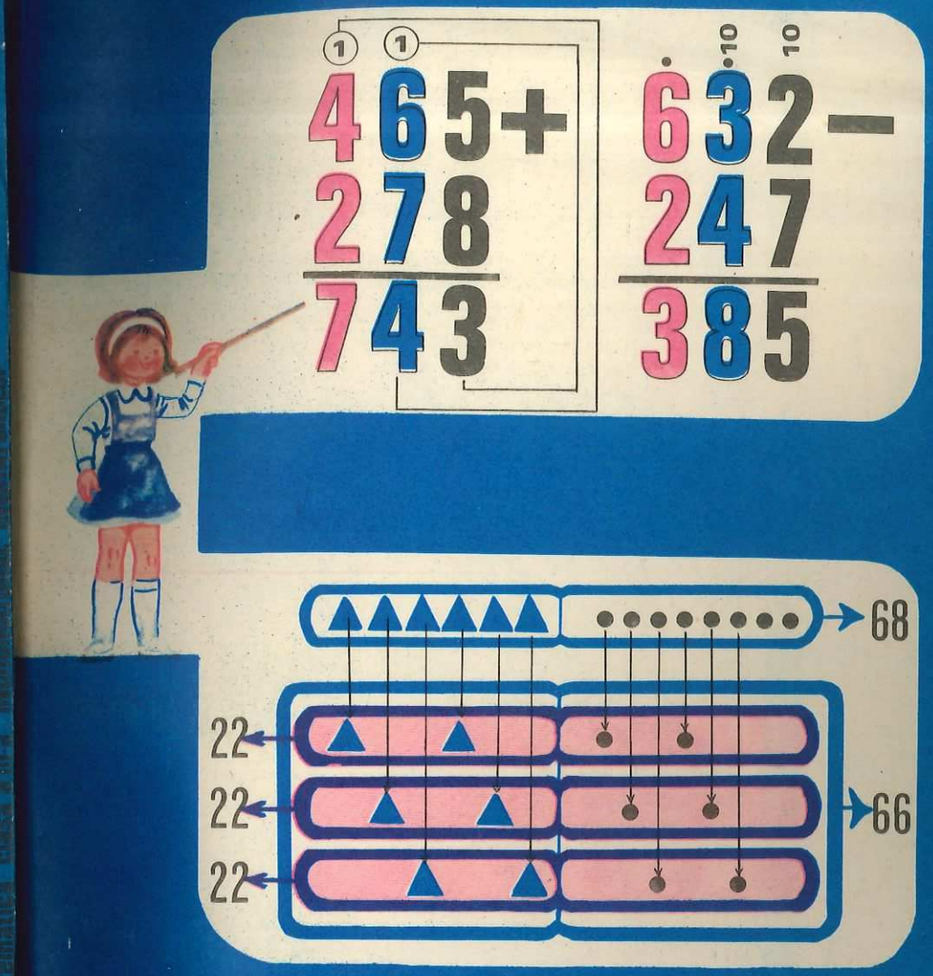
Lei 4,55

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1981



DUMITRU ROȘCA

Matematică clasa a III-a
ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI

Prof. DUMITRU ROȘCA

Matematică clasa a III-a
ÎNDRUMĂTORUL ÎNVĂȚĂTORULUI

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI

Referenți:
Prof. PETRUȚA GĂZDARU
Prof. GHEORGHE I. HERESCU
Prof. ION MITRACHE
Prof. ZOE MURGOCI

Redactor: TUDORA GAVRILĂ
Tehnoredactor: VELCOVICI CONSTANTINA
Coperta: DUMITRU ȘMALENIC

Capitolul I

RECAPITULAREA ȘI COMPLETAREA CUNOȘTINȚELOR DIN CLASA A II-a

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Noțiuni despre mulțimi.
2. Principiul numirii și scrierii numerelor mai mari ca 10, a celor mai mari ca 100.
3. Adunarea și scăderea numerelor naturale pînă la 100, fără și cu trecere peste ordin.
4. Adunarea și scăderea numerelor naturale pînă la 1 000, fără trecere peste ordin.
5. Înmulțirea și împărțirea numerelor naturale pînă la 100, insistîndu-se asupra sensului dat cu ajutorul mulțimilor și a cunoașterii tablei înmulțirii și împărțirii.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

1°. *Noțiunile de mulțime* și *element*, împrospătate pe bază de exemple. *Apartenența* și *neapartenența* unui element la o mulțime.

2°. *Diagrama unei mulțimi.* Reprezentarea mulțimii printr-o linie închisă și a elementelor acesteia prin puncte figurate în interiorul ei. Notarea simbolică în diagramă a mulțimii printr-o literă mare scrisă lîngă linia închisă și a elementelor ei prin litere mici scrise lîngă punctele ce reprezintă acele elemente.

3°. *Scrierea mulțimii folosind simbolurile,* sub forma

$$A = \{b, c, d, ..., m, p\}$$

Apartenența[1] sau neapartenența unui element la o mulțime se scrie:

$b \in A$ (b aparține lui A)

$t \notin A$ (t nu aparține lui A)

[1] Textul scris cu „petit" conține informații pentru învățător, conținutul respectiv nu se transmite elevilor.

Observarea faptului că pentru cunoașterea mulțimii, ordinea în care se iau elementele nu are importanță, iar indicarea aceluiași element de mai multe ori nu are rost. În consecință, în scrierea simbolică a mulțimii, ordinea scrierii simbolurilor elementelor va putea fi oricare dorim, iar repetarea unui simbol va fi inutilă.

4°. Se va reaminti că *o mulțime poate fi dată indicîndu-se toate elementele ei* (prin lista elementelor), sau poate fi dată indicîndu-se *o proprietate caracteristică elementelor sale*, adică o proprietate pe care o are orice element al mulțimii, și numai ele. Se vor da exemple de mulțimi prin fiecare din aceste procedee.

5°. *Situația în care se poate afla o mulțime A față de o mulțime B*: fără elemente comune, sau disjuncte; cu unele elemente comune (fiecare avînd și elemente necomune cu cealaltă); una inclusă în cealaltă, numindu-se și submulțime sau parte a acesteia; egale (formate exact din aceleași elemente).

Dacă fiecare element al lui A aparține și lui B, zicem că A este inclusă în B și notăm $A \subset B$. Dacă B este inclusă în A se notează $B \subset A$, sau $A \supset B$ (A include B). Dacă A este egală cu B se notează $A = B$. Dacă A nu coincide cu B se notează $A \neq B$ (A diferită de B).

Se va reaminti executarea diagramei mulțimilor A și B dacă ele se află în oricare din situațiile menționate mai sus, folosind figura 1. Pentru diagrama a două mulțimi disjuncte se va folosi și figura 2, iar pentru o mulțime inclusă într-o mulțime se va folosi și figura 3.

6°. Utilizînd elementele a două mulțimi date A și B se va cunoaște formarea unor mulțimi noi, numite:

Intersecția mulțimii A cu mulțimea B, formată din toate elementele ce aparțin atît lui A cît și lui B, (și numai din acestea).

Se notează: $A \cap B$.

Diferența dintre mulțimea A și mulțimea B, formată din toate elementele ce aparțin lui A și nu aparțin lui B (și numai din acestea).

Se notează: $A - B$

Diferența dintre mulțimea B și mulțimea A, formată din toate elementele ce aparțin lui B și nu aparțin lui A (și numai din acestea).

Se notează: $B - A$.

Reuniunea mulțimii A cu mulțimea B, formată din toate elementele ce aparțin cel puțin la una din mulțimile A și B (și numai din acestea).

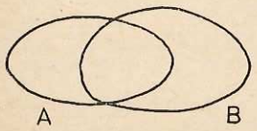


Fig. 1

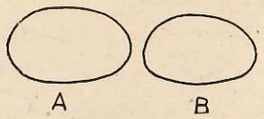


Fig. 2

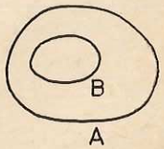


Fig. 3

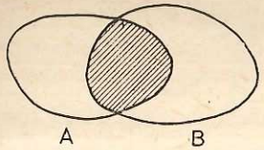


Fig. 4

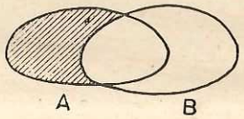


Fig. 5

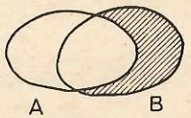


Fig. 6

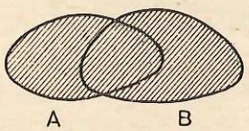


Fig. 7

Se notează: $A \cup B$.

Intersecția, diferențele și reuniunea dintre mulțimea A și mulțimea B vor fi formate atunci cînd se cunosc elementele mulțimilor A și B, și vor fi recunoscute în cazul în care mulțimile A și B sînt date prin diagramele lor (figurile 4, 5, 6 și 7).

7°. Se va reaminti că putem vorbi de *mulțimea pereche* (cu două elemente), *mulțimea cu un singur element* și *mulțimea vidă* (fără nici un element).

Mulțimea vidă se notează cu $\emptyset$, scriind: $\emptyset = \{\}$.

Se observă că A și B fiind mulțimi disjuncte, putem scrie $A \cap B = \emptyset$ (sau $A \cap B = \{\}$)

8°. Pe bază de exemple va fi pusă în evidență proprietatea de *comutativitate* a intersecției și reuniunii mulțimilor și *necomutativitatea* diferenței mulțimilor.

Se notează:

$$A \cap B = B \cap A; \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$A - B \neq B - A$$

Tot pe bază de exemple se va observa proprietatea de *asociativitate* a reuniunii mai multor mulțimi.

Se notează:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

ceea ce justifică scrierea:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

9°. Se va reaminti că, dacă între mulțimile A și B există o astfel de legătură încît fiecărui element din A îi corespunde un singur element din B și fiecare element din B corespunde la un singur element din A, atunci între A și B spunem că avem o *corespondență element cu element sau „unu la unu"* (fig. 8).

În cazul în care între mulțimile A și B se poate stabili o corespondență unu la unu zicem că ele au *tot atîtea elemente*, sau că *au același număr de elemente*.

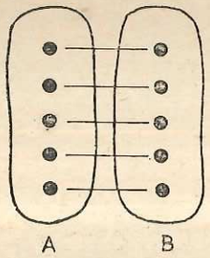


Fig. 8

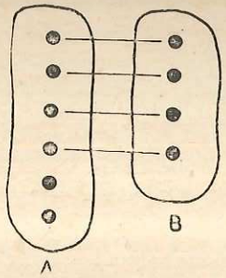


Fig. 9

Fig. 10

Se notează:

$A \sim B$ (A și B sînt echipotente).

Dacă între mulțimile A și B nu se poate stabili o corespondență unu la una (fig. 9) zicem că ele *nu au tot atîtea elemente*, sau că *nu au același număr de elemente*.

Se notează $A \nsim B$ (A neechipotentă cu B).

10° Dacă, încercînd să stabilim o corespondență element cu element între o mulțime A și o mulțime B, rămîn în A elemente fără corespondent în B, zicem că *mulțimea A are mai multe elemente decît mulțimea B, sau că mulțimea B are mai puține elemente decît mulțimea A.*

Se notează:

$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ (numărul elementelor mulțimii A este mai mare decît numărul elementelor mulțimii B),

sau:

$\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$ (numărul elementelor mulțimii B este mai mic decît numărul elementelor mulțimii A).

Dacă avem $A \sim B$ atunci putem scrie $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

11°. Numărul de elemente al unei mulțimi cu un singur element îl numim „unu" și îl notăm 1 (fig. 10).

Reunind o mulțime cu un element, cu o mulțime cu un element disjunctă de prima, obținem o mulțime al cărei număr de elemente diferă de unu. Numim „doi" numărul elementelor mulțimii obținute și îl notăm 2 (fig. 11). Avem (fig. 12):

$$1 < 2.$$

Reunind o mulțime cu două elemente cu o mulțime cu un element disjunctă de prima, obținem o mulțime al cărei număr de elemente diferă de doi. Numim „trei" numărul elementelor mulțimii obținute și îl notăm 3 (fig. 13). Avem (fig. 14):

$$1 < 2 < 3.$$

Continuînd astfel putem obține mulțimea numerelor naturale nenule:

$$N^* = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}.$$

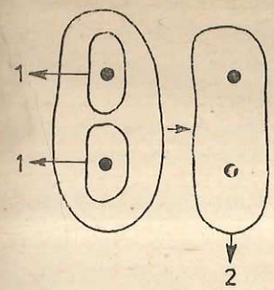


Fig. 11

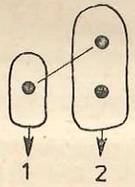


Fig. 12

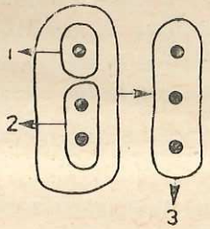


Fig. 13

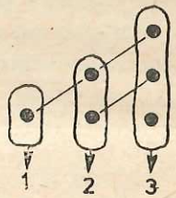


Fig. 14

12°. Numim zero și notăm 0 numărul elementelor mulțimii vide. Întrucît orice mulțime nevidă are elemente ce nu au corespondent în mulțimea vidă, decurge că este firesc pe zero să-l considerăm mai mic decît orice număr natural.

Putem scrie acum *mulțimea numerelor naturale*

$$N = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}.$$

Se vede că în această mulțime nu există un număr mai mare decît toate celelalte, deoarece oricît de mare ar fi numărul de elemente al unei mulțimi, reunind această mulțime cu o mulțime cu un element, disjunctă de prima, obținem o mulțime al cărei număr de elemente este mai mare decît cel al mulțimii considerate anterior.

13°. Pentru numirea fiecărui număr natural de la zero la nouă s-a folosit cîte o denumire specială, iar pentru scrierea lui cîte un semn special, numit *cifră*. Elevii trebuie să sesizeze că *cifra nu este același lucru cu numărul pe care aceasta îl reprezintă*, tot așa cum numele unei persoane, scris pe o foaie de hîrtie, nu este același lucru cu persoana însăși. Cifra nu este decît un simbol grafic ce reprezintă numărul. *Numărul rămîne distinct de simbolul său.*

Totuși, în situațiile în care anumite semne sînt folosite exclusiv pentru scrierea numerelor, aceste semne își pierd orice altă importanță. Privind de exemplu semnul 3, noi nu ne gîndim la nimic în legătură cu acest semn (nici la mărime, nici la formă etc.), ci doar la numărul pe care îl reprezintă. De aceea, în mod obișnuit, semnele cu care sînt scrise numerele nu sînt privite ca fiind distincte de numerele înseși. Spunem, de exemplu, că 3 este un număr și nu 3 reprezintă un număr (deși sensul corect este acesta din urmă).

14°. Acordarea de nume și semne noi pentru fiecare număr natural, așa cum s-a făcut pînă la nouă, ar fi un lucru posibil dar foarte nepractic, chiar dacă ne-am limita la numere relativ mici.

Pentru numerele pînă la 100 000, insuficiente pentru nevoile practice elementare, am avea nevoie de 100 000 denumiri și de tot atîtea semne. Aceasta ne-ar supune memoria la eforturi chinuitoare, făcînd inaccesibilă cunoașterea numerelor naturale pentru imensa majoritate a oamenilor, fără a mai vorbi de dificultatea găsirii unui număr atît de mare de cuvinte și semne distincte, cîte unul pentru fiecare număr natural.

Pentru a soluționa rezonabil problema s-au căutat procedee de reducere la minimum a numărului de cuvinte și semne folosite pentru numirea și scrierea numerelor naturale. Așa a apărut *ideea de organizare a mulțimii cu structură numerică* și, pe baza ei, *ideea de sistem de numerație.*

În prezent *s-a extins organizarea mulțimii cu structură numerică zecimală* și de aici utilizarea *sistemului zecimal de numerație.*

15°. Elevii vor trebui să-și reamintească, mînuind nemijlocit mulțimi de obiecte, organizarea unei mulțimi cu structură numerică zecimală:

a) Se separă din mulțimea dată, ale cărei elemente le numim și unități simple sau unități de ordinul întîi, submulțimi de cîte zece elemente, disjuncte două cîte două, atît cît este posibil. Fiecare submulțime de zece unități simple o numim *„zece"* sau *unitate de ordinul doi.*

b) Formăm mulțimea avînd ca elemente toate unitățile de ordinul doi, și mulțimea avînd ca elemente toate unitățile de ordinul întîi cu care nu s-a mai putut completa o unitate de ordinul doi (numărul acestora este cel mult egal cu 9).

Dacă avem cel mult 9 unități de ordinul doi, organizarea mulțimii cu structură numerică zecimală este terminată. Presupunînd, de exemplu, că s-au obținut 3 unități de ordinul doi și au rămas 4 unități de ordinul întîi, putem reprezenta structura numerică zecimală a mulțimii cu ajutorul *figurii numerice* alăturate (fig. 15), pe care elevii vor trebui să o realizeze și cu piesele din trusa pentru studiul numerelor naturale.

16°. *Structura numerică zecimală a mulțimii și figura numerică care o reprezintă sugerează numirea și scrierea numerelor într-un sistem numit sistem zecimal de numerație:*

a) Denumirea numărului de elemente al mulțimii se obține spunînd cîte unități de fiecare ordin se găsesc în structura numerică zecimală, în ordine descrescătoare, spunînd și numele ordinului respectiv, în afară de unitățile simple la care se spune cîte sînt, dar nu se spune numele ordinului.

În exemplul de mai sus: treizeci și patru.

b) Scrierea numărului este sugerată de figura 16. Se scriu cifrele ce reprezintă cîte unități de fiecare ordin sînt în structura numerică zecimală a mulțimii, în ordinea descrescătoare a unităților. Se obține o scriere pozițională, în care cifrele reprezintă unități de un anumit ordin, conform locului pe care îl ocupă în scrierea numărului, numerotarea ordinelor făcîndu-se de la dreapta la stînga.

În exemplul nostru: 34.

Fig. 15

Fig. 16

Fig. 17

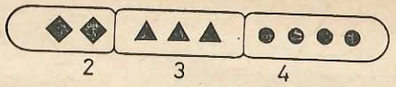


Fig. 18

17°. Dacă la formarea unităților de ordinul doi se obțin mai mult de nouă unități de acest fel, atunci mulțimea unităților de ordinul doi este împărțită la rîndul ei în submulțimi de cîte zece unități de ordinul doi, disjuncte între ele, atît cît este posibil. Fiecare submulțime de *zece zeci* se numește *sută* sau *unitate de ordinul trei.*

Se formează: mulțimea unităților de ordinul trei; mulțimea unităților de ordinul doi, cu care nu s-a mai putut forma o unitate de ordinul trei; mulțimea unităților de ordinul întîi cu care nu s-a mai putut forma o unitate de ordinul doi.

Dacă s-au obținut astfel 2 unități de ordinul trei, 3 unități de ordinul doi și 4 unități de ordinul întîi, structura numerică zecimală a mulțimii este reprezentată de figura numerică alăturată (fig. 17), care completată așa cum arată figura 18 sugerează pentru număr denumirea „două sute treizeci și patru" și scrierea 234.

Dacă nu avem în structura numerică zecimală unități de un anumit ordin, numărul lor îl notăm cu 0. Astfel, pentru structurile numerice reprezentate în figurile 19 și 20, numerele de elemente le vom nota 201, respectiv 340.

Se va reaminti elevilor *utilizarea trusei pentru studiul numerelor naturale în scopul reprezentării structurii numerice zecimale a mulțimilor cu mai puțin decît o mie de elemente.* Elevii vor fi puși în situația de a mînui singuri piesele trusei pentru: realizarea reprezentării structurii zecimale a unei mulțimi; numirea și scrierea numărului de elemente al unei mulțimi a cărei structură numerică zecimală este realizată de învățător cu ajutorul pieselor din trusă.

18°. Pentru *a aduna două numere naturale a* și *b*:

a) se ia o mulțime A cu a elemente și o mulțime B cu b elemente, astfel încît mulțimile A și B să fie disjuncte;

Prescurtat: $\overline{\overline{A}} = a$; $\overline{\overline{B}} = b$; $A \cap B = \emptyset$

b) se formează reuniunea mulțimilor A și B;

c) se numără cîte elemente are reuniunea lui A cu B. Dacă c este numărul elementelor acestei reuniuni, scriem (fig. 21): $a + b = c$

sau (fig. 21*):

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}}$$

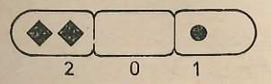


Fig. 19

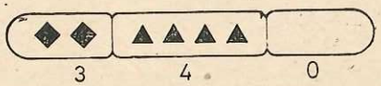


Fig. 20

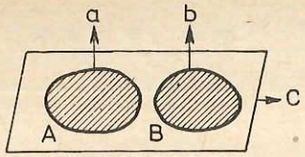


Fig. 21

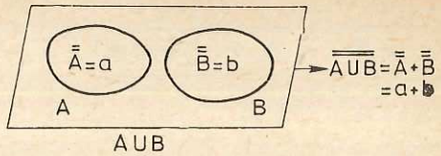


Fig. 21*

Numerele a și b se numesc *termenii adunării*, c se numește *sumă* sau *total*. Mulțimile A și B pe care le-am folosit le numim *mulțimi model pentru termenii adunării*. Reuniunea lor constituie *mulțimea model pentru sumă*.

19°. Pentru *a scădea din numărul natural a, numărul natural b:*

a) se ia o mulțime A cu a elemente. Din B separăm o submulțime B cu b elemente;

Păescurtat: $\bar{\bar{A}} = a;\ \bar{\bar{B}} = b;\ B \subset A$

b) se formează mulțimea diferență dintre mulțimile A și B;

c) se numără cîte elemente are mulțimea diferență astfel formată. Dacă c este numărul ei de elemente, scriem (fig. 22):

$$a - b = c$$

sau (fig. 22*):

$$\bar{\bar{A}} - \bar{\bar{B}} = \overline{\overline{A - B}}$$

Numerele a și b se numesc *termenii scăderii*, a se numește descăzut, b scăzător iar c *diferență* sau *rest*.

Mulțimile A și B pe care le-am folosit se numesc mulțimi model pentru descăzut, respectiv pentru scăzător. Mulțimea diferență intre mulțimile A și B pe care am obținut-o se numește mulțime model pentru diferența sau restul dintre numerele naturale a și b.

20° Observăm că drept mulțimi model pentru a face adunarea sau scăderea numerelor naturale putem folosi orice mulțimi care îndeplinesc condițiile cerute de regulile de adunare sau scădere.

Este avantajos pentru găsirea unor *reguli comode de efectuare a operațiilor cu numerele naturale să folosim structurile numerice ale mulțimilor model, re-*

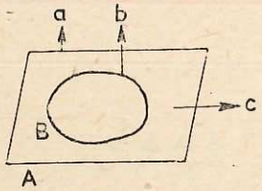


Fig. 22

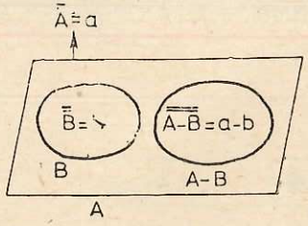


Fig. 22*

prezentate prin figuri numerice, materializate cu piesele din trusa pentru studiul operațiilor cu numere naturale.

Folosind figuri ca 23 se va reaminti că avem simultan:

$$a + b = c \qquad c - a = b$$
$$b + a = c \qquad c - b = a$$

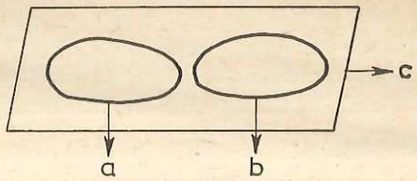


Fig. 23

ceea ce conduce la *proba adunării prin adunare și prin scădere* și *proba scăderii prin scădere și prin adunare*

$$a + b = c \text{ proba prin } \begin{cases} \text{adunare:} & b + a = c \\ \text{scădere:} & \begin{cases} c - a = b \\ c - b = a \end{cases} \end{cases}$$

$$a - b = c \text{ proba prin } \begin{cases} \text{scădere:} & a - c = b \\ \text{adunare:} & \begin{cases} c + b = a \\ b + c = a \end{cases} \end{cases}$$

22°. Cu ocazia deducerii probelor menționate se va pune în evidență că *putem afla un termen al operației de adunare sau scadere, cînd se cunoaște rezultatul și celălalt termen.*

În cazul adunării, scăzînd din sumă unul din termeni se obține celălalt termen:

$$\begin{cases} a + x = c \\ x = c - a \end{cases} \qquad \begin{cases} x + b = c \\ x = c - b \end{cases}$$

În cazul scăderii, scăzînd din descăzut diferența, obținem scăzătorul:

$$\begin{cases} a - x = c \\ x = a - c \end{cases}$$

și adunînd la diferență scăzătorul, obținem descăzutul

$$\begin{cases} x - b = c \\ x = c + b \end{cases}$$

23°. Pentru efectuarea adunărilor și scăderilor, în mulțimea numerelor naturale mai mici decît 1 000, se va reaminti *deducerea regulilor de calcul în cazurile fără sau cu trecere peste ordin, cu ajutorul trusei pentru studiul numerelor naturale.* Prin mijlocirea trusei se va deduce modul în care se gîndește efectuarea operației, care va fi ilustrat apoi în scris prin folosirea parantezelor. *Asupra acestui mod de scriere nu se va insista decît în măsura în care favorizează însușirea unor deprinderi de calcul oral.*

24°. Tot prin intermediul trusei se vor deduce *regulile de calcul în scris, folosind așezarea numerelor unele sub altele.*

Această tehnică de lucru trebuie foarte bine reamintită, reactualizînd și întărind deprinderile de calcul la elevi.

Cu ocazia mînuirii trusei *se va folosi cu grijă limbajul mulțimilor și definițiile cu mulțimi a operațiilor de adunare și scădere, ceea ce va mări capacitatea elevilor de a recunoaște situațiile care cer operația de adunare sau scădere a unor numere naturale date în probleme,* sporind apreciabil capacitatea elevilor de rezolvare a problemelor.

25°. Alegînd ca mulțimi model, mulțimi de litere, se vor reaminti noțiunile de *cuplu* sau *pereche ordonată* și *mulțimea produs* (cartezian) *a două mulțimi date.*

Dacă luăm mulțimile

$$A = \{c, d\}; \quad B = \{m, p, t\}$$

produsul lor cartezian este mulțimea formată din toate cuplurile ce pot fi formate astfel încît primul element al cuplului să fie din A și al doilea din B:

$$A \times B = \{(c, m), (c, p), (c, t)\ (d, m), (d, p), (d, t)\}.$$

Mulțimea $A \times B$ va fi scrisă și sub forma din figura 24, care prezintă avantajul de a pregăti utilizarea trusei petru studiul numerelor naturale în scopul efectuării înmulțirii numerelor naturale, pe baza mulțimii produs.

26°. *Pentru a înmulți două numere naturale a și b:*

a) se ia o mulțime oarecare A cu a elemente și o mulțime oarecare B cu b elemente;

b) se formează mulțimea produs $A \times B$;

c) se numără elementele (cuplurile) mulțimii produs. Dacă se găsesc c cupluri, scriem:

$$a \times b = c \text{ sau } a \cdot b = c$$

sau

$$A = a;\ B = b;\ a \cdot b = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$$

Numerele a și b se numesc *factorii înmulțirii,* iar rezultatul c se numește *produs.*

27°. Mulțimile model A și B folosite pentru factori pot fi oarecare, numai să respecte condițiile cerute în definiție. Din exemple se va observa că *modificarea mulțimilor A și B alese ca modele pentru factori duce la modificarea*

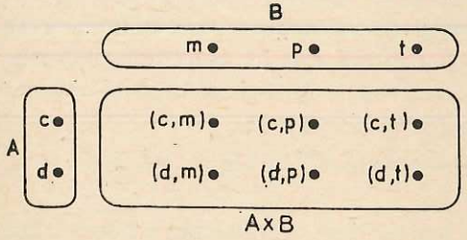


Fig. 24

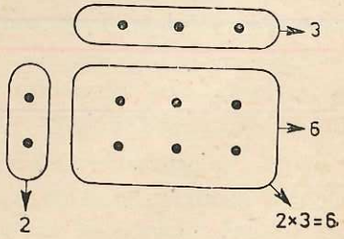


Fig. 25

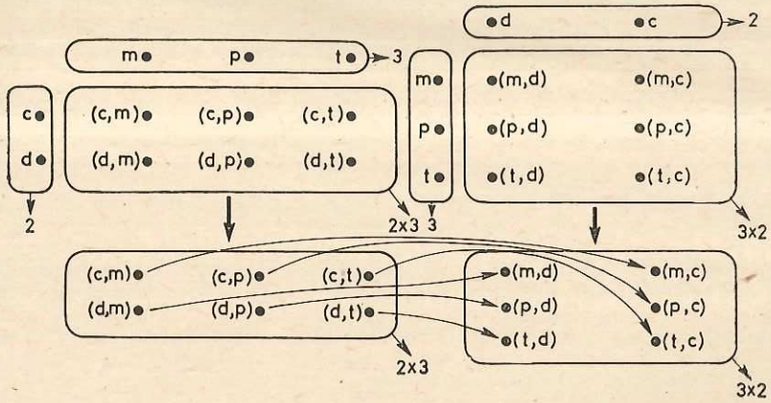


Fig. 26

mulțimii produs care se obține, aceasta înlocuindu-se cu alta ce are același număr de elemente cu ea. Așadar, *prin această modificare, numărul produs al numerelor a și b rămîne neschimbat.*

Observațiile anterioare ilustrează că produsul numerelor naturale a și b, efectuat după regula de mai sus, depinde numai de numerele factori a și b și nu depinde de natura elementelor mulțimilor model pentru factori, nici a elementelor mulțimii produs.

28°. Se va efectua înmulțirea numerelor naturale folosind figuri ca 25, care il ustrează că $2 \times 3 = 6$.

29°. Se va reaminti *comutativitatea înmulțirii,* din observarea unor figuri ca 26, care ne dă:

$$2 \times 3 = 3 \times 2.$$

În cazul în care un factor este 0, comutativitatea se constată calculînd produsele $0 \times p$ și $p \times 0$ și găsind $0 \times p = p \times 0$.

30°. Separînd în mulțimea produs submulțimi disjuncte între ele, așa cum arată figura 27, deducem *posibilitatea de scriere și efectuare a înmulțirii numerelor naturale cu ajutorul adunării repetate*

$$4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2,$$

primul factor spunînd de cîte ori trebuie scris al doilea ca termen al adunării.

Observăm că dacă primul factor este 0 sau 1 înmulțirea nu poate fi scrisă cu ajutorul adunării repetate după procedeul de mai sus.

În adevăr, cum am putea scrie folosind adunarea repetată a lui 8, înmulțirile $0 \times 8 =$ sau $1 \times 8 =$?

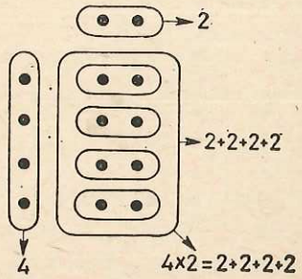


Fig. 27

Pentru numerele naturale a și b înmulțirea poate fi definită cu ajutorul adunării repetate

$$a \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{\text{de } a \text{ ori}}$$

fără a mai folosi mulțimi model pentru factori, și mulțimea produs. O astfel de definiție lasă însă fără sens acele înmulțiri de numere naturale la care $a = 0$ sau $a = 1$, înmulțiri la care produsul rezultă fără dificultate folosind definiția înmulțirii cu ajutorul mulțimilor model pentru factori, și a mulțimii produs. Ultima definiție apare astfel mai generală.

31°. Separînd în mulțimea produs submulțimi disjuncte, așa cum arată figura 28, se vede că:

$$4 \times 2 = 4 + 4 \ .$$

Ținînd cont și de scrierea anterioară:

$$4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2$$

rezultă următoarea regulă (pentru cazurile cînd înmulțirea poate fi scrisă ca adunare repetată):

Pentru efectuarea înmulțirii a două numere naturale scriem pe unul din factori ca termen al adunării, de cîte ori arată celălalt factor.

Întrucît vom folosi obișnuit scrierea înmulțirii ca adunare repetată, așa cum s-a arătat la (30°), situațiile redate în figurile 29 și 30 conduc la scrierile:

$$2 \times 4 = 4 + 4; \qquad 4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 \ .$$

32°. Tabla înmulțirii va fi recapitulată cu răbdare, pînă la formarea unor automatisme trainice în enunțarea rezultatelor.

33°. Pentru *a separa o mulțime A în submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd b elemente*, se iau pe rînd din A cîte b elemente, pînă epuizăm cele a elemente ale mulțimii A. *Procedeul* folosit se numește prin *„cuprindere"*. În final, fie că nu rămîn elemente în afara submulțimilor formate, fie că rămîn prea puține pentru a mai forma o nouă submulțime (fig. 31 și 32).

Se vor face exerciții de aplicare a acestui procedeu folosind piesele din trusa pentru studiul numerelor naturale.

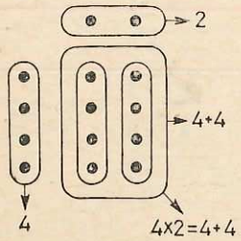


Fig. 28

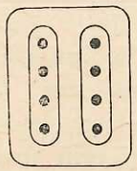


Fig. 29

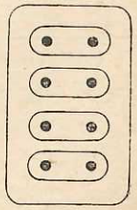


Fig. 30

34°. Înlocuind mulțimea A cu alta, avînd același număr de elemente a și păstrînd același număr b de elemente în fiecare submulțime formată, se constată că se obțin același număr de submulțimi și același număr de elemente în afara acestor submulțimi la aplicarea procedeului prin „cuprindere". Așadar, *numărul submulțimilor obținute depinde numai de numărul „a" al elementelor mulțimii A și de numărul „b" al elementelor fiecărei submulțimi, și nu depinde de natura elementelor mulțimii A.*

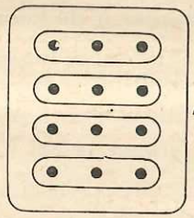


Fig. 31

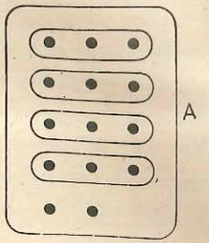


Fig. 32

35°. Pentru a *face împărțirea (exactă) a numărului natural a la numărul natural b:*

a) se ia o mulțime oarecare A cu a elemente;

b) se separă A în submulțimi disjuncte două cîte două, avînd fiecare cîte b elemente, atît cît este posibil;

c) dacă nu rămîn elemente în afara acestor submulțimi, se numără cîte submulțimi s-au obținut. Dacă s-au obținut c submulțimi, se scrie:

$$a : b = c.$$

Dacă au rămas elemente cu care nu s-a mai putut forma o nouă submulțime, se zice că *împărțirea (exactă) a lui a la b este imposibilă.*

Numărul natural a se numește *deîmpărțit*, b se numește *împărțitor* și c se numește *cît. a și b împreună se numesc termenii împărțirii.*

Împărțirea efectuată prin procedeul de mai sus zicem că a fost făcută prin cuprindere.

36°. Observînd aspectul obținut pe panoul trusei la efectuarea împărțirii $a : b = c$, se constată că avem $c \times b = a$, adică *înmulțind cîtul cu împărțitorul obținem deîmpărțitul.* În acest mod putem face *proba împărțirii prin înmulțire.* În figura 31 avem: $12 : 3 = 4$ și $4 \cdot 3 = 12$.

37°. *Pentru a separa o mulțime A în b submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd același număr de elemente*, se iau pe rînd elementele lui A și se distribuie cîte unul în fiecare din cele b submulțimi, apoi se mai distribuie cîte un element din A în cele b submulțimi, și tot așa pînă se epuizează elementele lui A, sau pînă nu mai rămîn suficiente pentru a se mai distribui cîte unul în fiecare din cele b submulțimi. (fig. 33 și 34).

Se vor face exerciții de aplicare a acestui *procedeu* zis prin *„părți egale"*, folosind piesele din trusa pentru studiul numerelor naturale.

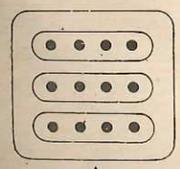


Fig. 33

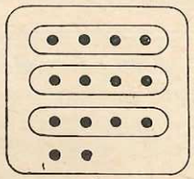


Fig. 34

38°. Înlocuind mulțimea A cu alta avînd același număr de elemente a, și păstrînd același număr b de submulțimi, se constată că se obține același număr de elemente într-o submulțime și rămîne același număr de elemente în afara acestor submulțimi. Așadar, *numărul elementelor dintr-o submulțime depinde numai de numărul elementelor mulțimii A și de numărul de submulțimi disjuncte ce trebuie formate și nu depinde de natura elementelor mulțimii A.*

39°. Se observă că la aplicarea procedeului prin „părți egale", din mulțimea A se iau b elemente, care sînt distribuite cîte unul în fiecare din cele b submulțimi disjuncte, apoi se iau din A iarăși b elemente care se distribuie cîte unul în fiecare din cele b submulțimi disjuncte etc. Așadar, *se vor obține în fiecare submulțime atîtea elemente, de cîte ori se pot lua din A cîte b elemente.*

Conchidem că *numărul de elemente care revin într-o submulțime la aplicarea procedeului prin „părți egale" coincide cu numărul de submulțimi ce se obține la aplicarea procedeului* prin „cuprindere" (a se compara figurile 31 și 33). Aceasta permite efectuarea împărțirii numărului natural a la numărul natural b, prin procedeul zis prin „părți egale".

40°. *Pentru a face împărțirea (exactă) a numărului natural a la numărul natural b:*

a) se ia o mulțime oarecare A cu a elemente;

b) se distribuie din A cîte un element în fiecare din cele b submulțimi disjuncte cîte două, apoi se mai distribuie din A cîte un element în fiecare din cele b submulțimi disjuncte cîte două, și așa mai departe pînă se epuizează elementele lui A, sau pînă nu mai rămîn suficiente pentru a se mai distribui cîte un element în fiecare din cele b submulțimi ce trebuie formate;

c) dacă nu au mai rămas elemente în A cu care să nu putem completa încă cîte un element în fiecare din cele b submulțimi disjuncte, numărăm cîte elemente s-au obținut într-o submulțime.

Găsind c elemente, scriem:

$$a : b = c.$$

(Dacă ar fi rămas elemente necuprinse în cele b submulțimi, împărțirea era imposibilă).

Din cele arătate la punctul (39) se vede că *la împărțirea numerelor naturale se obține același cît indiferent dacă se folosește procedeul prin „cuprindere" sau cel prin „părți egale".*

41°. Observînd aspectul obținut pe panoul trusei la efectuarea împărțirii $a : b = c$, folosind procedeul prin „părți egale", se constată că avem

$$b \times c = a$$

adică *înmulțind împărțitorul cu cîtul obținem deîmpărțitul.* În acest mod sîntem conduși la *proba împărțirii prin înmulțire.*

42°. Elevii vor trebui să observe că din figura 31 putem deduce

$$12 : 3 = 4$$

efectuată prin cuprindere și în același timp

$$12 : 4 = 3$$

efectuată prin părți egale. De aici se va deduce *proba împărțirii prin împărțire:* împărțind deîmpărțitul la cît se obține împărțitorul.

43°. Sintetizînd rezultatele de mai sus, se va constata că *următoarele* scrieri sînt toate deodată adevărate:

$$3 \times 4 = 12; \quad 4 \times 3 = 12; \quad 12 : 3 = 4; \quad 12 : 4 = 3.$$

Pe această bază se va aminti *cum putem scrie rezultatul unor împărțiri, folosindu-ne de cunoașterea rezultatului unor înmulțiri, și cum poate fi întocmită tabla împărțirii, cunoscînd tabla înmulțirii.*

Se va acorda toată atenția împrospătării, pînă la automatisme, a tablei împărțirii.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL I

(Număr de ore, orientativ = 15)

1°. Cunoștințele menționate mai sus sînt în marea lor majoritate cunoscute de elevi din clasa I sau a II-a. Ele vor fi împrospătate cu ocazia discuțiilor purtate în legătură cu rezolvarea exercițiilor și problemelor propuse în manual la acest capitol, și cu altele asemănătoare pe care le va propune învățătorul.

Se va insista pentru înțelegerea cunoștințelor pe bază de exemple, manifestîndu-se însă grijă și pentru exprimarea corectă a ideilor de către elevi (fără a cădea în verbalism, neacoperit noțional).

Pentru a se evita exagerările și utilizarea mecanică a unor simboluri s-a preferat să nu se folosească încă unele notații consacrate, cum ar fi:

$$p \in A;\ p \notin A;\ A \cup B;\ A \cap B;\ A - B;\ A \sim B;\ \overline{\overline{A}};\ \text{etc.}$$

Lipsa lor îngreunează însă exprimarea, miai ales în scris. Ba, uneori, favorizează apariția unor confuzii tocmai din cauza dificultăților de exprimare, care îndeamnă la „inventarea" unor formulări proprii ce se dovedesc nereușite.

Încercările făcute de a introduce la elevi un minimum de notații de felul celor de mai sus nu au pus în evidență dificultăți în utilizarea lor, elevii resimțind cu satisfacție ușurarea realizată în exprimare, pe această cale.

Așadar, evitarea unor notații trebuie privită doar ca o măsură de prudență și *nu ca o interdicție.*

2°. O atenție deosebită trebuie acordată *distincției dintre mulțime și numărul ei de elemente*. Să luăm de exemplu problema (fig. 35):

„Reuniunea C a mulțimilor disjuncte A și B are 9 elemente. Dacă mulțimea A are 4 elemente, cîte elemente are mulțimea B?"

Greșește, sau nu, cineva care ar interpreta astfel problema: „Cunoaștem reuniunea C a lui A cu B, și mulțimea A, și trebuie să aflăm mulțimea B"?

Desigur că greșește. În primul rînd, nu se cunoaște nici mulțimea C nici mulțimea A, întrucît elementele lor ne sînt necunoscute (și nici nu pot fi aflate folosind textul problemei). Ceea ce cunoaștem este numărul elementelor lui C, care este 9, și numărul elementelor lui A, care este 4.

În al doilea rînd, nu ni se cere să aflăm mulțimea B, ceea ce nici nu ar fi fost posibil a afla din datele problemei, ci doar numărul elementelor mulțimii B, notat în figură cu x.

Făcînd operația $9 - 4 = 5$ nu aflăm mulțimea B, această mulțime nu este $B = \{5\}$ (caz în care B ar avea un singur element, pe 5). Făcînd operația $9 - 4 = 5$ aflăm numărul x al elementelor lui B, $x = 5$. Dar fiecare din cele 5 elemente ale lui B ne rămîne cu desăvîrșire necunoscut, deci și mulțimea B rămîne necunoscută.

Simbolic, problema s-ar scrie prescurtat:

$$A \cap B = \emptyset; \quad \overline{\overline{A \cup B}} = 9; \quad \overline{\overline{A}} = 4; \quad \overline{\overline{B}} = ?$$

iar soluția ei:

$$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}} - \overline{\overline{A}}, \text{ adică } \overline{\overline{B}} = 9 - 4; \quad \overline{\overline{B}} = 5,$$

cîștigînd și în conciziune și în rigoare.

3°. Să ne mai ocupăm de o problemă:

„Mulțimea A are 3 elemente necomune cu mulțimea B, mulțimea B are 5 elemente necomune cu mulțimea A, iar intersecția lui A cu B are 2 elemente. Cîte elemente are fiecare din mulțimile A și B? Dar reuniunea lor?"

În clasa a II-a, pentru rezolvarea problemei, s-au folosit figuri ca 36. Uitîndu-se uneori faptul că în diagrama unei mulțimi elementele sînt reprezentate prin puncte și nu prin litere sau cifre, numerele 3, 2 și 5 din figură au putut fi luate ca fiind elemente ale mulțimilor și nu ca reprezentînd numerele elementelor unor mulțimi.

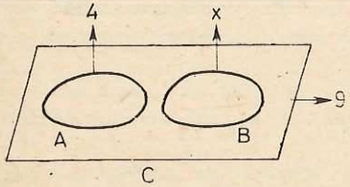


Fig. 35

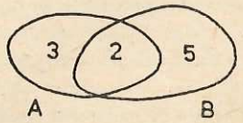


Fig. 36

În adevăr, există riscul ca din figura 36 să se deducă:

$$A - B = \{3\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad B - A = \{5\}$$

nu

$$\overline{\overline{A - B}} = 3; \quad \overline{\overline{A \cap B}} = 2, \quad \overline{\overline{B - A}} = 5$$

cum s-a dorit atunci cînd s-a făcut figura respectivă.

În această interpretare, mulțimea A ar avea 2 elemente (pe 3 și 2), mulțimea B ar avea 2 elemente (pe 2 și 5) iar reuniunea lor ar avea 3 elemente (pe 3, 2 și 5), alternativă care nu s-a avut în vedere în textul problemei.

În conformitate cu textul problemei A are $3 + 2$ elemente, B are $2 + 5$ elemente iar reuniunea lor are $3 + 2 + 5$ elemente.

Figura 36, în cazul problemei noastre, putea fi înlocuită cu alta în care *să fie reprezentate prin puncte toate elementele mulțimilor care intervin*. Dacă în locul numerelor 3, 2 și 5 am fi avut, respectiv, 254, 69 și 328 atunci *era nepractic a figura un număr atît de mare de puncte* și utilizarea unei figuri ca 36 prezintă avantaje evidente.

Cu același sens ca figura 36 ar putea fi folosite figuri ca 37, dacă se consideră mai mic riscul de confuzii.

4°. Trebuie atrasă atenția elevilor că, dacă numărul elementelor mulțimii A este 9 și numărul elementelor mulțimii B este 5, putem scrie $9 > 5$, dar *notația $A > B$ este fără sens, fără sens fiind și expresia „mulțimea A este mai mare (sau mai mică) decît mulțimea B"*. Putem spune însă că: „numărul elementelor mulțimii A este mai mare (sau mai mic) decît numărul elementelor mulțimii B".

Ultima afirmație se scrie:

$$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}, \text{ respectiv } \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}.$$

5°. Adunarea numerelor naturale 9 și 5 se scrie $9 + 5 =$, în scopul efectuării fiind necesară alegerea mulțimilor disjuncte A și B, respectiv cu 9 și 5 elemente, formarea reuniunii lui A cu B și numărarea ei.

Scrierea $A + B$ este fără sens, semnul $+$ avînd sens doar între numere și nu între mulțimi (semnul reuniunii mulțimilor este $\cup$).

6°. Scăderea numerelor naturale 9 și 5 se scrie $9 - 5 =$, în scopul efectuării fiind necesară alegerea unei mulțimi A cu 9 elemente și separarea în ea a unei submulțimi B cu 5 elemente, urmînd a număra elementele mulțimii diferență obținută.

Scrierea $A - B$ reprezintă mulțimea diferență dintre mulțimea A și mulțimea B (indiferent dacă B este, sau nu, inclusă în A), *și nu diferența numărului lor de elemente. Confuzia* dintre mulțimea diferență $A - B$, și numărul diferență dintre numărul elementelor lui A și numărul elementelor lui B *este favorizată atît de coincidența folosirii termenului „diferență", cît și a semnului „$-$", în ambele cazuri* (deși sensul este diferit).

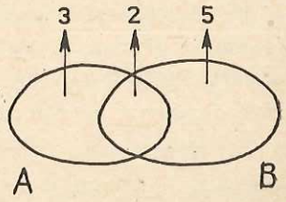


Fig. 37

Mulțimea diferență a mulțimilor A și B se notează $A - B$, iar numărul diferență dintre $\overline{\overline{A}}$, numărul elementelor lui A și $\overline{\overline{B}}$, numărul elementelor lui B, avînd $B \subset A$, se scrie $\overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}}$.

7° *Figurile numerice* (vezi fig. 15) *sînt o reprezentare simbolică a mulțimilor organizate cu structuri numerice.* Ele nu trebuie confundate cu mulțimea însăși (chiar dacă au fost realizate obiectual pe panourile trusei pentru studiul numerelor naturale). Aceste figuri numerice pot fi însă utilizate în locul mulțimilor pe care le reprezintă în orice situație în care prezența efectivă a înseși elementelor mulțimii nu este obligatorie (așa cum în multe situații nu este necesară prezența unui anumit obiect, ci este suficientă semnalizarea sa prin simbolul său).

8°. În contextul utilizării figurilor numerice realizate cu piesele trusei, *triunghiul albastru va fi privit ca o unitate de ordinul al doilea, reprezentînd zece unități simple* (sau zece elemente ale mulțimii); *pătratul roșu va fi privit ca o unitate de ordinul al treilea, reprezentînd zece unități de ordinul al doilea* (se poate deci înlocui cu zece triunghiuri albastre) *sau o sută de unități de ordinul întîi* (adică o sută de elemente ale mulțimii).

9°. *Utilizarea figurilor numerice se justifică prin aceea că evidențiind structura numerică a mulțimii, oferă posibilitatea folosirii comode, intuitive, a acestei structuri, în scopul denumirii și scrierii numerelor, a comparării lor, a deducerii unor reguli practice de calcul.* Mai ales în cazul adunării și scăderii cu trecere peste ordin *figurile numerice concretizează procesele de gîndire care au loc, în mod foarte sugestiv.*

Utilizarea figurilor numerice la deducerea regulilor de adunare și scădere a numerelor naturale a dus la realizarea unor diagrame explicative care aproape nu au nevoie de explicații în cuvinte, reprezentînd adevărate *grafuri logice ale desfășurării proceselor de gîndire în situațiile respective.*

Cu descifrarea acestor grafuri elevii se obișnuiesc repede, putîndu-le „citi" aproape independent, chiar în cazul prezentării unor situații noi, necunoscute încă.

10°. *Împrospătarea* cunoștințelor și deprinderilor elevilor referitoare la structurile numerice zecimale ale mulțimilor și reprezentarea lor prin figuri numerice, cît și la deducerea cu ajutorul lor a regulilor de adunare și scădere, *este necesară în scopul creării bazei pe care se vor introduce numerele mai mari ca 1 000 și operațiile cu ele.*

11°. Cu ocazia *calculării unui termen al operației, cînd se cunoaște rezultatul și celălalt termen,* se va face o bună fixare a *probelor operațiilor* și, notînd numărul necunoscut cu o literă, *se vor rezolva ecuații simple,* pregătindu-se terenul pentru introducerea viitoare a algebrei.

12°. *Exercițiile și problemele cu inegalități vor fi rezolvate exclusiv prin încercări,* reducînd pe cît posibil numărul încercărilor prin observarea și valorificarea datelor problemei. Răspunsurile se vor formula, de regulă,

folosind mulțimile, aceasta oferind un mijloc concis și elegant de prezentare a soluției.

13°. În toate situațiile în care este posibil și firesc, *se va cere exprimarea în limbajul mulțimilor.* Aceasta nu pentru a fi „la modă", ci pentru că *majoritatea problemelor, la acest nivel de învățămînt, decurg din situații practice de viață. În astfel de situații se mînuiesc obiecte concrete, deci se fac în esență diverse operații cu mulțimi de obiecte.* **Rezolvarea numerică a problemei revine, în fond, la a găsi operațiile cu numere care corespund operațiilor cu mulțimi descrise în textul problemei.** *Deprinderea de a găsi operațiile cu numere care duc la rezolvarea problemei se formează în condiții evident superioare dacă elevul este obișnuit să desprindă esența operațiilor cu numere, din noțiunile corespunzătoare privind mulțimile.* Aceasta revine, în fond, la a merge de la concret la abstract.

Trebuie, desigur, avută în vedere și importanța pe care o au anumite noțiuni noi referitoare la mulțimi și corespondențe, pentru prezentarea ulterioară a unor cunoștințe matematice. *Toate acestea pledează în favoarea acordării unei deosebite atenții din partea învățătorului, aprofundării cunoștințelor pe baza noțiunilor noi prevăzute de programă.*

14°. Atragem atenția asupra grijii cu care trebuie recapitulată *definiția înmulțirii, pe baza mulțimii produs (cartezian) și a ilustrării posibilității de găsire a produsului prin adunarea repetată a celui de al doilea factor, de cîte ori ne arată primul factor.* (Această posibilitate se deduce din prima definiție, dar poate fi luată și ca definiție independentă a înmulțirii numerelor naturale).

15°. Se va acorda toată atenția rezolvării problemelor *de separare a unei mulțimi în submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd același număr de elemente, cînd cunoaștem: numărul de elemente dintr-o submulțime* (procedeul prin cuprindere); *numărul de submulțimi* (procedeul prin părți egale).

Abia după ce rezolvarea va fi bine însușită, pe bază de utilizare a unui material concret, aceste probleme vor fi folosite la *introducerea și efectuarea împărțirii exacte, atît prin cuprindere cît și prin părți egale.*

Cunoștințele de mai sus, referitoare la înmulțire și împărțire, trebuie să formeze suportul din care să derive apoi tehnica de calcul, folosind automatismele în cunoașterea tablei înmulțirii și împărțirii.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema 1

NOȚIUNI DESPRE MULȚIMI

Problema 2

a) $A = \{a, r, c, t, e\}$; *b)* $B = \{a, r, c\}$; *c)* m.

Problema 3

a) $\{a, r, c\} = B$; *b)* $\{a, r, c, t, e\} = A$; *c)* $\{t, e\}$; d) $\{\ \}$.

Problema 4

a) $12 + 9 + 8 + 15 = (12 + 8) + (9 + 15)$
$= 20 + 24$
$= 44$

b) $36 + 9 + 8 + 3 = 36 + 9 + (8 + 3)$
$= 36 + (9 + 11)$
$= 36 + 20$
$= 56$

c) $12 + 9 + 8 + 15 + 36 + 3 = (12 + 9 + 8 + 15) + 36 + 3$
$= (44 + 36) + 3$
$= 80 + 3$
$= 83$

d) $12 + 15 + 36 + 3 = (12 + 15) + 36 + 3$
$= (27 + 3) + 36$
$= 30 + 36$
$= 66$

e) $9 \times 8 = 72$.

Problema 5

a) Falsă, deoarece *a* și *b* aparțin lui *A* dar nu aparțin lui *B*;
b) adevărată, fiecare element al lui *B* aparținînd și lui *A*;
c) falsă, deoarece *A* și *B* nu sînt formate exact din aceleași elemente.

Problema 6

a) $\{a, m, n, r, b\} = A$; *b*) $\{a, b\}$; *c*) $\{\ \}$; *d*) $\{m, n, r\} = B$.

Problema 7

a) Falsă, *C* avînd elemente ca 12 și 15 care nu aparțin lui *D*;
b) falsă, *D* avînd elemente ca 36 și 3 care nu aparțin lui *C*;
c) falsă, mulțimile *C* și *D* nefiind formare exact din aceleași elemente.

Observăm că din cele trei afirmații nu este obligatoriu ca cel puțin una să fie adevărată.

Problema 8

a) $\{3; 5; 2; 8; 7; 9\}$; *b*) $\{7; 9; 8; 2; 3; 5\} = \{3; 5; 2; 8; 7; 9\}$;
c) $\{3; 5\}$; *d*) $\{7; 9\}$; *e*) $\{2; 8\}$; *f*) $\{2; 8\}$.

Problema 9

a) Figura 38 arată că se poate stabili o corespondență unu la unu între mulțimile *A* și *B*. (Observăm că elementul 2 din mulțimea *A* a fost pus în corespondență cu elementul 2 din mulțimea *B*. Pentru 8 avem aceeași situație.) Deci afirmația este adevărată;

b) falsă, întrucît se poare realiza, după cum s-a văzut, o corespondență unu la unu între *A* și *B*.

Observăm că din cele două afirmații una este sigur adevărat, iar cealaltă este sigur falsă.

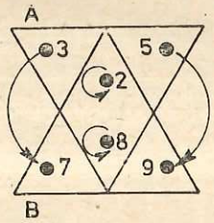


Fig. 38

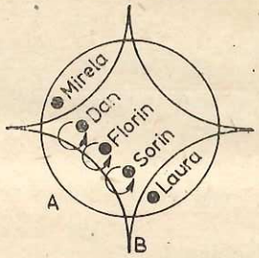


Fig. 39

Problema 10

a) Falsă, figura 39 arătînd că rămîn elemente în *A* (Mirela și Laura de exemplu), fără corespondent în *B*; *b*) adevărată, din motivul pentru care prima afirmație a fost falsă.

Problema 11

Înlocuind punctele cu expresia „egal cu" se obține o propoziție adevărată. Răspunsul se obține fără numărare dacă se stabilește o corespondență unu la unu între mulțimile *A* și *B*, de exemplu așa cum arată figura 38.

Problema 12

Înlocuind punctele cu expresia „mai mare decît" se obține o propoziție adevărată. Fără numărare, răspunsul rezultă dintr-o figură ca 39 care arată că în *A* rămîn elemente fără corespondent în *B*.

Problema 13

Din figura 40 se vede ușor:
$29 + 20 = 49$; $20 + 41 = 61$. Deci *A* are 49 și *B* are 61 de elemente.

Problema 14

Din figura 41 se vede că: *a*) $28 + 34 = 62$; $34 + 36 = 70$; *b*) $28 + 34 + 36 = 98$ sau $62 + 36 = 98$ sau $28 + 70 = 98$.

Problema 15

$A = \{p, a, g, l)$; $B = \}s, i, l, t, o\ r\}$.

a) 4; *b*) 6; *c*) $\{p, a, g, l, s, i, t, o\ r\}$ este reuniunea lui *A* cu *B*, care are 9 elemente; *d*) $\{l\}$ este intersecția lui *A* cu *B* care are 1 element;
e) $\{p, a, g\}$ este diferența dintre *A* și *B*, care are 3 elemente; *f*) $\{s, i, t, o, r\}$ este diferența dintre *B* și *A*, care are 5 elemente.

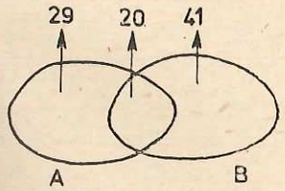


Fig. 40

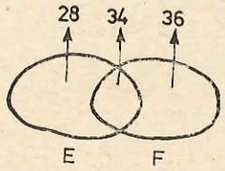


Fig. 41

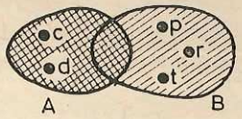


Fig. 42

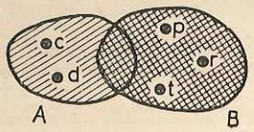


Fig. 43

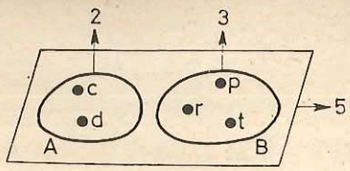


Fig. 44

Problema 16

Fie $A = \{c, d\}$ și $B = \{p, r, t\}$.

a) Figura 42 ilustrează că elementele ce aparțin reuniunii lui A cu B, dar nu aparțin lui A, sînt tocmai elementele mulțimii B.

b) Figura 43 ilustrează că elementele ce aparțin reuniunii lui A cu B, dar nu aparțin mulțimii B, sînt tocmai elementele mulțimii A.

c) Oricare din figurile 42 și 43 arată că reuniunile lui A cu B are 5 elemente. A și B fiind disjuncte, figurile 42 și 43 pot fi înlocuite cu figura 44. Din figura 44 rezultă $5 - 2 = 3$.

d) Tot din figura 44 rezultă $5 - 3 = 2$.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 2-a

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA 100 FĂRĂ ȘI CU TRECERE PESTE ORDIN

Exercițiul 1

Figura 45 și altele asemănătoare.

$A = \{b, c\}$; $B = \{d, f, g, h\}$. Reuniunea lui A cu B este $\{b, c, d, f, g, h\}$ și are 6 elemente. Deci $2 + 4 = 6$.

Celelalte se rezolvă asemănător.

Exercițiul 3

Adevărată, dacă mulțimile A și B sînt disjuncte și falsă, dacă A și B au elemente comune, ceea ce rezultă din figurile 46, 47, 48, și 49.

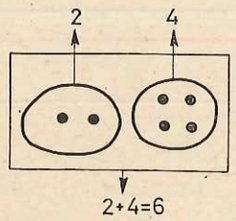


Fig. 45

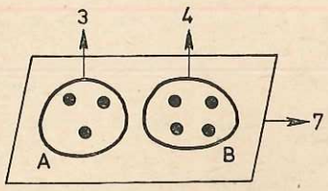


Fig. 46

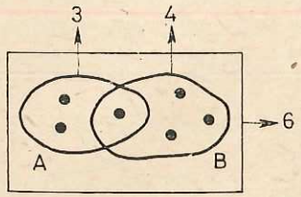


Fig. 47

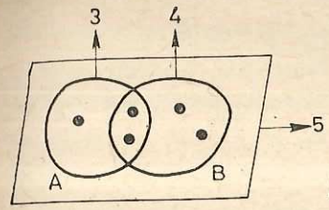


Fig. 48

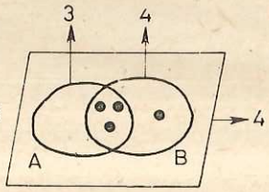


Fig. 49

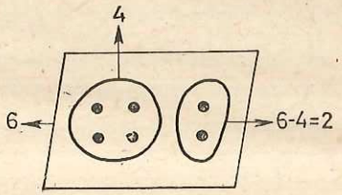


Fig. 50

În figura 46 avem: $A \cap B = \emptyset$, $\overline{\overline{A}} = 3$, $\overline{\overline{B}} = 4$, $\overline{\overline{A \cup B}} = 7$. Se vede că $7 = 3 + 4$, deci $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

În figura 47 avem: $\overline{\overline{A \cap B}} = 1$, $\overline{\overline{A}} = 3$, $\overline{\overline{B}} = 4$, $\overline{\overline{A \cup B}} = 6$. Se vede că $6 < 3 + 4$, deci $\overline{\overline{A \cup B}} < \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$. Situații asemănătoare sînt în figurile 48 și 49.

Exercițiul 4

Figura 50 și altele asemănătoare.

Exercițiul 5

$A = \{b, c, d, f, g, h\}$; $B = \{c, e, f, g\}$. Diferența dintre A și B este mulțimea $\{b, h\}$ care are 2 elemente. Deci $6 - 4 = 2$.

Celelalte se rezolvă asemănător.

Exercițiul 6

Adevărată, dacă mulțimea B este inclusă în mulțimea A și falsă, dacă există elemente ale mulțimii B care nu aparțin și mulțimii A, ceea ce rezultă din figurile 51, 52, 53, 54, 55 și 56.

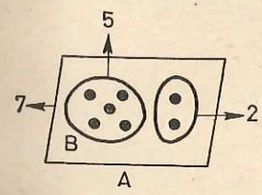


Fig. 51

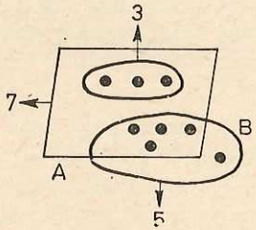


Fig. 52

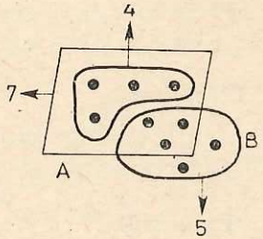


Fig. 53

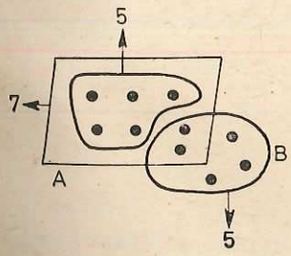


Fig. 54

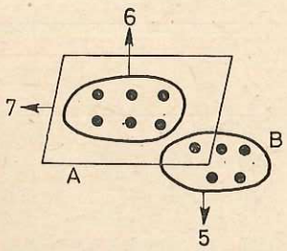


Fig. 55

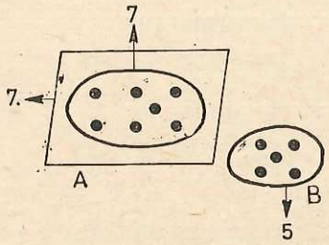


Fig. 56

În figura 51 avem: $B \subset A$; $\overline{\overline{A}} = 7$; $\overline{\overline{B}} = 5$; $\overline{\overline{A - B}} = 2$. Se vede că $2 = 7 - 5$, deci $\overline{\overline{A - B}} = \overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}}$.

În figura 52 avem: $B \not\subset A$; $\overline{\overline{A}} = 7$; $\overline{\overline{B}} = 5$; $\overline{\overline{A - B}} = 3$. Se vede că $3 \neq 7 - 5$, deci $\overline{\overline{A - B}} \neq \overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}}$. Situații asemănătoare sînt în figurile 53, 54, 55 și 56.

Exercițiul 7

Adunarea este totdeauna posibilă, putînd face întotdeauna reuniunea a două mulțimi disjuncte.

Scăderea nu este totdeauna posibilă, întrucît dacă scăzătorul este mai mare decît descăzutul, la aplicarea regulii de scădere nu vom putea alege mulțimea model pentru scăzător, ca o submulțime a mulțimii model pentru descăzut.

Exercițiul 9

a) $4 + 3 + 9 = (4 + 3) + 9 = 7 + 9 = 16$ sau $4 + 3 + 9 = 4 + (3 + 9) = 4 + 12 = 16$

S-a folosit asociativitatea adunării numerelor naturale. Celelalte adunări se fac în mod asemănător.

Exercițiul 13

Se vor efectua mai întîi oral, apoi în scris, cu așezarea numerelor unele sub altele.

Problema 14

Problema va fi gîndită, succesiv, așa cum sugerează scrierile:

a) $(29 + 46) + 7 =$; *b)* $29 + (46 + 7) =$; *c)* $29 + 46 + 7 =$.

Problema 15

Va fi gîndită, succesiv, așa cum sugerează scrierile:

a) $99 - (36 + 34) =$; *b)* $(99 - 36) - 34 =$

Exercițiul 17

Fiecare scădere se va efectua mai întîi oral, apoi în scris. Proba se va face în scris, numai după ce s-a făcut calculul în scris al diferenței respective.

Problema 19

Rezolvări model:

$24 + n = 46$
$n = 46 - 24$
$n = 22$

$m - 30 = 46$
$m = 46 + 30$
$m = 76$

$42 - x = 12$
$x = 42 - 12$
$x = 30$

Termenul necunoscut rezultă, în fiecare caz, din regulile de aflare a unui termen al adunării sau scăderii, cînd se cunosc rezultatul și celălalt termen.

Problema 20

Prin încercări, înlocuind pe rînd n cu unul din numerele naturale cuprinse între 35 și 45, se va găsi:

a) $A = \{36; 37; 38; 39\}$; *b)* $B = \{37; 38; \ldots; 43; 44\}$; *c)* $\{37; 38; 39\}$; *d)* $C = \{36; 37; \ldots; 40; 41\}$; *e)* $D = \{40; 41; 42; 43; 44\}$; *f)* $\{40; 41\}$.

Se observă că la (*c*) avem ca soluție $A \cap B$, iar la (*f*) avem $C \cap D$.

Problema 23

Rezolvarea poate fi scrisă:

a) $34 + 18 = 52$ baloane roșii;
$52 + 34 = 86$ baloane galbene și roșii;
$90 - 86 = 4$ baloane sînt albastre;

b) $34 + 18 = 52$ baloane roșii;
$90 - 34 = 56$ baloane roșii și albastre;
$56 - 52 = 4$ baloane sînt albastre;

c) $90 - 34 - (34 + 18) = 90 - 34 - 52 = 56 - 52 =$ 4 baloane albastre.

Problema 24

De exemplu: Ana a avut pe carnetul CEC economisiți 80 lei. Dacă a scos întîi 28 lei, apoi încă 36 lei, cîți lei mai are pe acel carnet CEC?

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 3-a

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA 1000 FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN

Problema 2

a) 0; 5; 8; 50; 55; 58; 80; 85; 88; 500; 505; 508; 550; 555; 558; 580; 585; 588; 800; 805; 808; 850; 855; 858; 880; 885; 888.

b) Se rezolvă asemănător.

Problema 3

830; 308.

Problema 7

Rezolvări model:

a) $x + 523 = 786$
$x = 786 - 523$
$x = 263$

$786 -$
523
263

b) $x - 213 = 342$
$x = 342 + 213$
$x = 555$

$342 +$
213
555

c) $794 - x = 420$
$x = 794 - 420$
$x = 374$

$794 -$
420
374

Problema 11

a) $(789 - 243) - 325 = 546 - 325 = 221$

b) $789 - (243 + 325) = 789 - 568 = 221$

a)
$$\begin{array}{r} 789- \\ 243 \\ \hline 546 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 546- \\ 325 \\ \hline 221 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 243+ \\ 325 \\ \hline 568 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 789- \\ 568 \\ \hline 221 \end{array}$$

Problema 13

x poate fi unul din elementele mulțimii:

a) $\{0; 1; 2; ....; 7; 8;\}$; *b*) $\{0, 1\}$; *c*) $\{0; 1; 2; 3\}$.

Problema 14

$(324 + 110) + (324 + 110) =$, sau $(324 + 324) + (110 + 110) =$,

ceea ce revine la a face o adunare cu patru termeni:

$$324 + 324 + 110 + 110 =$$

Problema 15

a) Pentru ca rezolvarea să se scrie $890 - (320 + 310) =$, gîndim astfel: aflăm, mai întîi, cîte kilograme de fier vechi au colectat împreună primele două detașamente; scăzînd această cantitate din cea totală rezultă cîte kilograme de fier vechi a colectat al treilea detașament.

b) Pentru ca rezolvarea să se scrie $(890 - 320) - 310 =$, gîndim astfel: scăzînd din cantitatea totală, cît a colectat primul detașament, obținem cît au colectat împreună al doilea și al treilea detașament; scăzînd din această cantitate de fier vechi, cît a colectat al doilea detașament, aflăm cît a colectat al treilea detașament.

Problema 16

Pentru prima scriere, calculăm diferența din prima parte a egalității:

$$986 - 542 = 444$$

și apoi diferența din partea a doua a egalității:

$$867 - 420 = 447$$

Cum $444 \neq 447$, rezultă că scrierea dată este falsă.

Procedînd analog, cea de a doua scriere se găsește că este adevărată.

Exercițiul 19

Pentru rîndul al doilea:

$$697 - (302 + 253) = \quad .$$

Pentru rîndul al treilea:

$$997 - (201 + 370) =$$

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 4-a

ÎNMULȚIREA ȘI ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE

Problema 1

b) Fig. 57; *c*) mulțimea produs; $B \times F$; fig. 58; mulțimi factori; *d*) 3×2. Prin numărare găsim: $3 \times 2 = 6$.

Problema 2

a) Fig. 59 arată răspunsurile posibile: zarzără verde; zarzără galbenă; zarzără roșie; prună verde; prună galbenă; prună roșie.

b) $F \times C = \{(z, v), (z, g), (z, r), (p, v), (p, g), (p, r)\}$;

c) mulțimea produs a mulțimii F prin mulțimca C; $F \times C$; fig. 60.

d) 2×3 în fig. 60.

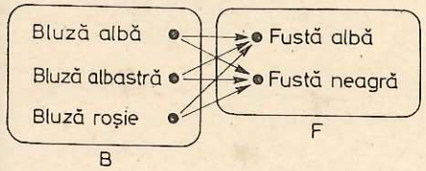


Fig. 57

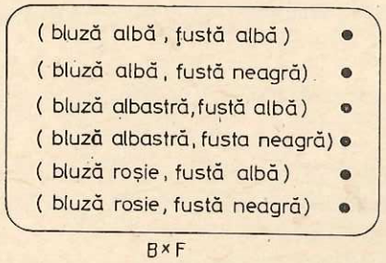


Fig. 58

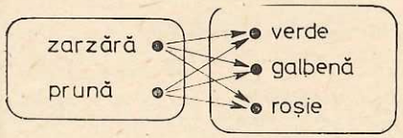


Fig. 59

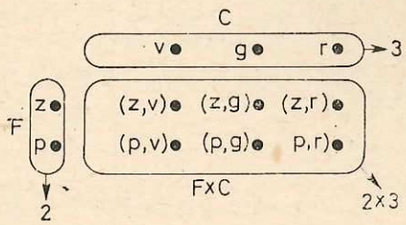


Fig. 60

Problema 3

Fig. 61.

Problema 5

Figurile 62, 63, 64, 65, 66 și 67.

Problema 8

$6 + 6 + 6 = 3 \times 6$; $3 \times 6 = 18$, după cum rezultă din fig. 68. Produsul 18 se găsește prin numărare, după reprezentarea elementelor mulțimii produs prin puncte.

Celelalte operații se efectuează analog.

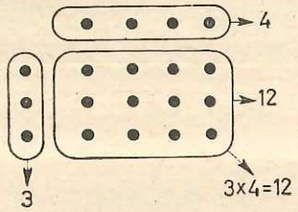


Fig. 61

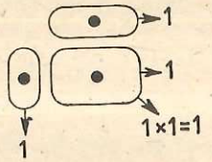


Fig. 62

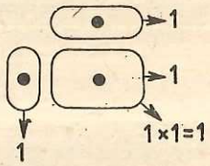


Fig. 63

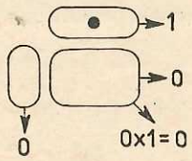


Fig. 64

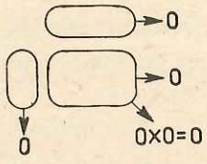


Fig. 65

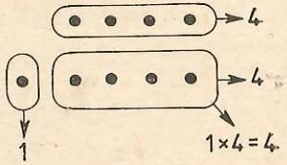


Fig. 66

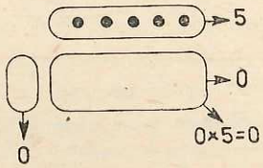


Fig. 67

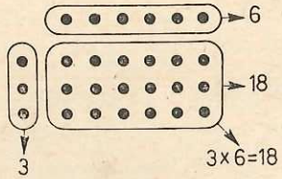


Fig. 68

Problema 9

$7 \times 6 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$; $5 \times 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9$;
$233 \times 2 = 233 + 233$; $4 \times 211 = 211 + 211 + 211 + 211$

Se efectuează apoi adunările repetate obținute, scriind la nevoie numerele unele sub altele.

Problema 10

Exemplu:

$9 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$ este primul mod;
$9 \times 4 = 9 + 9 + 9 + 9$ este al doilea mod.

Se efectuează fiecare din aceste adunări.

Problema 11

Se pot folosi ca model mulțimi de puncte și procedeul din figura 61. Rezultatele se află numărînd punctele ce reprezintă elementele mulțimii produs.

Problema 13

$5 \times 2 =$, etc. Rezultatele se scriu folosind tabla înmulțirii.

Problema 14

a) $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$; *b)* $5 \times 4 = 20$ (rezultatul pe baza tablei înmulțirii)

Problema 20

a) $5 \times 6 = 30$; *b)* $4 \times 2 \times 3 = 24$; *c)* $8 \times 9 = 72$

Problema 21

Penultimul rînd: $c = 95 - (8 \times 5)$
$= 95 - 40$
$= 55$

Pentru ultimul rînd, același procedeu.

Problema 23

$(6 \times 6) - (2 \times 6) = 36 - 12 = 24$. **Răspuns**: 24 de ani.

Problema 24

Se lucrează practic, descriind ceea ce se face: se iau 3 bețișoare din cele 21, apoi alte 3 din cele rămase ș.a.m.d. Procedeul prin „cuprindere".

Problema 25

Se lucrează practic, descriind ceea ce se face: din cele 21 bețișoare se distribuie cîte 1 în fiecare din cele 3 grămezi, apoi încă cîte 1 ș.a.m.d. Procedeul prin „părți egale".

Problema 26

Se iau, de exemplu, 21 de boabe de fasole (sau 21 de discuri din trusa pentru studiul numerelor naturale).

a) Se separă în submulțimi disjuncte a cîte 3 elemente fiecare, prin procedeul numit prin „cuprindere". Numărînd cîte submulțimi s-au obținut, găsim 7. Scriem $21 : 3 = 7$.

b) Se separă mulțimea celor 21 boabe de fasole în 3 submulțimi disjuncte două cîte două, astfel încît fiecare submulțime să aibă același număr de elemente, folosind procedeul prin „părți egale". Se numără cîte elemente are o submulțime. Găsind 7 elemente, scriem $21 : 3 = 7$.

Exercițiul 27.

Nu sînt posibile acele împărțiri la care, pînă la urmă, rămîn elemente în afara submulțimilor disjuncte care se formează.

Exercițiul 28

$24 : 6 = 4$ efectuată prin cuprindere;
$24 : 4 = 6$ efectuată prin părți egale;
$4 \times 6 = 24$ rezultatul aflîndu-se prin numărarea elementelor mulțimii produs, sau prin adunarea repetată a lui 6;
$6 \times 4 = 24$ rezultat dedus din cel anterior, prin comutativitate.

Problema 30

a) $14 : 2 = 7$; *b)* $14 : 7 = 2$; *c)* $7 \times 2 = 14$; $2 \times 7 = 14$.

Exercițiul 31

Exemple:

$24 - 6 = 18$
$18 - 6 = 12$
$12 - 6 = 6$
$6 - 6 = 0$

S-au putut face 4 scăderi și ultimul rest este 0, deci: $24 : 6 = 4$

37 — 8 = 29 S-au putut face 4 scăderi și a rămas ultimul rest 5.
29 — 8 = 21 Deci: 37 : 8 = este împărțire imposibilă.
21 — 8 = 13
13 — 8 = 5
5 — 8 = imposibil

Exercițiul 32

Exemplu: 10 : 5 =

Figurile 69 și 70 indică, respectiv, împărțirea prin cuprindere și prin părți egale. Al treilea mod este scăderea repetată:

10 — 5 = 5 S-au putut face două scăderi și ultimul rest este 0.
5 — 5 = 0 Deci cîtul este 2.
10 : 5 = 2

Exercițiul 33

40 : 5 = 8; 8 × 5 = 40; 5 × 8 = 40. Pentru 3 × 9 = 27 avem 9 × 3 = = 27; 27 : 9 = 3 și 27 : 3 = 9.

Exercițiul 34

Pentru 42 : 7 = aflăm prin cuprindere, prin părți egale (folosind mulțimi model), prin scădere repetată, sau prin tabla împărțirii:

42 : 7 = 6. Probe: 42 : 6 = 7; 7 × 6 = 42; 6 × 7 = 42.

Pentru 5 × 9 = aflăm, folosind mulțimi model și mulțimea produs, adunarea repetată sau tabla înmulțirii: 5 × 9 = 45. Probe: 9 × 5 = 45; 45 : 9 = 5; 45 : 5 = 9.

Exercițiul 35

Pentru: 15 : 3 =, observăm că 3 × 5 = 15. Deci 15 : 3 = 5 etc.

Problema 36

18 : 3 = 6. Este o împărțire prin părți egale.

Problema 37

18 : 3 = 6. Este o împărțire prin cuprindere.

Problema 38

15 : 5 = 3. Este o împărțire prin părți egale.

Problema 39

15 : 3 = 5. Este o împărțire prin cuprindere.

Problema 40

Structura fiecărei probleme este de împărțire prin părți egale, ceea ce impune împărțirea fiecărui număr la 4. Efectuarea împărțirii obținute se va face însă folosind tabla împărțirii.

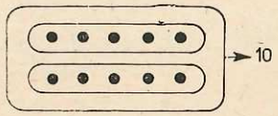


Fig. 69

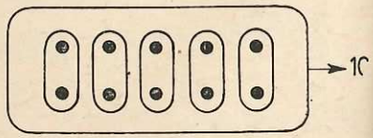


Fig. 70

Exercițiul 42

La înmulțire și împărțire, se vor folosi regulile de calcul ale unui număr, știind rezultatul și celălalt număr.

Exercițiul 43

a) 9 × 2 : 3 = 18 : 3 = 6 etc.

Problema 45

4 × 5 = 20 Merele au costat 20 lei.
2 × 8 = 16 Piersicile au costat 16 lei.
20 + 16 = 36 Pe mere și piersici a plătit 36 lei.
50 — 36 = 14 Pentru struguri i-au rămas 14 lei.
14 : 2 = 7 Kilogramul de struguri a costat 7 lei.

Exercițiul 47

a) Notînd, respectiv, cu n și p numerele reprezentate de cele două părți ale egalității, avem:

$n = (8 \times 9) - 36$ $p = 4 \times (72 : 8)$
$n = 72 - 36$ $p = 4 \times 9$
$n = 36$ $p = 36$

Calculul fiecărei părți a egalității ne-a dat $n = p$. Așadar, prima scriere este adevărată. Pentru a doua scriere:

$n = 32 + (56 : 7)$ $p = (6 \times 9) - 24$
$n = 32 + 8$ $p = 54 - 24$
$n = 40$ $p = 30$

Se vede că $n \neq p$. Deci scrierea este falsă.

b) Se calculează numărul reprezentat de partea a doua a egalității. Se găsește 89, deci prima scriere este justă. La scrierea a doua calculul dă pentru prima parte a egalității numărul 31. Cum avem 31 ≠ 32, scrierea este falsă.

Problema 48

(54 : 6) + (42 : 6) = 9 + 7 = 16 Au folosit 16 lădițe.

Capitolul II

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA 1000, CU TRECEREA PESTE ORDIN

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Folosind noțiunile despre mulțimi deja studiate, principiul numirii și scrierii numerelor mai mari ca 100, legătura dintre adunare și scădere dedusă din definițiile acestora prin intermediul mulțimilor precum și mulțimi cu elementele sute, zeci și unități, în mod potrivit alese, după caz, se vor face adunări și scăderi grupate pe tipuri, după accesibilitate și algoritmul de calcul.

Pentru ilustrarea unor tehnici de calcul se vor folosi parantezele. Toate exercițiile de un anumit tip vor finaliza cu prezentarea efectuării calculelor în scris (scriind numerele unele sub altele).

Se vor face adunări și cu mai mult de două numere naturale.

2. Exerciții și probleme (nu prea complicate, cu cel mult două operații).

Exerciții de tipul: $x + 624 = 700$; $945 - x = 732$, cu scrierea soluțiilor: $x = 700 - 624$; $x = 945 - 732$.

Exerciții de tipul: $x + 628 < 631$; $x + 628 \leqslant 631$; $902 - x > 897$; $902 - x \geqslant 897$; $x - 721 < 6$; $x - 721 \leqslant 6$, x calculîndu-se prin încercări.

La unele din adunările și scăderile făcute în acest capitol se vor face și probele.

Probleme cu date din economie, cu elemente de constituire a unui plan scris de rezolvare (foarte concis).

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Să înțeleagă *deducerea regulilor de calcul* în toate situațiile ce țin de conținutul programei expuse mai sus, *să cunoască aplicarea acestor reguli de calcul oral și în scris, formîndu-și deprinderi de lucru, pînă la automatisme.*

Pentru deducerea diverselor tehnici de calcul cu numere naturale elevii vor fi conduși să înlocuiască problema formulată cu numere, printr-o problemă conținînd operații cu mulțimi, folosind mulțimi model pentru numerele respective, de regulă realizate cu piesele trusei pentru studiul numerelor naturale.

Alegînd pentru termenii operației mulțimile model cu structură numerică zecimală, se va căuta obținerea mulțimii model pentru numărul rezultat al operației tot cu structură numerică zecimală. Cu acest prilej se vor face cît mai puține modificări în structura numerică zecimală a mulțimilor model pentru termeni. În acest mod elevii vor fi conduși pe o cale firească, ușor de urmărit, către *regulile practice de efectuare a operațiilor* care ne interesează. Conștientizînd aceste reguli, elevii vor înțelege motivația conținutului lor (fără a fi neapărat necesar să exprime în cuvinte toate proccesele de gîndire care au loc). Aceasta va contribui la aplicarea lor corectă, la dobîndirea în timp scurt a unor deprinderi de lucru și la formarea de automatisme.

Utilizarea mulțimilor model pentru deducerea diverselor reguli de calcul și exprimarea în limbajul mulțimilor va ilustra *extinderea ideilor fundamentale întîlnite la studiul adunării și scăderii numerelor naturale mai mici decît* 100, *în cazul adunării și scăderii numerelor naturale mai mici decît 1 000*. Desigur, vor trebui cunoscute și însușite tehnicile și procedeele de lucru specifice adunării și scăderii numerelor din această mulțime numerică. *Nu se va insista prea mult asupra calculului oral cu trecere peste ordin, în cazurile mai greoaie*. folosind timpul pentru însușirea temeinică a calculului în scris în astfel de cazuri.

Trebuie avut grijă ca printre exemplele și exercițiile aplicative să fie selecționate toate situațiile care pot fi întîlnite.

Scrierea planului de rezolvare la unele probleme nu trebuie să se transforme într-un scop în sine, ci să asigure o mai bună înțelegere a modului în care se gîndește rezolvarea. De aceea redactarea trebuie să fie cît mai concisă și sugestivă, fără a necesita scrieri laborioase.

Trebuie observat clar că aflarea *rezultatului oricărei adunări sau scăderi de numere naturale este posibilă folosind definițiile cu mulțimi ale acestor operații și numărarea* (se aleg mulțimi model pentru termeni, care să satisfacă cerințele definițiilor respective, se formează mulțimea reuniune sau diferență și se numără elementele acestora din urmă). *Principiul este simplu, dar în practică se complică mai ales din cauza numărărilor necesare.*

În esență, *orice regulă de calcul pe care* o stabilim aici *nu face altceva decît să indice o cale de evitare a acestor numărări. Soluția o oferă folosirea ideii de structură numerică zecimală a mulțimii și reprezentarea prin figuri numerice*, fie că sînt desenate, fie că sînt realizate „obiectual" pe panourile trusei pentru studiul numerelor naturale.

Pornind de la definițiile cu mulțimi a operațiilor de adunare și scădere a numerelor naturale și reprezentînd structurile numerice zecimale ale mulțimilor model pentru termeni cu ajutorul figurilor numerice, se caută modul cel mai simplu de a găsi structura numerică zecimală a mulțimii model pentru rezultatul operației. În acest scop vom opera cît mai puține modificări în structurile numerice zecimale ale termenilor. Modul în care se poate realiza acest lucru duce la regula de calcul în situația respectivă.

Așadar, regulile de calcul într-o situație dată se deduc folosind definițiile operațiilor dar nu trebuie confundate cu înseși aceste definiții.

În scopul deducerii regulilor de calcul, pentru a putea realiza o derulare logică a conținutului de idei, motivînd fiecare pas nou, este necesară delimitarea corectă a acestor pași (ca unități ce grupează toate cazurile asemănătoare, la care se aplică aceeași tehnică de calcul), *și găsirea unei ordini de prezentare a cunoștințelor care să permită această derulare.* Așa se explică eșalonarea în noul manual a cunoștințelor uneori într-o altă ordine decît aceea din manualele anterioare.

În această ordine de idei subliniem faptul că adunări ca 7 + 3 = , sau 8 + 4 = , sînt cu *trecere peste ordinul unităților*, deoarece cu ocazia efectuării lor se completează o unitate de ordin superior unităților simple (o zece). De asemenea, 70 + 30 = , sau 45 + 61 = , sînt adunări cu *trecere peste ordinul zecilor*, deoarece cu ocazia efectuării lor se completează o unitate de ordin superior zecilor (o sută).

Expresia „trecerea peste ordin" este mai potrivită decît „trecere peste zece" sau *„trecere peste sută"*, acestea din urmă reținînd ca esențial în situația respectivă obținerea unui rezultat mai mare ca 10 sau 100, și nu procedeul prin care se găsește rezultatul (cum ar trebui). Cu acest sens, 8 + 5 = este o adunare cu trecere peste zece, dar 7 + 3 = nu este adunare cu trecere peste zece, deși *este clar că cele două adunări se efectuează cu aceeași tehnică de calcul (completarea zecii), deci sînt de același tip*. La fel, 45 + 61 = este o adunare cu trecere peste sută, dar 70 + 30 = nu este o adunare cu trecere peste sută, deși *amîndouă se efectuează prin același procedeu (completarea sutei) fiind de același tip*.

Observațiile de mai sus conduc la eșalonarea adunării numerelor naturale întîi în mulțimea numerelor naturale de la 0 la 9, apoi în mulțimea numerelor naturale de la 0 la 99, apoi în mulțimea numerelor naturale de la 0 la 999.

Un alt fapt care trebuie scos în evidență este acela *că adunarea cu trecere peste ordin trebuie să fie studiată după ce s-a studiat scăderea din 10, respectiv din 100*. În adevăr, pentru a afla cu cît trebuie completat unul din termeni pînă la 10, sau pînă la 100, este nevoie a face o scădere de tipul menționat (chiar dacă se spune direct cu cît trebuie făcută completarea, în mintea noastră, inconștient, această scădere are loc).

Tocmai descompunerea unui termen într-o sumă de doi termeni din care unul servește la completarea zecii sau sutei:

$$8 + 5 = 8 + (2 + 3);\ 80 + 50 = 80 + (20 + 30)$$

este esența efectuării operației și elevul trebuie înarmat cu o tehnică de descompunere.

Această tehnică constă în efectuarea a două scăderi, din care una este de tipul menționat:

	$10 - 8 = 2$	respectiv:	$100 - 80 = 20$
	$5 - 2 = 3$		$50 - 20 = 30$
deci	$8 + 5 = 8 + (2 + 3)$	deci	$80 + 50 = 80 + (20 + 30)$

Efectuarea acestei descompuneri nu trebuie lăsată a se face „pe ghicite" de către elevi, dacă vrem să-i învățăm cu adevărat tehnica de calcul. *Ea este necesară tocmai elevilor care nu o „ghicesc"*.

De aici nu rezultă că trebuie să cerem elevilor a ilustra de fiecare dată, verbal sau în scris, cum au gîndit pentru a face descompunerea respectivă, după ce au dobîndit deprinderi, automatisme în a o realiza. Dar trebuie să știe ce fac și cum trebuie procedat atunci cînd nu pot se siza „direct" rezultatul operației.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL II

(Numărul de ore, orientativ = 25)

TEMA 1: SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE CÎND DESCĂZUTUL ESTE 100

Scop: Deducerea procedeelor de calcul oral și scris pe baza definiției cu mulțimi a scăderii și a utilizării unor mulțimi model pentru descăzut și scăzător, organizate cu structură numerică zecimală. Cunoașterea transformării unei sute în zeci și a unei zeci în unități, pentru efectuarea scăderilor de la subtemele, 1, a 2-a și a 3-a.

Material didactic

Pentru învățător; Trusa învățătorului pentru predarea operațiilor cu numere naturale (panoul nr. 10). Planșe cu figurile 16, 17 și 18 din manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

SUBTEMA: 1°: „SCĂZĂTORUL ESTE FORMAT NUMAI DIN ZECI"

a) *Activități desfășurate cu elevii fără folosirea manualului*

Se propun scăderile:

$$100 - 30 = ;\ 100 - 40 = ;\ 100 - 60 =$$

Prima o efectuează învățătorul ca model, folosind panoul 10 din trusă. Se realizează pe panou mulțimea model pentru descăzut, așa cum se vede în figura 71. Ea are structură numerică zecimală.

Trebuie să alegem în ea o submulțime model pentru scăzătorul 30, dacă este posibil tot cu structură numerică zecimală. Lucrul nu este posibil, neavînd în mulțimea model a descăzutului elemente zeci. Din acest motiv transformăm suta în zeci, înlocuind pe panou patratul roșu cu 10 triunghiuri albastre, cum arată figura 72.

Alegem acum din mulțimea model a descăzutului o submulțime conținînd 3 zeci, pe care o luăm ca model pentru scăzătorul 30. Mulțimea diferență

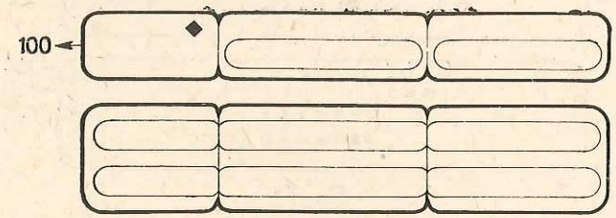


Fig. 71

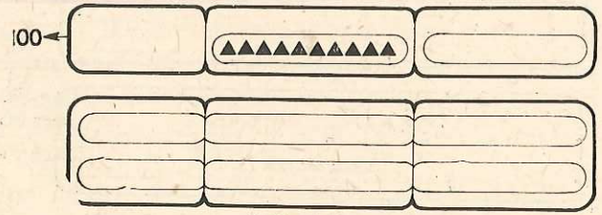


Fig. 72

dintre mulțimea model a descăzutului și cea a scăzătorului are 7 zeci, după cum se vede din figura 73, care arată deplasarea pieselor pe panoul trusei.

După deplasarea pieselor, panoul 10 arată cum se vede în figura 74.

Recapitulînd procedeul folosit, cu ajutorul planșei conținînd figura 16 din manual, se deduce regula practică

a) transformăm suta în 10 zeci;

b) din cele 10 zeci luăm 3 zeci;

c) cele 7 zeci rămase sînt rezultatul scăderii.

Modul cum gîndim poate fi scris, în baza lucrului pe panoul trusei:

$$\begin{aligned} 100 - 30 &= 10 \text{ zeci} - 3 \text{ zeci} \\ &= (10 - 3) \text{ zeci} \\ &= 7 \text{ zeci} \\ &= 70 \end{aligned}$$

Regula practică poate fi scrisă:

$$100 - 30 = (10 - 3) \text{ zeci}$$

Tot din lucrul pe panoul trusei rezultă calculul în scris:

$$\begin{array}{r} {}^{1}\cancel{0}\,0 \\ 100 - \\ 30 \\ \hline 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 - \\ 30 \\ \hline 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 - \\ 30 \\ \hline 70 \end{array}$$

Prima scriere sugerează transformarea de unități care se face, a doua amintește prin punctul scris deasupra lui 1 că suta a fost transformată în zeci, adică avem în locul lui 0 zeci 10 zeci. Ultima scriere se va utiliza după ce se

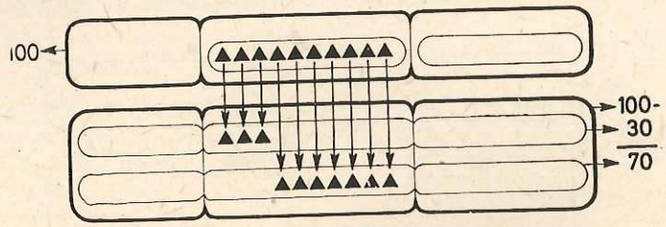


Fig. 73

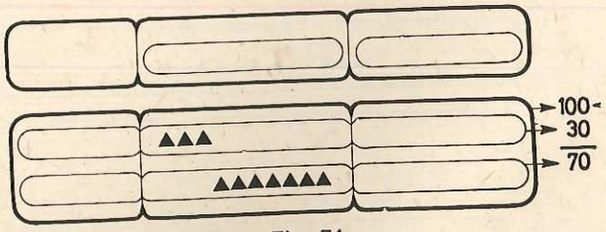


Fig. 74

dobîndește deprinderea de a „ține minte" ceea ce se face pentru a efectua scăderea.

Deși pe panoul trusei, avînd aspectul din figura 74, se vede că reunind cele două mulțimi disjuncte, model pentru diferență, și respectiv, model pentru scăzător, se obține mulțimea model pentru descăzut, de unde proba scăderii prin adunare:

$$7 \text{ zeci} + 3 \text{ zeci} = 10 \text{ zeci}; \; 7 \text{ zeci} + 3 \text{ zeci} = 1 \text{ sută};$$

$$70 + 30 = 100$$

se va renunța, pentru moment, la a face proba acestor scăderi prin adunare, deoarece încă nu s-au făcut adunări de forma $70 + 30 =$, care formează obiectul temei următoare.

De pe panoul trusei, avînd aspectul din figura 74, se va observa că alegînd în mulțimea avînd 10 zeci, o submulțime avînd 7 zeci, rămîn în mulțimea diferență 3 zeci, adică avem:

$$100 - 70 = 30$$

de unde rezultă *proba scăderii prin scădere: scăzînd din descăzut, diferența, se obține scăzătorul.*

Celelalte scăderi propuse vor fi efectuate de elevi, folosind trusa învățătorului, urmărind aceleași idei ca și la prima scădere.

b) *Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului*

Sub îndrumarea învățătorului elevii vor explica ceea ce redă figura 16 din manual, deducîndu-se regula de calcul oral și în scris.

Se vor efectua în clasă exercițiile 1, 2 și 3.

Acasă se vor propune problemele 4 și 5.

SUBTEMELE 2° ȘI 3°

Se predau după aceeași tehnologie didactică ca și prima, realizînd pe panoul 10 al trusei aspectele sugerate de figurile 17 și 18 din manual.

Etapele de valorificare a conținutului figurii 17 cu ajutorul panoului 10 din trusă pentru a efectua $100 - 6$, sînt evidențiate în:

a) figura 71, care realizează mulțimea model pentru descăzut, avînd structură numerică zecimală. În ea trebuie aleasă o submulțime avînd 6 unități ca model pentru scăzător. Cum nu găsim astfel de unități:

b) figura 72 arată înlocuirea pătratului roșu ce reprezintă suta, cu 10 triunghiuri albastre, adică 10 zeci. Din nou nu avem unități pentru a alege mulțimea model pentru scăzător, și:

c) figura 75 arată cum s-a înlocuit un triunghiu albastru reprezentînd 1 zece, cu 10 discuri negre, adică 10 unități.

Acuma putem alege submulțimea model pentru scăzător din mulțimea unităților aflate în mulțimea model pentru descăzut. Figura 76 sugerează

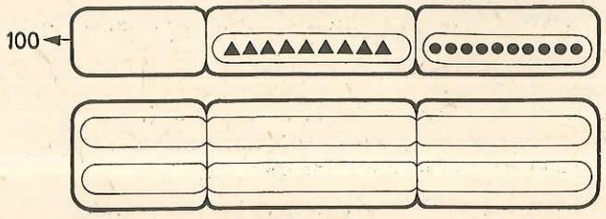


Fig. 75

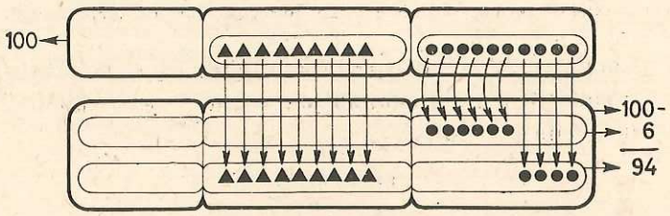


Fig. 76

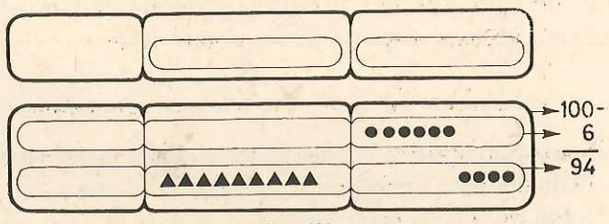


Fig. 77

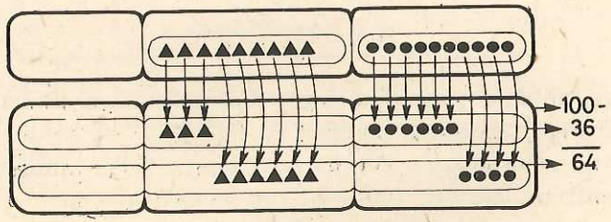


Fig. 78

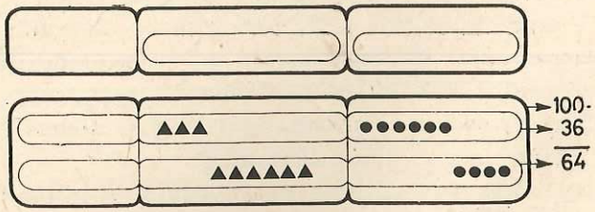


Fig. 79

cum sînt deplasate piesele pe panoul trusei, astfel încît să separăm mulțimea model pentru descăzut în două submulțimi disjuncte, una model pentru scăzător și alta care reprezintă mulțimea diferență dintre cele două mulțimi, cea model pentru descăzut și cea model pentru scăzător.

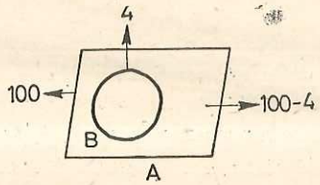


Fig. 80

După deplasarea pieselor, panou trusei arată ca în figura 77.

Pentru a efectua scăderea 100—36 = cu panoul 10 al trusei, figura 18 din manual va fi valorificată parcurgînd aceleași etape care au fost ilustrate în figurile 71, 72 și 75.

Alegerea submulțimii model pentru scăzătorul 36 și formarea mulțimii diferență a mulțimilor model pentru descăzut și scăzător se vede clar din figura 78.

După deplasarea pieselor, panoul 10 arată ca figura 79.

Pentru 100 — 6 = și 100 — 36 = probele prin adunare cer operațiile 94 + 6 = și 64 + 36 = care nu sînt încă studiate, iar pentru 100 — 6 = nici proba prin scădere nu poate fi făcută deocamdată, 100 — 94 = fiind în acest moment nestudiată.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema 1

Problema 4 (subtema 2°)

Din figura 80 rezultă că rezolvarea revine la efectuarea operației:

100 — 4 =

TEMA A 2-a: ADUNAREA CU TRECERE PESTE ORDIN A DOUĂ NUMERE NATURALE MAI MICI CA 100, AVÎND SUMA CEL PUȚIN 100

Scop: Deducerea procedeelor de calcul, pornind de la definiția cu mulțimi a adunării numerelor naturale și utilizînd pentru termeni mulțimi model organizate cu structură numerică zecimală. Procedeul de calcul va rezulta din procedeul de obținere a structurii numerice zecimale pentru reuniunea mulțimilor model a termenilor, făcînd cît mai puține modificări în structurile numerice zecimale ale termenilor.

Material didactic

Pentru învățător: Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul nr. 8). Planșe cu figurile 19, 20, 21 și 22 din manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Textul din manual și tehnologia didactică utilizate pînă acum în situații asemănătoare sînt suficiente pentru ca învățătorul să-și construiască singur lecțiile privind predarea celor trei subteme:

1°. Numere formate numai din zeci, avînd suma 100.

2°. Numere formate numai din zeci, avînd suma mai mare decît 100.

3°. Numere mai mici decît 100, avînd suma mai mare de 100, cînd are loc:

a) trecerea peste ordinul zecilor;

b) trecerea peste ordinul unităților și peste ordinul zecilor.

Aici reținem doar atenția asupra faptului că, valorificînd figurile 19,20, 21 și 22 din manual cu ajutorul mulțimilor model realizate pe panoul 8 al trusei, se va sublinia că mulțimile model pentru termeni sînt luate cu structură numerică zecimală, dar reuniunea lor nu se obține gata organizată cu structură numerică zecimală. În adevăr, reuniunea reprezentată în figuri prin linia ce înconjură contururile mulțimilor model pentru termeni are, fie în submulțimea zecilor (figurile 19, 20 și 21), fie și în submulțimea zecilor și în submulțimea unităților (fig. 22), mai mult de 9 unități de ordinul respectiv.

Pentru a găsi numărul elementelor reuniunii trebuie să facem ca ea să aibă structură numerică zecimală. În acest scop este necesar a completa în reuniune unități de ordin superior, din unitățile de un anumit ordin ce se află în reuniune în număr mai mare ca 9. Aceasta se realizează cu ocazia deplasării pieselor reuniunii în partea de jos a panoului 8. Pentru situațiile din figurile 19, 20 și 21 din manual, din zecile existente în reuniune se completează 1 sută, restul de zeci rămînînd în submulțimea zecilor. În situația din figura 22 din manual, din unitățile existente se completează 1 zece care este pusă în mulțimea zecilor, și apoi se formează din toate zecile existente 1 sută. Restul de zeci și de unități care nu au intrat în completarea zecii sau a sutei rămîn în submulțimea zecilor și submulțimea unităților reuniunii.

În conturul de jos de pe panoul 8 s-a obținut reuniunea mulțimilor model a termenilor, organizată cu structură numerică zecimală, ceea ce permite numirea și scrierea numărului ei de elemente.

Din această tehnică de organizare cu structură numerică zecimală a reuniunii mulțimilor model pentru termeni, se deduc regulile de calcul cu numere naturale, în situațiile respective.

În momentul predării subtemelor, la subtema 1° se poate face proba prin adunare și proba prin scădere în două moduri, iar la subtemele 2° și 3° se pot face numai probele prin adunare, deoarece scăderile prin care s-ar face probele nu sînt încă învățate.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 2-a

Problema 6 (subtema 1°)

Din figura 81 rezultă rezolvarea, prin operația:

$$90 + 10 =$$

Problema 4 (subtema 3°, b)

O figură asemănătoare cu 81 duce la operația:

$$53 + 47 =$$

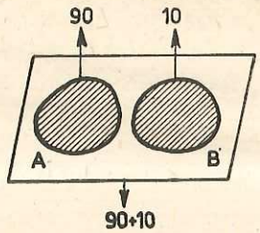


Fig. 81

TEMA A 3-a: ADUNAREA CU TRECERE PESTE ORDIN A DOUĂ NUMERE NATURALE CÎND CEL PUȚIN UNUL ESTE MAI MARE CA 100

Scop: Același ca la tema anterioară.

Material didactic:

Pentru învățător:

Panourile 8 și 11 din trusa pentru studiul numerelor naturale. Planșe cu figurile 23, 24 și 25 din manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Textul din manual și tehnologia didactică utilizată pînă acum în situații asemănătoare sînt suficiente pentru elaborarea lecțiilor de către învățător, referitoare la cele patru subteme:

1°. Adunarea cu trecere peste ordinul unităților.

2°. Adunarea cu trecere peste ordinul zecilor.

3°. Adunarea cu trecere peste ordinul unităților și al zecilor.

4°. Adunarea cu mai mulți termeni, cu trecere peste ordin.

Recomandăm ca, de fiecare dată, *planșa reprezentînd figura din manual să fie prezentată imediat ce pe panoul trusei au fost deplasate piesele ce alcătuiesc reuniunea în conturul de jos de pe panoul 8 sau 11, deoarece în acest moment aspectul panoului nu mai permite observarea tehnicii de calcul.* Figura de pe planșă va reaminti etapele ce au fost realizate anterior pe panou și va conduce la deducerea regulii de calcul.

Pentru subtema 4° „Adunarea cu mai mulți termeni, cu trecere peste ordin" nu se află în manual o figură care să sugereze lucrul cu ajutorul trusei. Învățătorul va deduce singur aceasta, folosind panoul 11 numai după efectuarea exercițiului propus în manual, prin primele două procedee (folosind asociativitatea). Efectuarea prin procedeul (c) din manual va fi dedusă ca urmare a lucrului pe panoul 11.

Ca totdeauna la adunare, se va avea grijă a se parcurge etapele:

a) formarea pe panoul trusei a mulțimilor model pentru termeni, folosind piesele din trusă, astfel încît acestea să aibă structură numerică zecimală;

b) formarea reuniunii, care pe panou se reduce la a arăta conturul care înconjură liniile ce reprezintă mulțimile model pentru termeni. (deocamdată piesele ce reprezintă reuniunea nu trebuie deplasate în conturul de jos de pe panou, ceea ce uneori nici nu ar fi posibil, dar mai ales nu ar avantaja deducerea regulilor de calcul);

c) găsirea numărului de elemente ale reuniunii, în care scop aceasta trebuie organizată cu structură numerică zecimală.

Forma în care se află reuniunea pe panoul trusei pune în evidență că aceasta este formată din:

— submulțimea unităților, care are atîtea unități cît este suma unităților din numerele termeni;

— submulțimea zecilor, care are atîtea zeci cît este suma zecilor din numerele termeni;

— submulțimea sutelor, care are atîtea sute cît este suma sutelor din numerele termeni.

Dacă nici una din aceste submulțimi nu ar avea mai mult de 9 unități de ordinul respectiv, reuniunea ar fi cu structură numerică zecimală, nerămînînd decît să numim și să scriem numărul ei de elemente.

Dacă vreuna din aceste submulțimi are mai mult de 9 unități de acel ordin reuniunea nu are structură numerică zecimală, structură pe care trebuie să o realizăm noi. În acest scop, începînd de la dreapta la stînga înlocuim pe panou cîte 10 unități de un anumit ordin cu 1 unitate de ordin imediat mai mare, la submulțimile menționate care aveau mai mult de 9 unități.

Urmare acestor înlocuiri, reuniunea se obține cu structură numerică zecimală și se poate spune și scrie numărul ei de elemente. Cu ocazia înlocuirilor menționate (sau după ce au fost făcute) se deplasează piesele în conturul din partea de jos a panoului.

Recapitulînd etapele parcurse cu ajutorul planșelor ce redau figurile din manual, se deduc regulile de calcul.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 3-a

Exercițiul 4 (subtema 2°)

Pentru verificarea scrierilor respective, se notează cu cîte o literă fiecare parte a egalității, și se calculează ce număr reprezintă fiecare din cele două litere. Dacă ele reprezintă același număr, scrierea este corectă, dacă reprezintă numere diferite, scrierea este falsă.

De exemplu, pentru primul exercițiu de la (*a*):

$n = 274 + 683 \qquad p = 565 + 392$

$n = 957 \qquad p = 957$

Avem $n = p$, deci scrierea $274 + 683 = 565 + 392$ este adevărată.

Pentru al doilea exercițiu de la (*b*):

$n = 383 + 566 \qquad p = 665 + 294$

$n = 949 \qquad p = 959$

Avem $n \neq p$, deci scrierea $383 + 566 = 665 + 294$ este falsă.

Problema 6 (subtema 2°)

Dintr-o figură ca 81 rezultă rezolvarea prin operația

$$345 + 272 =$$

Exercițiul 3 (subtema 4°)

Rezolvarea revine la a completa tabelul:

a	394	394	394	394	394	394
b	70	70	6	6	107	107
c	456	209	456	209	456	209
a + *b* + *c*			856			

Problema 6 (subtema 4°)

a) Cîte fete au fost în total în acea tabără?

b) Cîți pionieri au fost în total în acea tabără?

Problema 8 (subtema 4°)

a) Cîți trandafiri roșii s-au trimis spre vînzare?

$$250 + 75 + 75 = 400$$

b) Cîți trandafiri s-au trimis spre vînzare în total?

$$250 + 250 + 75 + 250 + 75 + 75 = 975$$

Notă: Întrebarea trebuie astfel pusă încît rezolvarea să folosească toate datele problemei.

TEMA A 4-a: SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PÎNĂ LA 1000

Scop: Deducerea procedeelor de calcul oral și în scris, pe baza definiției cu mulțimi a scăderii și a utilizării unor mulțimi model pentru descăzut și scăzător, organizate cu structură numerică zecimală. Cunoașterea transformării unei sute în zeci și a unei zeci în unități, în scopul creării posibilității de alegere din mulțimea model a descăzutului a unei submulțimi model pentru scăzător, avînd structură numerică zecimală.

Material didactic

Pentru învățător: Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 10). Planșe cu figurile 26, 27 și 28 din manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Activități pregătitoare

Se vor face mai întîi scăderi fără trecere peste ordin, cum ar fi 453 — 321 =, *reamintind regula de calcul: scădem unități din unități, zeci din zeci și sute din sute.* Calculul se va face oral și în scris, cu așezarea numerelor unele sub altele:

$$\begin{array}{r} 453- \\ \underline{321} \\ 132 \end{array}$$

Se va cere elevilor să formeze pe panoul 10 al trusei, folosind piesele acesteia, mulțimea model pentru descăzutul 453, avînd structură numerică zecimală, să aleagă în ea o submulțime model pentru scăzătorul 321, tot cu structură numerică zecimală, și să găsească mulțimea diferență dintre mulțimea model a descăzutului și cea a scăzătorului. Aceasta este gata organizată ca structură numerică zecimală, așa că se poate spune direct numărul ei de elemente, care este rezultatul scăderii.

În acest mod *se va aminti efectuarea scăderii fără trecere peste ordin, cu ajutorul trusei,* numai că în locul panoului 9 folosit anterior se va lucra pe panoul 10, așa cum sugerează figura 82.

După împrospătarea acestor cunoștințe și deprinderi, se vor propune noile cazuri de scădere, eșalonate pe lecții distincte, în ordinea din manual.

SUBTEMA 1°: SCĂDEREA CU TRECERE PESTE ORDINUL UNITĂȚILOR

Propunînd scăderea 562 — 327 = elevii vor așeza calculul scriind numerele unele sub altele și *vor încerca efectuarea cu regula cunoscută: se scad unități din unități, zeci din zeci și sute din sute.*

$$\begin{array}{r} 562- \\ \underline{327} \\ ? \end{array}$$

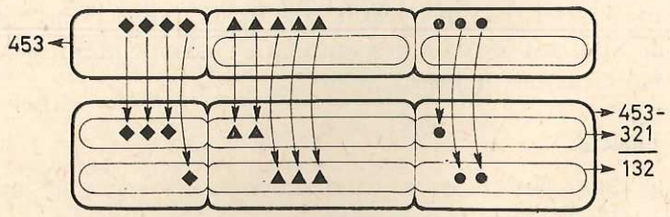


Fig. 82

Elevii vor constata că regula cunoscută nu poate fi aplicată, neputînd scădea unitățile scăzătorului din unitățile descăzutului. Așadar, trebuie găsită o regulă aplicabilă în această situație. În acest scop se apelează la definiția scăderii cu ajutorul mulțimilor.

Se formează pe panoul 10 al trusei mulțimea model pentru descăzutul 562, organizată cu structură numerică zecimală, așa cum arată figura 83. În ea trebuie aleasă o submulțime model pentru scăzătorul 327 alegînd o submulțime cu 7 unități simple din mulțimea unităților, apoi una cu 2 zeci din mulțimea zecilor și una cu 3 sute din mulțimea sutelor.

Se constată că din cele 2 unități existente în mulțimea unităților aflată în mulțimea model pentru descăzut, nu poate fi separată o submulțime cu 7 unități. Pentru a face posibil acest lucru se ia un triunghi reprezentînd o zece și se înlocuiește cu 10 discuri negre, reprezentînd 10 unități simple.

În urma acestei înlocuiri submulțimea unităților din mulțimea model pentru descăzut conține 12 unități, grupate în alte două submulțimi, una cu 10 și una cu 2 elemente, așa cum arată figura 84.

Figura 85 arată cum se alege submulțimea model pentru scăzătorul 327 și cum se formează mulțimea diferență dintre mulțimea model a descăzutului și cea a scăzătorului. Aceasta din urmă are structură numerică zecimală și se observă imediat numărul ei de elemente, 235, care este rezultatul scăderii. În urma deplasării pieselor pe panoul 10 așa cum arată figura 85, panoul ia aspectul din figura 86.

Se prezintă planșa cu figura 26 din manual, cu ajutorul căreia se repetă etapele prin care s-a găsit rezultatul scăderii, deducîndu-se regula de calcul:

a) se scad cele 7 unități ale scăzătorului din cele 10 unități obținute prin transformarea unei zeci luate din mulțimea zecilor aflate la descăzut. Restul obținut, adunat cu cele 2 unități aflate la descăzut, formează numărul unităților diferenței;

b) se scad zecile scăzătorului din zecile rămase la descăzut (după luarea zecii care a fost transformată în unități);

c) se scad sutele scăzătorului din sutele descăzutului.

În baza lucrului pe panou sugerat din figura 85, modul cum gîndim efectuarea scăderii va fi scris:

$$\begin{aligned} 562-327 &= (500 + 50 + 10 + 2) - (300 + 20 + 7) \\ &= (500 - 300) + (50 - 20) + (10 - 7) + 2 \\ &= 200 + 30 + (3 + 2) \\ &= 235 \end{aligned}$$

Folosind aspectul aceluiași panou și scrierea aflată în partea dreaptă a panoului, calculul în scris va fi așezat:

$$\begin{array}{r} \overset{\cdot\cdot}{5}\overset{\cdot}{6}2- \\ \underline{327} \\ 235 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{\cdot}{5}62- \\ \underline{327} \\ 235 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 562- \\ \underline{327} \\ 235 \end{array}$$

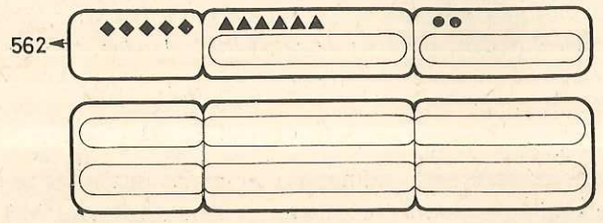


Fig. 83

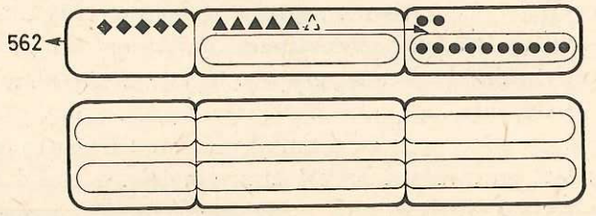


Fig. 84

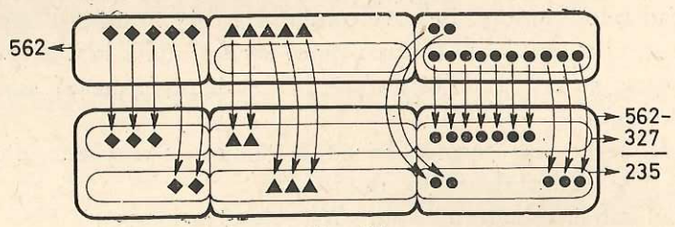


Fig. 85

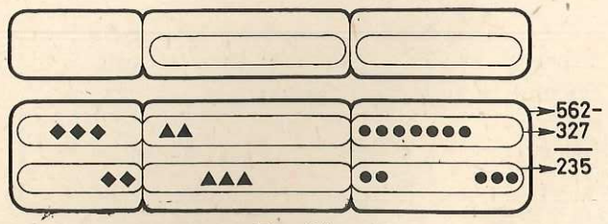


Fig. 86

Prima scriere va fi folosită doar puțin timp după stabilirea regulii, pentru a o sugera mai limpede, apoi se va folosi a doua, care amintește doar prin punct transformarea unei zeci, și apoi se va folosi doar a treia scriere, după ce elevii au dobîndit deprinderea aplicării regulii.

Valorificînd aspectul panoului 10 redat în figura 86, se va face *proba scăderii prin adunare* (se vede că reunind mulțimile model pentru scăzător și diferență, se obține mulțimea model pentru descăzut). Același aspect ilustrează *proba scăderii prin scădere* (observînd că alegînd din mulțimea model pentru descăzutul 562 o submulțime cu 235 elemente, se obține o mulțime diferență cu 327 elemente). Așadar, dacă $562 - 327 = 235$, atunci $327 + 235 = 562$, $235 + 327 = 562$ și $562 - 235 = 327$.

Notă: Subtemele 2°, 3° și 4° se vor preda după o tehnologie didactică asemănătoare cu cea folosită pentru subtema 1°.

Etapele de efectuare a scăderii $632 - 247 =$ sînt sugerate pe figurile 87, 88, 89, 90 și 91.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 4-a

Problema 5 (subtema 1°)

O figură asemănătoare cu 80 conduce la operația:

$$860 - 169 =$$

Problema 6 (subtema 2°)

Prima rezolvare:

$465 + 375 = 840$	S-au adus 840 perechi încălțăminte.
$283 + 285 = 568$	S-au vîndut din ele 568 perechi.
$840 - 568 = 272$	Au rămas 272 perechi.

A doua rezolvare:

$465 - 283 = 182$	Au rămas 182 perechi de bascheți.
$375 - 285 = 90$	Au rămas 90 perechi de tenișii.
$182 + 90 = 272$	În total au rămas 272 perechi de încălțăminte.

Problema 4 (subtema 3°)

Notînd scăzătorul cu n, avem:

$832 - n = 548$, de unde $n = 832 - 548$, $n = 284$.

În situația a doua, avem:

$600 - n = 407$, de unde $n = 600 - 407$, $n = 193$.

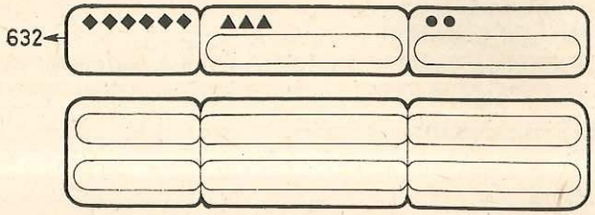


Fig. 87

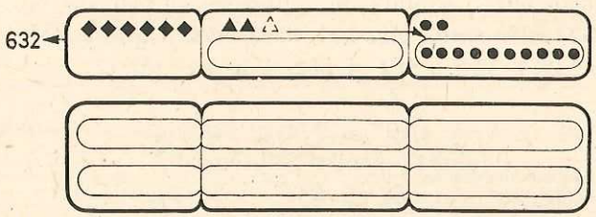


Fig. 88

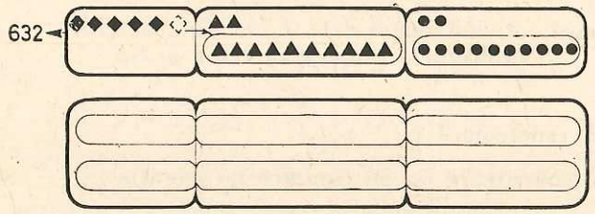


Fig. 89

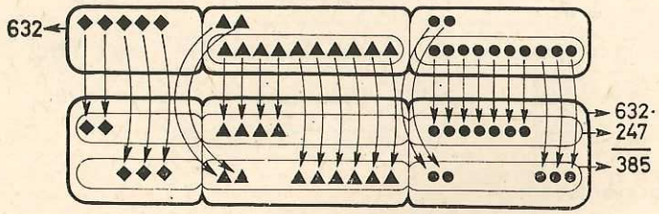


Fig. 90

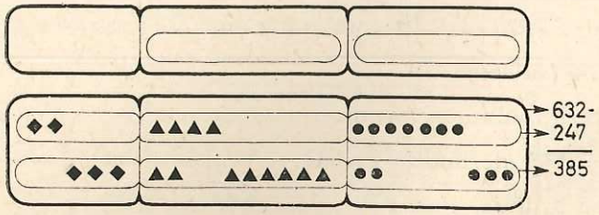


Fig. 91

Problema 12 (subtema 3°)

Rîndul al 2-lea din tabel:

$a = 910 - 78 \quad a - b = 832 - 78$

$a = 832 \quad a - b = 754$

Rîndurile 3 și 4 se calculează asemănător.

Problema 13 (subtema 3°)

Prin încercări se găsește:

a) $\{0; 1, 2; 3; 4; 5\}$; *b*) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;

c) $\{0; 1; 2; \ldots; 5; 6\}$; *d*) $\{0; 1; 2; \ldots; 6; 7;\}$.

e)* Căutăm mai întîi numerele naturale n care verifică

$$n - 389 > 108.$$

Avem $n - 389 + 108$ pentru $n = 108 + 389$, deci $n = 497$.

Așadar, $n - 389 > 108$ pentru $n > 497$, adică pentru n element al mulțimii $A = \{498; 499; 500; 501; \ldots\}$.

Căutăm acum numerele naturale n care verifică

$$n - 389 \leqslant 112.$$

Avem $n - 389 = 112$ pentru $n = 112 + 389$, deci $n = 501$.

Așadar, $n - 389 \leqslant 112$ pentru $n \leq 501$, adică pentru n element al mulțimii $B = \{501; 500; 499; 498; 497;\ldots\}$.

Scrierea $108 < n - 389 \leqslant 112$ va fi adevărată pentru acele numere n care împlinesc simultan condițiile $n > 497$ și $n \leqslant 501$, adică pentru numerele n ce aparțin mulțimii $C = \{498; 499; 500; 501\}$.

Observăm că mulțimea C este intersecția mulțimilor A și B.

Problema 18 (subtema 3°)

109; 988; 879.

Problema 19 (subtema 3°)

Să notăm cu E mulțimea copiilor care au prezentat desene la prima temă și cu F mulțimea copiilor care au prezentat desene la tema a doua. Din figura 92 deducem:

a) $427 - 139 = 288$, deci 288 de copii au prezentat desene numai la prima temă;

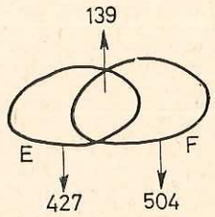


Fig. 92

* Acest exercițiu fiind mai dificil, va fi rezolvat cu elevii numai dacă nivelul general al clasei permite rezolvarea.

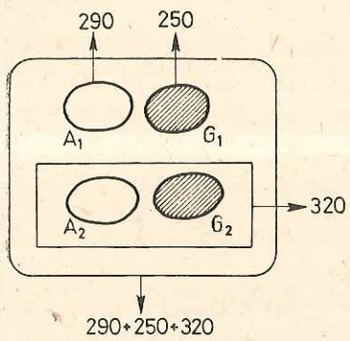


Fig.93

b) 504 — 139 = 365, deci 365 de copii au prezentat desene numai la a doua temă;

c) 288 + 365 = 653, deci 653 de copii au prezentat desene doar la o singură temă;

d) 288 + 139 + 365 = 792, adică 792 de copii au prezentat desene cel puțin la una din teme (fie la prima, fie la a doua, fie la amîndouă).

Problema 20 (subtema 3°)

a) Numărul maxim al porumbeilor albi din stolul al doilea este 300, iar din reuniunea celor două stoluri este (fig. 93);

290 + 300 = 590

Numărul minim al porumbeilor albi din stolul al doilea este 20, iar reuniunea celor două stoluri este:

$$290 + 20 = 310$$

b) Fără a folosi rezultatele anterioare: observăm că în stolul al doilea pot fi cel mult 300 porumbei gri iar în reuniunea stolurilor pot fi cel mult:

$$250 + 300 = 550$$

În stolul al doilea sînt cel puțin 20 porumbei gri iar în reuniunea stolurilor sînt cel puțin:

$$250 + 20 + 270$$

Folosind rezultatele de la (a): În total în reuniunea stolurilor sînt:

$$290 + 250 + 320 = 860 \text{ porumbei.}$$

Dacă numărul celor albi este maxim, deci 590, atunci numărul celor gri este minim și egal cu:

$$860 - 590 = 270$$

Dacă numărul porumbeilor albi este minim, adică 310, atunci numărul celor gri este maxim și egal cu:

$$860 - 310 = 550$$

Capitolul III

ÎNMULȚIREA NUMERELOR NATURALE, FĂRĂ ȘI CU TRECERE PESTE ORDIN, CÎND UN FACTOR NU TRECE DE 10

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Înmulțirea cînd unul din factori este o sumă (distributivitatea înmulțirii față de adunare).
2. Înmulțirea cu mai mulți factori. Asociativitatea înmulțirii.
3. Înmulțirea cînd avem factor pe 10 sau 100.
4. Înmulțirea fără și cu trecere peste ordin, cînd unul din factori nu trece de 10, iar produsul este mai mic decît 1 000.

În predare, cazurile se vor grupa pe tipuri, după accesibilitate și algoritmul de calcul. Vor fi folosite parantezele pentru punerea în evidență a raționamentelor. Se va prezenta, pentru fiecare tip, și așezarea calculelor în scris. Se va folosi comutativitatea înmulțirii.

5. Exerciții și probleme simple (cu cel mult trei operații).

Aflarea unui număr „de atîtea ori mai mare" decît un număr dat.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Pentru a putea efectua în mod conștient înmulțirile în cazurile prevăzute de programa expusă mai sus, elevii trebuie să cunoască, pe baza unor exemple numerice:

a) Înmulțirea numerelor naturale cînd unul din factori este o sumă. Exemple:

$$2 \times (3 + 4) = (2 \times 3) + (2 \times 4)$$

și

$$(3 + 4) \times 2 = (3 \times 2) + (4 \times 2)$$

Se va observa că prima egalitate exemplifică *înmulțirea unui număr cu o sumă, a doua exemplifică înmulțirea unei sume cu un număr.*

Se va cunoaște scrierea generalizată a conținutului unor egalități numerice de tipul celor de mai sus:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

și

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

unde a, b, c sînt trei numere naturale, oarecare.

Proprietatea exprimată de aceste egalități va fi formulată: *„înmulțirea este distributivă față de adunare"*. Avînd în vedere dificultățile ce pot fi întîmpinate de către elevi pentru pronunțare, cuvintele „distributiv" și mai ales „distributivitate" vor fi folosite cu o frecvență cît mai redusă (la nevoie putînd fi complet evitate).

Se vor da și exemple în care sumele au trei termeni:

$$3 \times (2 + 4 + 1) = (3 \times 2) + (3 \times 4) + (3 \times 1)$$

$$(2 + 4 + 1) \times 3 = (2 \times 3) + (4 \times 3) + (1 \times 3)$$

b) Înmulțirea cu mai mulți factori, după regula exprimată prin scrierea:

$$2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4$$

sau, prin generalizare:

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c,$$

c) Proprietatea de asociativitate a înmulțirii numerelor naturale, exprimată prin egalitatea numerică:

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

sau, generalizat:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

unde a, b, și c sînt trei numere naturale, oarecare.

Asociativitatea înmulțirii numerelor naturale face posibilă scrierea:

$$2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$$

sau, generalizat:

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

d) Înmulțirea unui număr scris cu o cifră, prin 10 și 100, și a unui număr scris cu două cifre, prin 10.

Cu ajutorul cunoștințelor de mai sus, combinate cu cele dobîndite anterior de elevi, aceștia vor putea înțelege deducerea regulilor de calcul în toate cazurile analizate în acest capitol:

1. Înmulțirea numerelor pînă la 10, cu un număr format numai din zeci.

2. Înmulțirea numerelor pînă la 10, cu un număr format din zeci și unități.

3. Înmulțirea numerelor mai mici decît 10, cu un număr format numai din sute.

4. Înmulțirea numerelor mai mici decît 10, cu un număr format din sute, zeci și unități.

Înmulțirile de tipurile menționate mai sus vor fi cunoscute atît în cazurile în care ele se fac fără trecere peste ordin, cît și în cazurile în care ele se fac cu trecere peste ordin.

Aflarea produsului se va face atît oral, cît și în scris, cu așezarea numerelor unele sub altele. *Nu se va insista asupra calculului oral în cazurile greoaie, preferîndu-se folosirea timpului, în astfel de situații, pentru formarea unor deprinderi trainice de calcul în scris.*

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL III

(Număr de ore, orientativ = 20)

TEMA 1. ÎNMULȚIREA CÎND UN FACTOR ESTE O SUMĂ

Scop: Cunoașterea înmulțirii numerelor naturale cînd un factor este o sumă, fără a efectua în primul rînd suma respectivă, ca în exemplele:

$$\begin{aligned} 3 \times (2 + 5) &= (3 \times 2) + (3 \times 5) \\ &= 6 + 15 \\ &= 21 \end{aligned} \quad \text{și} \quad \begin{aligned} (2 + 4) \times 3 &= (2 \times 3) + (4 \times 3) \\ &= 6 + 12 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Material didactic

Pentru învățător: Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 12).

Recomandări metodice pentru predarea temei

Textul din manual și indicațiile de mai jos vor permite învățătorului să-și elaboreze lecțiile cu ușurință.

Rezolvarea problemei de la „Exemplu" urmărește deducerea celor *două moduri de înmulțire a unui număr cu o sumă:*

$$3 \times (2 + 5) =$$

a) *Se face întîi adunarea și apoi înmulțirea:*

$$3 \times (2 + 5) = 3 \times 7 = 21$$

b) *Se înmulțește numărul, pe rînd, cu fiecare termen al adunării, apoi se adună produsele obținute:*

$$\begin{aligned} 3 \times (2 + 5) &= (3 \times 2) + (3 \times 5) \\ &= 6 + 15 \\ &= 21 \end{aligned}$$

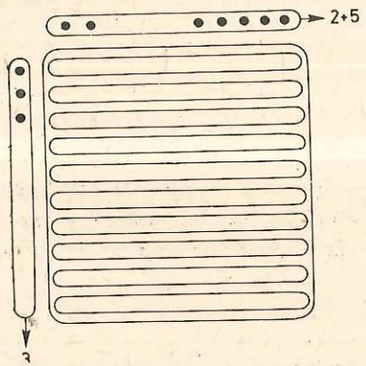


Fig. 94

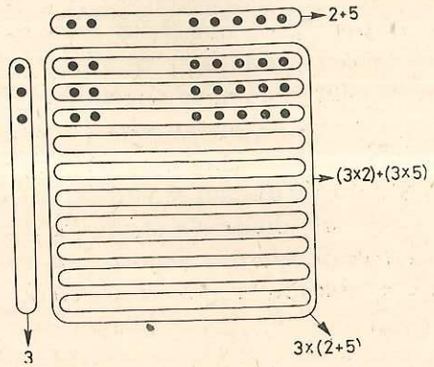


Fig. 95

Atenția elevilor va fi reținută mai ales asupra acestui din urmă procedeu, care este întîlnit pentru prima dată și de care va fi nevoie în lecțiile următoare.

Al doilea mod de înmulțire a unui număr cu o sumă va fi dedus și independent de problema dată ca exemplu, *utilizînd panoul 12 din trusa pentru studiul numerelor naturale.*

În acest scop, pe panoul 12 se formează mulțimi model pentru cei doi factori 3 și 2 + 5, așa cum se vede în figura 94. Se reprezintă apoi prin puncte elementele mulțimii produs, așa cum arată figura 95. Se observă că *mulțimea produs, care are $3\times(2+5)$ elemente, este formată din reuniunea a două mulțimi disjuncte, una avînd 3×2 elemente și una avînd 3×5 elemente.* Deci se poate scrie:

$$3\times(2+5) = (3\times 2) + (3\times 5)$$

Conținutul dedus astfel din lucrul pe panoul 12 al trusei va fi intuit privind figura 29 din manual.

Rezolvarea problemei de la „Alt exemplu" urmărește deducerea celor *două moduri de înmulțire a unei sume cu un număr:*

$$(2+4)\times 3 =$$

a) Se face adunarea și apoi înmulțirea:

$$(2+4)\times 3 = 6\times 3 = 18$$

b) Se înmulțește fiecare termen al adunării, pe rînd, cu numărul dat, apoi se adună produsele obținute:

$$\begin{aligned}(2+4)\times 3 &= (2\times 3) + (4\times 3)\\ &= 6 + 12\\ &= 18\end{aligned}$$

Deși primul mod de lucru pare mai simplu, *se va da atenție celui de al doilea mod,* care va fi necesar în lecțiile următoare.

Deducerea celui de al doilea procedeu, folosind panoul 12 din trusa pentru studiul numerelor naturale, este sugerată de figura 30 din manual și se va face procedînd asemănător cu cazul anterior.

Numai *după ce se rezolvă un număr suficient de exerciții și probleme numerice* care conduc la înmulțiri ce au unul din factori o sumă, se va face observația că oricare ar fi numerele naturale *a, b,* și *c,* putem scrie:

$$a\times(b+c) = (a\times b) + (a\times c)$$

și

$$(b+c)\times a = (b\times a) + (c\times a)$$

Se va atrage atenția elevilor că *aceste egalități reprezintă scrieri prescurtate a regulilor de înmulțire a unui număr cu o sumă, respectiv, a unei sume cu un număr,* și că *regulile respective se păstrează chiar dacă suma are mai mult de doi termeni.*

Se vor efectua exerciții de felul:

$$2\times(1+4+3) = (2\times 1) + (2\times 3) + (2\times 4)$$

$$(1+3+4)\times 2 = (1\times 2) + (3\times 2) + (4\times 2).$$

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema 1

Problema 2 (după „Exemplu")

Primul mod: $2 + 8 = 10$ Un borcan cu smîntînă costă 10 lei;
$4\times 10 = 40$ 4 borcane cu smîntînă costă 40 lei

Rezolvarea poate fi scrisă:

$$4\times(2+8) = 4\times 10 = 40$$

Răspuns: 40 lei.

Al doilea mod:

$4\times 2 = 8$ 4 borcane goale costă 8 lei;

$4\times 8 = 32$ smîntîna din borcane costă 32 lei;

$8 + 32 = 40$ 4 borcane pline cu smîntînă costă 40 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$$(4\times 2) + (4\times 8) = 8 + 32 = 40$$

Răspuns: 40 lei.

Se constată că: $4\times(2+8) = (4\times 2) + (4\times 8) = 40$

Observații

1. Scrierea textului aflat mai sus în dreapta fiecărei operații nu este obligatorie, el constituie *elemente ale unui plan de rezolvare*, care poate fi „oral".

Rezolvarea, cu planul de rezolvare în scris, poate fi redactată și astfel:

Pentru prima rezolvare:

1. Costul unui borcan plin cu smîntînă

$$2 + 8 = 10$$

2. Costul a 4 borcane cu smîntînă

$$4 \times 10 = 40$$

Răspuns 40 lei.

Pentru a doua rezolvare:

1. Costul a 4 borcane goale:

$$4 \times 2 = 8$$

2. Costul smîntînei din 4 borcane:

$$4 \times 8 = 32$$

3. Costul a 4 borcane cu smîntînă:

$$8 + 32 = 40$$

Răspuns: 40 lei.

Desigur, după fiecare rezolvare se poate scrie și *formula numerică de* rezolvare:

$$4 \times (2 + 8) = 4 \times 10 = 40$$

respectiv $(4 \times 2) + (4 \times 8) = 8 + 32 = 40$

observînd că: $4 \times (2 + 8) = (4 \times 2) + (4 \times 8)$.

La fiecare problemă învățătorul va decide dacă este cazul să se scrie, sau nu, planul de rezolvare, precum și modalitatea de scriere, în funcție de condițiile concrete ale clasei. În orice caz, *nu se va face abuz de text în redactarea planului și nici numărul problemelor rezolvate cu plan scris, nu va fi prea mare.*

2. *Clasificarea numerelor naturale în „abstracte" (7; 5; 8; ...) și „concrete" (7 kg; 5 lei; 8 mere; ...) trebuie evitată. În mulțimea numerelor naturale nu există elemente ca „7 kg", „5 lei"* sau *„8 mere"*. Asemenea expresii au o utilitate de necontestat, dar nu sînt numere naturale. Ele sînt alcătuite din două părți distincte: prima este un număr natural (ca: 7; 5; 8; ...); a doua este numele (sau simbolul) unității de măsură a unei mărimi (sau a elementelor unei mulțimi (kilograme; lei; mere; ...).

3. *Rezolvarea problemelor cere efectuarea unor operații* cu numerele date în problemă și cu numerele rezultate din astfel de operații, în cazul nostru operații cu *numere naturale, singurele numere cunoscute pînă acum de elevi. Aceste operații trebuie să ne conducă de la datele problemei, la rezultatul ei.*

Observînd că „7 kg" sau „5 mere" nu sînt numere naturale, *scrierea „8 mere + 4 mere" nu este o adunare de numere naturale*, rămînînd învăluită în mister, pînă la precizarea *semnificației matematice a unor expresii ca „7 kg" sau „5 mere"*.

În consecință, în scrierea „operațiilor" prin care se rezolvă o problemă este de preferat a nu specifica natura unităților reprezentate de numere, obținînd astfel numai operații cu numere naturale, cum ar fi:

$$8 + 4 = 12$$

care sînt bine cunoscute de elevi.

Dacă totuși se folosesc scrieri de felul:

$$8 \text{ mere} + 4 \text{ mere} = 12 \text{ mere}$$

sensul care li se poate da (deocamdată) este același cu al scrierii

$$8 + 4 = 12$$

adică sensul unei operații cu numere naturale, deci adăugarea unităților în scriere, nu modifică cu nimic sensul avut în absența lor.

Evitarea scrierii unităților este recomandată și de alte considerente. Astfel, pentru rezolvarea problemei „dacă un borcan costă **3 lei**, cît costă 4 borcane identice?", luînd ca date „3 lei" și „4 borcane", răspunsul se obține **prin** operația:

$$4 \text{ borcane} \times 3 \text{ lei} = 12 \text{ lei}$$

efectuată între datele problemei. În realitate, conform sensului avut de primul factor al înmulțirii, acela de a spune de cîte ori trebuie luat ca termen al adunării al doilea factor, este vorba de a lua de 4 ori cîte 3 lei, ceea ce s-ar scrie mai potrivit:

$$4 \times 3 \text{ lei} = 12 \text{ lei.}$$

Aceasta este însă o inconsecvență, deoarece la unele numere se specifică unitățile (3 lei), *la altele nu* (4 și nu „4 borcane").

Fie acuma problema: „Un copil are 5 pere și cu 2 mere mai multe decît pere. Cîte mere are acel copil?"

Datele problemei fiind „5 pere" și „2 mere", rezolvarea va consta în efectuarea unor operații între aceste date, respectiv:

$$5 \text{ pere} + 2 \text{ mere} = 7 \text{ mere.}$$

ceea ce „nu merge" este fără sens. Se pare că ar trebui să scriem:

$$5 \text{ mere} + 2 \text{ mere} = 7 \text{ mere}$$

dar în acest mod *am introdus în operație „5 mere", care nu se află printre datele problemei.*

Renunțînd la scrierea unităților, rezolvările ultimelor două probleme se scriu cu ajutorul următoarelor operații cu numere naturale

$$4 \times 3 = 12$$ **Răspuns:** 12 lei

și

$$5 + 2 = 7$$ **Răspuns:** 7 mere.

dispărînd inconvenientele menționate mai sus.

Renunțarea la specificarea unităților în scrierea operațiilor nu exclude, ci obligă la găsirea naturii unităților numărului obținut ca rezultat *.

---

* În acest scop se poate folosi convenția de scriere: $4 \times 3 = 12$ (lei); $5 + 2 = 7$ (mere), în care natura unităților rezultatului este menționată în paranteză ca o informație suplimentară, fără ca paranteza să fie privită ca făcînd parte din „numărul" obținut la rezultat.

Problema 3 (după „Exemplu")
Primul mod:

$6+5=11$ Lungimea și lățimea dreptunghiului au, împreună, 11 m;

$2\times 11=22$ perimetrul dreptunghiului are 22 m.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$$2\times(6+5)=2\times 11=22$$

Răspuns: 22 m.

Al doilea mod:

$2\times 6=12$ două lungimi au împreună 12 m;

$2\times 5=10$ două lățimi au împreună 10 m;

$12+10=22$ perimetrul dreptunghiului este de 22 m.

Problema 2 (după „Alt exemplu")
Primul mod:

$3+7+10$ Mama a cumpărat în total 10 kg cireșe;

$10\times 5=50$ 10 kg cireșe a 5 lei kilogramul au costat 50 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$$(3+7)\times 5=10\times 5=50$$

Răspuns: 50 lei.

Al doilea mod:

$3\times 5=15$ 3 kg cireșe au costat 15 lei;

$7\times 5=35$ 7 kg cireșe au costat 35 lei;

$15+35=50$ toate cireșele au costat 50 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$$(3\times 5)+(7\times 5)=15+35=50$$

Răspuns: 50 lei.

Se constată că: $(3+7)\times 5=(3\times 5)+(7\times 5)=50$

Problema 3 (după „Alt exemplu")
Primul mod:

$5+4=9$ Ancuța a cumpărat în total 9 caiete;

$9\times 4=36$ 9 caiete a 4 lei bucata au costat 36 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$$(5+4)\times 4=9\times 4=36$$

Răspuns: 36 lei.

Al doilea mod:

$5\times 4=20$ 5 caiete au costat 20 lei;

$4\times 4=16$ 4 caiete au costat 16 lei;

$20+16=36$ toate caietele au costat 36 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$$(5\times 4)+(4\times 4)=20+16=36$$

Răspuns: 36 lei.

Se constată: $(5+4)\times 4=(5\times 4)+(4\times 4)=36$.

TEMA A 2-a: ÎNMULȚIREA CU MAI MULȚI FACTORI

Scop: Cunoașterea regulii de înmulțire a trei numere naturale:

$$5\times 2\times 3=(5\times 2)\times 3$$

și extinderea ei la patru numere naturale:

$$2\times 4\times 1\times 7=(2\times 4)\times 1\times 7=(8\times 1)\times 7$$

etc.

Nu se va insista asupra scrierii cu paranteze, ci asupra tehnicii de găsire a produsului înmulțind primul factor cu al doilea, rezultatul cu al treilea, ș.a.m.d.

Notă: Elaborarea lecțiilor nu poate crea dificultăți. Se va avea grijă ca exercițiile propuse să nu conducă la înmulțiri încă neînvățate.

TEMA A 3-a: ASOCIATIVITATEA ÎNMULȚIRII

Scop: Cunoașterea posibilității de efectuare a înmulțirii a trei numere naturale pe oricare din căile:

$$2\times 3\times 4=(2\times 3)\times 4;\quad 2\times 3\times 4=2\times(3\times 4).$$

Prima cale este însăși definiția înmulțirii a trei numere naturale. A doua cale devine posibilă după ce dovedim că avem:

$$(2\times 3)\times 4=2\times(3\times 4)$$

adică după ce este pusă în evidență proprietatea de asociativitate a înmulțirii numerelor naturale.

Material didactic

Pentru învățător: Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 12).

Recomandări metodice pentru predarea temei

Rezolvînd problema dată ca exemplu în manual la tema respectivă, se stabilește că avem:

$$(2\times3)\times4 = 2\times(3\times4)$$

de unde rezultă că *la înmulțirea a trei factori putem înmulți primul factor cu al doilea și produsul obținut îl înmulțim cu al treilea factor*, sau, *înmulțim factorul al doilea cu al treilea, apoi înmulțim primul factor cu produsul obținut la înmulțirea anterioară.*

Se atrage atenția elevilor că egalitatea

$$(2\times3)\times4 = 2\times(3\times4)$$

care exprimă *proprietatea de asociativitate a înmulțirii poate fi dedusă independent de problema rezolvată, utilizînd panoul 12 din trusa pentru studiul numerelor naturale.*

În acest scop pe panoul 12 formăm mulțimi model pentru factorul 2×3, scris sub forma $3 + 3$, și pentru factorul *4*, așa cum arată figura 96. Se reprezintă apoi elementele mulțimii produs, așa cum arată figura 97.

Să observăm că *mulțimea produs, care are* $(2\times3)\times4$ *elemente, este formată din reuniunea a două mulțimi disjuncte, fiecare avînd* 3×4 *elemente.* Așadar, numărul elementelor reuniunii poate fi scris:

$$(3\times4)+(3\times4) = 2\times(3\times4).$$

Avem numărul elementelor reuniunii scris în două moduri:

$$(2\times3)\times4 \text{ și } 2\times(3\times4).$$

Rezultă:

$$(2\times3)\times4 = 2\times(3\times4)$$

tocmai ce am dorit să arătăm.

Conținutul dedus mai sus cu ajutorul panoului trusei va fi intuit privind figura 31 din manual.

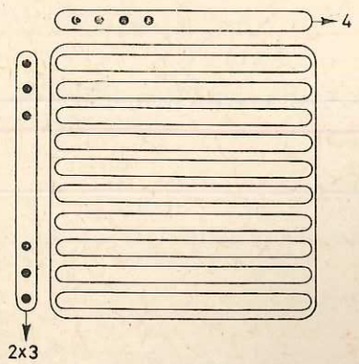


Fig. 96

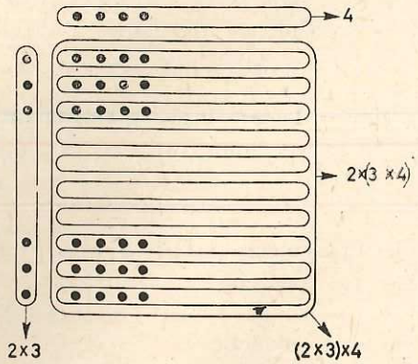


Fig. 97

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 3-a

Problema 2

Prima rezolvare:

$3\times2 = 6$ S-au cumpărat în total 6 kg de fructe;
$6\times5 = 30$ Toate fructele au costat 30 lei.

Rezolvarea se poate scrie:

$$(3\times2)\times5 = 6\times5 = 30.$$ **Răspuns:** 30 lei.

A doua rezolvare:

$2\times5 = 10$ Fructele dintr-o pungă au costat 10 lei;
$3\times10 = 30$ Toate fructele au costat 30 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$$3\times(2\times5) = 3\times10 = 30.$$ **Răspuns:** 30 lei.

Se constată că: $(3\times2)\times5 = 3\times(2\times5) = 30.$

Problema 3

Prima rezolvare:

$2\times3 = 6$ În 2 grupe de copii sînt 6 rînduri;
$6\times3 = 18$ În cele 6 rînduri sînt 18 copii.

Rezolvarea se poate scrie:

$$(2\times3)\times3 = 6\times3 = 18.$$ **Răspuns:** 18 copii.

A doua rezolvare:

$3\times3 = 9$ În 3 rînduri ale unei grupe sînt 9 copii;
$2\times9 = 18$ În cele 2 grupe sînt 18 copii.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$$2\times(3\times3) = 2\times9 = 18.$$ **Răspuns:** 18 copii.

Se constată: $(2\times3)\times3 = 2\times(3\times3) = 18$

TEMA A 4-a: ÎNMULȚIREA CÎND AVEM FACTOR PE 10 SAU 100

Scop: Deducerea regulilor de calcul și formarea deprinderii de aplicare a lor, pentru a putea fi folosite la efectuarea înmulțirilor în cazurile care vor fi analizate ulterior.

Recomandări metodice pentru predarea temei

În subtema (2°) „Înmulțirea cu 100 a numerelor pînă la 10", punctul (b), se va sublinia că *proprietatea de asociativitate a înmulțirii face posibile scrierile:*

$$0\times(10\times10) = (0\times10)\times10 \text{ și } 1\times(10\times10) = (1\times10)\times10$$

prin care înlocuim operațiile necunoscute încă, 0 × 100 și 1 × 100, cu altele cunoscute, 1 × 10 și respectiv 1 × 10 și 10 × 10.

De asemenea, la subtema (3°) „Înmulțirea cu 10 a numerelor formate numai din zeci", se va sublinia că tot asociativitatea înmulțirii permite scrierea:

$$(4 \times 10) \times 10 = 4 \times (10 \times 10)$$

prin care înlocuim înmulțirea 40 × 10, încă neînvățată, cu înmulțirile 10 × 10 și 4 × 100, care sînt în acel moment cunoscute.

La subtema (4°) „Înmulțirea cu 10 a numerelor formate din zeci și unități" se va atrage atenția că, *deoarece înmulțirea este distributivă față de adunare, putem scrie:*

$$(30 + 2) \times 10 = (30 \times 10) + (2 \times 10).$$

Astfel, înlocuim o înmulțire încă necunoscută, 32 × 10, cu înmulțirile cunoscute în acel moment, 30 × 10 și 2 × 10.

TEMA A 5-a: ÎNMULȚIREA FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN

Scop: Deducerea regulilor de calcul oral în situațiile noi analizate, folosind regulile de calcul deja cunoscute și proprietățile înmulțirii. Deducerea regulilor de efectuare în scris a calculelor respective, cu scrierea numerelor unele sub altele. Efectuarea expeditivă a calculelor, oral și în scris.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Elaborarea lecțiilor de către învățător pe baza textului din manual nu poate prezenta dificultăți, dacă se va ține seama și de indicațiile de mai jos:

La fiecare subtemă, punctul (a) intitulat „Operații ajutătoare" este destinat deducerii regulii de calcul oral, prin reducerea situației noi, încă necunoscute, la altele deja învățate, cu ajutorul proprietăților cunoscute ale înmulțirii.

Astfel, asociativitatea înmulțirii permite la subtema (1°) să se afle produsul 2 × 30, efectuînd înmulțirile deja cunoscute 2 × 3 și 6 × 10, iar la subtema (3°) permite să se afle produsul 3 × 200, efectuînd înmulțirile deja cunoscute 3 × 2 și 6 × 100.

Asemănător, faptul că *înmulțirea este distributivă față de adunare,* permite la subtema (2°) să se afle produsul 3 × 21 efectuînd înmulțirile cunoscute 3 × 20 și 3 × 1, iar la subtema (4°) permite să se afle produsul 3 × 213, efectuînd înmulțirile cunoscute 3 × 200, 3 × 10 și 3 × 3.

Se observă că aici este nevoie a cunoaște *înmulțirea unui număr cu o sumă de trei termeni,* fapt asupra căruia trebuie atrasă atenția elevilor.

Odată „surprinsă" regula de calcul oral prin scrierea aflată în manual în coloana din stînga (sub „Operații ajutătoare"), această regulă a fost scrisă prescurtat în coloana din dreapta, alăturată.

Scrierea din coloana stîngă va fi făcută la tablă și în caiet *numai cu ocazia primei deduceri a regulii.* Ulterior, calculul produsului se va face oral, în baza regulii găsite, scriind „direct" rezultatul înmulțirii:

$$2 \times 30 = 60$$

La fiecare subtemă, punctul (b) intitulat „Calculul în scris" este destinat, așa cum spune și titlul, deducerii regulii de calcul în scris.

Această deducere se face folosind *efectuarea înmulțirii prin adunare repetată, efectuarea în scris a adunării și efectuarea adunării repetate prin înmulțire.*

Să luăm ca exemplu 2 × 30 = .

Reproducem textul din manual:

Deducerea regulii:

2 × 30 = 30 + 30	2 × 30	Așezarea convenabilă a calculului:
= 60	30 +	30 ×
↑	30	2
	60	60

Avem: 2 × 30 = 60.

Din textul reprodus se vede că *sînt parcurse mai multe etape*:

a) Se calculează produsul 2 × 30 scriind înmulțirea ca adunare repetată și efectuînd această adunare după procedeul obișnuit la adunarea în scris.

b) Se observă că adunarea unităților de același ordin scrise într-o coloană este de fapt o adunare repetată, deci poate fi efectuată prin înmulțire, așa cum s-a și notat deasupra fiecărei coloane.

c) Înlocuind adunarea pe coloane cu înmulțirile 2 × 0 și 2 × 3, acestea dau cifrele produsului. Pentru efectuarea lor este mai convenabilă scrierea:

30 ×	cu sensul	30 ×	care dă	30 ×
2		2		2
		2 × 0 / 2 × 3		60

Observăm că această scriere păstrează semnificația factorilor avută în 2 × 30 de: 2 ori 30. În adevăr, în exprimarea obișnuită, efectuînd înmulțirea cu numerele scrise unele sub altele, zicem „de 2 ori 0" și „de 2 ori 3 (zeci)", 2 păstrînd sensul de a spune de cîte ori se repetă celălalt factor ca termen al adunării.

Elevii vor folosi doar prima scriere, și a treia.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 5-a

Problema 5 (subtema 2°)

Primul mod:

$21 + 12 = 33$ Un stilou și un pix costă 33 lei;
$3 \times 33 = 99$ 3 stilouri și 3 pixuri costă 99 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă:
$3 \times (21 + 12) = 3 \times 33 = 99$ **Răspuns**: 99 lei

Al doilea mod:

$3 \times 21 = 63$ 3 stilouri costă 63 lei;
$3 \times 12 = 36$ 3 pixuri costă 36 lei;
$63 + 36 = 99$ 3 stilouri și 3 pixuri costă 99 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$(3 \times 21) + (3 \times 12) = 63 + 36 = 99.$ **Răspuns**: 99 lei.

Se va observa: $3 \times (21 + 12) = (3 \times 21) + (3 \times 12) = 99.$

Problema 6 (subtema 3°)

Prin încercări, găsim:

a) $n = 4$; *b)* $\{0; 1; 2; 3\}$; *c)* $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Problema 7 (subtema 3°)

Prin încercări, găsim: $B = \{2; 3; 4\}$.

Problema 8 (subtema 4°)

Prima rezolvare:

1°. Cît costă o rochie și un pulover? 1) $231 +$ 2) $443 \times$
$231 + 212 = 443$ 212 2
443 886

2°. Costul a 2 rochii și 2 pulovere:

$2 \times 443 = 886$

Răspuns: 886 lei.

Rezolvarea se poate scrie:

$2 \times (231 + 212) = 2 \times 443 = 886.$

A doua rezolvare:

1°. Aflăm cît costă 2 rochii: 1) $231 \times$ 2) $212 \times$
$2 \times 231 = 462$ 2 2
462 424

2°. Aflăm cît costă 2 pulovere:

$2 \times 212 = 424$ 3) $462 +$
424
886

3°. Costul a 2 rochii și 2 pulovere:

$462 + 424 = 886$

Răspuns: 886 lei.

Rezolvarea poate fi scrisă:

$(2 \times 231) + (2 \times 212) = 462 + 424 = 886.$

Problema 9 (subtema 4°)

Prima rezolvare:

$3 \times 101 = 303$ Lungimea este de 303 dam;
$101 + 303 = 404$ lungimea și lățimea au împreună 404 dam;
$2 \times 404 = 808$ perimetrul dreptunghiului este de 808 dam.

A doua rezolvare:

$3 \times 101 = 303$ Lungimea are 303 dam;
$2 \times 101 = 202$ cele 2 lățimi au, împreună, 202 dam;
$2 \times 303 = 606$ cele 2 lungimi au, împreună, 606 dam;
$202 + 606 = 808$ perimetrul dreptunghiului este de 808 dam.

TEMA A 6-a: ÎNMULȚIREA CU TRECERE PESTE ORDIN

Scop: Deducerea regulilor de calcul oral și în scris. Formarea deprinderilor de calcul și de aplicare a cunoștințelor în rezolvarea problemelor.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Lecțiile se vor desfășura după o tehnologie didactică asemănătoare celei folosite la tema a 5-a.

Subliniem în continuare unele aspecte mai importante:

SUBTEMA 1°

La punctul (a) „Operații ajutătoare" se va atrage atenția elevilor că folosirea asociativității înmulțirii face posibilă trecerea în calcularea produsului 4×30, de la etapa: $4 \times (3 \times 10)$

la etapa:

$(4 \times 3) \times 10$

și prin aceasta, în fond, se înlocuiește înmulțirea necunoscută încă, 4×30, cu înmulțirile cunoscute 4×3 și 12×10.

La punctul (b) „Calculul în scris", vor fi evidențiate etapele:

a) Scrierea înmulțirii folosind adunarea repetată:

$$4 \times 30 = 30 + 30 + 30 + 30$$

și efectuarea adunării obținute folosind regula de calcul în scris:

$$\begin{array}{r} 30\,+ \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ \hline 120 \end{array}$$

b) Observarea faptului că, adunînd „pe coloane", la fiecare coloană facem o adunare repetată: $0 + 0 + 0 + 0$; $3 + 3 + 3 + 3$. Acestea pot fi scrise:

$$0 + 0 + 0 + 0 = 4 \times 0; \qquad 3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3.$$

Înmulțirile respective dau unitățile, zecile și sutele produsului. Pentru sugerare, ele vor fi scrise (numai în primele exemple prezentate) deasupra fiecărei coloane:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\times 3} \\ {\scriptstyle 4\times 0} \\ 30\,+ \\ 30 \\ 30 \\ 30 \\ \hline 120 \end{array}$$

c) Înlocuirea adunărilor pe coloane cu înmulțiri face mai convenabilă așezarea calculului:

$$\begin{array}{r} 30\times \\ 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{cu sensul} \quad \begin{array}{r} 30\times \\ 4 \\ \hline {\scriptstyle 4\times 3} \\ {\scriptstyle 4\times 0} \end{array} \quad \text{care dă} \quad \begin{array}{r} 30\times \\ 4 \\ \hline 120 \end{array}$$

(Elevii nu vor folosi decît prima scriere, care se va completa transformîndu-se în cea de a treia).

Se va observa că, deși pentru prescurtare zicem „4 ori 0 egal 0" și „4 ori 3 egal 12", în realitate avem în vedere: 4×3 zeci $= 12$ zeci $= 10$ zeci $+ 2$ zeci $= 1$ sută $+ 2$ zeci.

Așadar, trebuie să scriem la produs fiecare cifră pe locul corespunzător ordinului unităților pe care le reprezintă.

La punctul (a) „Operații ajutătoare", se va sublinia că, întrucît înmulțirea este distributivă față de adunare, putem trece în calcularea produsului 3×47 de la etapa:

$$3 \times (40 + 7)$$

la etapa:

$$(3 \times 40) + (3 \times 7)$$

înlocuind astfel înmulțirea necunoscută încă, 3×47, cu înmulțirile cunoscute 3×40 și 3×7. Această observație dă regula de calcul oral:

$$3 \times 47 = (3 \times 40) + (3 \times 7) = 120 + 21$$

care va fi folosită pentru scrierea „directă" a produsului înmulțirilor de acest fel:

$$3 \times 47 = 141$$

La punctul (b) „Calculul în scris", vor fi evidențiate aceleași etape ca la subtema (1°).

În legătură cu efectuarea adunării repetate:

$$\left.\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\times 4} \\ {\scriptstyle 3\times 7} \\ ② \\ 47\,+ \\ 47 \\ 47 \\ \hline 141 \end{array}\right)$$

se va observa că suma unităților se poate calcula:

$$3 \times 7 = 21 = 2 \text{ zeci} + 1$$

cele 2 zeci urmînd a fi adunate la suma zecilor, lucru sugerat prin scrierea lui 2 deasupra coloanei zecilor.

Suma zecilor se poate calcula:

$$\begin{aligned} 3 \times 4 \text{ zeci} + 2 \text{ zeci} &= 12 \text{ zeci} + 2 \text{ zeci} \\ &= 14 \text{ zeci} \\ &= 1 \text{ sută} + 4 \text{ zeci.} \end{aligned}$$

În acest mod obținem pentru produs cifra unităților 1, a zecilor 4 și a sutelor 1.

Toate acestea se pot „gîndi" pe scrierea simplificată:

$$\begin{array}{r} 47\times \\ 3 \\ \hline \end{array} \quad \text{cu sensul} \quad \begin{array}{r} 47\times \\ 3 \\ \hline {\scriptstyle 3\times 4} \\ {\scriptstyle 3\times 7} \end{array} \quad \text{care dă} \quad \left.\begin{array}{r} ② \\ 47\times \\ 3 \\ \hline 141 \end{array}\right) \quad \text{sau} \quad \begin{array}{r} 47\times \\ 3 \\ \hline 141 \end{array}$$

Se folosește sistemul de lucru expus anterior. De data aceasta trebuie folosit faptul că înmulțirea este distributivă față de o adunare cu trei termeni, pentru a înlocui înmulțirea necunoscută încă 4×248, cu înmulțirile cunoscute 4×200, 4×40 și 4×8.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 6-a

Problema 6 (subtema 1°)

Înlocuind, pe rînd, elementele reuniunii în locul lui n din:

$$6 \times n \leqslant 300$$

se găsește că scrierea este adevărată pentru orice element al mulțimii:

$$A = \{20; 30; 50\}.$$

Înlocuind apoi, pe rînd, elementele reuniunii în locul lui n din:

$$6 \times n \geqslant 300$$

se găsește scrierea adevărată pentru orice element al mulțimii:

$$B = \{50; 70; 80; 90\}.$$

Problema 7 (subtema 1°)

a) $40 \times 7 = 280$;	*b)* $20 \times 8 = 160$;	*c)* $30 \times 9 = 270$
$60 \times 7 = 420$	$10 \times 8 = 80$	$90 \times 9 = 810$
	$70 \times 8 = 560$	$80 \times 9 = 720$
		$50 \times 9 = 450$
d) $40 \times 5 = 200$	$10 \times 5 = 50$	$90 \times 5 = 450$
$60 \times 5 = 300$	$70 \times 5 = 350$	$80 \times 5 = 400$
$20 \times 5 = 100$	$30 \times 5 = 150$	$50 \times 5 = 250$

Problema 6 (subtema 2°)

1°. Aflăm cîți lei a dat:

$$(8 \times 25) + (6 \times 50) + (26 \times 10) = 200 + 300 + 260 = 760.$$

2°. Ce rest trebuie să primească:

$$760 - 755 = 5$$

A primit rest 5 lei. Această sumă i se poate restitui în următoarele moduri:

a) 1 monedă de 5 lei;
b) 1 monedă de 3 lei și 2 monede de 1 leu;
c) 5 monede de 1 leu.

Problema 12 (subtema 3°, ca și problemele următoare)

Prin încercări, găsim:

a) $\{2; 3; 4\}$; *b)* $\{2; 3; 4; 5\}$; *c)* $\{3; 4; 5; 6\}$;
d) $\{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Problema 14

$(6 \times 18) + (6 \times 11) =$ sau $6 \times (18 + 11) =$

care se efectuează.

Problema 15

$(6 \times 13) + (6 \times 10) + (6 \times 7) =$ sau $6 \times (13 + 10 + 7) =$

și se fac operațiile respective.

Problema 16

$(175 + 59) \times 4 = 234 \times 4 = 936$ sau $(175 \times 4) + (59 \times 5) =$
$= 700 + 236 = 936$

Pe toate cărțile s-a plătit 936 lei.

Problema 17

„O carte costă 3 lei. Se cumpără o dată 121 și altă dată 32 cărți de acest fel. Cît s-a plătit în total?"

Oricare din cele două scrieri date în manual reprezintă o rezolvare a problemei. Efectuînd operațiile se găsește:

$(121 \times 3) + (32 \times 3) = 363 + 96 = 459$

$$\begin{array}{r} 363+ \\ 96 \\ \hline 459 \end{array}$$

sau: $(121 + 32) \times 3 = 153 \times 3 = 459$

$$\begin{array}{r} 153\times \\ 3 \\ \hline 459 \end{array}$$

Problema 18

$3 \times (215 + 113) = 3 \times 328 = 984$

$$\begin{array}{r} 215+ \\ 113 \\ \hline 328 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 328\times \\ 3 \\ \hline 984 \end{array}$$

sau: $(3 \times 215) + (3 \times 113) = 645 + 339 = 984$

$$\begin{array}{r} 215\times \\ 3 \\ \hline 645 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 113\times \\ 3 \\ \hline 339 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 645+ \\ 339 \\ \hline 984 \end{array}$$

Pe 3 costume fustă-taior s-au plătit 984 lei.

Observație. Problemele de la 14 la 18 vor fi rezolvate mai întîi folosind planul scris de rezolvare, făcut în mod obișnuit, pentru fiecare problemă dîndu-se două rezolvări. După fiecare rezolvare se va scrie soluția condensat, sub una din formele date mai sus, corespunzătoare situației respective.

Problema 19

„O cămașă costă 112 lei și o cravată costă 49 lei. Cît se va plăti pe 5 cămăși și 5 cravate?"

Oricare din cele două scrieri date în manual reprezintă o rezolvare a problemei. Efectuînd operațiile se găsește:

$(5 \times 112) + (5 \times 49) = 560 + 245 = 805$

$$\begin{array}{r} 112\times \\ 5 \\ \hline 560 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 49\times \\ 5 \\ \hline 245 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 560+ \\ 245 \\ \hline 805 \end{array}$$

sau: $5 \times (112 + 49) = 5 \times 161 = 805$

$$\begin{array}{r} 112+ \\ 49 \\ \hline 161 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 161\times \\ 5 \\ \hline 805 \end{array}$$

Capitolul IV

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE FĂRĂ ȘI CU TRECERE PESTE ORDIN, CÎND ÎMPĂRȚITORUL NU TRECE DE 10

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Folosind definiția împărțirii cu ajutorul separării dintr-o mulțime a unor submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd același număr de elemente, se va introduce împărțirea cu rest a numerelor naturale. Relațiile: $0 \leqslant r < \hat{\imath}$; $d = (\hat{\imath} \times c) + r$. Proba împărțirii. Împărțirea cu rest prezentată prin scădere repetată.

2. Împărțirea fără și cu trecere peste ordin, cînd împărțitorul nu trece de 10, grupînd pe tipuri cazurile ce pot fi întîlnite, după accesibilitate și algoritmul de calcul. Vor fi folosite parantezele pentru punerea în evidență a raționamentelor. Pentru fiecare tip se va prezenta și așezarea calculului în scris.

3. Exerciții și probleme simple. Problemele de aflare a unui număr „de atîtea ori mai mic" decît un număr dat.

Exerciții de tipul: $5 \cdot n = 970$; $n \cdot 3 = 231$; $500 : n = 4$.

Probele unora din împărțirile și înmulțirile făcute.

2. CUNOȘTINȚE ȘI DEPRINDERI CU CARE TREBUIE SĂ RĂMÎNĂ ELEVII

Împărțirea cu rest a numerelor naturale, prin procedeele cunoscute de separare a unei mulțimi în submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd același număr de elemente:

a) procedeul prin cuprindere, dacă știm cîte elemente trebuie să fie într-o submulțime;

b) procedeul prin părți egale, dacă știm cîte submulțimi trebuie formate.

Elevii vor cunoaște faptul că împărțirea cu rest a numerelor naturale, deși notată cu „: " ca și împărțirea exactă, este o operație distinctă de aceasta din urmă. În adevăr,

$$14 : 3 =$$

este o operație imposibilă dacă este privită ca împărțire exactă și este o operație posibilă dacă este privită ca împărțire cu rest:

$$14 : 3 = 4 \text{ (rest 2)}$$

Împărțirea cu rest nu exclude obținerea restului 0, situație în care ea coincide cu împărțirea exactă. Dacă restul este diferit de 0, împărțirea se numește neexactă.

Așadar, *împărțirea exactă și împărțirea neexactă* sînt cazuri particulare ale împărțirii cu rest.

În mod nejustificat se consideră cîteodată împărțirea neexactă ca fiind identică cu împărțirea cu rest. În acest mod se pierde din vedere că dacă se obține restul 0, acest rest este un număr natural ca oricare altul, deci *împărțire „cu rest" nu înseamnă neapărat împărțire „neexactă"*.

Privind împărțirea exactă și împărțirea cu rest ca pe două operații distincte *este normal să folosim și simboluri de operație distincte.* Coincidența simbolurilor poate genera confuzii. Aceste confuzii se vor agrava mai tîrziu, cînd se vor introduce numerele raționale (mulțimea lor se notează cu Q) pentru împărțirea cărora se folosește tot simbolul „:".

Astfel vom avea:

$$14:3 = \begin{cases} \text{fără sens, dacă „:" este împărțirea exactă în } N: \\ 4, \text{ dacă „:" este împărțirea cu rest în } N; \\ \frac{14}{3} \text{ dacă „:" este împărțirea în } Q \text{ și s-a admis: } 14 = \frac{14}{1};\ 3 = \frac{3}{1}. \end{cases}$$

Ce sens vom da atunci scrierii 14: 3, în cazul în care nu ni se fac alte precizări? În mod normal, ar trebui să luăm în considerație, pe rînd, toate cele trei sensuri posibile, ceea ce devine complicat.

Ieșirea din impas ar oferi-o folosirea de simboluri diferite pentru operații diferite, de exemplu „$\underset{\circ}{:}$" pentru împărțirea exactă în N, „$\underset{\bullet}{:}$" pentru împărțirea cu rest în N și „:" pentru împărțirea în Q. Cu aceste notații:

$$14 \underset{\circ}{:} 3 = \text{fără sens};\ 14 \underset{\bullet}{:} 3 = 4;\ 14:3 = \frac{14}{3}.$$

Introducerea unor simboluri întîmpină însă o serioasă opoziție sub motiv că s-ar complica mult scrierea (este și greu de schimbat o îndelungată obișnuință). În această situație, respectînd tradiția notației unice cu „:", **facem convenția ca, dacă nu se fac alte precizări, scrierea:**

$$14:3$$

să fie considerată ca avînd sensul din mulțimea cea mai cuprinzătoare, adică din Q:

$$14:3 = \frac{14}{3}$$

Dacă știm că scrierea:

$$14:3$$

este în mulțimea N a numerelor naturale, ea va avea sensul operației mai cuprinzătoare, deci a împărțirii cu rest;

$$14:3 = 4$$

în toate cazurile în care nu se spune în mod expres că este vorba de o împărțire exactă, sau contextul nu obligă a considera o astfel de împărțire.

Uneori se susține cu destulă insistență că nu este bine a complica lucrurile pentru copii mici, separînd împărțirea „exactă", de aceea „cu rest". Ce atîtea împărțiri? Să se vorbească de o singură împărțire, și gata.

Sugestia nu este rea, dacă lucrul ar fi posibil. Cum *tendința de simplificare a studiului împărțirii numerelor naturale nu este nouă, să vedem ce s-a realizat pînă în prezent.*

În mod neîndoielnic, *împărțiri de felul:*

$$\begin{array}{l} 56:2 = 28 \\ \underline{4} \\ 16 \\ \underline{16} \\ == \end{array} \qquad \text{și} \qquad \begin{array}{l} 59:3 = 19 \\ \underline{3} \\ 29 \\ \underline{27} \\ =2 \end{array}$$

se studiau în școala primară înainte ca elevii să cunoască alte numere decît cele naturale. Era deci vorba de împărțirea exactă și împărțirea cu rest a numerelor naturale.

Este adevărat că *nu se prezentau ca operații distincte* una de alta, *ci ca o singură operație, care se dorea a fi aceea mai generală, deci aceea cu rest.* Dar la fel de adevărat este că *singura definiție ce se da împărțirii numerelor naturale* era, în esență, *„operația în care, dîndu-se produsul a două numere și unul din ele, se află celălalt număr"*. Ori, *aceasta privea, în realitate, doar împărțirea exactă.*

(Cu o astfel de definiție scrierea 59: 3 = este o împărțire imposibilă, neputînd găsi un număr natural care înmulțit cu 3 să dea produsul 59. Mai exact, scrierea 59 : 3 nu are sens matematic, cîtă vreme folosim pentru împărțirea numerelor naturale definiția de mai sus, și „efectuarea" împărțirii 59: 3 = 19 făcută mai sus este o farsă).

În acest mod devine evident că se spunea *„împărțire"* în loc de *„împărțire cu rest"*, ceea ce nu era rău, aceasta conținînd-o pe cea exactă ca pe un caz particular. *Ca definiție a „împărțirii" respective se lua însă definiția împărțirii „exacte"*, ceea ce era greșit, deoarece nu cuprindea împărțirea „neexactă" inclusă în împărțirea „cu rest".

Care „împărțire" se efectua în practică"? Aceea cu rest, adică tocmai aceea care nu fusese definită. Ea intra astfel în mod clandestin în matematică și apoi era folosită ca ceva bine cunoscut de toți. (Chiar la efectuarea împărțirii exacte se folosește, pe etapele intermediare, și împărțirea cu rest, cum se poate ușor constata mai sus la împărțirea 56:2.)

Se desprinde necesitatea definirii corecte a împărțirii cu rest a numerelor naturale, în orice manual școlar care folosește această operație.

Să precizăm acum cîteva noțiuni, așa cum sînt ele în matematica actuală.

O regulă „" care ne conduce de la elementele a și b din mulțimea E, luate în această ordine, la cel mult un element e din E (sau la niciunul) definește o operație (internă binară) în mulțimea E,*

Se notează:

$a * b = c$ (citind „a operat prin „*" cu b este egal cu c").

În scrierea $a * b$ simbolul $*$ are o *dublă semnificație.*

Prima este aceea de „operator", regula $*$ indicînd clar procedeul prin care plecînd de la elementele a și b din E, luate în această ordine, se ajunge la c din E.

A doua este aceea de *a „unifica" scrierea $a * b$ într-un ansamblu de simboluri cu care se poate nota elementul c din E*

$$a * b = c.$$

În adevăr, folosind rolul de operator al lui „*" putem ajunge de la cuplul (a, b) la c. Așadar dacă ni se dă scrierea $a * b$, ni se dă de fapt și cuplul (a, b) și regula „*", deci ni se dă în fond c (chiar dacă indirect).

Din cele de mai sus rezultă că, indiferent cum este *formulată, din definiția oricărei operații (interne binare) nu trebuie* să lipsească:

a) Precizarea fără echivoc a mulțimii E în care se face operația respectivă.

b) Conținutul concis dar clar al regulii de operație, $*$ *astfel încît, pe baza ei, să putem ajunge de la elementele a și b din E, la elementul c din E,* rezultatul operației $*$ efectuate între *a* și *b*.

Să revenim acum asupra definiției împărțirii sub forma „operația în care se dă produsul și unul din factori și trebuie aflat celălalt factor".

Se spune, de exemplu:

$$15:3 = 5 \text{ deoarece } 5 \times 3 = 15.$$

Dar, cum s-a găsit cîtul 5? *Definiția nu indică*, așa cum ar trebui, *procedeul prin care plecînd de la deîmpărțitul 15 și de la împărțitorul 3, sîntem conduși la cîtul 5.* Ea oferă doar un mijloc de verificare dacă cîtul, aflat nu se știe pe ce cale, este corect sau nu.

Așadar, definiția menționată nu conferă operatorului „:" conținutul necesar pentru a furniza rezultatul operației, ea nu permite „efectuarea" operației, ci doar „proba ei". *Este clar că, de fapt, nu avem de a face cu o definiție*, ci cu o proprietate a împărțirii exacte, proprietate care *ar trebui formulată* „la orice împărțire exactă produsul cîtului prin împărțitor este deîmpărțitul" și dedusă dintr-o *definiție care să permită efectuarea operației* respective, definiție care nu a existat pînă acum în manualele școlare.

Situația este identică cu aceea întîlnită la scădere, care era „definită" ca „operația în care se dă suma a două numere, și unul din numere, și trebuie aflat celălalt număr". Această formulare oferă posibilitatea de verificare a rezultatului scăderii, dar nu și a efectuării ei, fiind cu totul necunoscută calea pe care, pornind de la descăzut și scăzător, s-ar putea ajunge la diferență. Se impunea, deci, o definiție care să permită efectuarea scăderii.

Din cele de mai sus rezultă că este necesar a prezenta cunoștințele cît mai simplu, fără ca din dorința simplificării să amestecăm în așa măsură lucruri distincte, încît, ele să rămînă pentru totdeauna confuze în mintea elevilor. Prin aceasta le creăm dificultăți mult mai mari decît efortul pe care ar trebui să-l facem pentru a înțelege, pe măsura posibilităților lor, esența cunoștințelor care li se transmit.

Pentru nivelul de învățămînt căruia ne adresăm, *definițiile cu mulțimi pe care le-am prezentat și pentru scădere și pentru împărțire sînt perfect accesibile, fiind suficient de simple și în același timp corecte.*

După cum s-a mai spus, rezultatul *c* al operației „$*$" efectuate între *a* și *b* se notează prin $a*b$:

$$a*b = c.$$

Dacă „:" reprezintă împărțirea cu rest a numerelor naturale, atunci 14: 3 va reprezenta numărul natural 4, rezultatul împărțirii cu rest a lui 14 la 3, adică:

$$14:3 = 4.$$

Fără precizarea mulțimii în care se operează și a sensului dat operației „:", s-a văzut că scrierea 14: 3 poate să nu aibă sens matematic, să reprezinte numărul natural 4 sau să reprezinte numărul rațional $\frac{14}{3}$ $\left(\text{și } \frac{14}{3} \neq 4 = \frac{4}{1}\right)$.

Observînd că, în cazul în care are un sens, semnificația scrierii 14: 3 este ambiguă în absența unor precizări suplimentare, se susține uneori, pentru a înlătura ambiguitatea, *să nu se admită scrierea lui 4, rezultatul împărțirii cu rest a lui 14 la 3 în mulțimea numerelor naturale sub forma 14: 3.* Cu alte cuvinte, să nu se admită scrierea

$$14:3 = 4$$

chiar dacă este vorba de mulțimea numerelor naturale și de operația de împărțire cu rest a acestora.

Această scriere, ca manieră de notare a rezultatului, nu *poate fi refuzată, deoarece refuzul ar veni în contradicție cu teoria matematică generală* pe care am menționat-o. Ar trebui atunci introduse restricții în teorie, din care să rezulte cînd principiul respectiv de scriere a rezultatului poate fi folist și cînd nu. (Ar urma că în unele situații „$*$" păstrează doar semnificația de operator, pierzînd cea de a doua semnificație menționată.)

Dimpotrivă, este perfect justificată refuzarea folosirii lui „:" ca simbol de operație pentru împărțirea cu rest în N, ceea ce ar face să nu mai apară scrieri ca:

$$14:3 = 4$$

ci, de exemplu

$$14 \underset{*}{:} 3 = 4$$

dacă se folosește „$\underset{*}{:}$" ca simbol al împărțirii cu rest în *N*.

În manualul de matematică de clasa a III-a nu a fost acceptat un nou simbol pentru împărțirea cu rest, și, rezolvarea dificultăților de notații ivite prin folosirea lui „:" pentru mai multe operații diferite a trebuit să fie făcută prin introducerea unei convenții adecvate, pe care am specificat-o.

Pentru soluționarea problemei notațiilor se poate pune și *alternativa renunțării la studiul împărțirii cu rest al numerelor naturale.* Aceasta ar însemna și o apreciabilă simplificare a studiului matematicii, ocazie ce nu ar trebui pierdută, dacă nu ar apărea inconveniente deosebite.

Utilitatea împărțirii cu rest a numerelor naturale pentru rezolvarea unei mari varietăți de probleme desprinse din practică, precum și însemnătatea ei în matematică, fiind folosită în mod curent, de exemplu, în sistemul de lucru al mașinilor de calcul, *face să nu se poată renunța la cunoașterea acestei operații.*

Revenind la cunoștințele și deprinderile cu care trebuie să rămînă elevii, subliniem necesitatea de a analiza, pe bază de exemple, modul cum se află cîtul împărțirii cu rest a două numere naturale, cu ajutorul definiției dată cu mulțimi, și de a observa că *rezultatul nu depinde de natura elementelor mulțimii folosite ca model pentru deîmpărțit.*

Elevii vor fi conduși cu grijă să observe că *rezultatul împărțirii a două numere naturale este același, fie că se găsește prin procedeul prin cuprindere, fie că se găsește prin procedeul prin părți egale, și, de asemenea, restul este același indiferent prin care din aceste două procedee se efectuează împărțirea.*

Va fi pusă în evidență și reținută de elevi fiecare din relațiile $d = (c \times \hat{\imath}) + r$ și $0 \leqslant r < \hat{\imath}$. Pe baza lor se va face proba împărțirii, remarcîndu-se că *nici una din ele, singură, nu este suficientă pentru a fi siguri că împărțirea este corect efectuată.*

Din utilizarea mulțimilor model pentru deîmpărțit și a separării de submulțimi disjuncte cîte două fiecare avînd același număr de elemente, prin oricare din procedeele prin cuprindere și prin părți egale, se va deduce posibilitatea de *efectuare a împărțirii prin scădere repetată.* Avantajul obținut este acela că se *poate afla cîtul și restul prin calcul,* fără a mai folosi mulțimi model și separarea de submulțimi disjuncte, ceea ce nu era comod.

Pe bază de exemple elevii vor reține faptul că *împărțirea cu rest, ca și cea exactă, nu este posibilă dacă împărțitorul este zero.*

Folosind diverse procedee de aflare a cîtului și restului împărțirii, se vor face împărțiri în situația în care: *împărțitorul este 1; deîmpărțitul este egal cu împărțitorul; deîmpărțitul este mai mic decît împărțitorul.*

Deducînd regulile de aflare a cîtului în diverse situații se va ajunge treptat la următoarea regulă generală, care se va folosi în practică fără a se cere formularea verbală:

Se împart la împărțitor, pe rînd, numerele unităților de fiecare ordin scrise în deîmpărțit la locul ordinului respectiv, începînd de la ordinele cele mai mari, către cele mai mici. Dacă la vreuna din aceste împărțiri se obține rest diferit de zero, unitățile restului se transformă în unități de ordin imediat mai mic și se adună cu unitățile de acest din urmă ordin, aflate în scrierea numărului pe locul ordinului respectiv, apoi se face împărțirea lor la împărțitor.

Restul rămas la împărțirea unităților este restul împărțirii. Cîturile succesive obținute la împărțirile menționate anterior dau cifrele cîtului împărțirii. În cazul în care cîtul primei împărțirii de acest fel este 0, această cifră nu se scrie ca primă cifră a cîtului, ci aceea care se obține la a doua împărțire.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL IV

(Număr de ore, orientativ = 20)

TEMA 1: ÎMPĂRȚIREA CU REST

Scop: Cunoașterea modului de stabilire a cîtului împărțirii cu rest, în urma aplicării procedeului prin cuprindere sau a celui prin părți egale. Legătura care există între deîmpărțit, împărțitor, cît și rest, și aceea care există între rest și împărțitor: $d = (c \times \hat{\imath}) + r$; $r < \hat{\imath}$. Independența cîtului și restului împărțirii de alegerea procedeului de efectuare, prin cuprindere sau a celui prin părți egale. Cunoașterea probei împărțirii. Împărțirea prin scădere repetată. Împărțirea la 1; împărțirea cînd deîmpărțitul și împărțitorul sînt egali; împărțirea cînd deîmpărțitul este mai mic decît împărțitorul.

Material didactic

Pentru învățător: Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 13).

Pentru elevi: Cutii cu chibrituri, boabe de fasole (cel puțin 30) etc.

Recomandări metodice pentru predarea temei

SUBTEMA 1°: ÎMPĂRȚIREA CU REST EFECTUATĂ PRIN „CUPRINDERE"

(În manual „Primul exemplu")

a) Activități desfășurate cu elevii fără folosirea manualului

Se prezintă 14 discuri negre din trusă și se cere elevilor să separe, atît cît este posibil, submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd cîte 4 elemente. Se observă că este vorba de folosirea procedeului prin cuprindere.

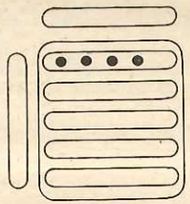


Fig. 98

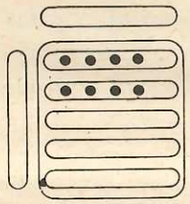


Fig. 99

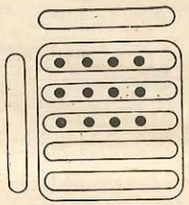


Fig. 100

Un elev va realiza practic separarea în submulțimi solicitată de învățător, găsind 3 submulțimi și rămînîndu-i 2 discuri cu care nu mai poate forma o nouă submulțime.

Învățătorul va repeta rezolvarea problemei folosind panoul 13, pe care va așeza cîte 4 discuri negre în cîte o submulțime, pînă îi vor rămîne prea puține discuri pentru a mai forma o nouă submulțime (figurile 98, 99, 100). Prin numărare se găsesc 3 submulțimi (formate) a cîte 4 elemente fiecare și 2 discuri negre rămase în afara acestor submulțimi.

Înlocuind cele 14 discuri negre cu 14 triunghiuri albastre, apoi cu 14 patrate roșii, se va constata că numărul submulțimilor obținute și numărul elementelor rămase în afara acestor submulțimi nu depind de natura elementelor mulțimii date, ci doar de numărul lor și de numărul elementelor fiecăreia din submulțimile formate. Din această observație rezultă că numerele 14 și 4 împreună cu procedeul prin cuprindere determină numărul 3 al submulțimilor formate și numărul 2 al discurilor rămase în afara acestora.

Pe baza acestei observații se introduce *împărțirea cu rest a numerelor 14 și 4*, ca *operație prin care luînd o mulțime model cu 14 elemente și separînd în ea, atît cît este posibil, submulțimi disjuncte două cîte două fiecare avînd cîte 4 elemente, se află numărul submulțimilor ce pot fi formate.* Scriem:

$$14 : 4 =$$

Prin numărare găsim:

$$14 : 4 = 3 \text{ (rest 2)}.$$

Din modul în care s-a făcut împărțirea se vede că avem:

$$14 = (3 \times 4) + 2 \text{ și } 2 < 4$$

Folosind panoul 13 se vor efectua în mod asemănător împărțirile:

$$13 : 5 = \qquad 12 : 3 = \qquad 18 : 4 =$$

Cu această ocazie se va observa că împărțirea cu rest este posibilă și în situația în care se obține un rest diferit de zero (cazurile 14 : 4 = ; 13 : 5 = ; 18 : 4 =), și în cazurile în care se obține restul zero (cazul 12 : 3 =).

Se vede că împărțirea cu rest în cazul în care restul este zero coincide cu împărțirea exactă. Dacă restul este diferit de zero împărțirea respectivă

se mai numeşte *împărţire neexactă*. Aşadar, *împărţirea exactă şi împărţirea neexactă sînt cazuri particulare ale împărţirii cu rest.*

Deschizîndu-se manualul, elevii sînt puşi să citească problema propusă acolo la „Primul exemplu" şi să explice rezolvarea pe etape, folosind figura 34 din manual.

Din discuţiile astfel ocazionate se va ajunge la definiţia împărţirii cu rest a numerelor naturale.

Privind figura 34 din manual, se va observa că avem:

$$14 = (3 \times 4) + 2 \text{ şi } 2 < 4, \text{ sau în general,}$$

$d = (c \times \hat{\imath}) + r$, şi $r < \hat{\imath}$. (Atenţie! Aici scriem $c \times \hat{\imath}$ şi nu $\hat{\imath} \times c$, deşi $c \times \hat{\imath} = \hat{\imath} \times c$).

Notă: Cele 4 puncte desenate la fiecare etapă în conturul de sus au rolul de a aminti cîte elemente se aleg într-o submulţime. Punctele completate cîte unul la fiecare etapă în conturul din stînga, „numără" cîte submulţimi se formează.

Muncă independentă

Folosind ca mulţimi model mulţimi de boabe de fasole, sau de beţe de chibrituri, elevii vor efectua împărţilea 7 : 2 = propusă în manual ca încheiere la „Primul exemplu" şi apoi nr. 1 punctul (a) de la „Exerciţii şi probleme".

Acasă se vor efectua celelalte exerciţii şi probleme rămase în manual, în mod asemănător.

Indicaţii privind rezolvarea unora din exerciţiile şi problemele propuse la subtema 1°

Pentru fiecare din ele se vor alege mulţimi model (de chibrituri sau scobitori, fasole etc.) şi se va folosi procedeul prin cuprindere. Se pot folosi şi mulţimi de puncte, după modelul figurii 34 din manual.

SUBTEMA 2°: ÎMPĂRŢIREA CU REST EFECTUATĂ PRIN „PĂRŢI EGALE"

(În manual: „Al doilea exemplu")

a) Activităţi desfăşurate cu elevii fără folosirea manualului

Se prezintă 14 discuri negre din trusă şi se cere elevilor să separe 4 submulţimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd acelaşi număr de elemente.

Se observă că este vorba de folosirea procedeului prin părţi egale. Un elev va realiza practic separarea în submulţimi solicitată de învăţător. Se

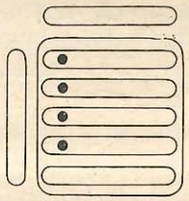


Fig. 101

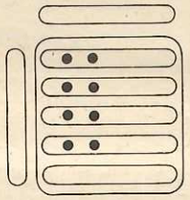


Fig. 102

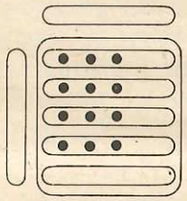


Fig. 103

obţine în fiecare submulţime cîte 3 discuri negre, rămînînd 2 discuri, prea puţine pentru a mai putea completa cîte unul în fiecare din cele 4 submulţimi.

Învăţătorul va repeta rezolvarea problemei folosind panoul 13. Pe el va alege 4 submulţimi şi va distribui în fiecare din ele cîte un disc (fig. 101); apoi, va distribui în fiecare din ele cîte un al doilea disc (fig. 102); el va continua aşa pînă ce din mulţimea celor 14 discuri nu-i vor mai rămîne suficiente pentru a mai putea distribui încă cîte unul în fiecare din cele 4 submulţimi. În final panoul 13 va arăta ca în fig. 103. Prin numărare se găsesc 3 discuri într-o submulţime şi 2 discuri rămase în afara acestor submulţimi.

Înlocuind cele 14 discuri negre cu 14 triunghiuri albastre, apoi cu 14 pătrate roşii, se va constata că *numărul discurilor obţinute într-o submulţime şi numărul discurilor rămase în afara acestor submulţimi nu depind de natura elementelor mulţimii date, ci doar de numărul lor şi de numărul subunităţilor ce trebuie formate.* Din această observaţie rezultă că numerele 14 şi 4, împreună cu procedeul prin părţi egale, determină numărul 3 el elementelor dintr-o submulţime şi numărul 2 al elementelor rămase în afara acestora.

Pe această bază se introduce *împărţirea cu rest a numerelor 14 şi 4* ca *operaţie prin care luînd o mulţime cu 14 elemente şi separînd în ea 4 submulţimi disjuncte două cîte două, fiecare avînd acelaşi număr de elemente, aflăm cîte elemente revin într-o astfel de submulţime.* Se notează:

$$14 : 4 =$$

Prin numărare găsim:

$$14 : 4 = 3 \text{ (rest 2).}$$

Din modul în care s-a făcut împărţirea se vede că avem:

$$14 = (4 \times 3) + 2 \text{ şi } 2 < 4.$$

Folosind panoul 13 şi procedeul prin părţi egale se vor efectua în mod asemănător împărţirile:

$$13 : 5 = \quad ; \qquad 12 : 3 = \quad ; \qquad 18 : 4 =$$

Se va constata că împărţirea cu rest făcută cu procedeul prin părţi egale este posibilă, fie că se obţine rest diferit de zero ($13 : 5 = 2$; $18 : 4 = 4$), fie că se obţine restul zero ($12 : 3 = 4$).

O atenție deosebită se va da punerii în evidență a faptului că *rezultatul împărțirii cu rest a două numere naturale, ca și restul obținut, nu depind de procedeul de efectuare folosit, prin cuprindere sau prin părți egale.* Aceasta explică de ce s-a folosit în ambele cazuri simbolul „:".

În scopul ilustrării acestui lucru se va reface împărțirea 14 : 4 = cu ajutorul panoului 13 al trusei, folosind procedeul prin cuprindere, apoi aceeași împărțire folosind procedeul prin părți egale. Cu ocazia aplicării ultimului procedeu se va pune în evidență că, completarea cu al doilea disc a submulțimilor formate începe după ce din mulțimea model pentru deîmpărțit s-au luat 4 elemente. Completarea cu al treilea disc a submulțimilor formate începe după ce din mulțimea model pentru deîmpărțit s-au mai luat 4 elemente, ș.a.m.d.

Așadar, *în submulțimile pe care le formăm vom pune de atîtea ori cîte un element, cîte submulțimi a 4 elemente fiecare, disjuncte între ele, pot fi formate din mulțimea model pentru deîmpărțit.* Dar aceasta înseamnă că *numărul elementelor obținute într-o submulțime la aplicarea procedeului prin părți egale coincide cu numărul de submulțimi obținute la aplicarea procedeului prin cuprindere.*

În acest mod devine limpede că *rezultatul împărțirii 14 : 4 = (ca și restul) nu depinde de natura elementelor mulțimii model folosite pentru deîmpărțit, nici de procedeul folosit pentru formarea submulțimilor disjuncte, ci numai de numerele naturale ce sînt la deîmpărțit și împărțitor.*

b) Activități desfășurate cu elevii, cu folosirea manualului

Deschizînd manualul, elevii citesc problema propusă la „Al doilea exemplu" și explică rezolvarea, pe etape, folosind figura 35 din manual.

Cele 4 puncte puse în conturul din stînga, la fiecare etapă, amintesc numărul submulțimilor ce trebuie formate. Punctele completate în conturul de sus, cîte unul la fiecare etapă, „numără" cîte elemente se obțin într-o submulțime. (Acestea ar putea fi puse în evidență și cînd se lucrează pe panoul 13, folosind, bineînțeles, alte discuri decît cele 14 care trebuiau distribuite în 4 submulțimi.)

Privind figura 35 din manual se va observa că avem:

$11 = (4 \times 3) + 2$ și $2 < 4$, sau în general, $d = (\hat{\imath} \times c) + r$ și $r < \hat{\imath}$ (Atenție! Aici scriem $\hat{\imath} \times c$ și nu $c \times \hat{\imath}$, deși $\hat{\imath} \times c = c \times \hat{\imath}$).

Muncă independentă

Folosind ca mulțimi model, mulțimi de boabe de fasole sau de bețe de chibrituri, elevii vor efectua împărțirea 11:4= propusă în manual la sfîrșitul subtemei, și ex. nr. 1, punctul (a) din cele ce urmează la „Exerciții și probleme".

Acasă se vor efectua celelalte exerciții și probleme rămase în manual, în mod asemănător.

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la subtema 2°

Pentru fiecare din ele se vor alege mulțimi model (de chibrituri sau scobitori, fasole etc.) și se va folosi procedeul prin părți egale. Se pot folosi și mulțimi de puncte, după modelul figurii 35 din manual.

SUBTEMA 3°: ÎMPĂRȚIREA CU REST EFECTUATĂ PRIN SCĂDERE REPETATĂ

(În manual: „Al treilea exemplu")

Învățătorul nu poate întîmpina dificultăți în elaborarea lecției pe baza textului din manual.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la subtema 3°

Problema 2

a) 36 : 5 = 7 (rest 1); *b)* 36 : 8 = 4 (rest 4); *c)* 36 : 4 = 9 (rest 0); *d)* 36 : 10 = 3 (rest 6)

Problema 3

Prin scădere repetată obținem:

a) 36 : 7 = 5 (rest 1); *b)* 36 : 10 = 3 (rest 6); *c)* 36 : 11 = 3 (rest 3); *d)* 36 : 12 = 3 (rest 0).

Notă: La ultimele două probleme scăderea repetată a fost folosită ca mijloc de aflare a cîtului împărțirilor. Operația de împărțire pentru rezolvarea problemelor a fost impusă de textul fiecărei probleme, la (2) fiind vorba de o separare în submulțimi disjuncte care „cere" procedeul prin cuprindere, iar la (3) fiind vorba de o separare în submulțimi disjuncte care „cere" procedeul prin părți egale.

SUBTEMELE 4 ȘI 5 „ÎMPĂRȚIREA CU REST" ȘI „PROBA ÎMPĂRȚIRII"

Se va urmări sublinierea faptului că, dacă restul este zero împărțirea se numește exactă, dacă restul diferă de zero împărțirea se numește neexactă (ambele fiind împărțiri cu rest). La proba împărțirii se va sublinia că nici una din condițiile $r < \hat{\imath}$ și $d = c \times \hat{\imath} + r$ nu este suficientă, singură, pentru a fi siguri că împărțirea a fost făcută corect.

TEMA A 2-a: ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE SCRISE CU O CIFRĂ

Scop: Pe baza cunoștințelor avute pînă în prezent în legătură cu împărțirea, se va deduce un procedeu de calcul care să poată apoi fi extins și la numerele de mai multe cifre, spre a se ajunge la procedeul obișnuit de efectuare a împărțirii numerelor naturale.

Material didactic:

Pentru învățător: Trusa pentru studiul numerelor naturale (panoul 12).

Recomandări metodice pentru predarea temei

La primele două exemple din manual, împărțirile 8 : 4 = și 8 : 3 = vor fi efectuate cu procedeul prin părți egale, folosind panoul 12 din trusă.

Pentru 8 : 4 = figura 104 arată cum se realizează pe panou mulțimea model pentru deîmpărțitul 8; figura 105 arată cum se distribuie elementele mulțimii model pentru deîmpărțit în cele 4 submulțimi disjuncte cîte două, astfel încît fiecare să aibă același număr de elemente; figura 106 arată aspectul panoului 12 al trusei după ce s-au deplasat piesele așa cum arată figura 105.

Din aspectul final al panoului 12 redat în figura 106 rezultă că fiecare submulțime obținută are 2 elemente, nerămînînd nici un element al mulțimii model pentru deîmpărțit necuprins în submulțimile formate. Așadar, se scrie:

8 : 4 = 2 (rest 0)

Pentru a efectua împărțirea 8 : 3 = folosind panoul 12 al trusei procedăm ca la exemplul anterior. Figura 104 arată cum se realizează pe panou mulțimea model pentru deîmpărțitul 8; figura 107 arată cum se distribuie elementele ei în cele 3 submulțimi ce trebuie formate (disjuncte între ele și avînd același număr de elemente); figura 108 arată aspectul panoului 12 după deplasarea pieselor așa cum arată figura 107. Din figura 108 se vede că în fiecare din cele 3 submulțimi s-au obținut cîte 2 elemente, rămînînd 2 elemente care nu mai pot fi distribuite în cele 3 submulțimi, astfel încît acestea să aibă, fiecare, același număr de elemente. Așadar:

8 : 3 = 2 (rest 2)

Notă: Cu aceste recomandări și folosind textul din manual, elaborarea lecțiilor din această temă nu poate crea dificultăți.

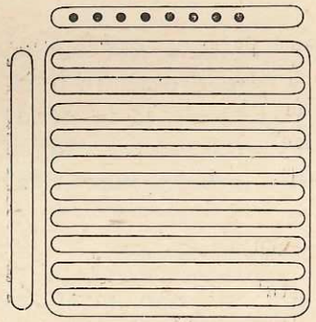


Fig. 104

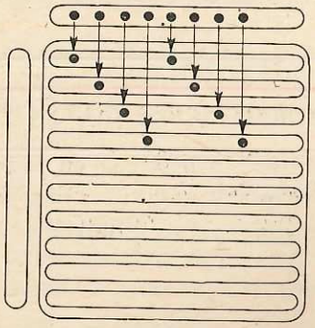


Fig 105

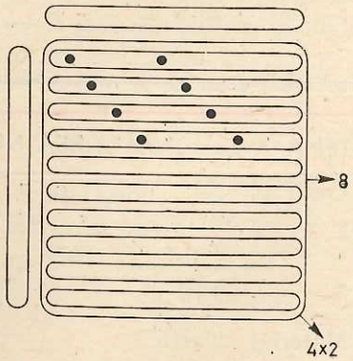


Fig. 106

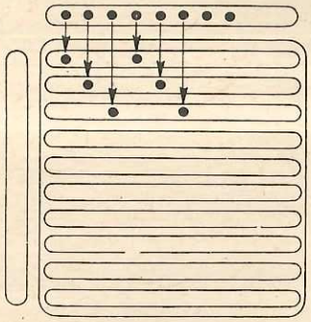


Fig. 107

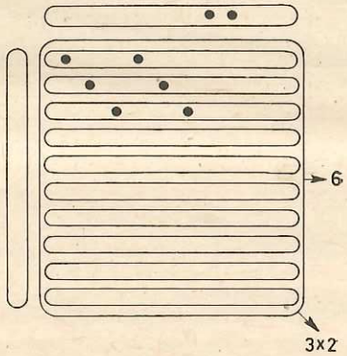


Fig. 108

Indicații privind rezolvarea unora din exercițiile și problemele propuse la tema a 2-a

Exercițiul 1

Se are în vedere efectuarea împărțirilor așezînd calculele în scris și apoi trecerea cîtului și restului în tabele.

De exemplu, în prima tabelă pentru $n = 3$ avem

7 : 3 = 2 cîtul
6
1 restul

Vom trece în rîndul corespunzător lui $n = 3$, în coloana cîtului, numărul 2, iar în coloana restului, numărul 1.

Exercițiul 2

După completarea celor două tabele de la exercițiul anterior, privim în coloanele restului și alegem cazurile de împărțire care au dat restul zero. În toate aceste cazuri împărțirea s-a făcut exact, iar în celelalte cazuri nu.

Exercițiul 3

Trebuie efectuate, folosind regula de calcul în scris:

a)	8 : 4 =	8 : 7 =	*b*)	4 : 4 =	7 : 4 =
	8 : 5 =	8 : 8 =		5 : 4 =	8 : 4 =
	8 : 6 =			6 : 4 =	

Problema 4

a) Se fac (calculînd în scris) împărțirile:

9 : 1 =	9 : 3 =	9 : 5 =	9 : 7 =	9 : 9 =
9 : 2 =	9 : 4 =	9 : 6 =	9 : 8 =	

și se aleg numerele p, care puse ca împărțitor, au dat cîtul cel puțin egal cu 2.

Se obține, în urma împărțirilor:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9:p$	9	4	3	2	1	1	1	1	1
restul	0	1	0	1	4	3	2	1	0

de unde se găsește submulțimea căutată: $\{1, 2, 3, 4\}$.

b) Procedînd analog, se întocmește tabela:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p:3$	0	0	1	1	1	2	2	2	3
restul	1	2	0	1	2	0	1	2	0

de unde se găsește submulțimea căutată: $\{6, 7, 8, 9\}$.

c) p se împarte exact la 2, dacă împărțit la 2 dă restul zero. Așadar, făcînd împărțirile în scris, completăm tabela:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p:2$	0	1	1	2	2	3	3	4	4
restul	1	0	1	0	1	0	1	0	1

din care alegem submulțimea căutată: $\{2, 4, 6, 8\}$.

Problema 5

Este o problemă de împărțire prin cuprindere: de cîte ori pot lua cîte 2 caise din 9 caise? Deci cîte submulțimi de cîte 2 elemente, disjuncte între ele, pot face într-o mulțime cu 9 elemente? Pe baza acestei observații problema se rezolvă prin operația:

$$9:2=$$

Modul de aflare a cîtului rămîne la libera noastră dorință, nefiind obligați a-l lega de conținutul problemei, care a condus la necesitatea efectuării unei împărțiri în scopul rezolvării.

Făcînd calculul în scris, obținem:

$$\begin{array}{l} 9:2=4 \\ \underline{8} \\ 1 \end{array}$$

Așadar, dintr-o farfurie cu 9 caise pot da cîte 2 caise la 4 copii. (Observ că a rămas pe farfurie 1 caisă, dar problema nu întreabă acest lucru.)

Judecînd asemănător, în cazul în care pe farfurie sînt 8 caise, găsim că putem da cîte 2 caise la 4 copii. (Observ că acum nu a rămas pe farfurie nici o caisă, dar problema nu întreabă acest lucru.)

Problema 7

Trebuie să împărțim mulțimea celor 8 banane în 3 submulțimi disjuncte între ele, astfel încît toate submulțimile să aibă același număr de banane (fiecare copil urmează a primi o astfel de submulțime). Recunoaștem că putem realiza aceasta folosind procedeul prin „părți egale" și deci problema se rezolvă prin împărțirea:

$$8:3=$$

Cîtul acestei împărțiri urmează a fi găsit prin procedeul care ne convine mai mult. Folosind calculul în scris, avem

$$\begin{array}{l} 8:3=2 \text{ cîtul} \\ \underline{6} \\ 2 \text{ restul} \end{array}$$

Așadar, fiecare copil va primi 2 banane.

Judecînd asemănător, în celelalte situații obținem, respectiv: 2 banane; 2 banane; 3 banane (uneori rămîn banane nedistribuite, așa cum este cazul cînd sînt 7 banane).

Observație importantă

Rezolvarea problemelor 5 și 7 de mai sus pune limpede în evidență că, *recunoașterea faptului că o problemă se rezolvă prin împărțire este favorizată de cunoașterea temeinică a procedeelor numite prin cuprindere și prin părți egale, pentru separarea unei mulțimi în submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente, și de cunoașterea definiției pe această bază a împărțirii numerelor naturale, și nu este favorizată de cunoașterea tehnicii de aflare a cîtului. Ca urmare, noul mod de prezentare a împărțirii numerelor naturale,* dacă este tratat cu toată atenția de învățător, *va duce la o mai mare îndemînare a elevilor în rezolvarea problemelor de împărțire,* decît în situația de pînă acum, cînd centrul atenției cădea pe tehnica de calcul a cîtului și pe legătura împărțirii cu înmulțirea (care rămînea destul de confuză în cazul împărțirii cu rest).

Problema 8

Trebuie separată mulțimea celor 8 lei în 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare conținînd același număr de lei, care reprezintă costul unui creion. Aceasta se realizează cu procedeul prin părți egale. Așadar, problema se rezolvă prin împărțirea:

$$8:4=$$

Modul de efectuare a împărțirii nu trebuie legat obligatoriu de judecata problemei care a impus această operație. Se va folosi tehnica de efectuare care convine mai mult, și mai ales calculul în scris. Rezolvarea problemei se scrie:

Costul unui creion:

$8 : 4 = 2$

Costul a 3 creioane:

$3 \times 2 = 6$

$$\begin{array}{l} 8 : 4 = 2 \\ \underline{8} \\ = \end{array}$$

Răspuns: 2 lei; 6 lei

Problema 9

Din mulțimea celor 7 lei trebuie să separ submulțimi disjuncte a cîte 3 lei fiecare. Cîte subunități obțin, atîtea cărți se pot cumpăra. Separarea în submulțimi observăm că se face cu procedeul prin cuprindere. Astfel, sîntem conduși la efectuarea împărțirii:

$$7 : 3 = 2 \text{ (rest 1)}.$$

Așadar, din 7 lei pot cumpăra 2 cărți a 3 lei fiecare.

La fel se judecă și se rezolvă problema dacă în loc de 7 lei avem: 6 lei; 8 lei; 9 lei; 5 lei; 4 lei.

Problema 11

Costul fructelor:

$7 \times 6 = 42$

Suma rămasă:

$50 - 42 = 8$

Costul unui caiet:

$8 : 4 = 2$

$$\begin{array}{l} 50- \\ \underline{42} \\ =8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8 : 4 = 2 \\ \underline{8} \\ = \end{array}$$

Răspuns: 2 lei.

Ultima operație este cerută de faptul că, mulțimea celor 8 lei trebuie separată în 4 submulțimi disjuncte între ele, fiecare avînd același număr de elemente (lei). Aceasta se realizează cu procedeul prin părți egale, ceea ce conduce la operația de împărțire $8 : 4 =$

TEMA A 3-a: ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE SCRISE CU DOUĂ CIFRE

Scop: Gruparea împărțirilor pe tipuri, pe baza folosirii, sau nu, a aceleiași tehnici de calcul. Eșalonarea judicioasă a studiului diverselor tipuri stabilite astfel încît de fiecare dată regula corespunzătoare de calcul să se deducă

logic din cunoștințele generale avute de elevi, completate cu tehnicile de calcul a tipurilor de împărțire studiate anterior.

Sublinierea, la fiecare tip de împărțire, a acelor procedee de lucru care vor fi reținute și dezvoltate în studierea tipurilor următoare, realizîndu-se astfel o apropiere treptată de regula generală care va fi aplicabilă la orice împărțire de numere naturale.

Accentul nu se va pune pe verbalizări, ci pe formarea deprinderilor practice de lucru (pînă la automatisme).

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile existente în manual, la fiecare lecție.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Tipurile de împărțiri care se disting după regula de calcul sînt acelea la care:

1°. *Cifra zecilor și cea a unităților deîmpărțitului reprezintă numere ce se împart exact la împărțitor.*

Exemplu: $68 : 2 =$

Observînd că numărul 0 se împarte exact la orice număr, deoarece se obține a împărțire restul 0 (de exemplu $0 : 3 = 0$ (rest 0), împărțirile de felul:

$$60 : 3 =$$

trebuie privite drept cazuri particulare a celor anterioare, putîndu-se efectua cu aceeași regulă de calcul.

2°. *Cifra unităților deîmpărțitului reprezintă un număr care nu se împarte exact la împărțitor.*

Exemple: $68 : 3 =$; $83 : 4 =$

3°. *Cifra zecilor deîmpărțitului reprezintă un număr mai mic decît împărțitorul.*

Exemple:	$23 : 3 =$	$49 : 8 =$	$63 : 7 =$
	$40 : 6 =$	$37 : 8 =$	$30 : 5 =$

4°. *Cifra zecilor deîmpărțitului reprezintă un număr mai mare decît împărțitorul, dar care nu se împarte exact la împărțitor.*

Exemple:	$83 : 3 =$	$80 : 3 =$	$87 : 3 =$
	$56 : 2 =$	$63 : 4 =$	$95 : 4 =$

Cele patru categorii de împărțiri menționate mai sus sînt enumerate în ordinea gradului de dificultate și, totodată, a derulării logice a ideilor.

Așa cum se va constata cu ocazia stabilirii regulilor de efectuare, cele din categoria (2°) folosesc ideea de la categoria (1°), cu particularitatea că numărul reprezentat de cifra unităților deîmpărțitului nu se împarte exact la împărțitor.

Împărțirile din aceste două categorii nu creează, în general, dificultăți elevilor.

Împărțirile din categoria (3°) merită o atenție deosebită, însușirea lor de către elevi hotărînd, în ultimă instanță, abilitatea elevilor de a face împărțirile, în orice situație întîlnită.

Împărțirile din categoria (4°), duc, pe o anumită etapă a efectuării lor, la împărțiri din categoria (3°).

Din cele de mai sus decurge că schimbarea ordinii de studiu a celor patru categorii de împărțiri nu este posibilă, fără a afecta logica transmiterii cunoștințelor la elevi.

Trebuie observat că la împărțirile din categoriile (3°) și (4°), faptul că numărul reprezentat de cifra unităților se împarte exact, sau nu, la împărțitor, nu joacă un rol deosebit. Indiferent care ar fi cifra unităților, este important dacă numărul pe care îl reprezintă, adunat cu numărul obținut la transformarea în unități a restului rămas la împărțirea zecilor, se împarte exact, sau nu, la împărțitor, deoarece de aceasta depinde dacă împărțirea dată inițial este exactă sau neexactă.

Utilizarea figurilor numerice la deducerea regulilor de efectuare a împărțirii numerelor naturale *a dus*, ca și la adunare și scădere, *la realizarea unor diagrame explicative* care aproape nu au nevoie de „explicații" în cuvinte, *reprezentînd adevărate grafuri logice ale desfășurării proceselor de gîndire în situațiile respective.* Cu descifrarea acestor grafuri elevii se obișnuiesc repede putîndu-le apoi „citi" în mod independent, chiar în cazul prezentării unor situații noi, încă necunoscute.

Ca modalitate de valorificare a figurilor numerice există o deosebire importantă față de situația de la adunare și scădere, în aceea că *acuma nu vom „materializa" procesele de gîndire sub forma unor acțiuni nemijlocite cu piesele trusei pentru studiul numerelor naturale.* În adevăr, trusa nu conține, deocamdată, panouri potrivite acestui scop. Ar fi fost necesar să se poată realiza panouri pentru împărțirea numerelor de două și trei cifre (dealtfel destul de ușor de conceput prin modificarea panourilor 6 și 10).

Sîntem nevoiți să *ne limităm la a folosi planșe reprezentînd figurile din manual.*

Ar fi o sarcină neplăcută și inutilă să se ceară elevilor să execute aceste figuri. Folosul lor este doar pînă ce elevii, **„surprind ideea pe care o ilustrează, deducînd astfel în mod conștient regula de calcul.** *Imediat însă ce au observat această regulă trebuie să o aplice pentru a o reține și a-și forma abilități și deprinderi de calcul.* Executarea figurilor de către elevi ar fi o adevărată salahorie.

Figurile trebuie să constituie un suport vizual al explicațiilor verbale date de învățător, care să *favorizeze conducerea gîndirii elevilor pe același itinerar*

pe care îl parcurge și gîndirea învățătorului (sarcină importantă și dificilă, avînd în vedere vîrsta elevilor). De aceea *nu credem potrivită executarea pe tablă ad-hoc a figurilor de către învățător,* mai ales că unele din ele nu sînt simplu de executat.

Învățătorul va trebui să se îngrijească de executarea figurilor înaintea lecțiilor, pe *planșe care să fie apoi prezentate și comentate la momentul oportun.*

Nu ar fi rău dacă aceste planșe după folosire ar putea rămîne un timp expuse în clasă, la vedere.

Ca manieră generală de deducere a regulilor de calcul la această temă:

a) Se prezintă împărțirea a cărei regulă de efectuare se caută și *se încearcă a se găsi cîtul cu mijloacele deja cunoscute.* Se stabilește cauza care împiedică obținerea cîtului cu aceste procedee.

b) Pentru a putea depăși dificultatea întîmpinată se apelează la definiția cu mulțimi a împărțirii numerelor naturale. În acest scop, în structura numerică zecimală a unei mulțimi model pentru deîmpărțit se *separă, folosind procedeu prin „părți egale", atîtea submulțimi disjuncte între ele avînd același număr de elemente, cîte arată împărțitorul.*

În procesul separării se urmărește să se obțină structurile numerice zecimale ale submulțimilor ce trebuie formate. Oricare din ele va fi structura unei mulțimi model pentru cît.

Pentru ca la separarea în submulțimi să fie necesare cît mai puține transformări a unităților de un anumit ordin în unități de ordine mai mici, *separarea va începe de la unitățile de ordin mai mare, către unitățile de ordin mai mic.*

Dacă la un moment dat *rămîn* prea puține *unități de un anumit ordin* pentru a mai putea „distribui" cîte una în fiecare din submulțimile pe care le formăm, *aceste unități le transformăm în unități de ordin imediat mai mic.* Mulțimea obținută, reunită cu mulțimea unităților acestui din urmă ordin, formează o mulțime ale cărei elemente trebuie distribuite în continuare în submulțimile cerute de împărțitor.

Cînd procedeul menționat ajunge la *unitățile de ordinul I, în momentul în care au rămas prea puține unități pentru a mai putea fi distribuite cîte una în fiecare din submulțimile formate, procedeul nu mai poate fi continuat.*

c) Privind diagramele care sugerează modul în care s-a realizat separarea în submulțimi cerută de definiția cu mulțimi a împărțirii numerelor naturale, *se deduce ușor regula de calcul pentru fiecare categorie de împărțire,* din cele patru menționate.

Mai întîi regula „descoperită" cu ajutorul diagramei *va fi aplicată în exerciții de împărțire făcute oral,* pentru ca elevii să se familiarizeze cu ea, *apoi se va arăta și așezarea calculului în scris.*

Calculul în scris va fi făcut și la împărțiri care se fac oral cu ușurință, deoarece atenția elevilor *nefiind concentrată în astfel de situații asupra aspectelor de conținut, se va putea reține mai ușor procedeul de așezare a calculului în scris.*

Or, acest procedeu se păstrează fără modificări esențiale și la împărțirile mai dificile, care vor fi prezentate astfel pe un teren mai bine pregătit.

În ce privește efectuarea orală a împărțirilor trebuie păstrată o măsură *neinsistîndu-se pentru a se face oral împărțiri greoaie*, efort care adesea în loc, să folosească elevilor, îi încurcă mai rău. Care anume împărțiri trebuie considerate prea grele pentru calculul oral, nu se poate spune în general, lucrul depinde de nivelul clasei. În orice caz, va fi mai folositor a se destina intăririi calculului scris timpul ce s-ar irosi pentru obositoare căutări orale a rezultatelor unor împărțiri complicate.

Subliniem încă o dată *să nu se ceară memorarea și „recitarea" regulilor de calcul, ci să se insiste asupra efectuării în practică a împărțirilor* de tipul celor învățate.

Ținînd seama de concepția generală asupra temei care se degajă din precizările anterioare, elaborarea lecțiilor pe baza textului din manual nu poate crea dificultăți.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 3-a

Problema 4 (subtema 1°)

În fiecare coș sînt 22 ouă. În coșul din care se iau 12 ouă, rămîn 10 ouă. În două coșuri luate la întîmplare pot fi 32 ouă, sau 44 ouă, după cum printre ele se află, sau nu, coșul din care s-au luat cele 12 ouă.

Problema 6 (subtema 1°)

Prima rezolvare:

Dacă și celălalt conducător auto ar fi economisit încă 16 l benzină, în total s-ar fi economisit (80 + 16) litri benzină;

$$80 + 16 = 96.$$

Fiecare din ei ar fi economisit atunci (96 : 2) litri:

$$96 : 2 = 48.$$

În realitate, doar unul a economisit 48 l, celălalt cu 16 l mai puțin:

$$48 - 16 = 32.$$

Răspuns: 48 l; 32 l.

A doua rezolvare:

Dacă unul din conducătorii auto nu ar fi economisit cei 16 l benzină în plus, economia totală ar fi fost (80 — 16) litri.

$$80 - 16 = 64$$

Fiecare din ei ar fi economisit atunci (64 : 2) litri:

$$64 : 2 = 32.$$

În realitate doar unul a economisit 32 l, deoarece celălalt are 16 l în plus:

$$32 + 16 = 48$$

Răspuns: 48 l; 32 l.

Problema 2 (subtema 3°, la „Exerciții și probleme" ca și cele care urmează)

Se împarte, pe rînd, 42 la toate numerele naturale de la 1 la 9. Se găsește: *a*) {1; 2; 3; 6; 7}; *b*) {4; 5; 8; 9}.

Problema 4

Se observă că avem $A = \{80; 81; 82; ...; 89; 90\}$.

a) Împărțind, pe rînd, toate numerele din A la 6 și alegînd pe acelea care au dat la împărțire același cît, obținem:

{80; 81; 82; 83} care au dat la împărțire cîtul 13;
{84; 85; 86; 87; 88; 89} care au dat la împărțire cîtul 14;
{90} care a dat la împărțire cîtul 15.

b) Împărțind, pe rînd, toate nuemrele din A la 3 și alegînd pe acelea care au dat același rest, obținem:

{81; 84; 87; 90} care au dat la împărțire restul 0;
{82; 85; 88} care au dat la împărțire restul 1;
{80; 83; 86; 89} care au dat la împărțire restul 2.

Problema 6

Se vede că numărul cu 4 mai mic decît 76 se împarte exact la 9. Avem:

$$76 - 4 = 72;\ 9 \times n = 72;\ n = 72 : 9;\ n = 8.$$

Împărțitorul este 8. În adevăr, efectuînd împărțirea obținem:

$$76 : 8 = 9 \text{ (rest 4)}.$$

Problema 7

Numărul cu 4 mai mic decît 39 se va împărți exact la 5, cîtul fiind numărul căutat:

$$39 - 4 = 35;\ 35 : 5 = 7.$$

Observînd că avem:

$$39 : 5 = 7 \text{(rest 4)}$$

formularea cerută va fi „La o împărțire deîmpărțitul este 39, împărțitorul 5 și restul este 4. Aflați cîtul".

Problema 8

Se împart, pe rînd, la 2 și la 3 numărul metrilor de stofă aflată în val și se vede care rest este mai mic.

Fig. 109

Se găsește că trebuie făcute rochii cu mîneca:
a) scurtă; *b*) lungă; *c*) nu are importanță felul rochiilor, rămîne același rest de stofă, 1 m; *d*) scurtă; *e*) scurtă.

Problema 9

Fiecare roată s-a învîrtit de atîtea ori, de cîte ori distanța parcursă de ea la rotirea completă se cuprinde în distanța totală parcursă de bicicletă (nu este nevoie a se „face" nici un fel de „teorie" despre cerc sau lungimea cercului, experiența de viață a elevilor este suficientă). Pentru sugerarea rezolvării se poate folosi figura 109. Se vede că rezolvarea revine la a împărți distanța parcursă de bicicletă, pe rînd, la distanțele parcurse de fiecare roată la rotirea completă:

a) 6; 9; *b*) 9; 14; *c*) 22; 33; *d*) 23; 34; *e*) 19; 28; *f*) 30; 45.

Ultima întrebare este o „capcană" deoarece fiecare roată a parcurs, în fiecare caz, aceeași distanță pe care a parcurs-o bicicleta.

TEMA A 4-A: ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR NATURALE SCRISE CU TREI CIFRE

Scop: Același ca la tema anterioară.

Material didactic

Pentru învățător: Planșe cu figurile existente în manual.

Recomandări metodice pentru predarea temei

Se disting următoarele tipuri de împărțiri după tehnica de calcul folosită:

1°) *Cifrele sutelor, zecilor și unităților reprezintă numere care se împart exact la împărțitor.*

În aceeași categorie sînt incluse împărțirile numerelor la care cifra zecilor, sau a unităților, sau amîndouă, sînt 0.

Exemple 696: 3 = ; 690 : 3 = ; 609 : 3 = ; 800 : 2 = ;

2°) *Cifra unităților reprezintă un număr care nu se împarte exact la împărțitor.*

Exemple 855 : 2 = ; 603: 2 =

3°) *Cifra zecilor reprezintă un număr care nu se împarte exact la împărțitor.*

Exemple: 683 : 3 = ; 896 : 4 = ; 850 : 4 =
417 : 2 = ; 428 : 4 = ;

4°) *Cifra sutelor reprezintă un număr care nu se împarte exact la împărțitor.*

Exemple: 236 : 3 = ; 216 : 4 = ; 708 : 8 = ; 200 : 8 = ;
531 : 2 = ; 737 : 3 = ; 896 : 3 = ; 912 : 4 = .
507 : 2 = ; 650 : 4 = ; 700 : 3 = ;

Cele spuse în legătură cu împărțirea numerelor scrise cu două cifre rămîn valabile și pentru împărțirea numerelor scrise cu trei cifre, desigur, asortate corespunzător noilor situații.

Tehnologia didactică după care se vor desfășura lecțiile din această temă este asemănătoare celei folosite la tema anterioară.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse la tema a 4-a

Problema 4 (subtema 3° b)

$(n \times 4) + 2 = 850$. Se vede că 850 pote fi privit ca deîmpărțit, 4 împărțitorul, n cîtul și 2 restul. Așadar, n este cîtul împărțirii:

$$850 : 4 = 212 \text{ (rest 2)}.$$

Problema 5 (subtema 4° b)

Se vor vedea și indicațiile de la problema 6, subtema (1°) de la tema anterioară.

Prima rezolvare:

435 + 19 = 454
454 : 2 = 227
227 — 19 = 208

```
435 +        454 : 2 = 227      227 —
 19           4                  19
454          =5                 208
              4
              14
              14
              =
```

Răspuns: 227 și 208.

A doua rezolvare

435 — 19 = 416
416 : 2 = 208
208 + 19 = 227

```
435 —        416 : 2 = 208      208 +
 19           4                  19
416          =1                 227
              0
              16
              16
              = =
```

Răspuns: 227 și 208.

Problema 6 (subtema 4° la „Exerciții și probleme", ca și cele care urmează)

Răspuns: 282 candidați au luat calificativul „bine".

Problema 7

Interesează restul cel mai mare la împărțirile:

$$650 : 6 = 108 \text{ (rest 2)}; \; 650 : 7 = 92 \text{ (rest 6)}$$

Așadar, pionierii au făcut 7 straturi de flori.

Problema 8

Avem: $A = \{600; 610; 620; ... 680; 690; 700\}$.

Se împart la 4, pe rînd, toate numerele din A și apoi se grupează acelea care la împărțire au dat același rest. Se obține:

$\{600; 620; 640; 660; 680; 700\}$ care au dat restul 0;
$\{610; 630; 650; 670; 690\}$ care au dat restul 2.

Problema 9

Pe baza legăturii dintre deîmpărțit, împărțitor, cît și rest, avem:

a) $n = (8 \times 5) + 4$; $n = 44$
b) $a = (8 \times 5) + 3$ $b = (8 \times 5) + 2$ $c = (8 \times 5) + 1$ $d = (8 \times 5) + 0$
$a = 43$ $b = 42$ $c = 41$ $d = 40$

Așadar: $\{40; 41; 42; 43\}$.

c) Restul unei împărțiri trebuie să fie mai mic decît împărțitorul. Cum împărțitorul este 8, putem avea ca rest orice număr natural mai mic decît 8. Cu această observație întrebarea revine la a afla mulțimea numerelor naturale care împărțite la 8 dau cîtul 5 și restul mai mic decît 8, care se judecă la fel cu întrebarea anterioară. Se găsește:

$$\{40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47\}.$$

Problema 10

Restul unei împărțiri fiind mai mic decît împărțitorul:

a) la împărțirea unui număr natural prin 7 poate fi orice număr mai mic decît 7, deci:

$$\{0; 1; 2; ... 5; 6\}$$

b) orice număr natural împărțit la 7 dă restul mai mic decît 7, deci mulțimea căutată este

$$N = \{0; 1; 2; 3; ...\}.$$

Capitolul V

EXERCIȚII ȘI PROBLEME CU TOATE OPERAȚIILE STUDIATE

1. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

Exercițiile vor conține și elemente simple privind ordinea operațiilor și folosirea parantezelor (fără a conține mai mult ca două operații diferite).

Pentru rezolvarea problemelor va fi folosit și planul scris de rezolvare, fără exagerări.

2. INDICAȚII PRIVIND REZOLVAREA UNORA DIN EXERCIȚIILE ȘI PROBLEMELE PROPUSE

Problema 4

Figura 110. *a)* $162 + 208 + 436 = 806$; *b)* $162 + 208 = 370$
$436 + 208 = 644$

Problema 7

Pentru a putea face scăderea, x nu poate fi mai mic decît 246. Pentru a rămîne la scăderea $x - 246$ restul cel puțin 100, x trebuie să depășească 246 cu cel puțin 100, adică poate fi un număr natural începînd cu 346. Luînd: $x = 346$; $x = 347$; $x = 348$ etc. și făcînd scăderile, se constată că începînd cu $x = 351$ diferența $x - 246$ devine mai mare decît 104. Așadar, avem:

a) $\{346; 347; 348; 349; 350\}$; *b)* $\{347; 348; 349; 350\}$

c) $\{346; 347; 348; 349\}$; *d)* $\{347; 348; 349\}$

Problema 10

La operațiile respective se dă rezultatul și unul din numere și se cere celălalt număr. Se găsește:

a) $n = 550 : 5$
$n = 101$

c) $n = 234 : 4$
$n = 58$, dacă „:" este împărțire cu rest;
$n =$ nu există, dacă „:" este împărțire exactă.

d) $n = 500 : 4$
$n = 125$

Problema 11

a) $n = (4 \times 231) + 2$
$n = 926$

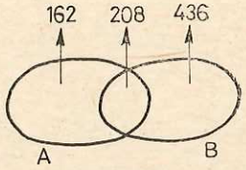


Fig. 110

b) $n = (5 \times 112) + 8$
$n = 563$

c) $(n \times 138) + 4 = 832$
$n \times 138 = 828$
$n = 828 : 138$

Cum nu s-a învățat încă o regulă de efectuare pentru împărțirea 828 : 138 = , ea poate fi efectuată doar prin scădere repetată, găsind 828 : 138 = 6.

Problema 12

Se cere deîmpărțitul următoarelor împărțiri:

$a : 3 = 45$ (rest 2); $p : 3 = 45$ (rest 1); $n : 3 = 45$ (rest) 0

Avem: $a = (3 \times 45) + 2$, $a = 137$; $p = (3 \times 45) + 1$, $p = 136$; $n = (3 \times 45) + 0$, $n = 135$

Problema 13

Folosind relațiile de la împărțire $d = (î \times c) + r$ și $r < î$, avem:

a) $r < 3$ și $d = (3 \times 91) + r$. Înlocuind „r", pe rînd, cu 0, 1 și 2, găsim:
$r = 0$ și $d = (3 \times 91) + 0 = 273$ obținînd $(d; r) = (273; 0)$
$r = 1$ și $d = (3 \times 91) + 1 = 274$ obținînd $(d; r) = (274; 1)$
$r = 2$ și $d = (3 \times 91) + 2 = 275$ obținînd $(d; r) = (275; 2)$

Așadar, s-a găsit mulțimea de perechi: {(273; 0), (274; 1), (275; 2)}.
Judecînd analog, găsim:

b) {(924; 0), (925; 1), (926; 2), (927; 3)}
c) {(630; 0), (631; 1), (632; 2), (633; 3), (634; 4)}

Problema 17

a) 196 + 213 = 409; 213 + 287 = 500; *b)* 196 + 213 + 287 = 696

Problema 25

Numărul muncitorilor dintr-o brigadă la deschiderea șantierului: 728 : 7 = 104.

Numărul tinerilor care au mai cerut să fie repartizați în brigăzi: 4 × 134 = 536.

În fiecare brigadă, dacă se păstrează același număr de muncitori, pot fi repartizați cel mult atîția tineri cît este cîtul împărțirii: 536 : 7 = 76 (rest 4).

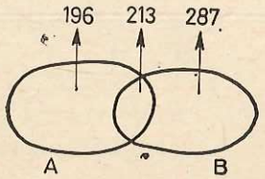


Fig. 111

Numărul maxim de muncitori în brigadă va putea fi:

104 + 76 = 180

Răspuns: 180 muncitori.

Observație: Planul de rezolvare se va face oral.

Problema 26

Se împarte 204 la fiecare din numerele 2, 3, 4, 5, 7. Mulțimea căutată va conține cîturile împărțirilor care s-au făcut exact: {101; 68; 51}.

Problema 28

Împărțind, pe rînd, fiecare din elementele mulțimii la 4, se obține: {528; 816; 920}.

Problema 29

Prima rezolvare:
Aflăm costul unui set de 40 de eșarfe: 40 × 8 = 320.
Aflăm costul a 3 seturi: 3 × 320 = 960.

Răspuns: 960 lei.

Rezolvarea se poate scrie: 3 × (40 × 8) = 960
A doua rezolvare:
Aflăm cîte eșarfe s-au cumpărat în total: 3 × 40 = 120.
Aflăm costul eșarfelor: 120 × 8 = 960.

Răspuns: 960 lei.

Rezolvarea se poate scrie: (3 × 40) × 8 = 960
Observăm: 3 × (40 × 8) = (3 × 40) × 8.

Problema 37

Notăm cu A mulțimea vacilor cu lapte și cu B mulțimea vacilor mai tinere de 3 ani. Aceste mulțimi au elemente comune cele 99 de vaci sub 3 ani care sînt cu lapte. Mulțimea diferență dintre A și B o formează cele 250 de vaci peste 3 ani care sînt cu lapte (observăm că „toate" vacile peste 3 ani sînt cu lapte). Putem face figura 112. Din ea rezultă cu ușurință rezolvarea, dacă ținem seama că reuniunea mulțimilor A și B are 375 elemente:

Numărul vacilor cu lapte: 250 + 99 = 349.
Numărul vacilor pînă la 3 ani: 375 — 250 = 125.
Numărul vacilor care nu dau lapte: 375 — 349 = 26.

Răspuns: 349 vaci cu lapte; 125 vaci pînă la 3 ani; 26 vaci care nu dau lapte.

Problema 38

Reuniunea avînd 995 elemente, figura 113 sugerează aflarea numărului elementelor mulțimii B: 995 — 325 = 670, și cel al numărului elementelor mulțimii A: 325 + 78 = 403.

De pe aceeași figură rezultă și altă rezolvare: se află mai întîi numărul elementelor lui A: 325 + + 78 = 403, apoi numărul elementelor diferenței dintre B și A : 995 — 403 = 592, și, în fine, numărul elementelor lui B : 592 + 78 = 670.

Prima rezolvare este mai simplă.

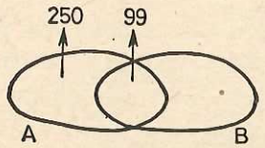


Fig. 112

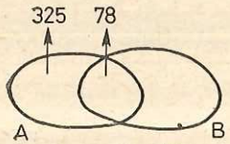


Fig. 113

Asemănarea cu problema anterioară constă în aceea că, în amîndouă se dă numărul elementelor reuniunii a două mulțimi A și B, numărul elementelor mulțimii diferență între A și B și numărul elementelor intersecției dintre A și B. În amîndouă se cere aflarea numerelor de elemente ale mulțimilor A și B.

Problema 39

$0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$
$110 - 100 = 10$
a) 2; 5. *b*) Da, $(10 \times 4) : 5 = 8$

Problema 40

Prima rezolvare

$800 + 148 = 948$
$948 : 2 = 474$
$474 - 148 = 326$

Răspuns: 474, respectiv 326 mineri.

A doua rezolvare:

$800 - 148 = 652$
$652 : 2 = 326$
$326 + 148 = 474$

Răspuns: același

Problema 44

Este suficient a calcula de cîți bani are nevoie pentru cadouri de valoare medie, $4 \times 91 = 364$, pentru a-și da seama că cei 363 lei nu-i ajung decît pentru cadourile mai ieftine, de 85 lei bucata. Suma rămasă:

$$4 \times 85 = 340; \quad 363 - 340 = 23.$$

Răspuns: 23 lei.

Problema 45

Prima rezolvare

Aflăm o lungime și o lățime:

$700 : 2 = 350$

Aflăm 2 lățimi:

$350 - 122 = 228$

O singură lățime:

$228 : 2 = 114$

Lungimea

$114 + 122 = 236$

Răspuns: 236 m; 114 m.

A doua rezolvare:

Aflăm o lungime și o lățime:

$700 : 2 = 350$

Aflăm 2 lungimi:

$350 + 122 = 472$

O singură lungime:

$472 : 2 = 236$

Lățimea

$236 - 122 = 114$

Răspuns: 236 m; 114 m.

Capitolul VI

NUMERE NATURALE MAI MARI DECÎT 1000

A. SCURTE OBSERVAȚII ASUPRA CONȚINUTULUI

I. OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Numirea, scrierea și citirea acestor numere, după principiul sugerat la trecerea peste zece și peste sută (fără a mînui neapărat, nemijlocit, mulțimi de obiecte); cu zece unități de un anumit ordin se formează o unitate de ordin imediat superior. Mia, ca unitate de ordinul IV; unități de ordinul V sau „zeci de mii"; unități de ordinul VI sau „sute de mii"; unități de ordinul VII sau „milioane"; etc.

Clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanelor. Unitățile, zecile și sutele fiecărei clase.

2. Tehnica scrierii și citirii numerelor, cunoscînd scrierea și citirea numerelor de trei cifre și numele claselor, în ordine descrescătoare. Situații particulare.

3. Compararea numerelor, cu folosirea semnelor $=$, $<$, $>$ și cu deducerea unor reguli practice, prin cercetarea cifrelor începînd cu ordinul cel mai mare.

B. INDICAȚII METODICE PENTRU PREDAREA TEMELOR DIN CAPITOLUL VI

(Număr de ore, orientativ = 10 ore)

Textul din manual este suficient pentru elaborarea lecțiilor.

Menționăm că *nu trebuie cerut de la elevi verbalizări obositoare, sub forma redării curgătoare a diferitelor reguli, ci se va insista asupra însușirii conștiente de către elevi a deprinderilor practice de numire, scriere și citire a numerelor naturale.*

Utilizarea efectivă, ca material didactic, a unor mulțimi de obiecte atît de numeroase ar crea dificultăți. De aceeaa se vor împrospăta ideile organizării unei mulțimi cu structură numerică zecimală, care au fost ilustrate obiectual pentru mulțimi cu mai puține elemente și se va sugera că procedeul poate fi extins asupra mulțimilor mai numeroase.

Pentru a ajuta gîndul copiilor în urmărirea acestor idei, nu se va folosi efectiv o mulțime de obiecte, ci învățătorul va expune „verbal" procedeul de organizare cu structură numerică zecimală, dar va „materializa" unitățile ce se presupun că rămîn dintr-un anumit ordin cu care nu se mai poate face o unitate de ordin superior (deoarece sînt mai puține de 10), punînd pe panoul 15

al trusei pentru studiul numerelor naturale atîtea discuri negre, triunghiuri albastre sau pătrate roșii cîte unități din ordinul respectiv se presupune că au rămas.

Se obține în acest fel o mulțime model pentru structura numerică zecimală a mulțimii ipotetice analizate, care sugerează numirea, scrierea și citirea numărului ei de elemente.

Discutînd figura 50 din manual se va observa că exact informațiile care ni le furnizează această figură, ni le furnizează și scrierea existentă sub figură, luată singură. Este desigur mai comodă această scriere decît realizarea unor mulțimi model ca aceea din figură (cu piesele trusei), sau chiar numai a figurii respective. De aceea, odată procesul de gîndire împrospătat este firesc a renunța în continuare la folosirea mulțimilor model sau a figurilor respective, utilizînd „scrierea pozițională" pentru precizarea acelorași informații.

Ideea fundamentală din acest capitol este aceea de a se căuta rezolvarea problemei numirii, scrierii și citirii numărului de elemente al unei mulțimi, deci o problemă „concretă", și nu de a învăța numerele naturale peste 1 000, ceea ce face să se rămînă pe un plan mult mai abstract, chiar dacă acesta este scopul final.

Ca material didactic se vor folosi planșe conținînd tabelele al 2-lea și a 3-lea existente în manual la tema „Organizarea mulțimii cu structură numerică zecimală", subtema b) „Numere scrise cu mai multe cifre".

Capitolul VII

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR NATURALE PESTE 1000

(Număr de ore, orientativ = 15)

OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Exerciții numai cu doi termeni (în scris). Probleme cu date din economie.

2. Înmulțirea cu 10, 100 și 1 000. Împărțirea la 10, 100 și 1 000 a numerelor naturale terminate cu zerouri.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse

TEMA 2: SCĂDEREA FĂRĂ TRECERE PESTE ORDIN

Problema 8

Fig. 114. *a*) 4 650 — 3 220 = 1 430; *b*) 5 560 — 3 220 = 2 340; *c*) (5 560 — 3 220) + 4 650 = 6 990 sau (4 650 — 3 220) + 5 560 = 6 990.

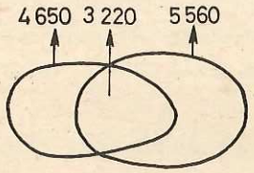


Fig. 114

TEMA 4: SCĂDEREA CU TRECERE PESTE ORDIN

La: Exerciții și probleme diverse

Problema 3

a) *B* conține numerele din *A* care scăzute din 800 000 dau diferența cel puțin egală cu 150 000.

b) *B* conține numerele din *A* care adunate la 999 999 dau suma cel mult egală cu 1 100 000.

Problema 7

858 + 230 = 1 088 544 — 230 = 314 544 : 2 = 272
1 088 : 2 = 544 3 × 314 = 942 544 + 314 + 942 + + 272 = 2 072

În cele ptru silozuri se află 2 072 q porumb.

Capitolul VIII

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

(Număr de ore, orientativ = 15)

OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Submultiplii și multiplii metrului, litrului și kilogramului, cu transformări simple. Secol (veac), an, lună, săptămînă, zi, oră, minut, secundă. Citirea orei pe ceas.
2. Exerciții și probleme.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse

TEMA A 8-a: UNITĂȚI DE TIMP MAI MARI DECÎT O ZI

Problema 8

1 095 zile sau 1 096 zile, după cum perioada de 3 ani consecutivi nu conține în ea, sau conține, un an bisect. Trei ani neconsecutivi pot conține 1 095, 1 096, 1 097 sau 1 098 de zile, după cum nu conține nici un an bisect, conține unul, doi sau trei ani bisecți.

Capitolul IX

NOȚIUNI DE GEOMETRIE

(Număr de ore, orientativ = 15)

OBIECTIVELE PREVĂZUTE DE PROGRAMA ȘCOLARĂ

1. Recapitularea noțiunilor studiate în clasa a II-a, cu aplicații la unitățile de măsură studiate și la operațiile asupra numerelor.

2. Compararea segmentelor de dreaptă.

3. Semidreapta. Unghiul, compararea unghiurilor. Unghi drept, drepte perpendiculare, echerul. Unghi ascuțit, unghi obtuz.

4. Poziții a două drepte: concurente; paralele.

5. Poligoane: triunghiul, patrulaterul. Clasificarea patrulaterelor: paralelogramul; dreptunghiul; pătratul.

6. Aria unei suprafețe. Unități de arie: cm^2; m^2, hm^2 sau ha. Aria dreptunghiului și pătratului.

N o t ă: Noțiunile de mai sus vor fi cunoscute intuitiv, fără definiții riguroase. Figurile respective vor fi descrise și recunoscute în mediul înconjurător.

Indicații privind rezolvarea unora din problemele propuse

TEMA A 3-a: SEMIDREAPTA

Problema 4

Drepte: *AD*. Semidrepte: *BA*; *BD*; *CA*; *CD*. Segmente: *BC*.

Problema 5

Figura 82. Drepte: AC; *DB*. Semidrepte: *OA*; *OC*; *OD*; *OB*. Segmente: nu sînt. Fig. 83. Drepte: *AD*; *FC*; *EB*. Semidrepte: *IA*; *ID*, *IF*; *IC*; *IE*; *IB*. Segmente: nu sînt.

TEMA A 4-a: UNGHIUL

Problema 6 (subtema 1°)

Laturile unghiurilor fiind semidrepte, acestea sînt nesfîrșit de lungi, neavînd importanță ce porțiune din ele este desenată. Așadar, nu putem spune că vreunul din cele trei unghiuri are laturile mai lungi ca celelalte.

Capitolul X

EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

(Număr de ore, orientativ = 10)

Problema 6

{102 030; 103 020; 201 030}

Problema 8

Fig. 115 sugerează: 50 606 + 10 066 = 60 672;
39 034 + 10 066 = 49 100.

Problema 9

Fig. 116 sugerează: 250 025 — 75 075 = 174 950.

Problema 13

Prin încercări: *a*) {2; 3; ... ; 6; 7}; *b*) {2; 3; ...; 7; 8} *c*) {4; 5; 6}; *d*) {3; 4; 5; 6; 7}.

Problema 19

Fig. 117. Intersecția mulțimilor A și B are 400 051 — (300 150 + 46 069) elemente, adică 53 832. Mulțimea A are 300 150 + 53 832 elemente, iar mulțimea B are 46 069 + 53 832 elemente, adică, respectiv 353 982 și 99 901. Avem 453 883 — 400 051 = 53 832. Deci suma numerelor de elemente din A și B este mai mare ca numărul elementelor reuniunii, cu numărul elementelor intersecției lui A cu B.

Problema 29

Asemănător cu problemele 26 și 27

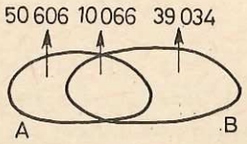


Fig. 115

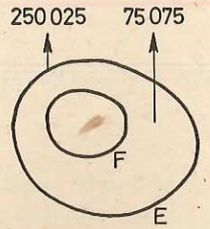


Fig. 116

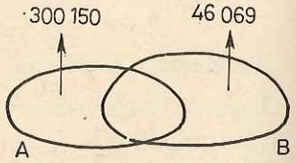


Fig. 117

Problema 32

(7 × 100) + (3 × 50) + (6 × 25) = 1000; 1000 — 990 = 10. Va primi rest 10 lei.

	moduri posibile						
	1	2	3	4	5	6	7
1 leu	10	7	4	2	1	5	—
3 lei	—	1	2	1	3	—	—
5 lei	—	—	—	1	—	1	2

Problema 34

Fiecare ladă conține 60 : 5 = 12 sticle. Luîndu-se din una 8, din alta 4 și din a treia 12 sticle, rămîn, respectiv 4, 8 și 0 sticle. În două lăzi luate la întîmplare pot fi: 4; 8; 12; 16; 20 sau 24 sticle.

Problema 35

375 : 3 = 125; 5 × 125 = 625; 700 — 625 = 75. Se va primi rest 75 lei. El poate fi plătit cu 1 bancnotă a 50 lei și 1 bancnotă a 25 lei, dîndu-se astfel cel mai mic număr de bancnote, adică 2. Pentru a se plăti cu cel mai mare număr de bancnote se va da 1 bancnotă de 25 lei, și 5 bancnote a cîte 10 lei, total 6 bancnote.

Problema 36

{1; 3; 5} reunită cu {6; 8} face mulțiema {1; 3; 5; 6; 8}. 40 se împarte exact la : 1; 5; 8, iar 30 se împarte exact la : 1; 3; 5; 6.

Problema 37

a) Din primul val face piese care necesită 3 m sîrmă, din al doilea face piese care necesită 2 m sîrmă, iar din al treilea val, piese care necesită 2 m sîrmă. În total îi rămîne o bucată de 1 m sîrmă (din valul al treilea).

b) Din primul val piese a 3 m sîrmă, din al doilea val piese a 2 m sîrmă, iar din al treilea val face 41 piese a 3 m sîrmă și 1 piesă a 2 m. Astfel folosește toată sîrma, realizînd 137 piese.

c) Din primul val face 54 piese a 2 m sîrmă și 1 piesă a 3 m. Din al doilea val face 58 piese a 2 m sîrmă. Din al treilea val face 61 piese a 2 m sîrmă și una piesă a 3 m sîrmă. Astfel realizează numărul maxim de piese, 175, consumînd toată sîrma.

Cele de mai sus se deduc analizînd resturile și cîturile împărțirilor la 2 și 3 a fiecăruia din numerele 111, 116 și 125.

Problema 38

Primul mod: $421 + 230 + 275 = 926$; $926 : 7 = 132$ (rest 2).

S-au făcut 132 transporturi cu camioane de 7 t, iar 2 t au fost transportate cu un mijloc de transport mai mic.

Al doilea mod: $421 : 7 = 60$ (rest 1); $230 : 7 = 32$ (rest 6); $275 : 7 = 39$ (rest 2); $1 + 6 + 2 = 9$; $9 : 7 = 1$ (rest 2); $60 + 32 + 39 + 1 = 132$.

Acelai rezultat.

Problema 42

a) $A = \{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}\}$; $D = \{\widehat{RVT}; \widehat{SVP}; O = \{\widehat{RVP}\}$;

b) $B = \{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVT}; \widehat{SVP}; \widehat{RVP}\}$;

c) $C = \{\widehat{RVT}; \widehat{SVP}; \widehat{RVP}\}$;

d) $E = \{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVP}\}$;

e) $F = \{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVT}; \widehat{SVP}\}$

Problema 43

a) Reuniunea lui A cu D: $\{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVT}; \widehat{SVP}\}$.

b) Reuniunea lui A cu O: $\{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}; \widehat{RVP}\}$.

c) Reuniunea lui D cu O: $\{\widehat{RVT}; \widehat{SVP}; \widehat{RVP}\}$.

d) Intersecția lui E cu F: $\{\widehat{RVS}; \widehat{SVT}; \widehat{TVP}\}$.

Se constată că aceste mulțimi sînt formate, respectiv, exact din aceleași elemente ca și mulțimile F, E, C și A din problema anterioară.

Problema 45

a) AD și CB; I; CO.

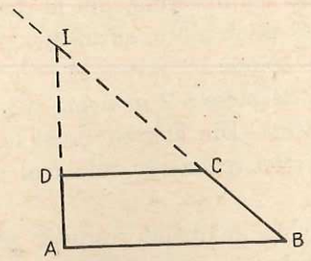


Fig. 117*

Capitolul XI

RELAȚII, FUNCȚII OPERAȚII

Acest capitol cuprinde cunoștințe neconținute în programă și manual. El este destinat informării învățătorilor asupra cîtorva din noțiunile fundamentale care constituie suportul științific al matematicii predate în învățămîntul primar.

Asemenea cunoștințe vor permite învățătorilor să-și elaboreze lecțiile într-o viziune nouă, de mare perspectivă, și să explice simplu, dar în acord cu matematica actuală, principalele noțiuni pe care le transmit elevilor.

În prelucrarea didactică s-a realizat o atît de pronunțată simplificare, încît, deși este păstrată esența științifică, înțelegerea să nu fie condiționată de existența nici unui fel de cunoștințe anterioare de matematică.

Întrucît în forma în care este prezentat, capitolul a fost predat, eșalonat, la elevi de clasa a III-a și a IV-a (clase compacte, atît din mediul rural cît și urban), obținîndu-se rezultate bune, el poate constitui obiect al preocupărilor în cadrul cercurilor de elevi.

I. CORESPONDENȚA „ÎNTRE" MULȚIMI

Radu, Andrei, Costel și Vlad și-au petrecut vacanța la Predeal, prietenii lor Sandu, Mihai și Dan și-au petrecut-o la Eforie.

În perioada vacanței cele două grupe de copii au păstrat legătura între ele prin intermediul următoarelor scrisori: Radu a scris lui Mihai și Dan; Mihai a scris lui Costel; Vlad a scris lui Dan.

Corespondența stabilită în acest fel **între mulțimea P** a celor patru elevi aflați la Predeal și **mulțimea E** a celor trei elevi aflați la Eforie *este ilustrată prin diagrama alăturată*

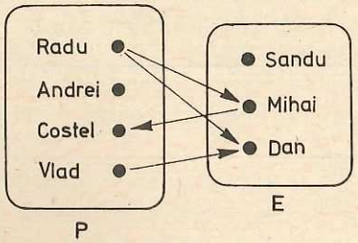


Fig. 118

numită **diagrama cu săgeți** a corespondenței între mulțimile P și E stabilită mai sus.

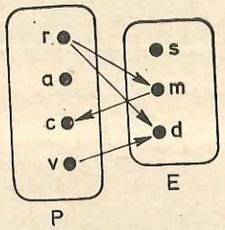


Fig. 119

Fiecare scrisoare determină un cuplu sau o *pereche ordonată, formată din elementul de la care pleacă* și *elementul la care sosește* acea scrisoare. Se formează astfel perechile ordonate:

(Radu, Mihai), (Radu, Dan), (Mihai, Costel), (Vlad, Dan).

Observăm că perechile ordonate (Radu, Mihai) și (Mihai, Radu) nu sînt egale, deoarece într-un caz scrisoarea merge de la Radu la Mihai și în al doilea invers, de la Mihai la Radu. Deci:

(Radu, Mihai) ≠ (Mihai, Radu)

Corespondența între mulțimile P și E este determinată de corespondențele stabilite de la un element la un element și ilustrate pe figura de mai sus prin cîte o săgeată. Se vede că sensul acestora poate fi de la P la E și de la E la P.

Notînd fiecare copil cu inițiala prenumelui său (literă mică), putem scrie mulțimile P și E astfel:

$$P = \{r, a, c, v\}; \; E = \{s, m, d\}.$$

iar perechile ordonate determinate de fiecare scrisoare și care alcătuiesc corespondența între mulțimile P și E:

$$(r, m), \; (r, d), \; (m, c), \; (v, d)$$

Diagrama cu săgeți a corespondenței între mulțimile P și E poare fi făcută ca în figura 119.

2. CORESPONDENȚA DE LA O MULȚIME LA O MULȚIME SAU RELAȚIA DE LA O MULȚIME LA O MULȚIME

În exemplul anterior să presupunem că cele două grupe de copii au păstrat legătura prin intermediul următoarelor scrisori: Radu a scris lui Mihai și Dan; Vlad a scris lui Dan.

Corespondența stabilită între mulțimea P a celor patru elevi aflați la Predeal și mulțimea E a celor trei elevi aflați la Eforie este ilustrată prin diagrama cu săgeți (v. fig. 120) care, utilizînd simbolurile folosite mai sus pentru elemente, se face conform figurii 121.

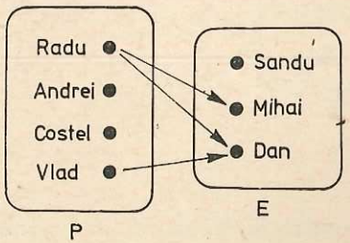


Fig. 120

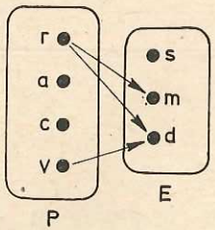


Fig .121

De data aceasta *corespondențele de la un element la un element au toate aceeași orientare, plecînd de la cîte un element din P, către un element din E.* Corespondența între două mulțimi care are această particularitate se numește **corespondență de la o mulțime la o mulțime,** în cazul nostru de la P la E. O vom numi și **relație de la mulțimea P la mulțimea E.**

Mulțimea P o vom numi **mulțime de plecare,** iar mulțimea E o vom numi **mulțime de sosire** a acestei relații.

Mulțimea G a tuturor cuplurilor care intervin în relația obținută mai sus de la P la E este:

$G = \{$(Radu, Mihai) (Radu, Dan), (Vlad, Dan)$\}$ care, utilizînd simbolurile folosite pentru elemente, se scrie:

$$G = \{(r, m), \; (r, d), \; (v, d)\}$$

Această mulțime de cupluri se numește **graful relației** ce s-a realizat de la P la E, prin intermediul scrisorilor menționate.

Sintetizînd cele de mai sus putem spune că *o relație este perfect cunoscută dacă cunoaștem mulțimea de plecare,* în cazul nostru P, *mulțimea de sosire,* în cazul nostru E, și *mulțimea G* a tuturor cuplurilor care intervin în acea relație, formate cu primul element din P și al doilea din E, deci *graful relației.* Altfel spus, o relație este perfect c unoscută dacă cunoaștem *tripletul* (P, E, G), în care cele trei mulțimi sînt scrise în ordinea menționată anterior.

Probleme

1. Se dau mulțimile de figuri:

$A = \{$○, △, □$\}$; $B = \{$ ▭, ⊘, ▨, ⊗, ▩ $\}$

a) Stabiliți acea relație de la A la B care pune în corespondență fiecare element din A cu toate elementele din B care au aceeași formă cu el, folosind diagrama cu săgeți.

b) Care este mulțimea de plecare și care este mulțimea de sosire în relația obținută?

c) Care elemente din mulțimea de plecare nu au corespondent în mulțimea de sosire? Care au mai mult de un corespondent?

d) Care elemente din mulțimea de sosire nu corespund la nici un element din mulțimea de plecare? Care corespund la un element? Care corespund la mai multe elemente?

e) Scrieți toate perechile ordonate care intervin în relația pe care ați stabilit-o de la A la B, deci mulțimea pe care am numit-o graful relației.

2. Pe un raft în dulap sînt așezate cele trei băști existente într-o locuință. Notînd fiecare basică cu o literă, mulțimea B a băștilor de pe raft se poate scrie, de exemplu:

$$B = \{o, r, s\}.$$

Mulțimea P a persoanelor din acea locuință este formată din tata, mama, un băiat și o fetiță, persoane pe care le notăm, respectiv, cu t, m, b, f. Avem:

$$P = \{t, m, b, f\}.$$

Știind că tata poartă basca notată cu r, băiatul și fetița poartă, alternativ, băștile notate cu o și s, iar mama nu poartă bască:

a) faceți diagrama cu săgeți a relației de la mulțimea P a persoanelor la mulțimea B a băștilor, obținută dacă punem în corespondență fiecare persoană cu basca pe care o poartă.

b) Scrieți mulțimea de cupluri care intervin în această relație (deci graful relației). Faceți diagrama acestei mulțimi.

c) Care element din mulțimea de plecare nu are corespondent în mulțimea de sosire? Care are un corespondent? Care are mai mult decît un corespondent?

d) Care element din mulțimea de sosire nu este corespondent pentru nici un element din mulțimea de plecare? Care este corespondent pentru un singur element din mulțimea de plecare? Care este corespondent pentru mai mult de un element din mulțimea de plecare?

e) Formați toate cuplurile ce au elementul de plecare în P și cel de sosire în B, și care nu aparțin grafului relației stabilite anterior.

f) Refaceți răspunsul la întrebarea (a), în situația cînd fiecare persoană din familie poartă, alternativ, toate băștile.

3. Onuț, Nicu și Dan participă la un concurs de tir. Ei trebuie să tragă cîte un glonte în fiecare din cele patru ținte, constînd din figurine decupate din carton care reprezintă, respectiv, un mistreț, o vulpe, o bufniță și o potîrniche.

a) Indicati de la care trăgător la care țintă s-au îndreptat gloanțele în timpul desfășurării concursului, întocmind o diagramă cu săgeți ce pleacă de la mulțimea C a concurenților la mulțimea T a țintelor.

b) Scrieți mulțimea cuplurilor trăgător-țintă determinate de fiecare glonț tras la concurs.

c) Prin intermediul gloanțelor trase, ce fel de corespondență s-a stabilit: Între o mulțime și o mulțime? De la o mulțime la o mulțime?

d) Dacă s-a realizat o relație de la o mulțime la o mulțime, ce reprezintă mulțimea formată la (b) pentru această relație? Faceți diagrama mulțimii obținute la (b).

e) Formați mulțimea tuturor cuplurilor care au elementul de plecare în mulțimea C a concurenților și cel de sosire în mulțimea T a țintelor, și care nu aparțin grafului relației stabilite anterior.

Observația 1

Mulțimea tuturor cuplurilor ce pot fi formate astfel încît primul lor element să aparțină mulțimii A și al doilea să aparțină mulțimii B se numește produsul cartezian al mulțimii A prin mulțimea B și se notează $A \times B$.

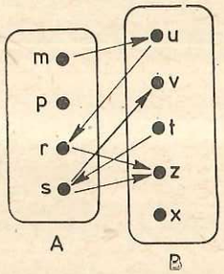


Fig. 122

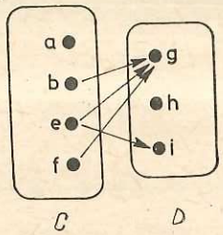


Fig. 123

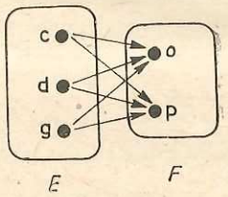


Fig. 124

Notînd fiecare concurent și fiecare țintă, respectiv, cu inițialele numelui lor, avem:

$$C = \{o, n, d\} \text{ și } T = \{m, v, b, p\}$$

iar graful relației de la (c):

$C \times T = \{o, m), (o, v), (o, b), (o, p), (n, m), (n, v), (n, b), (n, p), (d, m), (d, v), (d, b), (d, p)\}$.

Această mulțime este numită produsul cartezian al mulțimii C prin mulțimea T.

4. Priviți corespondențele între mulțimi stabilite prin intermediul figurilor: 122; 123; 124.

a) Spuneți care din ele este în același timp și corespondență de la o mulțime la o mulțime sau relație?

b) Scrieți graful fiecărei relații găsite la (a).

c) Care din mulțimile de cupluri obținute la (*b*) reprezintă produsul cartezian al unei mulțimi printr-o mulțime? (Justificați.)

5. Pentru mulțimile de litere:

$$A = \{m, p, r, s\}; \; B = \{c, d, f, h, k\}$$

tabela de mai jos pune în corespondență elementele mulțimii A cu acele elemente din mulțimea B care sînt scrise sub ele în tabelă:

A	m	p	r	s
B	c	d	f, h	k

a) Faceți diagrama cu săgeți a relației de la A la B stabilite cu ajutorul tabelei.

b) Scrieți graful acestei relații.

c) Faceți diagrama mulțimii obținute la (*b*).

d) Formați submulțimea E a lui A care conține toate elementele din A care au corespondent în B prin intermediul tabelei de mai sus.

Observația 2

Mulțimea E astfel obținută se numește **domeniul de definiție al relației** de la A la B stabilit de tabelă.

e) Formați submulțimea T a lui B care conține toate elementele din B ce corespund cel puțin la un element din A, prin intermediul tabelei date.

Observația 3

Mulțimea T astfel obținută se numește **mulțimea valorilor relației** de la A la B stabilite de tabelă.

6. Revedeți problema (4) de mai sus, punctul (a). Pentru fiecare relație ilustrată de figuri, scrieți:

a) mulțimea de plecare;

b) mulțimea de definiție a relației;

c) mulțimea de sosire;

d) mulțimea valorilor relației.

3. FUNCȚII. APLICAȚII

Priviți relațiile de la mulțimea $A = \{c, d, e, f\}$ la mulțimea $B = \{m, s, r, h, g\}$, date prin diagramele (1), (2) și (3).

În relația (1) există elementele c și f din mulțimea de plecare care au mai mult cu un corespondent în mulțimea de sosire (c are pe m și r; f are pe r, h și g).

Relațiile ca (2) și (3) *în care nici un element din mulțimea de plecare nu are mai mult decît un corespondent în mulțimea de sosire se numesc* **funcții.**

În diagrama cu săgeți a unei funcții, de la nici un element al mulțimii de plecare nu poate pleca mai mult ca o săgeată (eventual pot exista elemente de la care să nu plece nici una).

Funcțiile ca (3) *în care fiecare element al mulțimii de plecare are un corespondent în mulțimea de sosire se numesc* **aplicații.**

Se vede că funcțiile sînt relații particulare, iar aplicațiile sînt funcții particulare. În (1) avem o relație fără să avem o funcție (de ce?). În (2) avem

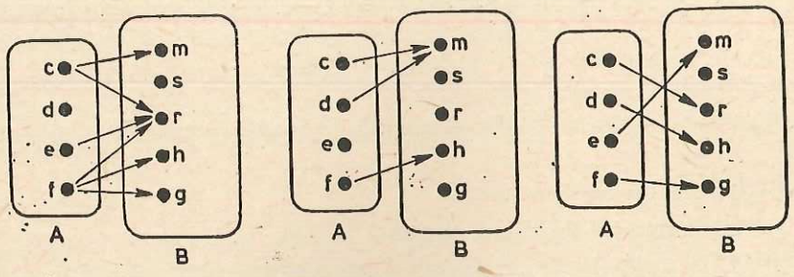


Fig. 125

o relație care este în același timp și funcție (de ce)? În (3) avem o relație care este și funcție și aplicație (de ce?).

Este clar că relațiile care nu sînt funcții, nu pot fi aplicații.

Probleme

1. Priviți diagramele (1), (2), și (3) din fig. 126. Găsiți printre ele o relație care:

a) nu este și funcție de la E la F;

b) este funcție fără a fi aplicație;

c) este și funcție și aplicație.

2. Se cunosc $A = \{d, f, g\}$, $B = \{p, s, u\}$ și $C = \{(d, p), (d, u), (f, u), (g, s)\}$; $R = \{(d, p,) (f, p), (g, u)\}$; $T = \{(d, p)(f, s)\}$.

a) Faceți diagramele cu săgeți a corespondențelor între mulțimile A și B stabilite de fiecare din mulțimile de cupluri C, R. T.

b) Care din corespondențele stabilite la (a) reprezintă relații, care reprezintă funcții și care reprezintă aplicații de la mulțimea A la mulțimea B?

c) Scrieți mulțimea de definiție și mulțimea valorilor fiecăreia din relațiile găsite la (b).

d) Pentru care din relațiile găsite la (b) avem: mulțimea de plecare egală cu mulțimea de definiție; mulțimea de sosire egală cu mulțimea valorilor.

3. Fie E mulțimea elevilor dintr-o sală de clasă și B mulțimea băncilor cu două locuri din acea sală de clasă. Punînd în corespondență fiecare elev cu banca în care stă, să se spună dacă relația de la E la B care se obține este și funcție, sau aplicație, în situațiile:

a) fiecare elev stă într-o bancă, existînd și locuri libere;

b) fiecare elev stă într-o bancă, neexistînd locuri libere;

c) există elevi în picioare, nu sînt locuri libere;

4. Fie P mulțimea persoanelor care vizionează un film într-o sală de cinematograf și S mulțimea scaunelor (cu un loc) din acea sală.

Punînd în corespondență fiecare persoană cu scaunul pe care îl ocupă, spuneți dacă relația de la P la S care se obține este funcție, sau aplicație, în situațiile:

a) unii spectatori stau în picioare, neexistînd locuri libere;

b) nu există spectatori în picioare, dar sînt locuri libere.

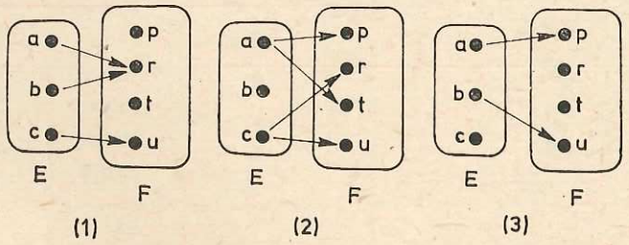


Fig. 126

c) Cum se modifică răspunsurile de mai sus, dacă printre spectatori există și copii mici care se așază cîte doi pe același scaun?

5. În problema anterioară puneți în corespondență fiecare scaun cu spectatorul care îl ocupă și analizați relațiile de la S la P care se obțin, în cele două situații menționate.

4. OPERAȚII BINARE

Fie mulțimile:

$$E = \{a, b\};\ F = \{a, c, d\};\ P = \{m, r, t, f\}.$$

Formăm mulțimea produs cartezian a lui E prin F:

$$E \times F = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d)\}.$$

Folosind diagramele cu săgeți, figura 127 stabilește o funcție de la mulțimea produs $E \times F$ la mulțimea P.

Privind figura observăm că ea stabilește următoarele corespondențe de la elementele din $E \times F$ la elementele din P:

$(a, a) \longrightarrow t$ $\qquad$ $(b, c) \longrightarrow t.$

$(a, d) \longrightarrow m$ $\qquad$ $(b, d) \longrightarrow f.$

O funcție, ca cea de mai sus, la care mulțimea de plecare este produsul cartezian a două mulțimi, se numește operație binară. În cazul nostru operația este stabilită între mulțimile E și F, cu valori în mulțimea P (Pe scurt, vom zice doar „operație").

Folosind diagramele cu săgeți, figura 128 stabilește o altă operație între mulțimile E și F, cu valori în mulțimea P. Ea stabilește următoarele corespondențe de la elemente din $E \times F$ la elementele din P:

$(a, a) \longrightarrow m$ $\qquad$ $(b, a) \longrightarrow t$

$(a, c) \longrightarrow t$ $\qquad$ $(b, c) \longrightarrow f$

$(a, d) \longrightarrow m$ $\qquad$ $(b, d) \longrightarrow t.$

Se observă că *operația dată* prin figura 127 *este o funcție, fără a fi și o aplicație* a lui $E \times F$ în P. În adevăr, cuplurile (a, c) și (b, a) din $E \times F$ nu

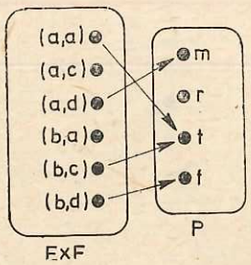


Fig. 127

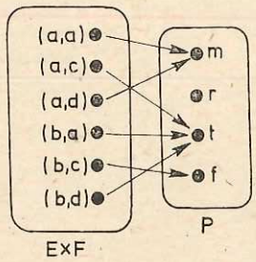


Fig. 128

au corespondent în P. O astfel de operație între mulțimile E și F *zicem că* **nu este totdeauna posibilă.**

Dimpotrivă, *operația dată* prin figura 128 este o funcție care în același timp *constituie o aplicație* a lui $E \times F$ în P. În adevăr, în $E \times F$ nu rămîne nici un element fără corespondent în P. O astfel de operație între mulțimile E și F *zicem că* **este totdeauna posibilă.**

Probleme

1. Fie mulțimile: $A = \{d, e\}$; $B = \{f, g\}$; $C = \{k, l, m\}$.
Spuneți care din figurile (1), (2), și (3) stabilesc:
a) Operații între mulțimile A și B cu valori în mulțimea C;
b) operații între A și B cu valori în C, care: nu sînt totdeauna posibile; sînt totdeauna posibile. Justificați.

2. Se dau mulțimile $A = \{r, p, t\}$; $B = \{u, d\}$; $C = \{f, g, l\}$
Folosind diagramele cu săgeți stabiliți cîte două operații între mulțimile A și B cu valori în mulțimea C (fiecare pe altă figură), care:
a) Să fie totdeauna posibile; *b*) să nu fie totdeauna posibile.

3. Pentru mulțimile A, B și C de la problema anterioară, faceți diagramele cu săgeți care stabilesc operațiile între A și B cu valori în C, care conțin următoarele corespondențe de la elemente din $A \times B$ la elemente din C:

a) $(r, u) \longrightarrow f$ $\qquad$ $(t, u) \longrightarrow l$

$(p, d) \longrightarrow l$ $\qquad$ $(t, d) \longrightarrow f$

b) $(r, u) \longrightarrow f$ $\qquad$ $(p, u) \longrightarrow g$ $\qquad$ $(t, u) \longrightarrow l$

$(r, d) \longrightarrow f$ $\qquad$ $(p, d) \longrightarrow g$ $\qquad$ $(t, d) \longrightarrow l$

Care operație este totdeauna posibilă și care nu?

4. Ana, Vlad și Radu iau lecții de pian și dans la școala populară de artă, putînd primi la sfîrșitul anului școlar calificative de la „foarte bine" la „nesatisfăcător", la fiecare din cele două discipline.

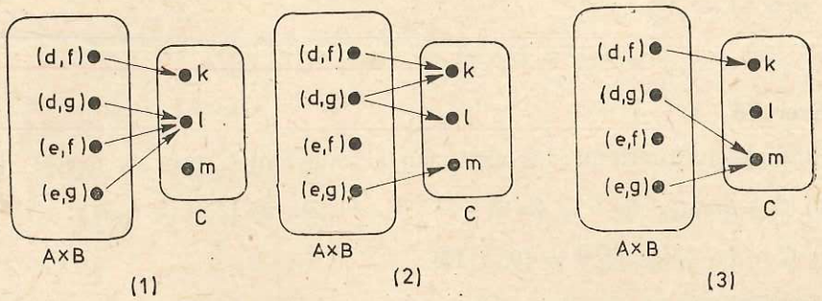


Fig. 129

Notînd cu E mulțimea elevilor, cu D mulțimea disciplinelor de studiu și cu C mulțimea calificativelor, iar fiecare element al acestor mulțimi cu inițiala denumirii sale, avem:

$$E = \{a, v, r\}; \quad D = \{p, d\}; \quad C = \{f, b, s, n\}.$$

Rezultatele la sfîrșitul anului școlar sînt cuprinse în tabela:

	p	d
a	f	s
v	n	b
r	b	b

În esență, tabela face să corespundă fiecărui cuplu elev-disciplină, un calificativ:

$$(a, p) \longrightarrow f \qquad (v, p) \longrightarrow n \qquad (r, p) \longrightarrow b$$

$$(a, d) \longrightarrow s \qquad (v, d) \longrightarrow b \qquad (r, d) \longrightarrow b.$$

Folosind diagramele cu săgeți, arătați că prin intermediul tabelei s-a stabilit o operație binară între mulțimile E și D, cu valori în C.

Această operație este totdeauna posibilă, sau nu?

5. OPERAȚII INTERNE BINARE ÎNTR-O MULȚIME

1. PRODUSUL CARTEZIAN AL UNEI MULȚIMI PRIN EA ÎNSĂȘI

Să scriem produsul cartezian al mulțimii E prin mulțimea F, dacă:

$$E = \{a, b\}; \; F = \{a, c, d\}.$$

Avem:

$$E \times F = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d)\}$$

În mod asemănător putem forma produsul cartezian al mulțimii A prin mulțimea B, dacă: $A = \{p, r\}$, $B = \{p, r\}$.

Avem:

$$A \times B = \{(p, p), (p, r), (r, p), (r, r)\}$$

Observînd că mulțimile A și B sînt egale, urmează că, în fond, am scris mulțimea produs cartezian al mulțimii A prin ea însăși.

Cum $A = B$, în loc de $A \times B$ putem scrie $A \times A$. ASe mai notează încă $A \times A = A^2$, cu

$$A^2 = \{(p, p), (p, r), (r, p), (r, r)\}.$$

Exerciții

Formați mulțimea produs cartezian al mulțimii C prin ea însăși, dacă:

a) $C = \{m, t\}$: *b)* $C = \{a, d\}$; *c)* $C = \{1, 2\}$; *d)* $C = \{a, b, d\}$;

e) $C = \{1, 2, 3\}$; *f)* $C = \{0, 5, 12\}$

Faceți diagrama mulțimii C^2, în fiecare caz.

2. OPERAȚIA INTERNĂ BINARĂ ÎNTR-O MULȚIME

Fie mulțimea E de litere: $E = \{a, b\}$.

Mulțimea produs cartezian al mulțimii E prin ea însăși este:

$$E^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

Faceți diagramele mulțimilor E^2 și E, ca în figura 130. Stabiliți apoi cu ajutorul săgeților o corespondență de la E^2 la E care să fie o funcție. Să zicem că ați obținut figura 131.

Funcția care are particularitatea de a avea ca mulțime de plecare chiar mulțimea produs cartezian al mulțimii de sosire prin ea însăși se numește **operație internă binară** *în mulțimea de sosire.*

În exemplul de mai sus figura 131 stabilește o operație internă binară în mulțimea E.

Figurile 132, 133 și 134 stabilesc alte operații interne binare în mulțimea E.

Operația internă binară se numește **totdeauna posibilă** *dacă funcția care o determină este și aplicație. În cazul în care funcția respectivă nu este și aplicație, operația internă binară zicem că* **nu este totdeauna posibilă.**

Figurile 131, 132 și 134 stabilesc operații interne binare în mulțimea E care nu sînt totdeauna posibile. Figura 133 stabilește o operație internă binară totdeauna posibilă în E. (Justificați).

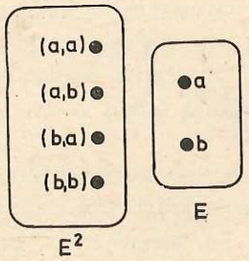


Fig. 130

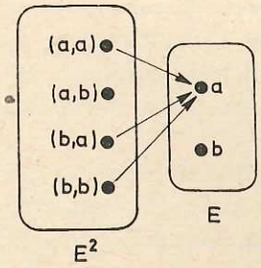


Fig. 131

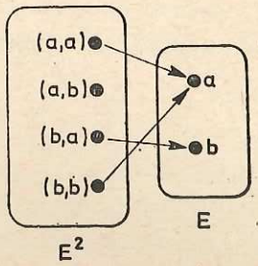


Fig. 132

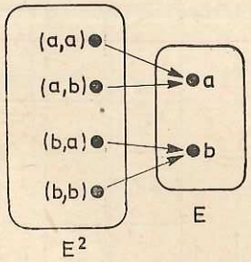


Fig. 133

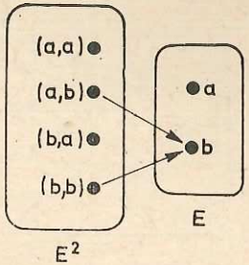


Fig. 134

Exerciții și probleme

1. Stabiliți, folosind diagrame cu săgeți, două operații interne binare totdeauna posibile în mulțimea $E = \{a, b\}$, diferite de aceea din figura 133.

2. Stabiliți, folosind diagrame cu săgeți, două operații interne binare ce nu sînt totdeauna posibile în mulțimea $E = \{a, b\}$, diferite de cele din figurile 131, 132 și 134.

3. Se dă mulțimea de litere $F = \{m, p, r\}$. Folosind diagrame cu săgeți, stabiliți:

a) trei operații interne binare în F, totdeauna posibile;

b) trei operații interne binare în F care să nu fie totdeauna posibile.

4. Se dă mulțimea P de numere: $P = \{1, 2\}$. Faceți diagrama cu săgeți a relației prin care se realizează următoarele corespondențe de la elemente din P^2 la elemente din P:

$$(1, 1) \longrightarrow 1; \quad (1, 2) \longrightarrow 2; \quad (2, 2) \longrightarrow 1.$$

Este aceasta o operație internă binară în P? Dacă da, este ea totdeauna posibilă, sau nu?

5. Același enunț ca la problema (5), în care se înlocuiesc cele trei corespondențe cu:

$$(1, 1) \longrightarrow 2; \quad (1, 2) \longrightarrow 1; \quad (2, 1) \longrightarrow 2; \quad (2, 2) \longrightarrow 1.$$

6. Fie mulțimea $E = \{a, b\}$. Tabela alăturată face să corespundă unor cupluri din E^2 acel element din E care este scris la intersecția liniei care începe cu primul element al cuplului, cu coloana care începe cu al doilea element al cuplului. (*Exemplu*: $(a, b) \longrightarrow b$, etc.).

	a	b
a	a	b
b		b

a) Faceți diagrama cu săgeți a relației de la E^2 la E dată cu ajutorul tabelei, numită *tabelă de corespondență*.

b) Această relație reprezintă o operație internă binară în E? Dacă da, este această operație totdeauna posibilă, sau nu?

7. Același enunț ca la (7), dar înlocuind mulțimea E cu $F = \{m, p, s\}$ și tabela prin:

a)

	m	p	s
m	p		m
p		p	
s	m		p

b)

	m	p	s
m	m	s	p
p	p	m	s
s	s	p	m

c)

	m	p	s
m		s	m
p	s		p
s	m	p	

3. DIVERSE MODURI DE PRECIZARE A UNEI OPERAȚII

În cele ce urmează ne limităm la operațiile interne binare într-o mulțime, dar cele spuse pot fi extinse la orice operație.

Fie mulțimea: $E = \{a, b\}$ și tabela de corespondență alăturată.

	a	b
a	a	a
b		b

a) Faceți diagrama cu săgeți a relației de la E^2 la E dată cu ajutorul tabelei.

b) Această relație determină o operație internă binară în E? Dacă da, este această operație totdeauna posibilă, sau nu?

Diagrama cu săgeți solicitată la (*a*) este făcută în figura 135. Se constată că relația respectivă reprezintă o operație în E (de ce?), care nu este totdeauna posibilă (de ce?)

O tabelă de corespondență care definește o operație se numește tabelă de operație.

Atît tabela de operații dată, cît și diagrama cu săgeți din figura 135, stabilesc următoarele corespondențe de la elemente (cupluri) din E^2 la elemente din E:

$$(a, a) \longrightarrow a; \quad (a, b) \longrightarrow a; \quad (b, b) \longrightarrow b \qquad (a)$$

Este clar că, dacă cunoaștem mulțimea E și corespondențele de la cuplurile din E^2 la elemente din E scrise la (a), putem întocmi atît tabela de operație, cît și diagrama cu săgeți din figura 135. Așadar, cu ajutorul unor scrieri de felul celor de la (a) dispunem de *un mod de a stabili o operație scriind toate corespondențele de la un cuplu la un element care se realizează prin operația respectivă.*

Ca exerciții, să facem diagrama cu săgeți a relației de la E^2 la E dată prin:

$$(a, a) \longrightarrow a \qquad (b, a) \longrightarrow a \qquad (b)$$
$$(a, b) \longrightarrow b \qquad (b, b) \longrightarrow b$$

Executînd diagramele mulțimilor E^2 și E, pe baza scrierilor de la (*b*) se trasează cu ușurință săgețile care indică cu ce element din E corespunde fiecare cuplu din E^2, obținîndu-se diagrama cu săgeți din figura 136.

Se vede că scrierile de la (*b*) determină o operație în E (de ce)? care este totdeauna posibilă (de ce?).

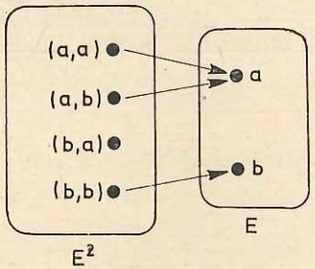


Fig. 135

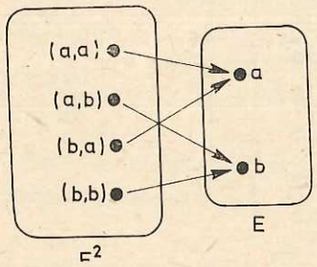


Fig. 136

Într-o aceeași mulțime E se pot introduce mai multe operații. În cazul operațiilor în E date prin scrierile (a) și (b) de mai sus, avem:

$(a, b) \longrightarrow a$ (cuplul (a, b) corespunde cu a) dată prin (a), și

$(a, b) \longrightarrow$ (cuplul (a, b) corespunde cu b) dacă este vorba de operația dată prin (b).

În acest mod de scriere nimic nu ne informează despre care din cele două operații este vorba. *Pentru a se evita confuziile, putem folosi un semn, un simbol care să le deosebească.*

Astfel, folosind simbolul „∘" (cerculeț) pentru operația dată prin (a) și „*" (steluță) pentru aceea dată prin (b) dacă scriem:

$(a, b) \xrightarrow{\circ} a$ (cuplul (a, b) prin operația notată cu „∘" corespunde cu a)

$(a, b) \xrightarrow{*} b$ (cuplul a, b) prin operația notată cu „*" corespunde cu b)

vom ști, de fiecare dată, de care operație este vorba.

Ca exerciții, scrieți din nou corespondențele de la (a) folosind simbolul „∘" și citiți, de fiecare dată, scrierea respectivă, și apoi faceți același lucru cu corespondențele de la (b).

Rezumînd cele de mai sus se vede că pînă acum am învățat trei moduri de a stabili o operație:

1° prin diagrama cu săgeți;

2° prin tabelă de operație;

3° prin scrierea tuturor corespondențelor realizate de la cupluri formate cu elementele mulțimii, la elemente ale mulțimii.

Probleme

1. Se dă mulțimea $F = \{m, p, s\}$ și diagrama cu săgeți din figura 137.

a) Arătați că diagrama stabilește o operație în F care nu este totdeauna posibilă.

b) Faceți tabela de operație corespunzătoare diagramei.

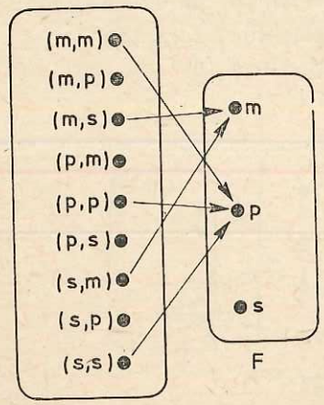


Fig. 137

c) Folosind pentru această operație simbolul „·" (punct), scrieți (și citiți de fiecare dată) toate corespondențele de felul:

$$(m, m) \xrightarrow{\cdot} p$$

care ar stabili, împreună, aceeași operație în F ca și diagrama cu săgeți sau tabela de operație de mai sus.

2. Fie mulțimea $F = \{m, p, s\}$ și scrierile:

$$\begin{array}{lll} (m, m) \xrightarrow{**} m & (p, m) \xrightarrow{**} p & (s, m) \xrightarrow{**} s \\ (m, p) \xrightarrow{**} m & (p, p) \xrightarrow{**} p & (s, p) \xrightarrow{**} s \\ (m, s) \xrightarrow{**} m & (p, s) \xrightarrow{**} p & (s, s) \xrightarrow{**} s \end{array} \qquad (c)$$

a) Faceți diagrama cu săgeți a relației de la F^2 la F stabilită de corespondențele (c).

b) Arătați că relația dată prin (c) este o operație totdeauna posibilă în F. Ce simbol s-a folosit pentru această operație?

c) Faceți tabela de operație pentru operația „**" în F dată prin (c).

3. În mulțimea $F = \{m, p, s\}$ stabiliți trei operații, diferite de cele din problemele (1) și (2) de mai sus:

a) prima, folosind diagrama cu săgeți;

b) a doua, folosind tabela de operație;

c) a treia, folosind simbolul „∘" și scriind toare corespondențele ce se realizează de la cuplurile din F^2 la elementele din F;

d) fiecare din operațiile astfel introduse, redați-o și prin celelalte două procedee cunoscute.

4. OPERAȚII DATE PRIN REGULI DE OPERAȚIE

Primul exemplu

Să luăm mulțimea:

$$E = \{a, b\}$$

și următoarea *regulă de corespondență de la cuplurile din E^2 la elementele din E, regulă pe care o vom nota cu simbolul „∘"*:

„Cuplurile care au componentele egale se pun în corespondență cu elementele din E care figurează în cuplu; cuplurile cu componentele diferite între ele se pun în corespondență cu a din E, dacă componenta a doua nu este a".

Executînd diagramele mulțimilor E^2 și E se trasează ușor corespondențele indicate de regula „∘" (se va face practic). Se constată că se obține tocmai figura 135 care știm că introduce o operație în E.

Așadar, *dacă cunoaștem mulțimea E și regula „∘" putem întocmi diagrama cu săgeți a operației.* Este clar că putem face și tabela de operație sau putem scrie corespondențele indicate la (a), pagina 121, ceea ce se va face și ca exercițiu.

Rezultă că regula „∘" stabilește o operație în E aceeași ca și tabela de operație dată la pagina 121, ca diagrama cu săgeți din figura 135, sau ca scrierile (a) de la pagina 121.

O regulă de corespondență care stabilește o operație se numește regulă de operație.

Introducerea unei operații cu ajutorul unei reguli de operație este al patrulea mod de precizare a operației pe care l-am învățat *și el este cel mai des folosit în matematică.*

Regula de operație „∘" ne conduce cu precizie de la un cuplu din E^2, să zicem (a, b), la corespondentul său din E, în cazul nostru a.

Aceasta face posibil a folosi pentru „a“ din E notarea simbolică „$a \circ b$“, ceea ce duce la scrierea:

$a \circ b = a$ (a operat prin „$\circ$“ cu b este egal cu a).

În adevăr, din stînga egalității rezultă atît cuplul (a, b) cît și regula „$\circ$“ care ne conduce de la (a, b) la a.

Pe viitor, în locul scrierilor de forma:

$$(a, b) \xrightarrow{\circ} a$$

vom folosi mai ales:

$$a \circ b = a$$

care păstrează întreaga semnificație a celei anterioare.

Folosind ultima notație introdusă, în baza regulii „$\circ$“ date mai sus pentru mulțimea E, vom putea scrie:

$$a \circ a = a; \quad a \circ b = a; \quad b \circ b = b \qquad (d)$$

În general, într-o scriere de forma $x \circ y = z$, x și y se numesc *„termeni“* iar z „rezultatul“ operației „$\circ$“ efectuate cu x și y.

Al doilea exemplu.

În mulțimea:

$$E = \{a, b\}$$

să considerăm regula de corespondență „$*$“ cu următorul conținut:

„Orice cuplu format cu elemente din F, se pune în corespondență cu al doilea element ce figurează în cuplul respectiv“.

Aplicînd tuturor cuplurilor ce pot fi formate cu elemente din E regula de corespondență „$*$“, obținem:

$$(a, a) \xrightarrow{*} a \qquad (b, a) \xrightarrow{*} a \qquad (e)$$

$$(a, b) \xrightarrow{*} b \qquad (b, b) \xrightarrow{*} b$$

(Este bine să se citească aceste scrieri, așa cum s-a arătat, pentru a se forma obișnuința exprimării.)

Executînd diagramele mulțimilor E^2 și E și trasînd săgețile indicate de corespondențele de mai sus (se va face practic), se obține tocmai figura 136 care reprezintă diagrama cu săgeți a unei operații totdeauna posibilă în E.

Regula de corespondență „$*$“, stabilind o operație în E, este o regulă de operație și deci putem scrie în loc de (e):

$$a * a = a \qquad b * a = a \qquad (f)$$

$$a * b = b \qquad b * b = b$$

Observăm că scrierile de felul lui (e) sînt posibile dacă „$*$“ este o regulă de corespondență oarecare, dar scrierile de forma (f) sînt folosite numai dacă regula de corespondență este în același timp o regulă de operație.

Al treilea exemplu

Nu trebuie crezut că orice regulă de corespondență de la cupluri formate cu elemente ale unei mulțimi, la elemente ale acelei mulțimi, este și o regulă de operație în acea mulțime. Este suficient ca regula să dea unor cupluri mai mult ca un corespondent, pentru ca ea să nu stabilească o operație în mulțimea respectivă.

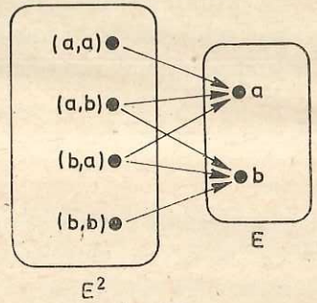


Fig. 138

Ca exemplu, să luăm mulțimea:

$$E = \{a, b\}$$

și regula de corespondență „$\triangle$“ (triunghi) cu următorul conținut:

„Orice cuplu format cu elemente din E se pune în corespondență cu elementele lui E ce figurează în cuplul respectiv“.

Aplicînd tuturor cuplurilor ce pot fi formate cu elemente din E regula de corespondență „$\triangle$“, obținem:

$$(a, a) \xrightarrow{\triangle} a \qquad (b, a) \xrightarrow{\triangle} \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

$$(a, b) \xrightarrow{\triangle} \begin{cases} a \\ b \end{cases} \qquad (b, b) \xrightarrow{\triangle} b \qquad (g)$$

Se vede că unele cupluri au mai mult ca un corespondent prin regula „$\triangle$“, *ceea ce face să avem o relație de la E^2 la E care nu este și funcție.* Acest lucru este pus în evidență și în figura 138, obținută prin executarea diagramelor mulțimilor E^2 și E și trasarea săgeților cerute de corespondențele scrise la (g).

Nefiind funcție de la E^2 la E, relația stabilită prin „$\triangle$“ nu este nici operație.

Întrucît regula de corespondență „$\triangle$“ nu stabilește o operație în E, ea nu este o regulă de operație în E și nu putem folosi scrieri ca cele de la (f).

Interdicția este necesară deoarece, de exemplu, cuplul (a, b) și regula „$\triangle$“ ne conduce și la „a“ și la „b“ din E. Ar urma să scriem simultan:

$$a \triangle b = a \text{ și } a \triangle b = b$$

adică am obține aceeași notație „$a \triangle b$“ pentru două elemente diferite din E, și pentru a și pentru b, ceea ce ar da loc la confuzii.

Probleme

1. Se dă mulțimea $F = \{m, p, s\}$ și următoarea regulă de corespondență, pe care o notăm cu „$\cdot$“: Orice cuplu format cu elemente din F se pune în corespondență cu:

p, dacă elementele cuplului sînt egale;

m, dacă cuplul conține și pe m și pe s.

a) Faceți diagrama cu săgeți a relației de la F^2 la F stabilită de regula de corespondență „$\cdot$“.

b) Arătați că regula de corespondență „·" este și o regulă de operație în F.

c) Faceți tabela operației „·" fără a folosi diagrama cu săgeți, ci exclusiv conținutul regulii de operație dată inițial.

d) Scrieți toate egalitățile de forma

$$m \cdot m = p$$

determinate de regula „·" în F, fără a folosi diagrama cu săgeți sau tabela ce operație, ci exclusiv conținutul regulii „·" date inițial.

2. Fie în mulțimea $F = \{m, p, s\}$ regula de corespondență „**" prin care fiecare cuplu format cu elemente din F este pus în corespondență cu elementul din E care figurează drept primă componentă în cuplul respectiv.

a) Executați diagrama cu săgeți a relației de la F^2 la F stabilită de această regulă de corespondență.

b) Cu ajutorul diagramei arătați că „**" determină o operație totdeauna posibilă în F.

c) Folosind simbolul „**" al operației și semnul „=" al egalității, scrieți rezultatele operației „**" efectuate cu oricare elemente din F, după modelul:

$$m{**}m = m$$

3. În mulțimea $F = \{m, p, s\}$ se dă regula de corespondență „∴"; „Orice cuplu format cu elemente din F, care nu conțin p, se pune în corespondență cu elementele din F care figurează în cuplul respectiv".

a) Este „∴" o regulă de operație în F?

b) Folosind una din scrierile:

$$(m, m) \xrightarrow{\therefore} m \text{ și } m \therefore m = m$$

precizați toate corespondențele stabilite de „∴" de la cupluri din F^2 la elemente din F.

c) Puteți schimba alegerea făcută la (*b*)? Dacă da, schimbați-o.

4. În mulțimea $A = \{a, b, c\}$ se dă regula „$\overset{*}{*}$" formulată: „Orice cuplu format cu elemente din A se pune în corespondență cu elemente din A, care:

— figurează în cuplul respectiv, dacă componentele cuplului sînt egale;

— nu figurează în cuplul respectiv, dacă componentele cuplului sînt diferite între ele."

a) Este „$\overset{*}{*}$" o regulă de operație în A?

b) Folosind una din scrierile:

$$(a, b) \xrightarrow{\overset{*}{*}} c \text{ și } a \overset{*}{*} b = c$$

precizați toate corespondențele stabilite de „$\overset{*}{*}$" de la cupluri din A^2 la elemente din A.

c) Puteți schimba alegerea făcută la (*b*)? Dacă da, schimbați-o.

6. OPERAȚII INTERNE BINARE ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1. OPERAȚII „OARECARE" ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Indicarea unei operații într-o mulțime folosind diagrama cu săgeți, tabela de operație sau scriind toate corespondențele realizate de la cupluri, la elemente ale mulțimii, se complică repede odată cu creșterea numărului elementelor acelei mulțimi.

Avantajul precizării operației cu ajutorul unei reguli de operație constă tocmai în independența sa de numărul de elemente al mulțimii în care se introduce operația.

Dacă mulțimea are un număr nesfîrșit de elemente, cum este cazul mulțimii N a numerelor naturale, *calea introducerii printr-o regulă rămîne singura posibilă.*

Să luăm cîteva exemple:

Exemplul 1.

Fie regula de corespondență exprimată prin:

$$(n, p) \xrightarrow{*} n$$

unde n și p sînt numere naturale.

Introduce această regulă o operație în N? Dacă da, este ea totdeauna posibilă, sau nu?

Mai întîi observăm că regula „*" poate fi formulată: *orice cuplu de numere naturale se pune în corespondență cu numărul natural ce figurează drept prim element al cuplului respectiv.*

În baza ei, vom avea:

$$(2; 3) \xrightarrow{*} 2;\ (4; 0) \xrightarrow{*} 4;\ (1; 1) \xrightarrow{*} 1;\ \text{etc.}$$

Deoarece „*" face să corespundă la cupluri din N^2, elemente din N, ea introduce o relație de la N^2 la N.

Să analizăm dacă relația respectivă este și operație în N.

În acest scop *trebuie să cercetăm dacă există cupluri care primesc prin „*" mai mult decît un corespondent.* După cum se știe, *pentru a avea o operație trebuie* să nu existe astfel de cupluri.

Dar, orice cuplu din N^2 are un singur prim element, deci regula „*" nu poate da unui cuplu mai mult decît un corespondent. Așadar, ea determină o operație în N. Ca urmare, vom putea scrie:

$$2*3 = 2;\quad 4*0 = 4;\quad 1*1 = 1;\ \text{etc.}$$

Să vedem acum dacă operația „*" în N este totdeauna posibilă, sau nu.

Întrucît fiecare cuplu are un prim element, rezultă că *fiecare cuplu va primi un corespondent prin regula „*"* și deci operația este totodeauna posibilă.

Exemplul 2

Fie regula de corespondență exprimată prin:

$$(n, p) \xrightarrow{\circ} \max\{n, p\}, \text{ pentru } n \neq p$$

unde n și p sînt numere naturale, iar notația max $\{n, p\}$ reprezintă pe cel mai mare dintre numerele n și p.

Introduce această regulă de corespondență o operație în N? În caz afirmativ, este ea totdeauna posibilă, sau nu?

Regula de corespondență de mai sus poate fi formulată: *orice cuplu de numere naturale, avînd componentele diferite, se pune în corespondență cu cel mai mare din numerele ce figurează drept componente.*

Pentru a-i înțelege clar conținutul, să stabilim cîteva corespondențe cu această regulă:

$$(5; 1) \xrightarrow{\circ} 5; \quad (2; 7) \xrightarrow{\circ} 7; \quad (0; 3) \xrightarrow{\circ} 3; \text{ etc.}$$

Pentru a vedea dacă „∘" determină o operație în N, este suficient să observăm că *dintre două numere naturale diferite, unul singur este cel mai mare. Așadar, nici un cuplu nu poate primi prin "∘" mai mult decît un corespondent și deci „∘" determină o operație în N.* Pe această bază putem scrie:

$$5 \circ 1 = 5; \quad 2 \circ 7 = 7; \quad 0 \circ 3 = 3; \text{ etc.}$$

Acum analizăm dacă operația „∘" în N este totdeauna posibilă, sau nu.

Prin intermediul lui „∘" găsim un corespondent la fiecare cuplu format cu numere naturale diferite între ele, dar „∘" nu ne spune ce corespondent să dăm cuplurilor conținînd componente egale între ele:

$$(3; 3) \xrightarrow{\circ} ?; \quad (0; 0) \xrightarrow{\circ} ? \quad (9; 9) \xrightarrow{\circ} ?$$

Lăsînd cupluri din N^2 fără corespondent în N, „∘" determină în N o operație ce nu este totodeauna posibilă:

$$3 \circ 3 = \text{imposibil}; \; 0 \circ 0 = \text{imposibil}; \; 9 \circ 9 = \text{imposibil}.$$

Exemplul 3

Se dă regula de corespondență:

$$(n, p) \xrightarrow{\triangle} \begin{cases} \max\{n, p\} & \text{dacă } n \neq p. \\ 5, & \text{dacă } n = p. \end{cases}$$

Introduce ea o operație în N? În caz afirmativ, este ea totdeauna posibilă, sau nu?

Conținutul regulii este asemănător cu acela de la exemplul anterior, numai că „△" nu lasă fără corespondent cuplul în care componentele sînt egale:

$$(1, 8) \longrightarrow 8; \quad (7; 0) \longrightarrow 7; \quad (4; 9) \longrightarrow 9;$$

$$(3, 3) \longrightarrow 5; \quad (0; 0) \longrightarrow 5; \quad (5; 5) \longrightarrow 5 \text{ etc.}$$

Judecînd ca la exemplul (2) deducem că „△" introduce o operație în N, care este totdeauna posibilă. Vom putea scrie:

$$1 \triangle 8 = 8; \quad 7 \triangle 0 = 7; \quad 4 \triangle 9 = 9;$$
$$3 \triangle 3 = 5; \quad 0 \triangle 0 = 5; \quad 5 \triangle 5 = 5 \text{ etc.}$$

Exemplul 4

Se dă regula de corespondență:

$$(n, p) \xrightarrow{\odot} \text{oarecare dintre } n \text{ și } p,$$

unde n și p sînt numere naturale.

Determină ea o operație în N? Dacă da, este aceasta totdeauna posibilă, sau nu?

Pentru a deveni clar conținutul lui „⊙", să stabilim cu ea corespondentele cîtorva cupluri:

$$(4; 7) \xrightarrow{\odot} 4 \text{ dar, avem și } (4; 7) \xrightarrow{\odot} 7$$

$$(6; 6) \xrightarrow{\odot} 6$$

$$(9; 1) \xrightarrow{\odot} 9, \text{ dar avem și } (9, 1) \xrightarrow{\odot} 1 \text{ etc.}$$

Observăm că, de exemplu:

$$(4; 7) \xrightarrow{\odot} \begin{cases} 4 \\ 7 \end{cases}$$

adică cuplurile avînd elementele diferite primesc prin regula „⊙" mai mult ca un corespondent în N. Deducem că „⊙" determină o relație de la N^2 la N, fără a determina o operație în N.

Întrucît nu avem o operație în N, nu se mai pune problema cercetării dacă este totdeauna posibilă, sau nu.

De asemenea, observăm că nu putem scrie:

$4 \odot 7 = 4$, deoarece ar urma să scriem și
$4 \odot 7 = 7$.

Prin urmare, întîlnind notația $4 \odot 7$ nu am putea ști dacă este vorba de numărul 4, sau de numărul 7, ceea ce ar da naștere la confuzii. (Din cele două scrieri ar urma $4 = 4 \odot 7 = 7$ deci $4 = 7$, ceea ce este fals. Așadar, admițînd scrierile respective s-ar introduce greșeli în calculul matematic.)

Probleme

1. Verificați dacă regula de corespondență:

$$(n, p) \xrightarrow{**} p$$

unde n și p sînt numere naturale, determină o operație în N. În caz afirmativ, este aceasta totdeauna posibilă, sau nu?

2. Se dă regula de corespondență:

$$(n, p) \xrightarrow{\circ\circ} \min \{n, p\}, \text{ pentru } n \neq p$$

unde n și p sînt numere naturale, iar notația $\min \{n, p\}$ reprezintă pe cel mai mic dintre numerele n și p.

Determină această regulă o operație în N? Dacă da, este ea totdeauna posibilă?

3. Cercetați dacă regula:

$$(n, p) \xrightarrow{\Delta} \begin{cases} \min \{n, p\}, & \text{dacă } n \neq p \\ 0, & \text{dacă } n = p \end{cases}$$

introduce o operație în N. În caz afirmativ, vedeți dacă ea este totdeauna posibilă.

4. Cercetați dacă regula:

$$(n, p) \xrightarrow{\square} \begin{cases} 6, \text{ dacă } n = p; \\ \text{orice număr natural mai mic decît } 3, \\ \text{dacă } n \neq p \end{cases}$$

determină o operație în N. Dacă da, este totdeauna posibilă?

2. OPERAȚII „OBIȘNUITE" ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1. Să luăm regulile de corespondență:

$$(a, b) \xrightarrow{+} s; \qquad (a, b) \xrightarrow{\times} p$$

unde a și b sînt numere naturale, „+", „×" sînt regulile cunoscute de adunare și înmulțire a numerelor naturale (date cu ajutorul mulțimilor), *iar s și p sînt, respectiv, suma și produsul numerelor naturale a și b obținute cu aceste reguli.*

Ne întrebăm dacă „+" și „×" pe care le cunoaștem determină în N operații în sensul în care este privită operația în acest capitol. În caz afirmativ, sînt aceste operații totdeauna posibile, sau nu?

După cum știm, *regulile „+" și „×" nu dau la nici un cuplu de numere naturale mai mult decît o sumă, respectiv un produs. Urmează că ele determină operații în N, putînd scrie:*

$$a + b = s \text{ și } a \times b = p.$$

De asemenea, se știe că regulile „+" și „×" pot fi aplicate și conduc la o sumă, respectiv un produs, oricare ar fi numerele naturale a și b. Nelăsînd nici un cuplu din N^2 fără corespondent în N, „+" și „×" determină operații totdeauna posibile în N.

2. *Să luăm regulile de corespondență:*

$$(a, b) \xrightarrow{-} d; \qquad (a, b) \xrightarrow{:} c$$

unde a și b sînt numere naturale, „—", „:" sînt regulile cunoscute de scădere și împărțire cu rest a numerelor naturale (date cu ajutorul mulțimilor), iar *d și c sînt, respectiv, diferența și cîtul numerelor naturale a și b, obținute cu aceste reguli.*

Ne întrebăm dacă „—" și „:" pe care le cunoaștem determină în N operații în sensul în care este privită operația în acest capitol. În caz afirmativ, sînt aceste operații totdeauna posibile, sau nu?

După cum știm, *regulile „—" și „:" nu dau la nici un cuplu de numere naturale mai mult decît o diferență, respectiv un cît. Urmează că ele determină operații în N,* putînd scrie:

$$a - b = d; \qquad a : b = c$$

Exemple:

$$8 - 3 = 5; \quad 18 : 3 = 6; \quad 17 : 5 = 3; \quad 3 : 7 = 0 \text{ etc.}$$

De asemenea, *se știe că regula „—" nu poate fi aplicată dacă $a < b$,* iar *regula „:" (împărțire cu rest) nu poate fi aplicată dacă $b = 0$. Lăsînd unele cupluri din N^2 fără corespondent în N, „—" și „:" determină operații în N care nu sînt totdeauna posibile.*

Exemple:

$$5 - 7 = \text{imposibil}; \quad 4 : 0 = \text{imposibil}.$$

Facem observația că, luînd pentru „:" înțelesul de împărțire exactă în N, se găsește la fel ca pentru împărțirea cu rest, că împărțirea exactă este o operație în N care nu este totdeauna posibilă. Deosebirea față de împărțirea cu rest este aceea că, *la împărțirea exactă rămîn imposibile toate cazurile în care împărțirea cu rest era neexactă.*

Exemple: („:" fiind împărțirea exactă în N):

$12 : 4 = 3$	$17 : 5 = \text{imposibil}$
$9 : 0 = \text{imposibil}$	$3 : 7 = \text{imposibil}.$

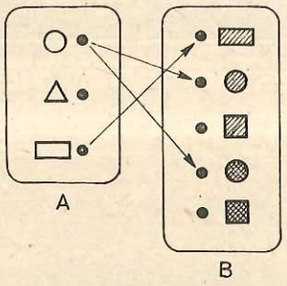


Fig. 139

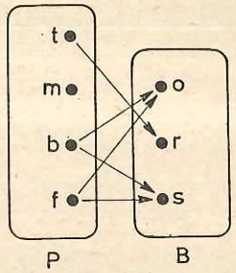


Fig. 140

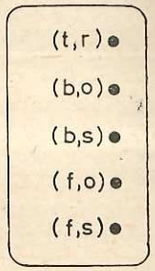


Fig. 141

Indicații privind rezolvarea unora dintre exercițiile și problemele propuse la capitolul XI

TEMA A 2-a: CORESPONDENȚA DE LA O MULȚIME LA O MULȚIME SAU RELAȚIA DE LA O MULȚIME LA O MULȚIME

Problema 1

a) Fig. 139;

b) A mulțime de plecare și B mulțime de sosire.

c) △ din A nu are corespondent în B, iar ○ din A are corespondent în B și pe ◍ și pe ⊗;

d) ▨ și ⊠ din B nu corespund la nici un element din A, ▨, ◍ și ⊗ din B corespund la cîte un element din A, neexistînd nici un element din B care să corespundă la mai multe elemente din A;

e) $G = \{$(○, ◍); (○, ⊗); (▭ ▨)$\}$

Problema 2

a) Figura 140;

b) $G = \{(t, r), (b, o), (b, s), (f, o)\ (f, s)\}$. Fig. 141;

c) m din P nu are corespondent în B, t are un corespondent, iar b și f au cîte două;

d) Nu sînt elemente în B care să nu corespundă la nici un element din A, r corespunde la un singur element din A, iar o și s la cîte două;

e) $\{(t, o), (t, s), (m, o), (m, r), (m,s), (b, r), (f, r)\}$;

f) Fig. 142.

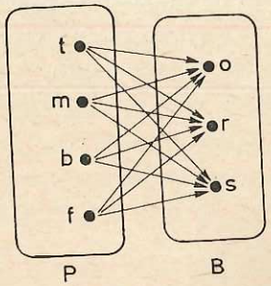


Fig. 142

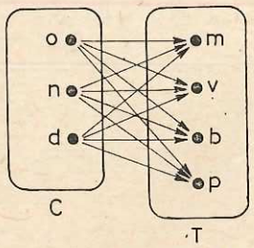


Fig. 143

Problema 3

Notăm prescurtat elementele mulțimilor C și T cu inițialele denumirilor lor: $C = \{o, n, d\}$; $T = \{m, v, b, p\}$.

a) Fig. 143;

b) $G = (o, m), (o, v), (o, b), (o, p), (n, m), (n, v), (n, b), (n, p), (d, m), (d, v), (d, b), (d, p)\}$;

c) Figura 143 arată clar că avem o corespondență de la mulțimea C la mulțimea T. Observăm că orice corespondență „de la" o mulțime la o mulțime este în același timp o corespondență „între" mulțimi.

d) G formată la (*b*) reprezintă graful relației stabilite de la C la T. Diagrama mulțimii G este în figura 144.

e) { }, adică mulțimea vidă, deoarece nu există alte cupluri cu elementul de plecare din C și cel de sosire în T, în afara celor existente în G.

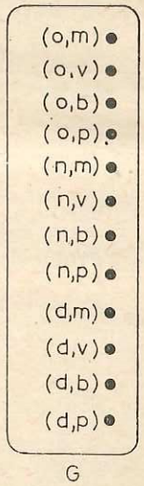


Fig. 144

Problema 4

a) Relații sînt determinate în fig. 123 și 124, deoarece sînt corespondente de la prima mulțime la cea de a doua. Corespondența din figura 122 este „între" mulțimile A și B, dar nu este „de la" o mulțime la o mulțime, existînd corespondențe de la un element la un element orientate și de la A la B, ca $m \to u$, și de la B la A, ca $t \to s$.

b) Pentru relația din fig. 123 graful este:

$$\{b, g), (e, g), (e, i), (f, g)\}$$

și pentru relația din figura 124 graful este:

$$\{(c, o), (c, p), (d, o), (d, p), (g, o), (g, p)\}.$$

c) A doua, conținînd toate cuplurile la care primul element aparține la prima mulțime și al doilea aparține mulțimii a doua.

Problema 5

a) Figura 145;

b) $G = \{(m, d), (r, f), (r, h), (s, k)\}$; *c*) figura 146; *d*) $E = \{m, r, s\}$; *e*) $T = \{d, f, h, k\}$.

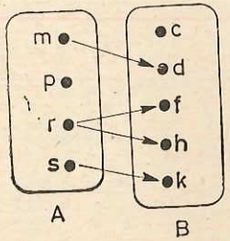


Fig. 145

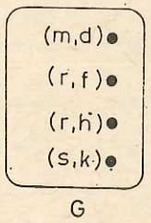


Fig. 146

Problema 6

a) $C = \{a. b, e, f)\}$ pentru figura 123 și $E = \{c, d, g\}$ pentru figura 124;
b) $\{b, e, f\}$ pentru figura 123 și $E = \{c, d, g\}$ pentru figura 124;
c) $D = \{g, h, i\}$ pentru figura 123 și $F = \{o, p\}$ pentru figura 124;
d) $\{g, i\}$ pentru figura 123 și $F = \{o, p\}$ pentru figura 124.

TEMA A 3-a: FUNCȚII. APLICAȚII

Problema 1

a) Cea dată prin diagrama (2); *b*) Cea dată prin diagrama (3); *c*) Cea dată prin diagrama (1).

Problema 2

a) Figurile 147, 148 și 149.

b) Toate reprezintă relații de la A la B, R și T determină funcții și R determină aplicație de la A la B (de ce?).

c) $\{d, f, g\}$ mulțimea de definiție și $\{p, s, u\}$ mulțimea valorilor relației determinate de C;

$\{d, f, g\}$ și $\{p, s\}$ sînt, respectiv, mulțimea de definiție și mulțimea valorilor relației determinate de R;

$\{d, f\}$ și $\{p, s\}$ sînt, respectiv, mulțimea de definiție și mulțimea valorilor relației determinate de T.

d) Mulțimea de plecare este egală cu mulțimea de definiție pentru relațiile determinate de C și R; mulțimea de sosire este egală cu mulțimea valorilor pentru relația determinată de C.

Problema 3

a) Nici unui elev din E nu-i corespunde, în acest mod, mai mult ca o bancă din B, deci relația este funcție de la E la B. Nerămînînd elevi din E la care să nu corespundă o bancă din B, funcția respectivă este și aplicație a lui E în B.

b) Același răspuns ca la (*a*), neavînd importanță dacă în B rămîn, sau nu, elemente ce nu corespund unor elemente din E.

c) Funcție, fără a fi aplicație, acuma existînd elemente din E fără corespondent în B.

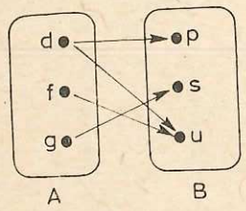


Fig. 147

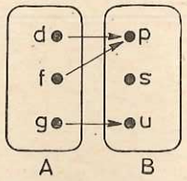


Fig. 148

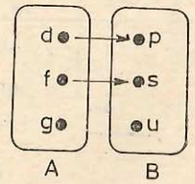


Fig. 149

Problema 4

Judecînd ca la problema (3) obținem:

a) Funcție, fără a fi aplicație de la P la S.

b) Funcție de la P la S, care este și aplicație.

c) Nu se modifică, deoarece la clasificarea relațiilor în funcții și aplicații nu are importanță dacă în mulțimea de sosire rămîn elemente ce nu corespund la nici un element din mulțimea de plecare, sau există elemente ce corespund la mai mult decît un element din mulțimea de plecare.

Problema 5

Același mod de gîndire ca la cele două probleme anterioare:

a) Funcție de la S la P, care este și aplicație.

b) Funcție de la S la P, care nu este și aplicație.

c) Relații de la S la P, care nu sînt și funcții deoarece există elemente din S cu mai mult ca un corespondent în P (scaunele pe care stau doi copii).

TEMA A 4-a: OPERAȚII BINARE

Problema 1

a) (1) și (3) stabilesc operații. (2) este relație de la $A \times B$ la C, fără a fi funcție (de ce?) și nu poate fi, deci, operație.

b) (3) nu este operație totdeauna posibilă, lăsînd cuplul (e, f) din $A \times B$ fără corespondent în C. (1) dă operație totdeauna posibilă, fiecare cuplu din $A \times B$ avînd un corespondent în C.

Problema 2

a) Figurile 150 și 151; *b*) Figurile 152 și 153.

Problema 3

a) Figura 154. Operația nu este totdeauna posibilă.

b) Figura 155. Operația este totdeauna posibilă.

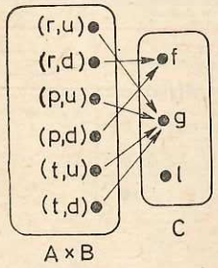


Fig. 150

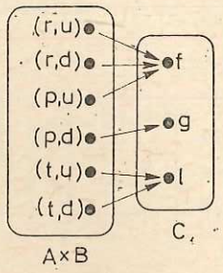


Fig. 151

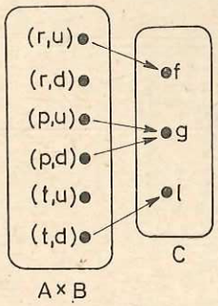


Fig. 152

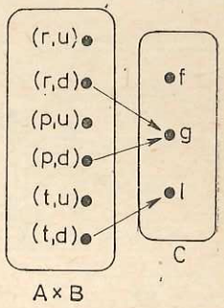


Fig. 153

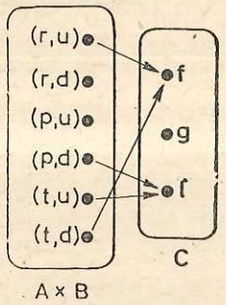


Fig. 154

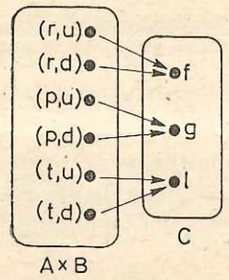


Fig. 155

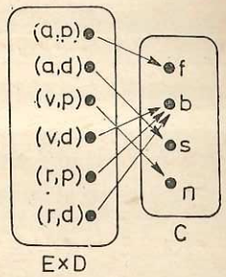


Fig. 156

Problema 4

Figura 156 arată că avem o relația de la $E \times D$ la C (de ce?), care este și funcție (de ce?) și aplicație (de ce?). Fiind funcție este și operație, fiind aplicație, operația este totdeauna posibilă.

TEMA A 5-a: OPERAȚII INTERNE BINARE ÎNTR-O MULȚIME

SUBTEMA 2: OPERAȚIA INTERNĂ BINARĂ ÎNTR-O MULȚIME

Exercițiul 1

Figurile 157 și 158. Sînt posibile și alte alternative?

Exercițiul 2

Figurile 159 și 160. Sînt posibile și alte alternative?

Exercițiul 3

a) Figura 161 și alte două de acest fel, avînd grijă a nu rămîne cupluri din F^2 fără corespondent în F, dar putînd rămîne în F elemente în care să nu sosească nici o săgeată.

b) Se fac trei figuri ca la (a), dar se lasă unele cupluri din F^2 fără corespondent în F (pe figură, de la unele cupluri din F^2 nu pleacă săgeți).

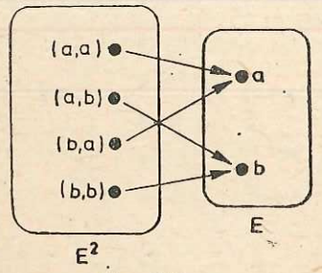


Fig. 157

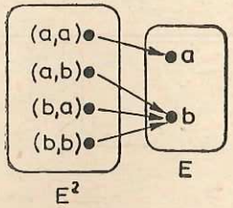


Fig. 158

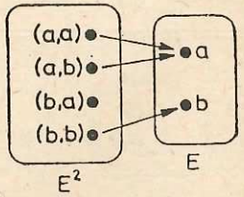


Fig. 159

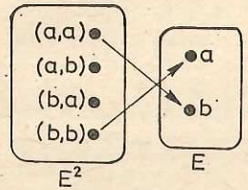


Fig. 160

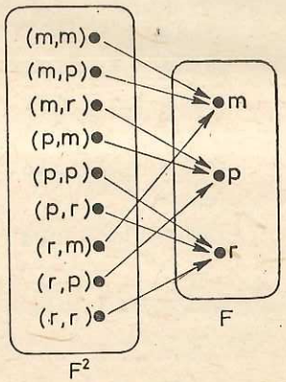


Fig. 161

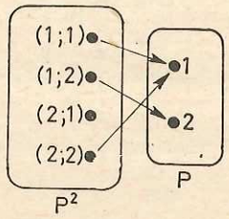


Fig. 162

Problema 4

Figura 162. Avem o relație de la P^2 la P (de ce?), care este și funcție (de ce?) deci este operație internă binară în P. Nefiind aplicație (de ce?) operația nu este totdeauna posibilă în P.

Problema 5

Se rezolvă după modelul anterior. Se obține o operație totdeauna posibilă în P (fig. 163).

Problema 6

a) Figura 164;

b) nici un cuplu din E^2 nu are mai mult ca un corespondent în E, deci avem o funcție. Fiind funcție de la E^2 la E este și operație. Întrucît nu este aplicație (cuplul (b, a) din E nu are corespondent în E), operația nu este totdeauna posibilă în E.

Problema 7

a) Figura 137. Judecînd ca la problema anterioară se vede că avem o operație în F care nu este totdeauna posibilă.

b) Figura 165. Se judecă ca la problemele anterioare, dar se găsește că este o operație totdeauna posibilă în F.

c) Figura 166. O operație ce nu este totdeauna posibilă în F.

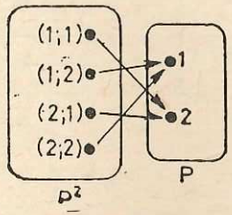


Fig. 163

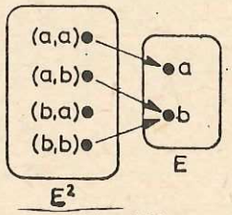


Fig. 164

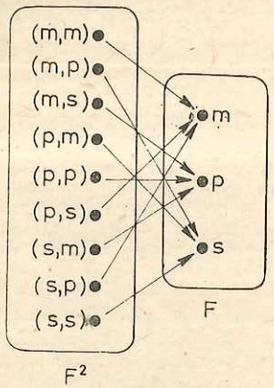


Fig. 165

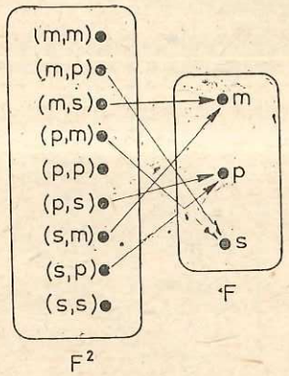


Fig. 166

	m	p	s
m	p		s
p		p	
s	m		p

Fig. 167

TEMA A 3-a: DIVERSE MODURI DE PRECIZARE A UNEI OPERAȚII

Problema 1

b) Tabela din figura 167.

c) $(m, m) \xrightarrow{\cdot} p$ $\quad (p, p) \xrightarrow{\cdot} p$ $\quad (s, s) \xrightarrow{\cdot} p$

$(m, s) \xrightarrow{\cdot} m$ $\quad (s, m) \xrightarrow{\cdot} m$

Problema 2

a) Figura 168; *c*) Figura 169.

Problema 3

a) Figura 170; *b*) Figura 171.

c) $m : m = p$ $\quad s : s = s$ $\quad s : p = s$

$p : p = m$ $\quad m : p = m$ $\quad s : m = p.$

Notă. Evident, sînt posibile și alte alternative.

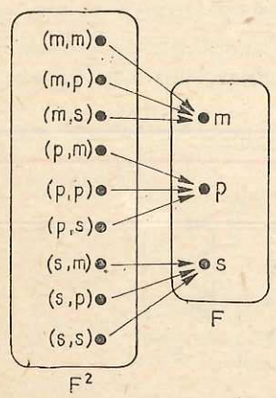


Fig. 168

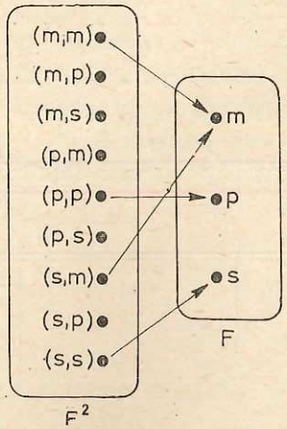


Fig. 169

	m	p	s
m	m	m	m
p	p	p	p
s	s	s	s

Fig. 170

	m	p	s
m	p		m
p		p	
s	s		p

Fig. 171

•	m	p	s
m	p		m
p		p	
s	m		p

Fig. 172

TEMA A 4-a: OPERAȚII DATE PRIN REGULI DE OPERAȚII

Problema 1

a) Figura 137. *b*) Din figură se vede că avem o funcție de la F^2 la F, deci regula „·" stabilește o operație în F. Așadar, „·" este o regulă de operație în F.

c) Tabela din figura 172.

d) $m \cdot m = p$ $\quad p \cdot p = p$ $\quad s \cdot s = p$

$m \cdot s = m$ $\quad s \cdot m = m$

Problema 2

c) $m^{**}m = m$ $\quad p^{**}m = p$ $\quad s^{**}m = s$

$m^{**}p = m$ $\quad p^{**}p = p$ $\quad s^{**}p = s$

$m^{**}s = m$ $\quad p^{**}s = p$ $\quad s^{**}s = s$

Problema 3

a) Se face diagrama cu săgeți din figura 173. Se vede că avem o relație de la F^2 la F care nu este funcție, unele cupluri din F^2 avînd mai mult ca un corespondent în F (cum ar fi (m, s) care are corespondent și pe m și pe s). Nefiind funcție, nu este operație în F.

b) $(m, m) \xrightarrow{\cdot} m$ $\quad (m, s) \xrightarrow{\cdot} s$ $\quad (s, m) \xrightarrow{\cdot} s$

$(m, s) \xrightarrow{\cdot} m$ $\quad (s, m) \xrightarrow{\cdot} m$ $\quad (s, s) \xrightarrow{\cdot} s$

c) Alegerea modului de scriere nu poate fi schimbată, al doilea mod nefiind permis în cazul nostru, deoarece nu avem o operație.

Problema 4

a) Din diagrama cu săgeți făcută în figura 174 se vede că regula „$**$" stabilește o aplicație de la F^2 la F, deci o operație totdeauna posibilă în F.

b) Folosind prima scriere:

$(m, m) \xrightarrow{**} m$ $\quad (p, m) \xrightarrow{**} s$ $\quad (s, m) \xrightarrow{**} p$

$(m, p) \xrightarrow{**} s$ $\quad p, p) \xrightarrow{**} p$ $\quad (s, p) \xrightarrow{**} m$

$(m, s) \xrightarrow{**} p$ $\quad (p, s) \xrightarrow{**} m$ $\quad (s, s) \xrightarrow{**} s$

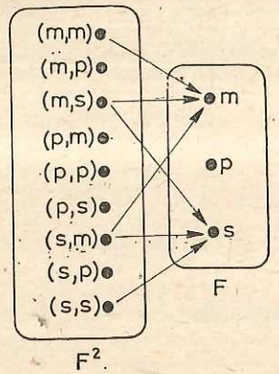


Fig. 173

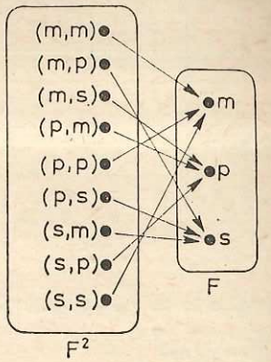


Fig. 174

c) Avînd o operație, putem folosi și scrierea a doua:

$m*m = m$ $\quad p*m = s$ $\quad s*m = p$

$m*p = s$ $\quad p*p = p$ $\quad s*p = m$

$m*s = p$ $\quad p*s = m$ $\quad s*s = s$

TEMA A 6-a: OPERAȚII INTERNE BINARE ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

SUBTEMA 1°: OPERAȚII „OARECARE" ÎN MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Problema 1

Regula pune în corespondență cuplul format cu numere naturale, cu numărul natural ce figurează ca al doilea element în cuplul respectiv. În acest mod, nici un cuplu nu poate primi mai mult de un corespondent, așadar regula „**" determină o operație în N.

Deoarece fiecare cuplu are un al doilea element, urmează că nu pot rămîne cupluri de numere naturale fără corespondent prin regula „**" și ea definește o operație totdeauna posibilă în N. Vom avea:

$3**5 = 5$; $\quad 8**7 = 7$; $\quad 4**4 = 4$ etc.

Problema 2

Să stabilim cîteva corespondente cu regula „ ∘∘ "

$(3;5) \xrightarrow{\circ\circ} 3$; $\quad (8;7) \xrightarrow{\circ\circ} 7$; $\quad (4;4) \xrightarrow{\circ\circ} ?$

Dacă componentele cuplului sînt diferite, dintre ele unul este mai mare și unul mai mic. Regula „∘∘" face să corespundă cuplului de numere naturale cu elementele diferite între ele, cel mai mic dintre acestea. Așadar, un cuplu nu poate primi prin „∘∘" mai mult ca un corespondent, deci ea definește o operație în N.

Lăsînd fără corespondent cuplurile ce au componentele egale, operația respectivă nu este totdeauna posibilă în N. Vom avea:

$3 \circ\circ 5 = 3$; $\quad 8 \circ\circ 7 = 7$; $\quad 4 \circ\circ 4 =$ imposibil etc.

Problema 3

Judecînd ca la problema anterioară se găsește că este o operație totdeauna posibilă în N. În adevăr, de data aceasta cuplurile cu componentele egale primesc corespondent pe 0:

$3 \triangle 5 = 3$; $\quad 8 \triangle 7 = 7$; $\quad 4 \triangle 4 = 0$ etc.

Problema

Să stabilim cîteva corespondențe cu regula „□":

$$(3;5) \xrightarrow{\square} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \text{ cu sensul } \begin{array}{l} (3;5) \xrightarrow{\square} 0 \\ (3;5) \xrightarrow{\square} 1 \\ (3;5) \xrightarrow{\square} 2 \end{array}$$

$$(8;7) \xrightarrow{\square} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}; \quad (4;4) \xrightarrow{\square} 6; \quad (0;0) \xrightarrow{\square} 6 \text{ etc.}$$

Existînd cupluri de numere naturale care primesc mai mult ca un corespondent prin regula „□", aceasta nu stabilește o operație în N.

Nefiind operație, nu mai are sens a căuta dacă este totdeauna posibilă sau nu.

Observăm că în această situație nu sînt permise scrieri ca:

$3 \square 5 = 0$; $\quad 3 \square 5 = 1$; $\quad 8 \square 7 = 0$; $\quad 4 \square 4 = 6$ etc.

CUPRINS

Plan editură Nr. 27479; Coli de tipar 9
Bun de tipar; 17.07.1981

Tiparul executat sub comanda
nr. 371 la
Întreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr.89—97
București,
Republica Socialistă România