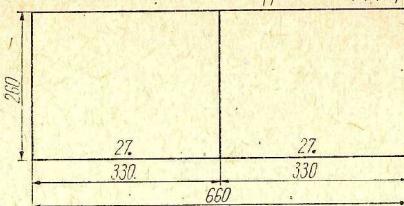
## Alcătuirea panourilor din plăci componente

Nr. panoului diagonala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	La etapele panouri folosite Numărul de plăci existente în trusa
Nr. plăcii																
1.	•	•		•				•							4	1
2.	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•				11	1
3.	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•					4	1
4.	•	•		•				•							1	1
5.		•													3	1
6.		•		•				•							3	1
7.		•		•				•							8	2
8.			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	8	2
9.			•	•	•	•	•	•	•	•					2	1
10.				•					•						2	2
11.				•					•						2	2
12.				•					•						2	1
13.				•					•						2	2
14.					•					•					2	1
15.					•					•					2	1
16.						•				•					2	1
17.						•				•					1	1
18.							•			•		•	•		2	1
19.								•			•	•			2	1
20.									•		•	•			2	1
21.										•	•	•			2	1
22.										•					1	1
23.										•					1	1
24.										•					1	1
25.										•					1	1
26.										•						
Numărul de plăci folosite	4	5	4	6	6	6	8	8	6	8	11	8	4	2	3	— 29
Nr. planșetei pe care se realizează	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	1	2	— —

## REALIZAREA PLANŞETELOR

**PLANŞETA Nr.1**

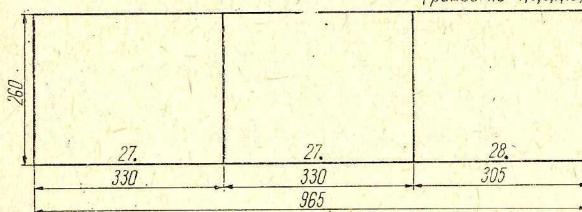
(panourile: 1,2,3,14)



**Fig. 1.T**

**PLANŞETA Nr.2**

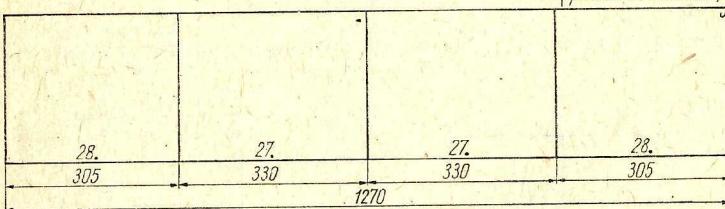
(panourile: 4,5,6,7,15)



**Fig. 2.T**

**PLANŞETA Nr.3**

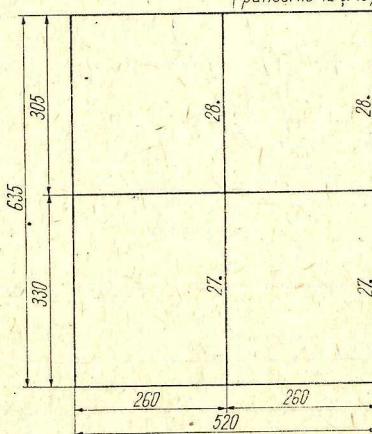
(panourile: 8,9,10,11)



**Fig. 3.T**

**PLANŞETA Nr.4**

(panourile 12 și 13)



**Fig. 4.T**

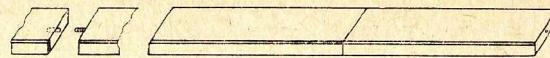


Fig. 5.T

Fig. 6.T

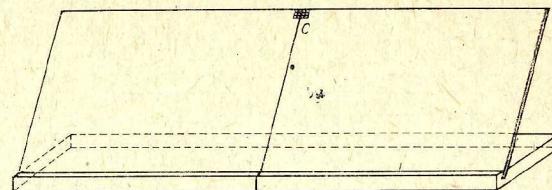


Fig. 7.T

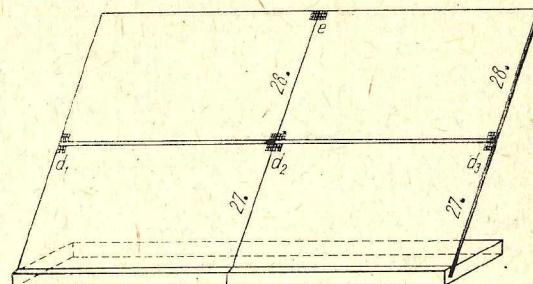


Fig. 8.T

### ASAMBLAREA PLĂCUȚELOR PENTRU REALIZAREA PANOURILOR

Panoul nr. 1

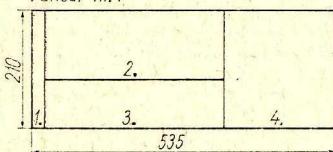


Fig. 9.T

Panoul nr. 2

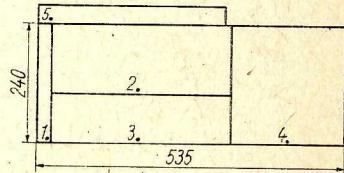


Fig. 10.T

Panoul nr. 3

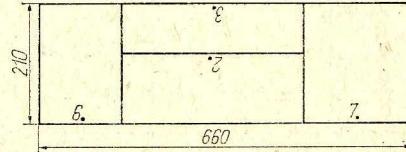


Fig. 11.T

Panoul nr. 4

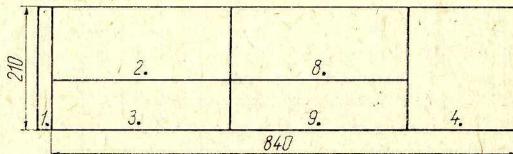


Fig. 12.T

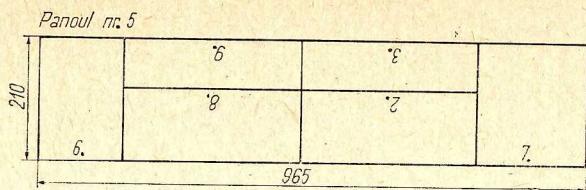


Fig. 13.T

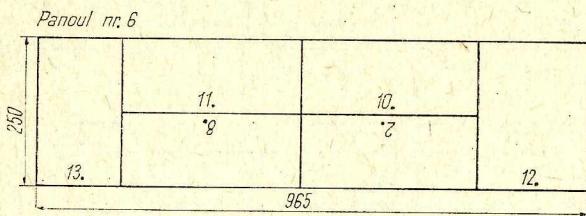


Fig. 14.T

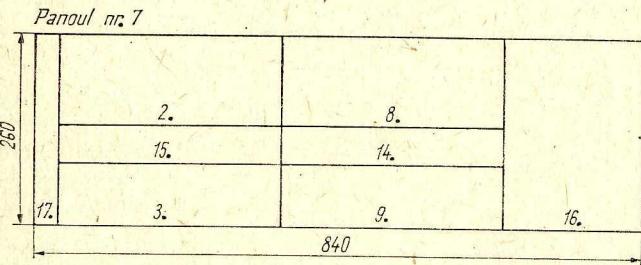


Fig. 15.T

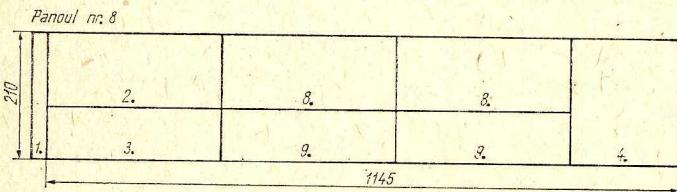


Fig. 16.T

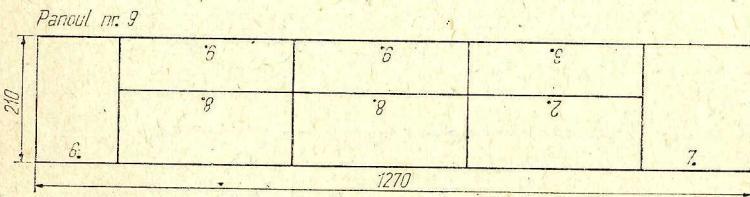


Fig. 17.T

Panoul nr. 10

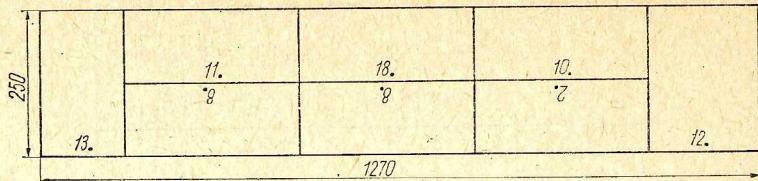


Fig. 18.T

Panoul nr. 11

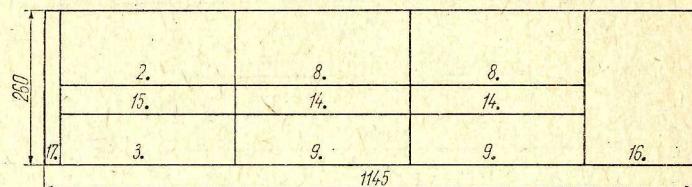


Fig. 19.T

Panoul nr. 12

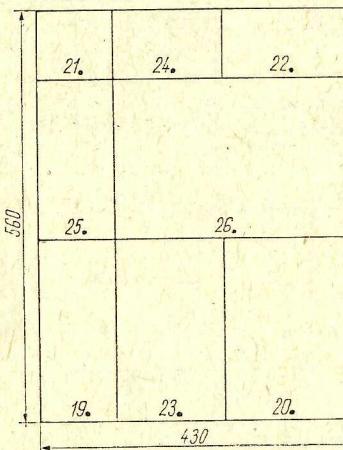


Fig. 20.T

Panoul nr. 13

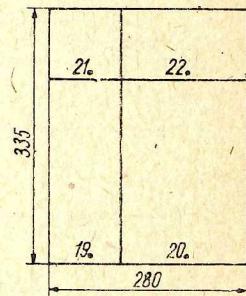


Fig. 21.T

Panoul nr. 14

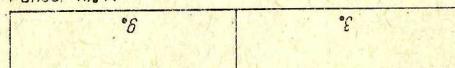


Fig. 22.T

Panoul nr. 15

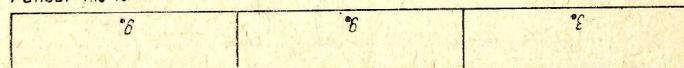


Fig. 23.T

## ASPÈCTUL PÂNOURILOR CE POT FI REALIZATE

*Panoul nr.1*

(plăcile : 1, 2, 3, 4)

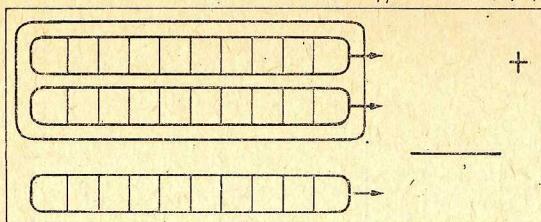


Fig. 24.T

*Panoul nr. 2*

(plăcile : 1, 2, 3, 4, 5)

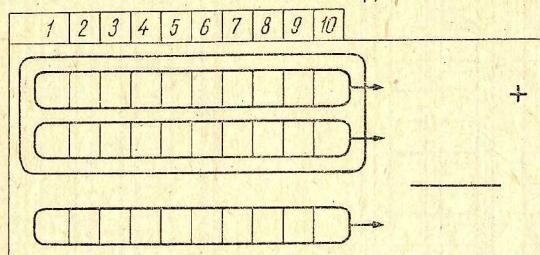


Fig. 25.T

*Panoul nr. 3*

(plăcile : 2, 3, 6, 7)

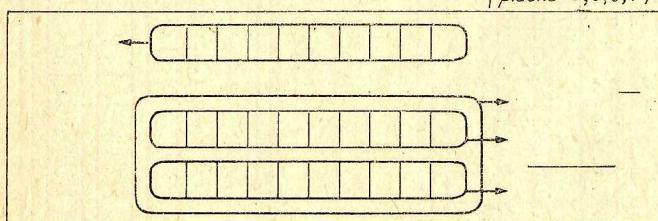


Fig. 26.T

*Panoul nr. 4*

(plăcile : 1, 2, 3, 4, 8, 9)

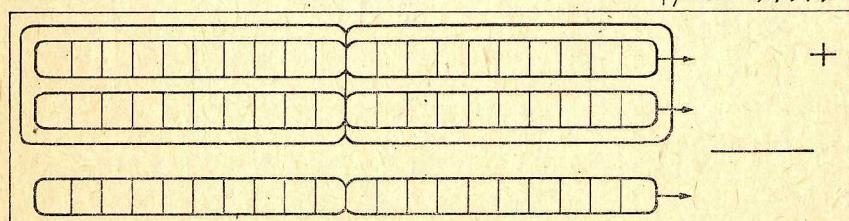


Fig. 27.T

Panoul nr. 5

(plăcile: 2, 3, 6, 7, 8, 9)

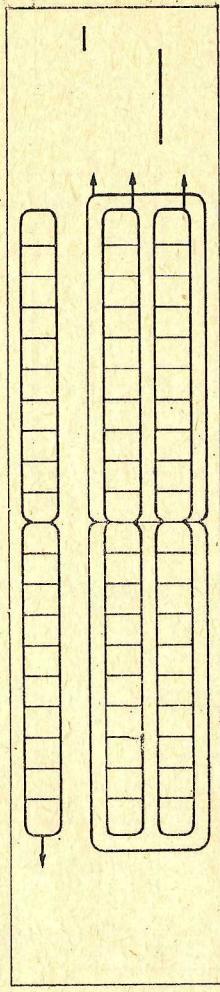


Fig. 28.T

Panoul nr. 6

(plăcile: 2, 8, 10, 11, 12, 13)

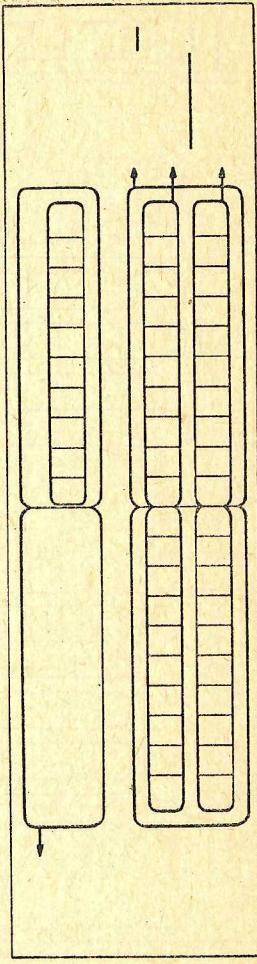


Fig. 29.T

Panoul nr.7

(plăcile 2,3,8,9,14,15,16,17)

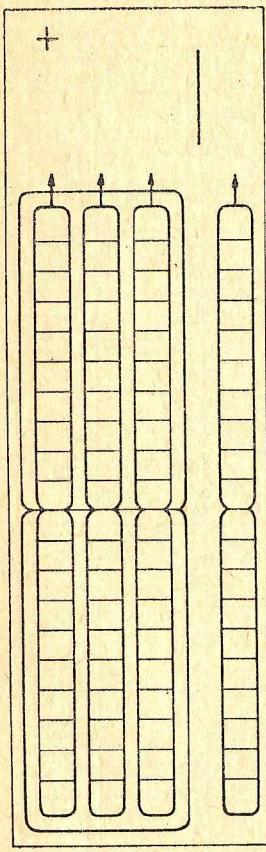


Fig. 30.T

Panoul nr.8

(plăcile 1,2,3,4,8,8,9,9)

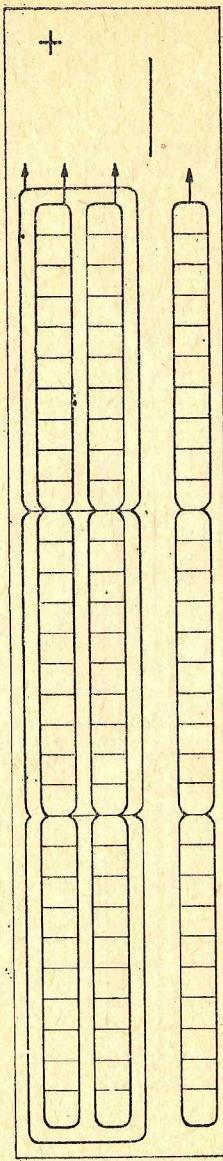
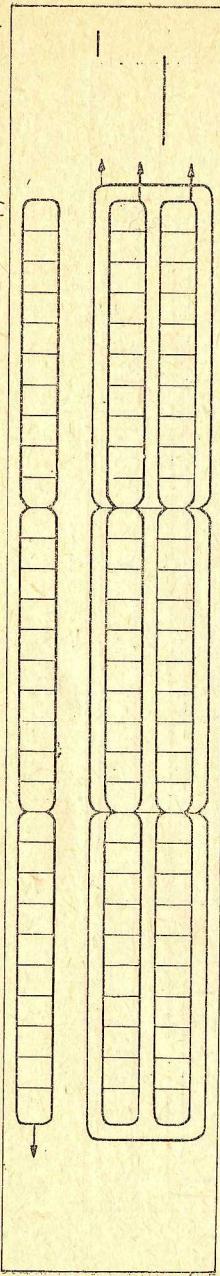


Fig. 31.T

Panoul nr. 9

(plăcile: 2, 3, 6, 7, 8, 9)



Panoul nr. 10

(plăcile: 2, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 18)

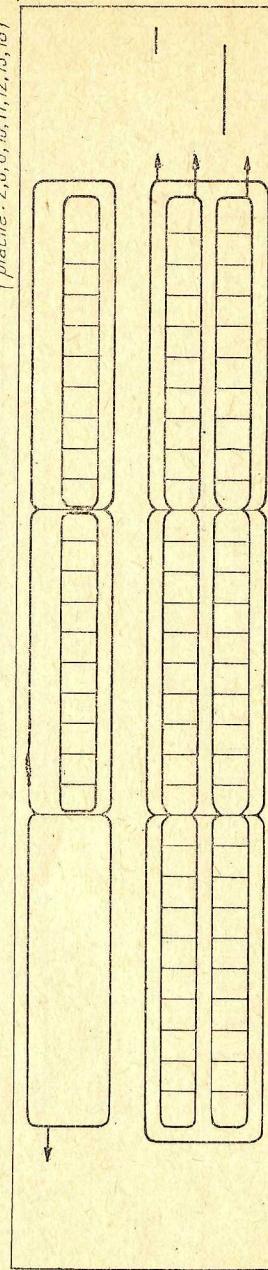


Fig. 32.T

Panoul nr. 11

(plăcile: 2, 3, 8, 9, 9, 14, 14, 15, 16, 17)

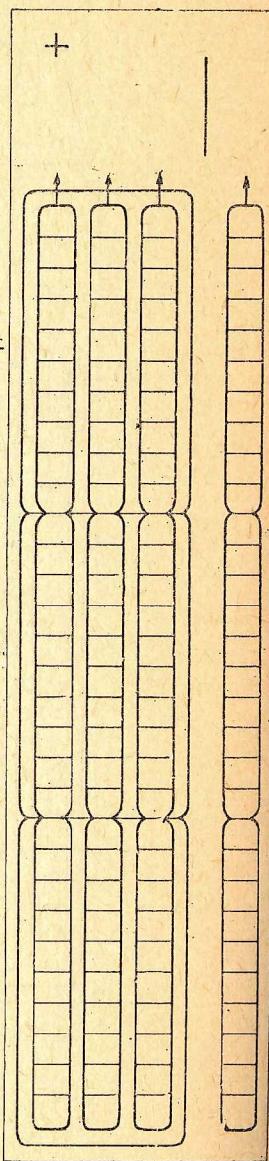


Fig. 33.T

Fig. 34.T

Panoul nr. 12

(plăcile: 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26)

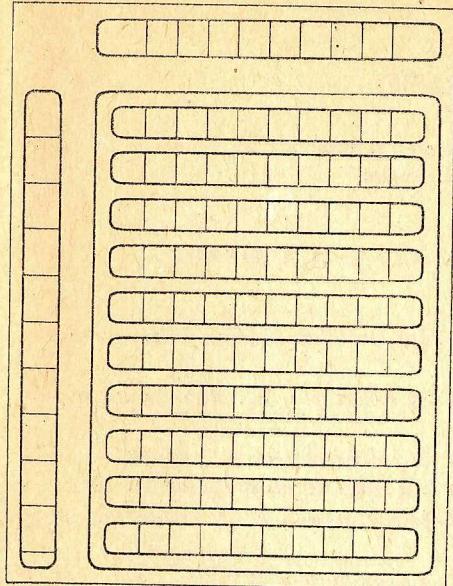


Fig. 35.T

Panoul nr. 13

(plăcile: 19, 20, 21, 22)

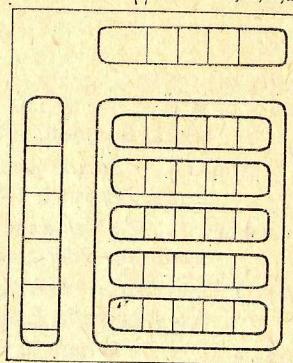


Fig. 36.T

Panoul nr. 14

(plăcile 3, 9)

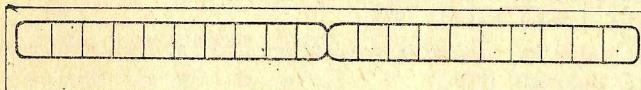


Fig. 37.T

Panoul nr. 15

(plăcile 3, 9, 9)

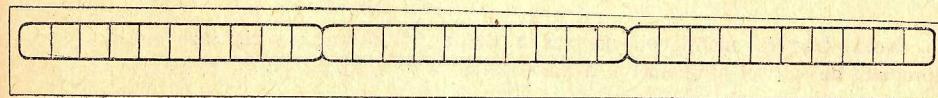


Fig. 38.T

## BIBLIOGRAFIE

**recomandăță învățătorilor pentru clarificarea și aprofundarea noțiunilor  
din programă și manual**

1. Aron I., și Herescu Gh. — *Aritmetică pentru învățători*, Editura didactică și pedagogică, București, 1977.
2. Iftimie Gh. — *Jocuri logice pentru preșcolari și școlari mici*, Editura didactică și pedagogică, București, 1976.
3. Mandric L., Zahareanu S., Roșca D. — *Experiment de modernizare a introducerii numerelor pînă la 10 în clasa I*, Revista de Pedagogie nr. 10, 1971.
4. Roșca D. — *Cercetări teoretice și experimentale în legătură cu predarea matematicii*. Didactica și educația, Craiova, 1969.
5. Roșca D. — *De la clasic la modern, sau de la modern la clasic în predarea matematicii în scoala generală?* — Probleme actuale ale modernizării învățămîntului matematicii în țările europene, Colocviul internațional U.N.E.S.C.O., Buc. 1968 — Editura didactică și pedagogică, București, 1970.
6. Roșca D. — *Introducerea și utilizarea la clasele III—IV a noțiunii generale de operație internă binară într-o mulțime* — Preocupări didactice, editată de Casa corpului didactic, județul Neamț, 1972.
7. Roșca D. — *Matematici moderne în sprijinul învățătorilor*, Editura didactică și pedagogică, București, 1978.
8. Roșca D., Mandric L., Zahareanu S. — *Introducerea numerelor pînă la zece în clasa I pe baza unor elemente despre mulțimi și relații*, planurile lecțiilor prezентate în cadrul unui experiment didactic — Preocupări didactice, editată de Casa corpului didactic, județul Neamț, 1977.

\*

Notă: Lucrarea menționată mai sus la poziția „7“ este cea mai cuprinzătoare și cea mai apropiată de spiritul programei și a manualului.

## CUPRINS

CONSIDERAȚII GENERALE . . . . .	3
I — RECAPITULAREA ȘI COMPLETAREA CUNOȘTINȚELOR DIN CLASA I . . . . .	
	13
Capitolul 1. Notiuni despre mulțimi . . . . .	13
Tema 1. Mulțime, element, apartenență . . . . .	15
Tema a 2-a. Situații în care se pot afla două mulțimi . . . . .	18
Temele a 3-a și a 4-a. Mulțimi ce se pot obține cu două mulțimi date. Mulțime vidă . . . . .	23
Capitolul 2. Numărul de elemente al mulțimii. Numerele pînă la zece . . . . .	28
Tema 1. Corespondența element cu element între mulțimi . . . . .	34
Tema a 2-a. Numărul de elemente ale mulțimii. Compararea mulțimilor după numărul de elemente . . . . .	38
Tema a 3-a. Numerele naturale pînă la zece . . . . .	40
Tema a 4-a. Adunarea și scăderea numerelor pînă la zece . . . . .	43
Tema a 5-a. Reuniunea mai multor mulțimi. Adunarea cu mai mulți termeni . . . . .	50
Capitolul 3. Numerele naturale de la zece la o sută . . . . .	54
Tema 1. Numirea și scrierea numerelor . . . . .	57
Tema a 2-a. Compararea numerelor pînă la o sută . . . . .	59
Capitolul 4. Adunarea și scăderea numerelor pînă la o sută fără trecere peste ordin . . . . .	60
Tema 1. Adunarea numerelor formate numai din zeci . . . . .	61
Tema a 2-a. Scăderea numerelor formate numai din zeci . . . . .	64
Temele 3, 4, 5, 6 și 7 din manual . . . . .	68
II — ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELElor NATURALE PÎNĂ LA O SUTĂ CU TRECERE PESTE ORDIN . . . . .	
	74
Capitolul 1. Adunarea și scăderea pînă la 20 cu trecere peste zece . . . . .	74
Temele 1, 2 și 3 din manual . . . . .	77
Tema a 4-a. Adunarea cu trecere peste zece a două numere scrise cu cîte o cifră . . . . .	78
Tema a 5-a. Scăderea cu trecere peste zece a unui număr scris cu o cifră, dintr-un număr cuprins între 10 și 20 . . . . .	83
Capitolul 2. Adunarea și scăderea cu trecere peste ordin a numerelor naturale pînă la o sută . . . . .	88
Capitolul 3. Adunarea mai multor numere naturale . . . . .	91

III — NOȚIUNI DE GEOMETRIE . . . . .	93
IV — NUMERELE NATURALE PÂNĂ LA O MIE . . . . .	94
Capitolul 1. Numirea, scrierea și citirea . . . . .	94
Capitolul 2. Adunarea și scăderea numerelor naturale până la o mie fără trecere peste ordin . . . . .	95
V — ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE DE LA ZERO LA ZECE . . . . .	98
Capitolul 1. Înmulțirea numerelor naturale folosind mulțimea produs . . . . .	98
Tema 1. Pereche ordonată. Mulțimi factori, mulțime produs . . . . .	100
Tema a 2-a. Înmulțirea numerelor naturale cu ajutorul mulțimii produs . . . . .	103
Tema a 3-a. Comutativitatea înmulțirii . . . . .	108
Capitolul 2. Înmulțirea numerelor naturale folosind adunarea repetată . . . . .	109
Capitolul 3. Tabla înmulțirii . . . . .	112
VI — ÎMPĂRTIREA NUMERELOR NATURALE . . . . .	114
Capitolul 1. Împărțirea numerelor naturale folosind separarea de submulțimi disjuncte, fiecare având același număr de elemente . . . . .	114
Tema 1. Exerciții și probleme pregătitoare . . . . .	116
Tema a 2-a. Împărțirea numerelor naturale cu ajutorul separării de submulțimi disjuncte, având același număr de elemente . . . . .	122
Capitolul 2. Împărțirea numerelor naturale prin scădere repetată . . . . .	126
Capitolul 3. Legătura dintre înmulțire și împărțire . . . . .	127
VII — UNITĂȚI DE MĂSURĂ . . . . .	131
VIII — EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE . . . . .	132
Trusa pentru predarea pe bază de mulțimi a operațiilor cu numere naturale la clasele I–IV . . . . .	137
Bibliografie . . . . .	166

*Coli de tipar 10,60. B.T. 05.08.1981.  
Format 16/70×100. Apărut 1981.*

*I. P. „Oltenia“ Craiova  
Str. M. Viteazul, nr. 4  
Repubica Socialistă România  
Plan 27478/210/1981.*

