Lei 5,40

Editura didactică și pedagogică — București, 1974

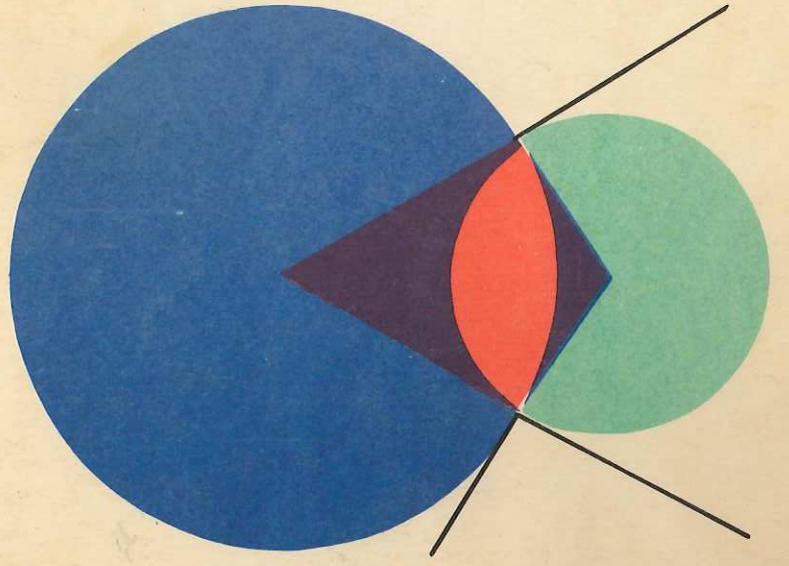
III

Geometrie analitică

Gh. D. Simionescu

Geometrie analitică

Manual pentru anul III liceu, secția reală
și licee de specialitate



Gh. D. Simionescu

Geometrie analitică

Manual pentru anul III liceu, secția reală și licee de specialitate

Editura didactică și pedagogică — București

Manualul a fost elaborat în anul 1958 și revizuit
în anii 1967, 1970 și 1973

Referent:
Prof. Lia Aramă

Redactor: prof. Emilian Stătescu
Tehnoredactor: Bogdan Valentin

Prefață

Geometria a fost cultivată cu un deosebit rafinament de gîndire de către lumea antică, în special de greci. Mari filozofi ca *Thales*, *Pitagora*, *Platon* etc. prin descoperirile lor au pus bazele acestei ramuri a matematicilor. Dar cel care a adunat și ordonat întregul material al predecesorilor săi, la care a adăugat contribuția sa și a prezentat geometria ca un corp închegat de știință, logic înlănțuit, a fost *Euclid*. Celebra sa operă „Elemente" este una din cele mai răspîndite cărți din lume.

Mai tîrziu, alți geometri au adus contribuții importante la dezvoltarea geometriei, printre care marii geometri ai antichității *Arhimede* și *Apollonius*.

Studiul problemelor prin geometria sintetică prezintă însă unele greutăți din cauza numărului restrîns de metode generale de care dispune această disciplină. De aceea s-au căutat mereu metode noi care să poată fi aplicate unui cîmp cît mai larg de probleme. Din această căutare a luat naștere *geometria analitică*. Ea nu a fost cunoscută de geometrii antichității. Creatorul ei *Descartes* (1596—1650) a prezentat noua sa metodă în lucrarea „Application de l'Algèbre à la théorie des courbes" (1637).

Prin geometria analitică *Descartes* a legat geometria de algebră; în general fiecare ecuație cu două necunoscute reprezintă o curbă și fiecărei curbe îi corespunde o ecuație, mai simplă sau mai complicată. Problemele de geometrie devin probleme de algebră și ca atare rezolvarea lor se face prin metode algebrice. Dăm un singur exemplu. În geometrie, pentru a demonstra concurența mediatoarelor, bisectoarelor, înălțimilor și medianelor se folosesc *trei* metode diferite: pentru mediatoare și bisectoare metoda intersecțiilor locurilor geometrice, pentru înălțimi construcții ajutătoare care reduc problema la alta cunoscută, iar pentru mediane cu totul altă metodă. În geometria analitică se folosește o singură metodă pentru toate cazurile: aceea de a arăta că sistemul de trei ecuații (ale celor trei drepte) cu două necunoscute este compatibil. Acest exemplu ilustrează avantajele geometriei analitice.

Trebuie spus însă că uneori rezolvarea unor probleme pe cale analitică duce la calcule lungi și complicate. Aici intervine abilitatea rezolvitorului în conducerea calculului, sau în a privi problema din alt unghi astfel ca să se ușureze calculele.

Geometria analitică a adus și o altă importantă contribuție în domeniul matematicilor: a făcut posibilă clasificarea curbelor algebrice, după gradul ecuației care le reprezintă.

În acest manual se dau primele noțiuni de geometrie analitică potrivit programei școlare. Dreapta și cercul sînt tratate în cazul general, iar elipsa hiperbola și parabola numai pe ecuațiile reduse, adică atît cît este necesar pentru a putea studia proprietățile lor principale. Am căutat ca partea aplicativă să fie cît mai bogată și mai variată, astfel ca exemplificarea părții teoretice să cuprindă un cîmp cît mai larg posibil. S-au ales și probleme care conduc la calcule mai lungi și probleme în care datele inițiale conțin numere iraționale, cu scopul de a forma la elevi deprinderea de calcul. Aceasta pentru că pe lîngă formarea gîndirii logice, fiecare ramură a matematicilor trebuie să contribuie și la perfecționarea îndemînării de a conduce un calcul. Sînt cele două componente care duc la însușirea armonioasă a elementelor de matematici predate în liceu.

În încheiere socotim nimerit să arătăm tinerelor generații că în țara noastră am avut mari personalități, profesori universitari de geometrie analitică, dar care pe lîngă cercetările lor concretizate în cursuri și tratate de geometrie superioară, s-au gîndit și la elevii de liceu. În vederea consolidării cunoștințelor lor au publicat *culegeri de probleme*, *manuale de liceu* sau *tratate de geometrie analitică* avînd unele capitole accesibile elevilor și au propus în „Gazeta Matematică" probleme de geometrie analitică. Îi amintim aici cu recunoștință, trecînd la fiecare numai lucrările destinate elevilor sau care parțial erau accesibile lor:

Gheorghe Țițeica: „Culegere de probleme de geometrie analitică" (1912, despărțită în vol I (1939) și vol. II (1934)).

Traian Lalescu: „Tratat de geometrie analitică" în patru fascicule (fasc. I, 1920) din care primele două accesibile elevilor cu o bună pregătire.

N. Abramescu: „Lecțiuni de geometrie analitică", 1927. A propus multe probleme de geometrie analitică în vechea Gazetă Matematică.

A. Myller: „Geometria analitică" manual pentru liceu.

Autorul

Prescurtările folosite în manual sînt:

G.M. = „Gazeta Matematică"
S.G.M. = Suplimentul „Gazetei Matematice"
C.G.M. = Concursul „Gazetei Matematice"
Șc.P.B. = Școala Politehnică București
C.d.p. = Culegere de probleme (de G. Țițeica)
II; (5) = Capitolul II, relația (5)
II; 5 = Capitolul II, paragraful 5.

* Dacă acest semn se află în fața unei probleme înseamnă că aceasta prezintă un grad de dificultate mai mare.

Cuprins

Capitolul 1 — **Coordonate** 7
A. Geometrie pe o dreaptă 7
B. Coordonate în plan 10
Exerciții și probleme 15

Capitolul 2 — **Dreapta, diferite forme ale ecuației dreptei** 19
A. Drepte particulare față de axele de coordonate 19
B. Ecuația unei drepte oarecare 21
Exerciții și probleme 27
C. Dreapta determinată prin condiții date 29
Exerciții și probleme 33

Capitolul 3 — **Pozițiile relative ale dreptelor în plan** 36
A. Două drepte 36
B. Trei drepte 39
Exerciții și probleme 46

Capitolul 4 — **Separarea planului în regiuni** 50
Exerciții și probleme 55

Capitolul 5 — **Distanța de la un punct la o dreaptă** 57
Aria unui triunghi 57
Exerciții și probleme 61

Capitolul 6 — **Translația axelor** 64
Exerciții și probleme 66

Capitolul 7 — **Locuri geometrice** 68
Exerciții și probleme 75

Capitolul 8 — **Curbele de gradul al doilea** 78
A. Cercul 78
Exerciții și probleme 83
B. Elipsa 84
C. Hiperbola 90
Exerciții și probleme 99
D. Parabola 100
Exerciții și probleme 103

Capitolul 9 — **Intersecția unei conice cu o dreaptă. Intersecția a două conice..** 105

A. Intersecția unei conice cu o dreaptă..... 105
B. Intersecția a două conice 111
Exerciții și probleme 113

Capitolul 10 — **Probleme de tangență** 116

A. Tangente cu direcția dată 116
B. Tangenta într-un punct al unei conice 119
C. Tangentele dintr-un punct exterior 125
Exerciții și probleme 126

Capitolul 11 — **Proprietăți ale elipsei, hiperbolei și parabolei** 132

Exerciții și probleme 137

Capitolul 12 — **Locuri geometrice** 138

Exerciții și probleme 142
Probleme recapitulative 147

Capitolul 1

Coordonate

A. Geometrie pe o dreaptă

1. Definiție. *Se numește axă o dreaptă pe care s-a ales un sens pozitiv, o origine (un punct), de la care se măsoară distanțele și o unitate de măsură.*

Sensul contrar celui pozitiv este sensul negativ. Figura 1 reprezintă axa $x'Ox$, cu sensul pozitiv de la O la x, indicat prin săgeată, iar sensul negativ de la O la x'.

Poziția unui punct A pe axă este unic determinată dacă se cunoaște mărimea segmentului orientat $\overline{OA} = x$, abscisa punctului A. Reciproc, oricărui punct $A \in x'Ox$ îi corespunde o abscisă bine determinată. Acest lucru se presupune cunoscut.

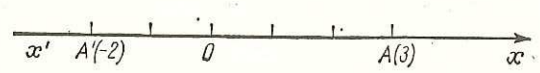


Fig. 1.

2. Elementele geometrice care pot fi situate pe o dreaptă sînt punctele și segmentele. De puncte ne-am ocupat mai înainte. Acum ne vom ocupa de segmente.

Segmentele se vor considera orientate (de fapt vectori), pentru a le putea fixa poziția pe axă cu sens cu tot, adică se va socoti $\overline{AB} = -\overline{BA}$. Punctul de plecare al segmentului este originea sa, iar punctul unde se termină este extremitatea sa. Să luăm pe o axă (fig. 2) punctele $A(2)$, $B(4)$, $C(-2, 5)$, $D(-5, 5)$. Se observă cu ușurință că: $\overline{AB} = +2 = 4 - 2$; $\overline{BA} = -2 = 2 - 4$; $\overline{CA} = +4{,}5 = 2 - (-2{,}5)$; $\overline{BD} = -9{,}5 = -5{,}5 - 4$; $\overline{DC} = +3 = -2{,}5 - (-5{,}5)$.

În toate exemplele se constată că se obține atît lungimea cît și orientarea segmentului făcînd *diferența* dintre abscisa extremității și abscisa originei

Fig. 2

sale. *Mărimea segmentului* orientat o vom numi de aci înainte măsura algebrică a segmentului, care este un număr real. Segmentele orientate le vom nota cu bară deasupra $(\overline{AB})$, iar segmentele neorientate fără bară (AB).

Dacă trecem la cazul general, luînd pe axă două puncte oarecare $A_1(x_1)$ și $A_2(x_2)$ examinînd toate cazurile de figură posibile (elevii vor face acest lucru pentru verificare), constatăm că avem totdeauna relația geometrică

$$\overline{OA}_2 = \overline{OA}_1 + \overline{A_1A_2}$$

de unde se deduce

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA}_2 - \overline{OA}_1 \tag{1}$$

adică

$$\overline{A_1A_2} = x_2 - x_1. \tag{2}$$

Prin urmare măsura algebrică a unui segment orientat pe axa $x'Ox$ este dată de diferența dintre abscisa extremității și abscisa originei acelui segment. Această relație se datorește lui Chasles*.

În mod asemănător dacă punctele ar fi $A(a)$ și $B(b)$ atunci $\overline{AB} = b - a$ etc.

Deoarece segmentul orientat, pe o dreaptă, reprezintă un vector, relația (1) este de fapt relație vectorială.

Mai general un segment orientat poate fi intrepretat ca reprezentare a unui vector liber, adică a oricărei mărimi vectoriale care are direcția, sensul și modulul indicate de segment.

Teorema lui Chasles. Fiind date 3 puncte pe o dreaptă A, B, C, există relația:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0. \tag{3}$$

3. *Mărimea unui segment.* Dacă într-o problemă ne interesează numai lungimea l a unui segment, nu și sensul lui, atunci vom scrie

$$l = |x_2 - x_1| \quad \text{sau} \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}. \tag{4}$$

4. Abscisa punctului care împarte un segment într-un raport dat. Considerăm segmentul $\overline{AB}$ definit de punctele $A(x_1)$, $B(x_2)$ și punctul $M(x)$ care împarte segmentul dat în raportul

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k. \tag{5}$$

* Chasles Michel (se citește Șal), geometru francez (1793—1880) a introdus în mod sistematic principiul semnelor în geometria sintetică.

Socotind segmentele orientate, rezultă:

a) dacă $M \in \overline{AB}$, atunci $k < 0$, deoarece $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ au sensuri diferite;

b) dacă M este exterior segmentului $\overline{AB}$, atunci $k > 0$, $\overline{MA}$ și $\overline{MB}$ avînd aceeași orientare;

c) dacă $M \equiv A$, atunci $k = 0$;

d) dacă $M \to B$, atunci $k \to \infty$.

Din (5) se deduce $\overline{MA} = k \cdot \overline{MB}$ sau folosind relația lui Chasles, $x_1 - x = k(x_2 - x)$, care dă

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}. \tag{6}$$

Aceasta este formula care dă abscisa punctului M.

În particular, dacă M este mijlocul segmentului, atunci

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1, \text{ deci } k = -1.$$

Abscisa *mijlocului* segmentului este

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{7}$$

Aplicații. 1. *Se dă punctul $A(-4)$ și segmentul $\overline{BC} = 6$, al cărui mijloc îl notăm cu M. Cunoscînd $\overline{AM} = 6$, să se determine abscisele punctelor B, C.*

Fie $B(b)$, $C(c)$, $M(m)$. Avem din enunț $m - (-4) = 6$, deci $m = 2$ și $c - b = 6$. Însă M este mijlocul lui $\overline{BC}$, prin urmare $\frac{b+c}{2} = 2$. Din sistemul $c - b = 6$, $c + b = 4$ se deduce $c = 5$, $b = -1$.

2. *Se dau pe o axă punctele $A(a)$, $B(b)$, apoi se împarte segmentul $\overline{AB}$ în trei părți egale. Să se afle abscisele punctelor de diviziune.*

Fie, de la A către B, $M(x')$ și $N(x'')$ punctele de diviziune.

Avem

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -\frac{2}{1},$$

astfel că

$$x' = \frac{a + \frac{1}{2}b}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2a+b}{3}; \quad x'' = \frac{a+2b}{1+2} = \frac{a+2b}{3}.$$

3. *Să se determine punctul M pe axa Ox, astfel ca fiind date punctele A, B, C să avem relația: $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$.*

Notăm punctele cu $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$ și $M(x)$. Relația transpusă analitic este $(x_1 - x) + (x_2 - x) + (x_3 - x) = 0$, de unde

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Punctul M este centrul de greutate al punctelor A, B, C presupuse că au mase egale.

B. Coordonate în plan

5. *Punctul.* Pentru fixarea poziției unui punct în plan nu este de ajuns o singură axă; este necesar să se folosească două axe, care se întîlnesc într-un punct O. Acest punct se consideră ca origine pentru fiecare axă, iar sensul se alege, în mod obișnuit, așa cum arată săgețile în figura 3. Axele Ox și Oy formează sistemul de referință în plan.

Fie M un punct în plan. Ducem MN paralelă la Oy și MP paralelă la Ox ($N \in Ox$, $P \in Oy$). Mărimea segmentului *orientat* $\overline{ON} = x$ poartă numele de *abscisa* punctului M, iar $\overline{OP} = y$ *ordonata* lui. Amîndouă la un loc se numesc *coordonatele* punctului M. Se notează prescurtat $M(x, y)$, dar se pot folosi și alte litere, de exemplu $M(a, b)$, sau chiar numai (a_1, b_1), (x_0, y_0) etc. Totdeauna primul număr reprezintă abscisa și al doilea ordonata.

Cînd axele fac între ele un unghi $\theta \neq 90°$, ele se numesc axe oblice, dacă însă $\theta = 90°$ axele sînt dreptunghiulare (sau perpendiculare sau rectangulare).

Axele cele mai des întrebuințate sînt cele dreptunghiulare, din cauza formulelor care sînt mai simple. Sînt și probleme care se rezolvă mai ușor, folosind axe oblice. În acest manual vom folosi *axele dreptunghiulare*.

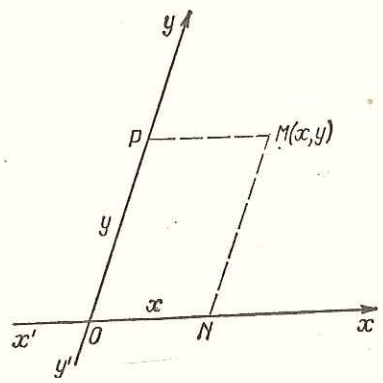


Fig. 3

Cele două axe Ox, Oy împart planul în *patru regiuni* pe care le vom numi *cadrane* și le vom numerota în sens trigonometric I, II, III, IV (fig. 4). Ținînd seama de orientarea axelor putem face precizările care urmează.

I. Dacă punctul M este dat în planul axelor xOy, coordonatele sale sînt determinate în mod unic. În cazul axelor dreptunghiulare, coordonatele sînt chiar proiecțiile vectorului $\overrightarrow{OM}$ (fig. 4) pe cele două axe, prin urmare ele sînt determinate în mărime și semn, și anume:

— un punct M din *cadranul I* are ambele coordonate pozitive;

— un punct M' din *cadranul al II-lea* are abscisa $\overline{OM_1'} = x'$ negativă și ordonata $\overline{OM_2'} = y'$ pozitivă;

— un punct M'' din *cadranul al III-lea* are ambele coordonate negative;

— un punct M''' din *cadranul al IV-lea* are abscisa pozitivă și ordonata negativă;

— un punct pe axa Ox are *ordonata nulă*, iar un punct pe Oy are *abscisa nulă*.

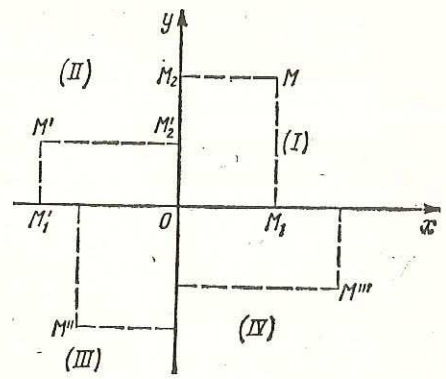


Fig. 4

II. *Reciproc* dacă se dau coordonatele, punctul M din plan este determinat în mod unic. În adevăr, presupunînd că abscisa $\overline{OM_1} = x$ și ordonata $\overline{OM_2} = y$ sînt ambele pozitive, paralelele duse prin M_1 la Oy și prin M_2 la Ox se taie într-un *singur punct* M, în cadranul I.

După cum abscisa și ordonata sînt pozitive sau negative, punctul se poate găsi în unul din cele patru cadrane. Trebuie să observăm însă că această unicitate n-ar mai exista, dacă coordonatele nu ar fi luate cu semnele respective. În asemenea caz abscisa s-ar putea lua fie la dreapta, fie la stînga originii, iar ordonata fie în sus, fie în jos față de origine și ar rezulta patru puncte în loc de unul singur.

E x e m p l e. 1) *Originea are coordonatele* $x = 0$, $y = 0$, *adică* O $(0, 0)$.
2) *Punctul* $A(2, 0)$ *se află pe axa* Ox, *astfel că* $\overline{OA} = 2$.
3) *Punctul* $B(0, -4)$ *se află pe* Oy, *la* $\overline{OB} = -4$.
4) *Punctul* $C(3, 3)$ *se găsește pe bisectoarea primului cadran.*
5) *Punctele* $A(a, b)$ *și* $A'(-a, b)$ *sînt simetrice față de axa* Oy.

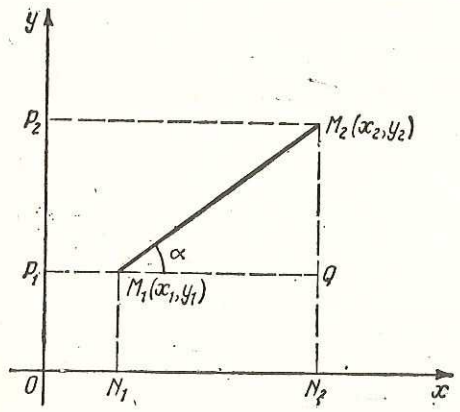


Fig. 5

6. *Segmente.* Două puncte definesc un segment. Din punct de vedere al geometriei analitice vom studia, în legătură cu segmentele, următoarele probleme.

a) *Distanța între două puncte (lungimea unui segment).* Fie $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ cele două puncte (extremitățile segmentului), N_1, N_2 proiecțiile lor pe Ox, P_1, P_2 proiecțiile lor pe Oy (fig. 5) și $Q = P_1M_1 \cap N_2M_2$. Triunghiul dreptunghic M_1QM_2 ne dă

$$M_1M_2 = \sqrt{\overline{M_1Q^2} + \overline{QM_2^2}}.$$

Dar folosind formula lui Chasles pe fiecare axă separat avem

$$\overline{M_1Q} = x_2 - x_1; \quad \overline{QM_2} = y_2 - y_1.$$

Acestea înlocuite în relaţia precedentă conduc la

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{8}$$

formulă care dă distanţa între punctele M_1 şi M_2 sau mărimea segmentului M_1M_2.

Caz particular: distanţa de la originea O (0, 0) la un punct $M(x, y)$ al planului se deduce din (8) şi anume

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{9}$$

b) *Înclinarea unui segment M_1M_2 faţă de axa Ox.* Dacă notăm $\sphericalangle M_2M_1Q = \sphericalangle(\overline{M_1M_2}, Ox) = \alpha$ şi ne referim tot la triunghiul dreptunghic M_1QM_2, atunci

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{QM_2}}{\overline{M_1Q}}$$

sau

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{10}$$

Prin urmare înclinarea segmentului M_1M_2 faţă de axa Ox este dată prin $\operatorname{tg}\alpha$ a cărei valoare este cîtul dintre *diferenţa ordonatelor* şi *diferenţa absciselor* (sau cîtul dintre diferenţa y-lor şi diferenţa x-lor).

Punctele M_1, M_2 definesc o singură dreaptă M_1M_2, care are faţă de Ox aceeaşi înclinare ca şi segmentul M_1M_2. Aşadar relaţia (10) ne dă înclinarea dreptei determinată de două puncte, faţă de axa Ox, prin tangenta unghiului format de dreaptă cu axa.

Acest număr $tg\,\alpha$ se numeşte *coeficientul unghiular* sau *panta dreptei M_1M_2*.

În particular dacă dreapta este definită de origine $O(0, 0)$ şi un punct $M(x, y)$ atunci coeficientul unghiular sau panta dreptei OM este

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Exemplu. Distanţa *între punctele* $A(0, 5)$, $B(-3, 8)$ *este* $AB = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (8 - 5)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ *unităţi liniare.*

Înclinarea *dreptei AB faţă de axa Ox este dată de*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8 - 5}{-3 - 0} = -1 \Rightarrow \alpha = 135°.$$

c) *Punctul care împarte un segment într-un raport dat.* Considerăm segmentul definit de punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ şi punctul M care îl împarte

în raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$. ($k < 0$ cînd $M \in AB$, deoarece $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ au sensuri contrare şi $k > 0$ pentru M exterior segmentului AB).

Ne propunem să determinăm coordonatele (x, y) ale lui M, în cazul general k oarecare, real (fig. 6).

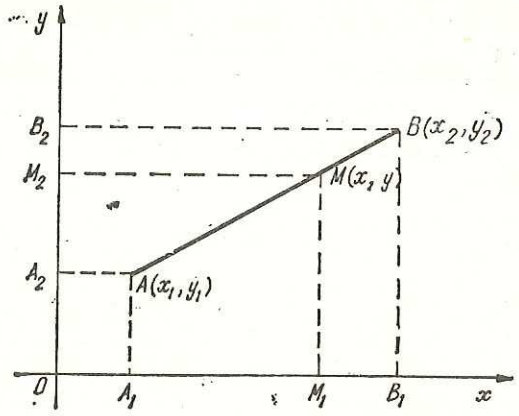


Fig. 6

Paralelele duse prin A, M, B la Oy determină pe axa Ox punctele A_1, M_1, B_1, iar paralelele duse prin aceleaşi puncte la Ox determină pe Oy punctele A_2, M_2, B_2. Din cauza paralelismului dreptelor, raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$ se păstrează pe fiecare axă, astfel că putem scrie

$$\frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1B_1}} = k; \quad \frac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2B_2}} = k. \tag{5}$$

În acest mod problema din plan am desfăcut-o în două probleme pe cele două axe, chestiune studiată mai înainte. De aceea vom scrie direct coordonatele punctului M:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}; \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}. \tag{6}$$

Punctul N, conjugatul armonic al lui M faţă de A şi B, va avea coordonatele

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}; \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}. \tag{6'}$$

În particular, mijlocul unui segment ($k = -1$) are coordonatele

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \tag{7}$$

iar conjugatul său armonic este aruncat la infinit.

NOTA. În unele cărţi formulele sînt inversate, adică (6') reprezintă coordonatele punctului *interior segmentului* şi (6) pe cele ale conjugatului său. Deosebirea vine de la faptul că se notează $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -k$ (în loc de k, cum am notat în acest manual). Este evident că aceasta atrage o schimbare de semn în formulele (6) şi (6'), înaintea lui k, dar acum $k > 0$ pentru $M \in AB$ şi $k < 0$ pentru M exterior segmentului.

Aplicații. 1. *Să se arate că triunghiul format de punctele* $A(-2, 2)$, $B(2, -1)$, $C(3; 4{,}5)$ *este isoscel. Care este baza?*

Avem

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-2)^2} = 5; \quad AC = \sqrt{(3+2)^2 + \left(\frac{9}{2} - 2\right)^2} =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{2}; \quad BC = \sqrt{(3-2)^2 + \left(\frac{9}{2} + 1\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Rezultă $AC = BC$ și baza este AB.

2. *Ce condiție trebuie să satisfacă coordonatele* x, y *ale punctului* M *pentru ca acesta să fie la egală distanță de punctele* $A(3, -2)$ *și* $B(4, 2)$?

Pentru a evita radicalii, scriem relația sub forma $MA^2 = MB^2$ sau analitic:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2;$$

care dă

$$2x + 8y = 7.$$

Am obținut o singură ecuație cu două necunoscute, adică o ecuație nedeterminată. Aceasta corespunde faptului geometric că există o infinitate de puncte M egal depărtate de A și B (mediatoarea segmentului AB).

3. *Segmentul* $AB = 5$ *cm are punctul* $A(2, -1)$ *și abscisa punctului* B, $x = 6$ *cm. Să se determine poziția segmentului.*

Notînd cu y ordonata lui B, conform enunțului avem $AB^2 = 25$, dar $AB^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2$, deci $16 + (y+1)^2 = 25$, de unde $y + 1 = \pm 3$. Se obțin două valori $y_1 = 2$, $y_2 = -4$, deci $B_1(6, 2)$ sau $B_2(6, -4)$, prin urmare segmentul poate avea două poziții.

4. Centrul de greutate al unui triunghi. *Triunghiul fiind dat prin vîrfurile sale* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, *să găsim coordonatele punctului de întîlnire a medianelor.*

Notăm cu $A'(x', y')$, mijlocul laturii BC (fig. 7), deci:

$$x' = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y' = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Se știe apoi că,

$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}} = -\frac{1}{2},$$

astfel încît coordonatele (x, y) ale lui G sînt

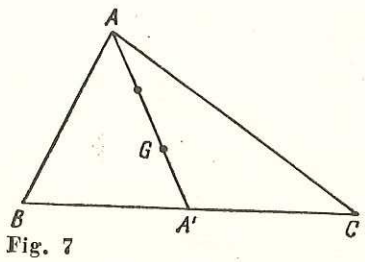


Fig. 7

$$x = \frac{x' + \frac{1}{2}\,x_3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y = \frac{y' + \frac{1}{2}\,y_3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Exerciții și probleme

1. Se dau punctele $A(5)$, $B(-3)$ și $M\left(\frac{1}{5}\right)$. Să se figureze punctele pe axă și să se calculeze raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

$\left[k = -\frac{3}{2}.\right]$

2. Se dau punctele $A(2)$, $B(5)$, $C(-1)$. Fie M simetricul lui A față de B și N simetricul lui M față de C. Să se calculeze abscisa lui N. Generalizare pentru cazul general $A(a)$, $B(b)$ și $C(c)$.

[$M(x)$, $N(x')$. Se va scrie că B este mijlocul lui $\overline{AM}$ etc. În general $x' = 2c - 2b + a$.]

3. Fiind date trei puncte A, B, C pe o dreaptă, să se determine un al patrulea punct M astfel încît să avem

$$\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} + \gamma\overline{MC} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ coeficienți reali}).$$

[$A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$, $M(x)$; $x = \frac{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3}{\alpha + \beta + \gamma}$ cu $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. x este media ponderată a numerelor x_1, x_2, x_3.]

4. Dacă patru puncte A, B, C, D sînt coliniare, atunci există relația

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AC}\cdot\overline{DB} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = 0,$$

segmentele fiind orientate.

5. Pe un segment $\overline{AB}$ se consideră punctele M, N care îl împart respectiv în rapoartele $k = -\frac{1}{4}$ și $k' = -3$. Să se exprime segmentul $\overline{MN}$ cu ajutorul segmentului $\overline{AB}$.

$$\left[\overline{MN} = \frac{11}{20}\,\overline{AB}.\right]$$

6. Aceeași problemă ca cea precedentă, k și k' fiind oarecare. Să se arate că

$$\overline{MN} = \frac{k - k'}{(1-k)\,(1-k')}\,\overline{AB}.$$

7. Să dă punctul $A(a, b)$. Se cere:

a) Să se determine coordonatele punctelor simetrice lui A față de axele de coordonate și față de origine.

b) Să se determine coordonatele punctelor simetrice lui A față de cele două bisectoare ale axelor de coordonate.

8. Să se calculeze distanțele dintre perechile de puncte

a) $A(3, 2)$, $B(6, 6)$; b) $A(3, 2)$; $B'(0, -2)$; c) $C(-1, 0)$ $D(-5, 4)$, d) $E(-1, -4)$, $F(-3, -8)$; e) $G(0, -5)$, $H(12, 0)$.

$[AB = AB' = 5;\ CD = 4\sqrt{2};\ EF = 2\sqrt{5};\ GH = 13.]$

9. Să se calculeze lungimile segmentelor AB și CD unde $A(3, 6)$, $B(8, 2)$ și $C(3, 2)$, $D(8, 6)$. Să se explice geometric rezultatul.

$[AB = CD = \sqrt{41}$. Sînt diagonalele unui dreptunghi.]

10. Să se arate că triunghiul format de punctele $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(6, 0)$ este isoscel, cu baza BC.

$[AB = AC = 5.]$

11. Să se calculeze înălțimea corespunzătoare bazei triunghiului isoscel care are vîrfurile $A(2 + \sqrt{3}, 1)$, $B(\sqrt{3}, -1)$, $C(-1, -\sqrt{3})$.

$[h = \sqrt{3} - 1]$.

12. Să se arate că triunghiul format de punctele $A\left(1 + \sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$ este dreptunghic. Unde este unghiul drept?

[Laturile verifică relația lui Pitagora.]

13. Să se demonstreze că triunghiul cu vîrfurile $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, $C\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ este echilateral.

14. Se dau punctele $A(4, -1)$ și $B(2, 3)$. Să se determine pe axa Ox punctul M astfel ca $MA = MB$.

$[M(1, 0).]$

15. Să se găsească un punct egal depărtat de punctele $A(0, 1)$, $B(1, -1)$, $C(2, 0)$.

$\left[x = \frac{5}{6},\ y = \frac{1}{6}.\right]$

16. Să se găsească un punct la egală depărtare de punctele $A(2, -2)$, $B(0, 4)$ și de asemenea la egală depărtare de punctele $C(1, -4)$, $D(-2, -3)$ (fără ca aceste distanțe să fie egale cu cele precedente).

$[M(2,4)]$.

17. Să se afle distanța între punctele

$$A(x, y) \text{ și } B\left[\frac{2(x+ay)}{1+a^2},\ \frac{2a(x+ay)}{1+a^2}\right],$$

$[AB = \sqrt{x^2+y^2}$, deci $AB = OA]$.

18. Se dau punctele $A(-2, 3)$, $B(2, 6)$ și sub axa Ox, o paralelă la distanța de două unități. Să se găsească pe această paralelă un punct C și altul D astfel ca:

a) triunghiul ABC să fie dreptunghic în A;

b) triunghiul ABD să fie dreptunghic în B.

[C și D au ordonata (-2), deci $C(\alpha, -2)$, $D(\beta, -2)$. Se poate folosi teorema lui Pitagora $C\left(\frac{7}{4}, -2\right)$, $D(8, -2)$.]

19. Se dau punctele $A(-3, 3)$, $B(3, 7)$ și o paralelă la Ox situată la două unități deasupra ei. Să se determine pe această paralelă punctul C, astfel ca triunghiul ABC să fie dreptunghic în C.

[Două soluții $C_1(2, 2)$; $C_2(-2, 2)$].

20. Se dau punctele $A(-1, -3)$ și $B(2, -1)$. Să se afle coordonatele simetricului lui A față de B.

[Se folosesc coordonatele mijlocului unui segment $x = 5$, $y = 1$].

21. Se dau punctele $A(-2, 4)$, $B(5, 1)$ și o paralelă la Oy, la distanța $\frac{1}{2}$, care întîlnește segmentul AB în punctul M. Se cere:

a) raportul în care M împarte segmentul $\overline{AB}$;

b) ordonata punctului M.

$\left[\text{Se găsește întîi } k = -\frac{5}{9},\ \text{apoi } y = \frac{41}{14}.\right]$

22. Punctele $A(1, 1)$, $B(2, -3)$, $C(6, 0)$ fiind date, să se afle coordonatele punctului D, al patrulea vîrf al paralelogramului $ABCD$, în care AC este o diagonală.

[Se află simetricul lui B față de mijlocul lui $\overline{AC}$, $x = 5$, $y = 4$.]

23. Se dă triunghiul format de punctele $A(4, 5)$, $B(0, 3)$, $C(2, -3)$. Să se calculeze lungimile medianelor m_a, m_b, m_c ale triunghiului și să se verifice că

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

24. Să se afle coordonatele punctului M care se află pe segmentul determinat de punctele $A(3, -2)$, $B(7, 3)$, la două cincimi din $\overline{AB}$, socotite de la A către B.

25. Se dau punctele $A(1, 4)$ și $B(7, 1)$. Să se determine punctul M de pe dreapta AB, astfel ca $OM = OA$.

[Un punct pe AB are $x = \frac{1-7k}{1-k}$, $y = \frac{4-k}{1-k}$. $OM = OA$ dă $11k^2 + 4k = 0$, de unde soluțiile $M \equiv A$ (evident) și $M\left(\frac{13}{5}, \frac{16}{5}\right)$].

26. Se dă triunghiul cu vîrfurile $A(7, 0)$, $B(4, 4)$, $C(-1, -8)$. Să se afle coordonatele piciorului bisectoarei BB' a triunghiului.

[Se ține seama de raportul în care bisectoarea împarte latura opusă. $B'\left(\frac{43}{9}, -\frac{20}{9}\right)$.]

27. Se dau punctele $A(5, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-3, 2)$, $D(-1, -2)$. Se iau apoi punctele M și N, astfel ca ele să împartă în același raport k segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. Să se arate că oricare ar fi raportul k, mijlocul segmentului $\overline{MN}$ este fix. Să se explice geometric proprietatea.

[$x = 1$, $y = \frac{3}{2}$. Dreapta MN trece prin centrul paralelogramului $ABCD$.]

28. Să se arate că figura formată de punctele $A\left(a\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, $B\left(\frac{a-b}{2}, b\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(a\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$, $D\left(\frac{a+b}{2}, b\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ este romb; a, b sînt două numere reale oarecare.

[Mijloacele diagonalelor coincid și diagonalele sînt perpendiculare. *Altfel:* laturile sînt două cîte două paralele și toate sînt egale. Mai trebuie arătat că figura nu este pătrat, deci AB, AD nu sînt perpendiculare.]

29. Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului care unește mijloacele diagonalelor unui patrulater.

[Media aritmetică a coordonatelor vîrfurilor.]

30. Cunoscînd mijloacele laturilor BC, CA, AB, anume $D\left(\frac{5}{2}, 3\right)$, $E\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, să se calculeze coordonatele vîrfurilor.

[$A(-1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(1, 4)$.]

Capitolul 2

Dreapta, diferite forme ale ecuației ei

1. Fie $M(x, y)$ un punct din planul xOy. Dacă dăm coordonatelor x și y valori la întîmplare, punctele rezultate vor fi împrăștiate în tot planul, fără nici o ordine. Pentru ca M să descrie o anumită curbă, va trebui să existe o legătură între cele două coordonate, astfel încît dacă se dă lui x (de ex.) o valoare, y să nu mai poată fi luat la întîmplare, ci să rezulte din valoarea lui x. Această legătură dintre coordonate se exprimă algebric printr-o ecuație cu două necunoscute $f(x, y) = 0$, din care se poate scoate uneori $y = g(x)$ sau $x = \varphi(y)$ (adică se ajunge în mod explicit la una sau mai multe funcții), ceea ce ușurează studiul și reprezentarea grafică, așa cum se face în analiza matematică.

În cele ce urmează vom căuta legătura ce trebuie să existe între coordonatele unui punct variabil, astfel încît el să descrie o *linie dreaptă*. Punctul variabil se mai numește și *punct curent* (lat.: currere = a alerga). Vom porni de la cazurile particulare și ne vom ridica apoi la cazul general.

A. Drepte particulare față de axele de coordonate

2. *Ecuația unei drepte paralelă la axa Oy.* Presupunem că $A(2, 0)$ este punctul unde o paralelă la Oy taie axa Ox, deci $\overline{OA} = 2$. Pe această paralelă considerăm mai multe puncte M, N, P etc. (fig. 8) și observăm că oricare ar fi ordonata lor, ele au toate aceeași abscisă $x = 2$. *Reciproc*, ecuația $x = 2$ nu conține pe y, deci pentru orice y, $x = 2$, dar toate punctele care au $x = 2$ sînt situate pe o paralelă la Oy (locul lor geometric) la distanța $OA = 2$. Prin urmare ecuația $x = 2$ caracterizează toate punctele situate pe această paralelă. Zicem că $x = 2$ este ecuația acestei paralele.

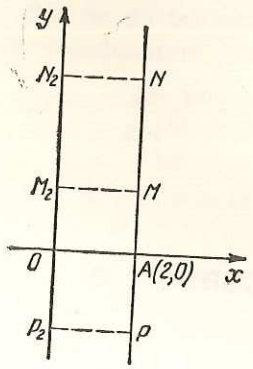


Fig. 8

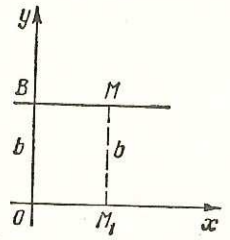


Fig. 9

Întemeiați pe același raționament putem spune că $x = a$ este ecuația unei paralele la Oy. Dacă $a > 0$ paralela se află la dreapta originii, dacă $a < 0$ este la stînga.

În particular $x = 0$ este ecuația axei Oy.

3. *Ecuația unei paralele la Ox.* Considerăm acum paralela MB la axa Ox, unde $B(0, b) \in Oy$ (fig. 9). Un raționament analog cu cel de mai înainte arată că toate punctele de pe această paralelă au $y = \overline{OB} = b$ și invers, că ecuația $y = b$ reprezintă locul geometric al tuturor punctelor care au distanța de b unități față de axa Ox. Zicem că $y = b$ este ecuația unei paralele la axa Ox. Dacă $b > 0$ paralela este situată deasupra originii, iar dacă $b < 0$ este sub origine.

În particular $y = 0$ este ecuația axei Ox.

Observare. Paralelele cu ecuațiile $x = a$ (la Oy) și $y = b$ (la Ox) au ca intersecție punctul $M(a, b)$.

4. *Direcția unei drepte; coeficient unghiular.* Dacă din punct de vedere geometric direcția unei drepte se poate da prin unghiul α pe care aceasta îl face cu sensul pozitiv al axei Ox, din punctul de vedere al geometriei analitice, pentru nevoile de calcul, direcția se dă prin una din funcțiile trigonometrice ale unghiului α. Cea mai des folosită este $\operatorname{tg}\alpha$, care se notează de obicei cu m (sau λ, μ etc.) și se numește *coeficientul unghiular* sau panta dreptei.

Pentru fixarea poziției unei drepte nu este suficient să cunoaștem direcția ei (coeficientul unghiular), ci mai trebuie un punct al dreptei. Cu aceste două elemente poziția dreptei este determinată.

5. *Ecuația unei drepte ce trece prin origine.* Dacă α este unghiul pe care îl face dreapta (D) cu sensul pozitiv al axei Ox, atunci elementele care determină dreapta sînt: *originea* și *coeficientul unghiular* (panta) $m = \operatorname{tg}\alpha$. Pentru a stabili ecuația dreptei (D) alegem un punct curent $M(x, y) \in (D)$ și căutăm legătura care există între coordonatele lui (§ 1). Fie M_1 proiecția lui M pe Ox, deci $OM_1 = x$, $M_1M = y$. Avem evident (fig. 10)

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{OM_1}} = \operatorname{tg}\alpha = \text{constant}, \quad \text{adică} \quad \frac{y}{x} = m$$

sau

$$y = mx. \tag{1}$$

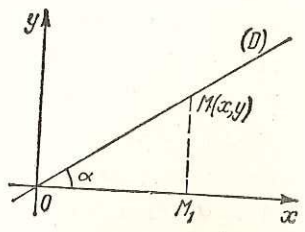


Fig. 10

Această ecuație de gradul I cu două necunoscute reprezintă legătura căutată între coordonatele (x, y) ale lui $M \in (D)$, deci este *ecuația dreptei* (D). Trebuie dovedit însă că și *reciproc*, ecuația $y = mx$ reprezintă o dreaptă ce trece prin origine și face cu axa Ox unghiul α, dat de $\operatorname{tg}\alpha = m$.

În adevăr, se vede imediat că originea $O(0, 0)$ verifică ecuația (1), deci este un punct al dreptei. Apoi din (1) se deduce $\frac{y}{x} = m$, adică raportul dintre ordonata și abscisa punctului M este constant. Dar din triunghiul dreptunghic OM_1M avem

$$\frac{y}{x} = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{OM_1}}, \quad \text{deci} \quad \frac{\overline{M_1M}}{\overline{OM_1}} = m = \operatorname{tg}\alpha = \text{const.}$$

Rezultă că $\sphericalangle MOx = \alpha = \text{const}$. În aceste condiții punctul nu poate descrie decît dreapta care trece prin origine și face unghiul α cu axa Ox.

Dacă $m > 0$, dreapta trece prin cadranele I și III, cînd $m < 0$ trece prin cadranele II și IV.

Așadar: ecuația $y = mx$ reprezintă o dreaptă ce trece prin origine și face cu Ox un unghi a cărui tangentă este m.

Cazuri particulare. a) Ecuația $y = x$ reprezintă bisectoarea primului și celui de-al treilea cadran, deoarece $m = \operatorname{tg}\varphi = 1$, deci $\varphi = 45°$ (sau 225°). Se numește mai scurt prima bisectoare a axelor și se mai scrie sub forma $x - y = 0$.

Se obține același lucru pornind de la proprietatea că orice punct al bisectoarei este egal depărtat de laturile unghiului și ținînd seama că în cadranele I și III coordonatele sale sînt egale și de același semn.

b) Ecuația $y = -x$ sau $x + y = 0$ reprezintă bisectoarea cadranelor II și IV, deoarece $m = -1$, deci $\varphi = -45°$. Ea este a doua bisectoare a axelor. La fel se poate stabili ecuația ei pornind de la proprietatea geometrică a bisectoarei.

Exemple. a) *Ecuația* $y = \sqrt{3}\,x$ *este a unei drepte ce trece prin origine și face un unghi de* 60° *cu axa* Ox ($m = \sqrt{3}$, *deci* $\varphi = 60°$).

b) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ *reprezintă o dreaptă ce trece prin origine și e înclinată la* 150° *(sau* $-30°$*) pe* Ox.

B. Ecuația unei drepte oarecare

6. *Forma explicită sau ecuația dreptei date prin coeficientul unghiular și ordonata la origine.* Fiind dată o dreaptă oarecare (D) să facem notațiile: $B \equiv (D) \cap Oy$, $\overline{OB} = n$ și $\sphericalangle [Ox, (D)] = \alpha$ (fig. 11). Considerăm un

punct curent $M(x, y)$ pe (D) și ducem $MM_1 \| Oy$ $(M_1 \in Ox)$, apoi prin B paralela la Ox, care întîlnește pe MM_1 în N. Avem evident: $\overline{BN} = \overline{OM_1} = x$, $\overline{NM} = y - n$ și $\frac{\overline{NM}}{\overline{BN}} = \operatorname{tg}\alpha = m$ (const), *coeficientul unghiular* sau *panta dreptei* (§ 4). Rezultă imediat $\frac{y-n}{x} = m$, de unde se deduce

$$\boxed{y = mx + n} \tag{2}$$

$\overline{OB} = n$ se numește *ordonata la origine a dreptei* (D). Ecuația (2) reprezintă legătura dintre coordonatele x, y ale unui punct curent $M \in (D)$; este deci *ecuația dreptei date prin coeficientul unghiular* (m) *și ordonata la origine* (n).

Reciproc, ecuația (2) are ca reprezentare geometrică o dreaptă cu direcția dată de m și ordonata la origine n. În adevăr din (2) se deduce $\frac{y-n}{x} = m$ sau (fig. 11), $\frac{\overline{NM}}{\overline{BN}} = \operatorname{tg}\alpha = \text{const}$.

Deoarece punctul B este fix și $\sphericalangle MBN = \alpha$, constant, M descrie dreapta care trece prin B și face unghiul α cu sensul pozitiv al axei Ox. Dacă $n > 0$, B este deasupra originii, dacă $n < 0$ este sub origine. Presupunînd m constant și n variabil, obținem mulțimea dreptelor din plan care au aceeași direcție, deci toate dreptele paralele cu (D). În particular pentru $n = 0$ se obține dreapta paralelă cu (D), *care trece prin origine*: $y = mx$. Considerînd acum și pe m variabil se obține mulțimea tuturor dreptelor din plan. De aceea se spune că $y = mx + n$ *este ecuația unei drepte oarecare din planul* xOy.

Observare. Pentru ca afirmațiile de mai sus să fie corecte trebuie dovedit că din ecuația (2) se pot obține și dreptele particulare față de axele de coordonate, anume cele paralele cu axele.

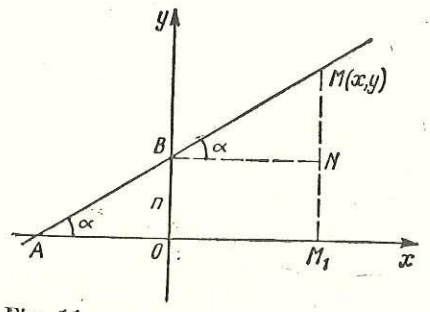


Fig. 11

a) Dacă $(D) \| Ox$, atunci $\alpha = 0$, deci $m = 0$ și rămîne $y = n$ care reprezintă o paralelă la Ox (§ 3).

b) Dacă $A \equiv (D) \cap Ox$, atunci $m = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OB}}{-\overline{OA}} = -\frac{n}{a}$.

$\left[OA = a, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right]$, de unde $\frac{n}{m} = -a = \text{const.}$, dacă A este fix. Scriind

ecuația (2) sub forma $\frac{y}{m} = x + \frac{n}{m}$ și făcînd $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, deci $m \to \infty$ (A fix), rezultă $x - a = 0$, ecuația unei paralele la Oy (în figură $\overline{OA} = a < 0$).

Exemple. a) *Dreapta* $y = x - 1$(*) *este paralelă cu prima bisectoare* $(m = 1)$ *și taie axa* Oy *în punctul* $(0, -1)$.

b) *Dreapta* $y = -x + n$ *reprezintă o paralelă oarecare la a doua bisectoare a axelor.*

7. *Ecuația generală.* Ecuația generală de gradul I în x și y este

$$Ax + By + C = 0. \tag{3}$$

Rezolvînd în raport cu y găsim:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (B \neq 0) \tag{3'}$$

și dacă punem $m = -\frac{A}{B}$, $n = -\frac{C}{B}$, am adus-o la forma $y = mx + n$. Prin urmare ecuația (3) reprezintă o dreaptă oarecare din plan, avînd coeficientul unghiular $-\frac{A}{B}$ și ordonata la origine $-\frac{C}{B}$. O vom numi *ecuația generală* a dreptei. Justificarea acestei numiri se va vedea în cele ce urmează.

Reciproc de la ecuația dreptei sub forma explicită $y = mx + n$ se poate trece la ecuația generală (3) scriind $mx - y + n = 0$ și eliminînd numitorii lui m și n, dacă aceștia sînt fracționari. Trecerea de la o formă la alta este ilustrată prin exemplele care urmează.

8. *Ecuațiile dreptelor particulare deduse din* (3)

a) Presupunem întîi $A = 0$, în ecuația generală (3). Rămîne $By + C = 0$, sau $y = -\frac{C}{B} = \text{const.}$, care reprezintă o paralelă la Ox.

b) Fie acum $B = 0$. Rămîne $Ax + C = 0$ sau $x = -\frac{C}{A} = \text{const.}$, adică o paralelă la Oy.

c) Dacă $C = 0$, ecuația rămasă este $Ax + By = 0$ sau $y = -\frac{A}{B}x = mx$, ecuația unei drepte care trece prin origine.

Să considerăm acum cîte doi coeficienți nuli.

d) $A = C = 0$. Rămîne $By = 0$, deci $y = 0$, adică ecuația axei Ox.

e) $B = C = 0$. Rămîne $Ax = 0$, deci $x = 0$, adică ecuația axei Oy.

f) $A = B = 0$, imposibil fiindcă rămîne $C = 0$, însă $C \neq 0$ prin ipoteză. După cum se vede dacă ecuația dreptei sub forma (2) nu conține dreptele paralele cu Oy (pe care le-am dedus prin trecere la limită) ecuația, (3)

* $y = x - 1$ nu este o dreaptă, ci *ecuația* unei drepte; totuși în geometria analitică se folosește des acest limbaj pentru prescurtare.

conține toate dreptele planului inclusiv toate dreptele particulare. Pentru acest motiv (3) se numește ecuația generală a dreptei.

Din cele spuse mai înainte se desprinde următoarea concluzie importantă: orice ecuație de gradul I în două variabile x și y, raportată la sistemul cartezian dreptunghiular xOy reprezintă o dreaptă și reciproc o dreaptă oarecare din plan este reprezentată printr-o ecuație de gradul I în două variabile (eventual poate lipsi una din variabile).

Prin urmare, dreapta în plan este caracterizată printr-o ecuație de gradul I. Pentru acest motiv o ecuație de gradul I se numește *ecuația liniară.*

Exemple

I. *Trecerea de la forma explicită la ecuația generală.*

1) *Ecuația* $y = \sqrt{3}\,x - 5$ *se scrie sub forma generală* $\sqrt{3}\,x - y - 5 = 0$.

2) *Ecuația* $y = -\frac{3}{2}x - 4$ *se scrie sub forma generală* $3x + 2y + 8 = 0$.

II. *Trecerea de la ecuația generală la forma explicită.*

3) *Ecuația* $3x + 4y - 16 = 0$ *se scrie* $y = -\frac{3}{4}x + 4$ (coef. *unghiular* $m = -\frac{3}{4}$, *ordonata la origine* $n = 4$).

4) $x - 2y + 5 = 0$ *se scrie* $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (*coef. unghiular* $m = \frac{1}{2}$, *ordonata la origine* $n = \frac{5}{2}$).

9. Consecințe. a) *Condiția ca două drepte să fie paralele este ca să aibă aceeași înclinare* α *față de axa* Ox, deci să aibă același coeficient unghiular.

Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile $y = mx + n$ și $y = m'x + n'$, condiția de paralelism este

$$m = m'. \tag{4}$$

Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile $Ax + By + C = 0$ și $A'x + B'y + C' = 0$, atunci $m = -\frac{A}{B}, m' = -\frac{A'}{B'}$ și condiția devine $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$ sau

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \tag{4'}$$

(coeficienții lui x și y proporționali).

b) *Pentru ca două drepte să coincidă, pe lîngă faptul că sînt paralele trebuie să aibă și un punct comun.* Punctul comun îl luăm pe axa Oy, deci ordonatele la origine trebuie să fie egale: $n = n'$. Atunci pentru ca două drepte date prin forma explicită să coincidă trebuie ca

$$m = m'; \qquad n = n'. \tag{5}$$

Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile lor generale, atunci pe lîngă (4') trebuie să avem $n = n'$, adică $-\frac{C}{B} = -\frac{C'}{B'}$ sau $\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$. Dar $\frac{B}{B'}$ se găsește și în relația (4') deci

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \tag{5'}$$

(toți coeficienții proporționali).

Recapitulînd: (4) sau (4') reprezintă condiția de paralelism; (5) sau (5') reprezintă condițiile de coincidență (suprapunere) a două drepte.

Observare importantă. Ecuațiile care diferă numai prin termenul liber

$$Ax + By + C = 0; \quad Ax + By + C' = 0 \tag{6}$$

reprezintă două drepte paralele.

Exemple. a) $3x - 5y + 2 = 0$ *și* $6x - 10y + 7 = 0$ *reprezintă drepte paralele, deoarece* $\frac{6}{3} = \frac{-10}{-5}$ *fără a fi egale și cu* $\frac{7}{2}$.

b) $2x + 6y - 5 = 0$; $4x + 12y - 10 = 0$ *sînt două drepte confundate, căci au toți coeficienții proporționali.*

10. *Condiția ca un punct să se afle pe o dreaptă este ca* ecuația dreptei să fie verificată de coordonatele acelui punct.

De exemplu *punctul* $M(1, -3)$ *se găsește pe dreapta* $3x + 5y + 12 = 0$, *deoarece* $3 \cdot 1 + 5(-3) + 12 = 0$.

Putem pune și problema inversă, ca fiind dată o dreaptă să găsim puncte situate pe acea dreaptă. Este de ajuns să luăm o valoare pentru x (sau y) și se găsește cealaltă coordonată y (sau x). De pildă, referindu-ne la dreapta de mai sus, pentru $x = -3$ rezultă $y = -\frac{3}{5}$, deci punctul $\left(-3, -\frac{3}{5}\right)$.

În general vom scrie că punctul $M(x_0, y_0)$ se găsește pe dreapta $Ax + By + C = 0$, arătînd că verifică ecuația dreptei, adică $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

La fel, dacă ecuația dreptei este dată sub altă formă. *În particular* o dreaptă care trece prin origine $y = mx$ este determinată dacă se mai cunoaște un alt punct $M_0(x_0, y_0)$ prin care trece acea dreaptă. Acesta trebuie să verifice ecuația dreptei, deci $y_0 = mx_0$, de unde $m = \frac{y_0}{x_0}$. Rezultă *că ecuația dreptei determinată de origine și de un alt punct* $M_0(x_0, y_0)$ *este*

$$y = \frac{y_0}{x_0}x \text{ sau } y_0x - x_0y = 0. \tag{7}$$

11. *Ecuația dreptei prin tăieturi.* Se numesc tăieturi punctele unde o dreaptă taie axele de coordonate. Coordonatele acestor puncte sînt *coordona-*

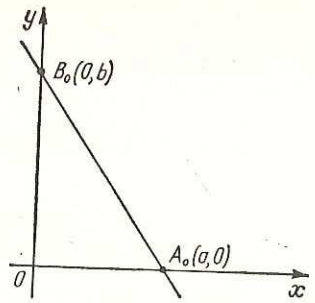


Fig. 12

tele la origine ale dreptei. Dacă $A_0(a, 0)$ și $B_0(0, b)$ sînt cele două puncte pe axe, a este abscisa la origine și b ordonata la origine (fig. 12). Pentru ca ecuația

$$Ax + By + C = 0$$

să reprezinte chiar dreapta A_0B_0 trebuie ca coordonatele celor două puncte să o verifice, adică să avem

$$Aa + C = 0 \text{ și } Bb + C = 0, \text{ de unde}$$

$$A = -\frac{C}{a}, \quad B = -\frac{C}{b}.$$

Înlocuind, ecuația dreptei devine

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0.$$

Deoarece dreapta nu trece prin origine ($C \neq 0$), se poate împărți cu $(-C)$ și se obține forma definitivă

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{8}$$

pe care o vom numi ecuația dreptei *prin tăieturi* sau *prin coordonatele la origine*.

Invers, dacă dreapta este dată printr-o altă formă, se determină punctul unde taie axa Ox făcînd $y = 0$ și punctul pe Oy făcînd $x = 0$. Pentru ecuația generală $Ax + By + C = 0$, tăieturile sînt $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ și $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

Exemple. a) *Dreapta ce trece prin punctele* $A(3, 0)$ și $B(0, 5)$ *are ecuația* $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} - 1 = 0$ *sau* $5x + 3y - 15 = 0$.

b) *Dreapta simetrică celei precedente față de* Ox *trece prin punctele* $A(3, 0)$ *și* $B(0, -5)$ Ecuația ei este

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} - 1 = 0 \quad \text{sau} \quad 5x - 3y - 15 = 0.$$

12. *Construcția dreptelor.* 1) *Drepte care trec prin origine.* Mai este necesar încă un punct al dreptei, care se obține dînd lui x o valoare arbitrară și găsind valoarea corespunzătoare a lui y.

Exemple. a) *Să se figureze dreapta* $y = 3x$. Pentru $x = 1$ avem $y = 3$. Punctul diferit de origine este $A(1, 3)$ (fig. 13).

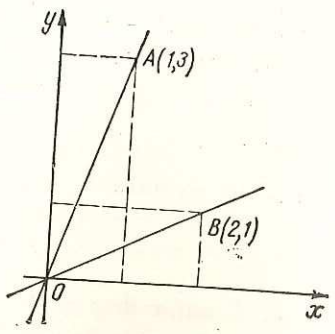


Fig. 13

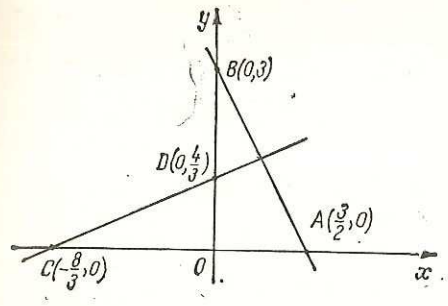


Fig. 14, a

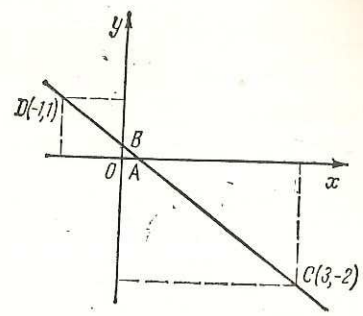


Fig. 14, b

b) *Să se figureze dreapta* $y = \frac{1}{2}x$. Luăm $x = 2$ și corespunde $y = 1$, deci $B(2, 1)$ (fig. 13).

c) *Să se figureze dreapta* $y = -16x$. Aici e bine să luăm $x = \frac{1}{4}$, care dă $y = -4$, deci punctul este $\left(\frac{1}{4}, -4\right)$.

2) *Drepte oarecare.* În general dreapta se figurează căutînd punctele pe axe, adică tăieturile (§ 11).

Exemple. a) $y = -2x + 3$. Tăieturile sînt $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ și $B(0, 3)$ (fig. 14-a).

b) $3x - 6y + 8 = 0$. Făcînd $x = 0$, apoi $y = 0$ se obțin tăieturile $C\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$ și $D\left(0, \frac{4}{3}\right)$. Dreapta este CD (fig. 14, *a*). Uneori e preferabil să renunțăm la tăieturi, de exemplu cînd acestea sînt prea apropiate și construcția dreptei este neprecisă, sau cînd tăieturile ies din cadrul figurii.

Ca exemplu considerăm dreapta $3x + 4y - 1 = 0$. Punctele pe axe $A\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$ fiind prea apropiate, alegem alte puncte: $C(3, -2)$ și $D(-1, 1)$ (fig. 14, *b*).

Exerciții și probleme

31. Să se figureze dreptele: $3x - 5 = 0$; $2y + 3 = 0$; $2x + 5y = 0$; $4x - y = 0$; $3x + 5y - 15 = 0$; $4x + 3y - 1 = 0$; $2x - 3y + 1 = 0$.

23. Să se găsească coordonatele numerice a patru puncte, după voie, aparținînd dreptei $5x + 6y + 30 = 0$.

33. Să se scrie ecuația unei drepte paralelă cu dreapta $y = -3x$ și trecînd prin punctul $A(0, -4)$.

34. Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin perechile de puncte:
a) $A(2, 0)$, $B(0, 5)$; b) $C(5, 0)$, $D(0, -5)$; c) $E(-4, 0)$, $F(0, 3)$; d) $G(-8, 0)$, $H(0, -6)$
și să se aducă la forma generală.

35. Să se determine parametrii λ și μ, astfel ca ecuațiile

$$(3 + \lambda)(x - 5y + 4 = 0 \text{ și } 5x - (4 - \mu)y - 5 = 0$$

să reprezinte aceeași dreaptă.

$$\left[\lambda = -7;\ \mu = \frac{41}{4}.\right]$$

36. Să se determine a și b, astfel ca ecuațiile

$$ax + 3y - 8 = 0 \text{ și } 4x + by + 20 = 0$$

să reprezinte: 1) aceeași dreaptă; 2) drepte paralele.

$$\left[1)\ a = -\frac{8}{5},\ b = -\frac{15}{2};\ 2)\ \text{o infinitate de soluții: } ab = 12.\right]$$

37. Se dă dreapta $6x + 5y - 15 = 0$. a) Să se scrie ecuația ei cu ajutorul tăieturilor; b) să se scrie ecuațiile simetricelor ei față de axa Ox, față de axa Oy și față de origine.

38. Aceleași probleme pentru cazul general $Ax + By + C = 0$.

[b) $Ax - By + C = 0$; $-Ax + By + C = 0$; $Ax + By - C = 0$.]

39. Să se scrie ecuațiile laturilor rombului cu centrul în origine, cu diagonalele pe axe, știind că lungimile acestora sînt $AC = 2a$ (AC pe Ox) și $BD = 2b$.

40. Se dau dreptele
$2x + 3y - 12 = 0$; $x - 3y + 6 = 0$; $4x + 6y + 9 = 0$;
$3x - 9y - 8 = 0$ și se cere să se demonstreze că
a) formează un paralelogram; b) punctele

$$A\left(2, \frac{8}{3}\right),\ B\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{6}\right),\ C\left(-\frac{11}{18}, -\frac{59}{54}\right),\ D\left(\frac{44}{9}, \frac{20}{27}\right)$$

sînt vîrfurile paralelogramului.

41. Să se demonstreze că punctele $A(5, 0)$ $B(2, 2)$, $C(0, 1)$, $D(3, -1)$ sînt vîrfurile unui paralelogram. Care sînt coordonatele centrului?

C. Dreapta determinată prin condiții date

13. *Dreapta determinată de un punct și o direcție.* Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul dat și direcția definită prin coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg}\alpha$ (α unghiul dreptei cu axa Ox). Pornim de la ecuația dreptei care conține coeficientul unghiular

$$y = mx + n$$

și scriem că M_0 aparține acestei drepte

$$y_0 = mx_0 + n.$$

Deoarece m este dat, trebuie să eliminăm parametrul n și aceasta se obține prin simplă scădere:

$$y - y_0 = m(x - x_0), \tag{9}$$

Aceasta este legătura între coordonatele x, y ale punctului curent M pentru ca acesta să descrie dreapta definită prin condițiile date. Putem verifica imediat că (9) reprezintă ecuația dreptei date. În adevăr: a) ecuația este de gradul I în x și y, deci reprezintă o dreaptă; b) are coeficientul unghiular m dat; c) $M_0(x_0, y_0)$ verifică ecuația dreptei.

Prin urmare (9) *este ecuația dreptei determinată de un punct* $M_0(x_0, y_0)$ *și de direcția dată prin* $m = \operatorname{tg}\alpha$.

Caz particular. Dacă dreapta trece prin origine, putem considera $M_0 \equiv O$ (0, 0) și (9) devine

$$y = mx, \tag{10}$$

ecuația dreptei ce trece prin origine și are coeficientul unghiular m. Am regăsit astfel rezultatul de la [2, § 5].

Exemple. 1) *Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctul* $A(-2, 3)$ *și coeficientul unghiular* $m = \frac{3}{2}$.

Înlocuind în (9) avem $y - 3 = \frac{3}{2}(x + 2)$ sau $3x - 2y + 12 = 0$.

2) *Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul* $A(1, 1)$ *și face* $120°$ *cu axa* Ox.
Coeficientul unghiular este $m = \operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$, deci ecuația dreptei este $y - 1 = -\sqrt{3}(x - 1)$ sau $\sqrt{3}x + y - (1 + \sqrt{3}) = 0$.

14. *Ecuația dreptei determinată prin două puncte.* Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ punctele care determină dreapta și $M(x, y)$ un punct curent al ei. Pentru ca dreapta scrisă sub forma generală $Ax + By + C = 0$ să coincidă cu dreapta

M_1M_2 trebuie ca ecuația ei să fie verificată de coordonatele (x_1, y_1), (x_2, y_2) ale celor două puncte și evident de orice $M(x, y) \in M_1M_2$, adică trebuie ca

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Am obținut astfel un sistem omogen cu necunoscutele A, B, C, care trebuie să admită și soluții *diferite de cea banală* ($A = B = C = 0$). Reamintim din algebră condițiile ca un sistem omogen de *trei* ecuații cu *trei* necunoscute să aibă soluții diferite de cea banală:

1) Să existe cel puțin un *determinant de ordinul II din matricea coeficienților diferit de zero*; 2) determinantul caracteristic *să fie nul.*

Prima condiție este de la sine îndeplinită fiindcă cel puțin unul din determinanții $\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$ este diferit de zero. În adevăr, dacă ambii ar fi nuli, atunci $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ și ar rezulta $M_1 \equiv M_2$; problema nu mai are sens.

Rămîne să fie satisfăcută a doua condiție:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Ceea ce am obținut este chiar *ecuația dreptei* M_1M_2. Pentru a dovedi acest lucru să observăm întîi că dacă dezvoltăm determinantul după prima linie, obținem o ecuație de gradul I în x și y, adică ecuația unei drepte. Apoi dacă înlocuim x, y prin x_1, y_1, determinantul este nul ca avînd două linii identice, deci dreapta trece prin M_1. La fel înlocuind x, y prin x_2, y_2 se constată că dreapta (12) trece prin M_2. Atunci (12) reprezintă chiar ecuația dreptei M_1M_2.

Exemplu. *Dreapta definită de punctele* $A(-1, -1)$, $B(2, 6)$ *are ecuația*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -7x + 3y - 4 = 0 \quad \text{sau } 7x - 3y + 4 = 0.$$

15. *Altă formă a ecuației dreptei determinată de două puncte.* Dacă în determinantul din ecuația (12) a dreptei M_1M_2 scădem linia a II-a din prima și din a III-a obținem

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{12'}$$

de unde se deduce ecuația dreptei sub forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ sau } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{13}$$

În sfîrșit aceasta se mai poate scrie și astfel

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{13'}$$

De aici rezultă coeficientul unghiular al dreptei:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{13''}$$

Regăsim în acest fel un rezultat cunoscut din **1**, (10) anume: *coeficientul unghiular al dreptei determinată de două puncte* M_1, M_2 *este egal cu raportul dintre diferența ordonatelor și diferența absciselor celor două puncte.*

Ca exemplu reluăm pe cel precedent: *dreapta determinată de* $A(-1, -1)$ *și* $B(2, 6)$. Avem două posibilități:

a) folosim forma (13), deci $\frac{x + 1}{2 + 1} = \frac{y + 1}{6 + 1}$ adică $7(x + 1) = 3(y + 1)$ sau sub formă generală $7x - 3y + 4 = 0$.

b) Se calculează întîi coeficientul unghiular $m = \frac{6 + 1}{2 + 1} = \frac{7}{3}$, apoi se scrie ecuația dreptei care trece prin A, cu direcția dată de m, adică $y + 1 = \frac{7}{3}(x + 1)$, care se aduce la forma generală.

Observare. Este bine ca elevii să se obișnuiască să verifice rezultatele obținute. De pildă în exemplul de mai înainte, să se vadă dacă coordonatele punctelor A, B satisfac ecuația găsită.

16. *Cazul particular al dreptei determinată de origine și de un punct* $M_1(x_1, y_1)$ *al planului* se obține din cele precedente considerînd $M_2 \equiv 0$, deci $x_2 = y_2 = 0$.

Rezultă ecuația dreptei OM_1 sub formele

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{b) } y_1 x - x_1 y = 0 \Rightarrow \text{c) } \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \tag{14}$$

iar din $y = \frac{y_1}{x_1} x$ se deduce coeficientul unghiular

$$m = \frac{y_1}{x_1}. \tag{14'}$$

17. *Ecuațiile parametrice ale dreptei determinată de două puncte.* Formulele care dau coordonatele unui punct M care împarte segmentul $\overline{M_1M_2}$ în raportul dat k sînt (1, 6):

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - k\,y_2}{1 - k} \tag{15}$$

Cînd k ia toate valorile de la $-\infty$ la $+\infty$, M se deplasează pe dreapta M_1M_2 și anume în interiorul segmentului M_1M_2 pentru $k < 0$ și în exterior pentru $k > 0$. Așadar formulele (15), cînd k variază, dau poziția oricărui punct situat pe dreapta M_1M_2 și pentru acest motiv se numesc ecuațiile parametrice ale dreptei M_1M_2. Pentru a arăta și mai clar că este vorba de un parametru și nu de un număr fix k, se obișnuiește să se noteze raportul variabil $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = \lambda$ și ecuațiile parametrice (15) ale dreptei M_1M_2 apar sub forma

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}. \tag{15'}$$

18. *Condiția ca trei puncte să fie în linie dreaptă.*

Ne propunem să găsim condiția ca trei puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ să fie coliniare. Pentru aceasta scriem ecuația dreptei M_2M_3 sub formă de determinant (12)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

și punem condiția ca punctul M_1 să verifice ecuația, adică

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Aceasta reprezintă, sub formă de determinant, *condiția ca cele trei puncte să fie în linie dreaptă.* Dacă se pornește de la ecuația dreptei M_1M_3 sub forma

$$\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y - y_1}{x_3 - x_1}$$

și se scrie că $M_2 \in M_1M_3$ se obține condiția de coliniaritate sub forma

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}. \tag{16'}$$

Ordinea în care se iau punctele rămîne la alegerea noastră.

Exemplu. *Punctele* $A(-1, -1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 5)$ *sînt coliniare* deoarece

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Al doilea determinant s-a obținut din primul adunînd ultima coloană la primele două.

NOTĂ. Elevii pot face verificarea folosind condiția (16').

Exerciții și probleme

42. Se dau punctele $A(3, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 1)$. Se cere:
a) ecuația dreptei dusă prin A, paralelă cu BC.
b) ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

[a) Coeficientul unghiular al dreptei BC este $m = -\frac{2}{5}$. Ecuația cerută $2x + 5y - 31 = 0$; b) ecuația medianei $2x - y - 1 = 0$.]

43. Aceleași date ca mai sus. Să se scrie ecuația dreptei AM unde $M \in BC$ și $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{3}{4}$.

[$20x - 13y + 5 = 0$.]

44. Să se stabilească ecuația dreptei prin tăieturi, scriind dreapta determinată de punctele pe axe, sub formă de determinant.

45. Se dă punctul fix $A(a, b)$ și punctul variabil $M(\alpha - b, \alpha - a)$, α fiind un parametru. Să se arate că dreapta AM este fixă și să se scrie ecuația ei.

[Coeficientul unghiular al dreptei AM este constant; $x - y - a + b = 0$.]

46. Se dă punctul $A(1, 3)$, punctul variabil $M(\alpha, \alpha - 1)$ și dreapta $5x - 3y + 10 = 0$. Să se determine coordonatele lui M astfel ca AM să fie paralelă cu dreapta dată.

$\left[M\left(-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right).\right]$

47. Se dau grupele de cîte trei puncte:

$$A\left(-\frac{4}{5}, 2\right), \quad B\left(\frac{2}{5}, 4\right), \quad C(1, 5);$$

$$A'\left(-\frac{7}{5}, 1\right), \quad B'\left(-1, \frac{5}{8}\right), \quad C'(2, -5).$$

$A''(3, 0)$, $B''(1, 1)$, $C''(-2; 2{,}5)$.

Să se spună în care grupă punctele sînt coliniare și să se scrie ecuația dreptei respective.

[$5x - 3y + 10 = 0$; $x + 2y - 3 = 0$.]

48. Să se determine λ, astfel ca punctele $A(-1, -2)$, $B(2, 3)$, $C(5, \lambda)$ să fie în linie dreaptă.

[$\lambda = 8$.]

49. Să se determine punctul $M(\lambda, \lambda)$ astfel ca să fie în linie dreaptă cu punctele $A(1, -2)$, $B(2, 4)$.

$\left[\lambda = \frac{8}{5}.\right]$

50. Se dau punctele $A\left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $B\left(\frac{7}{4}, \frac{21}{4}\right)$, $C(3, 4)$, $D(-7, 14)$.

a) Să se arate că cele patru puncte sînt coliniare.
b) Să se arate că C și D sînt conjugate față de A și B.

[a) Se consideră întîi A, B, C, apoi A, B, D. b) Se calculează raportul în care C și D împarte segmentul $\overline{AB}$.]

51. Să se scrie ecuațiile medianelor triunghiului format de punctele $A(1, 4)$, $B(3, -1)$, $C(8, -2)$. Să se verifice că centrul de greutate se află pe fiecare din ele.

[$3x + y - 7 = 0$; $y - 1 = 0$; $x + 2y - 4 = 0$ $G(2, 1)$.]

52. Se dau punctele $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ și dreapta $(D) = x - 4y + 7 = 0$. Să se găsească coordonatele punctului C, așezat pe dreapta (D), astfel ca triunghiul ABC să fie isoscel cu baza AB.

[Se ia un punct $M(\alpha, \beta)$ și se scrie că $MA \in MB$ și $M \in (D)$. Se găsește $M(1, 2)$.]

53. Se dau punctele $A(8, 0)$, $B(3, 6)$, $C(0, 3)$. Dreapta BC taie axa Ox în D și dreapta AB taie axa Oy în E.

Să se arate că mijloacele segmentelor OB, AC, DE sînt coliniare.

54. Se dau punctul $A(2, 1)$ și dreptele (D) $2x - 3y + 1 = 0$, (D') $x + 2y - 7 = 0$. Să se determine punctul M de pe dreapta (D), știind că mijlocul segmentului AM se află pe (D').

[Se scrie că $M(\alpha, \beta) \in (D)$ și mijlocul lui $\overline{AM}$ se află pe (D') $M(4, 3)$.]

55. Se cer condițiile ca să existe puncte reale $A(\lambda, b)$, $B(a, \lambda)$, unde λ este un parametru real, astfel ca ele să fie în linie dreaptă cu punctul dat $C(h, h)$.

[$a > h$, $b > h$ sau $a < h$, $b < h$, în care cazuri există două perechi A_1, B_1 și A_2, B_2.]

Capitolul 3

Poziţiile relative ale dreptelor în plan

A. Două drepte

1. *Intersecţia a două drepte.* Fiind date ecuaţiile a două drepte

$$Ax + By + C = 0 \text{ şi } A'x + B'y + C' = 0 \qquad (1)$$

dacă ele sînt concurente, coordonatele punctului de intersecţie trebuie să verifice ambele ecuaţii, fiindcă punctul se găseşte pe fiecare din ele. Prin urmare cele două coordonate reprezintă soluţia sistemului de ecuaţii liniare (1), anume:

$$x = -\frac{CB' - C'B}{AB' - A'B}; \quad y = -\frac{AC' - A'C}{AB' - A'B} \qquad (2)$$

cu condiţia ca $AB' - A'B \neq 0$.

Discuţie. 1) Sistemul (1) în care $AB' - A'B \neq 0$ este au sistem Cramer şi are soluţia unică (2), prin urmare cele două drepte au un punct comun, bine determinat. Dreptele sînt deci concurente.

2) Dacă $AB' - A'B = 0$, adică $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ şi $CB' - C'B \neq 0$ (sau $AC' - A'C \neq 0$) atunci sistemul este imposibil, prin urmare cele două drepte nu au nici un punct comun la distanţă finită. Dreptele sînt deci paralele. Am regăsit astfel condiţia de paralelism a două drepte, care a fost dată la (2, § 9).

3) Dacă $AB' - A'B = 0$ şi de asemenea $CB' - C'B = 0$, atunci rezultă $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, deci şi $AC' - A'C = 0$. Sistemul este nedeterminat, deoarece notînd cu $\frac{1}{k}$ valoarea comună a rapoartelor, a doua ecuaţie din (1) devine $k(Ax + By + C) = 0$, adică se reduce la prima. Cele două drepte au o infinitate de puncte comune, prin urmare coincid. Se regăsesc astfel rezultatele de la cap. 2, § 9.

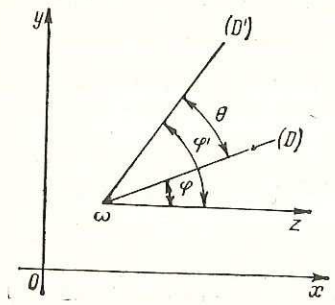


Fig. 15

2. *Unghiul a două drepte.* Presupunem dreptele (D) şi (D') date sub forma $y = mx + n$ şi $y = m'x + n'$ şi ne propunem să calculăm unghiul format de ele.

Prin punctul lor de intersecţie ω ducem $\omega z \parallel Ox$ şi notăm $\sphericalangle [\omega z, (D)] = \varphi$, $\sphericalangle [\omega z, (D')] = \varphi' \sphericalangle [(D), (D')] = 0$.

Se ştie că $m = \text{tg}\varphi$ şi $m' = \text{tg}\varphi'$ (fig. 15), iar unghiul celor două drepte este evident $\theta = \varphi' - \varphi$. Rezultă

$$\text{tg}\theta = \text{tg}(\varphi' - \varphi) = \frac{\text{tg}\varphi' - \text{tg}\varphi}{1 + \text{tg}\varphi'\text{tg}\varphi}$$

sau

$$\text{tg}\theta = \frac{m' - m}{1 + mm'}. \qquad (3)$$

Atunci cînd se dau ecuaţiile dreptelor rămîne să hotărîm noi care este (D) şi care (D'), dar după cum facem o alegere sau alta obţinem, din cauza diferenţei $(m' - m)$, două valori egale şi de semne contrare pentru $\text{tg}\theta$. Aceasta corespunde faptului geometric că cele două drepte fac între ele două unghiuri suplementare. Convenim să alegem valoarea pozitivă, adică să calculăm unghiul ascuţit al dreptelor, afară de cazul cînd există consideraţii care ne obligă la alegerea contrară.

Exemple. 1) *Să se afle unghiul ascuţit al dreptelor*

$$x - 5y + 8 = 0 \text{ şi } 3x - 2y - 12 = 0.$$

Coeficienţii unghiulari sînt $m = \frac{1}{5}$, $m' = \frac{3}{2}$, deci

$$\text{tg}\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}} = 1, \text{ de unde } \theta = 45°.$$

1) *Unghiul dreptelor* $x + y + 1 = 0$ şi $3x + y - 6 = 0$ *este dat de* $\text{tg}\theta = \frac{-1 - (-3)}{1 + (-1)(-3)} = \frac{1}{2}$; $\theta = 26°33'54''$.

Dacă dreptele sînt date sub forma generală

$$Ax + By + C = 0; \; A'x + B'y + C' = 0,$$

atunci $m = -\frac{A}{B}$, $m' = -\frac{A'}{B'}$, şi formula (3) devine

$$\text{tg}\theta = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB'}. \qquad (3')$$

Exemplele precedente se pot trata direct cu relaţia (3').

Dacă în (3) $m = m'$, atunci $\operatorname{tg}\theta = 0$, deci $\theta = 0$ (sau π) și dreptele sînt paralele. Găsim și pe această cale condiția de paralelism a două drepte.

Condiția de paralelism dedusă din (3′) este $AB' - A'B = 0$ sau $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ ceea ce am găsit și pe alte căi.

Observare importantă. Dreptele $Ax + By + C = 0$ și $Ax + By + C' = 0$, care diferă numai prin termenul liber, sînt evident paralele fiindcă îndeplinesc condiția.

Reciproc, două drepte paralele pot fi aduse să difere numai prin termenul liber. În adevăr, dacă notăm $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = k$, atunci $A' = kA$, $B' = kB$ și ecuația $A'x + B'y + C' = 0$ devine $kAx + kBy + C' = 0$ sau $Ax + By + \frac{C'}{k} = 0$ care diferă numai prin termenul liber de $Ax + By + C = 0$.

Exemplu. *O paralelă oarecare la dreapta* $3x - 5y + 15 = 0$ *se scrie* $3x - 5y + \lambda = 0$, λ *fiind un parametru.*

3. *Condiția ca două drepte să fie perpendiculare* se deduce dacă pornim de la inversa tangentei, adică de la

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{1 + mm'}{m' - m}.$$

Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ avem cotangenta nulă, deci $1 + mm' = 0$ de unde rezultă

$$m' = -\frac{1}{m} \qquad (4).$$

Din (4) se deduce regula ușor de ținut minte: *dacă două drepte sînt perpendiculare, coeficientul unghiular al uneia din ele este invers și de semn contrar cu al celeilalte.*

Dacă dreptele sînt date sub forma generală

$$(D)\ Ax + By + C = 0;\ (D')\ A'x + B'y + C' = 0$$

atunci prima condiție (4) devine:

$$AA' + BB' = 0. \qquad (4')$$

4. Aplicații. 1. *Să se ducă prin punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *paralelă la dreapta* $Ax + By + C = 0$.

Dreapta care trece prin M_0 și are coeficientul unghiular m este $y - y_0 = m(x - x_0)$. Însă dreapta dată are $m = -\frac{A}{B}$ deci paralela prin M_0 este $y - y_0 = -\frac{A}{B}(x - x_0)$ sau

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (5)$$

Altă metodă. O paralelă la dreapta dată are ecuația $Ax + By + \lambda = 0$. Obligînd această paralelă să treacă prin M_0 avem $Ax_0 + By_0 + \lambda = 0$. Prin scăderea celor două relații se elimină λ și se obține (5).

2) *Prin punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *să se ducă perpendiculara pe o dreaptă dată.*

a) Dreapta este dată sub formă explicită $y = mx + n$. Orice perpendiculară pe această dreaptă are coeficientul unghiular $m' = -\frac{1}{m}$ deci ecuația dreptei cerute este

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0). \qquad (6)$$

b) Dreapta este dată sub forma generală $Ax + By + C = 0$. Atunci $m = -\frac{A}{B}$, deci $m' = \frac{B}{A}$ și ecuația dreptei cerute este $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$ sau

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0. \qquad (6')$$

Forma (6′) se folosește practic mai rar decît (6).

Exemple. 1) *Să se scrie perpendiculara dusă prin punctul* $M_0(-2, 1)$ *la dreapta* $y = 3x + 2$.

Ecuația dreptei căutate este $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 2)$ sau $x + 3y - 1 = 0$.

2) *Să se afle unghiul dreptelor* $y = mx + n$ *și* $y = \frac{m-1}{m+1}x + k$.

Avem $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{m - \frac{m-1}{m+1}}{1 + m\frac{m-1}{m+1}} = \frac{m^2+1}{m^2+1} = 1$, deci $\theta = 45°$.

B. Trei drepte

5. Pozițiile relative a trei drepte pot fi următoarele:

a) *Dreptele se taie două cîte două și determină un triunghi.*

b) *Două drepte sînt paralele și a treia le intersectează (unul din vîrfurile triunghiului este aruncat la infinit).*

c) *Cele trei drepte sînt paralele (punctul de concurență aruncat la infinit).*

d) *Cele trei drepte sînt concurente.*

e) *Două drepte sînt confundate, a treia taie dreapta dublă.*

f) *Două drepte confundate, a treia paralelă cu dreapta dublă.*

g) *Cele trei drepte sînt confundate.*

În cele ce urmează vom presupune că dreptele sînt distincte, deci nu vom considera ultimele trei cazuri. Din punct de vedere analitic trebuie să regăsim cazurile pe care le-am enunțat aici.

Presupunem deci că dreptele sînt date prin ecuaţiile

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \\ A''x + B''y + C'' = 0 \end{cases} \tag{7}$$

În general un astfel de sistem nu este compatibil (posibil), adică nu există o pereche de valori (x_0, y_0) care să verifice toate ecuaţiile. Aceasta înseamnă că cele trei drepte nu trec prin acelaşi punct, adică nu sînt concurente.

Dacă

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A'' & B'' \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} A' & B \\ A'' & B'' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{8}$$

atunci ecuaţiile (7), luate cîte două formează sisteme Cramer, compatibile şi determinate. Dreptele se intersectează două cîte două şi formează un triunghi. *Este cazul* (a). Dacă *numai unul* oarecare din determinanţii (8) este nul (de exemplu primul), atunci două drepte (primele două) sînt paralele, dar fiecare din ele intersectează pe a treia, deoarece ecuaţiile lor formează sistem Cramer. *Este cazul* (b). Dacă doi determinanţi din (8) sînt nuli, atunci al treilea este de la sine nul. În adevăr fie $AB' - A'B = 0$ şi $AB'' - A''B = 0$, de unde rezultă

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{A''}{B''}, \tag{9}$$

deci $A'B'' - A''B' = 0$.

Interpretarea geometrică este că dacă două drepte sînt paralele cu a treia, ele sînt paralele între ele. *Este cazul* (c).

În acest caz, din cauza egalităţilor (9), determinantul format cu toţi coeficienţii ecuaţiilor este nul:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0 \tag{9'}$$

deoarece are elementele a două coloane proporţionale.

6. *Condiţiile ca trei drepte să fie concurente* [*cazul* (d)]. Ecuaţiile dreptelor sînt cele date la (7). Pentru ca dreptele să fie concurente trebuie să existe un punct $M_0(x_0, y_0)$ care să verifice toate cele trei ecuaţii. Aceasta înseamnă că cele *trei ecuaţii* cu *două necunoscute* (7) trebuie să formeze sistem compatibil şi determinat. Pentru aceasta condiţiile necesare şi suficiente sînt:

a) Să existe un determinant de ordinul II, format cu coeficienţii lui x şi y diferit de zero, deci unul din determinanţii (8) să fie diferit de zero:

b)
$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Prima condiţie (a) înseamnă din punct de vedere analitic, că două din drepte sînt concurente. Condiţia (b), adică relaţia (10) arată că a treia dreaptă trece prin punctul de intersecţie al primelor două.

Acestea sînt condiţiile ca trei drepte să fie concurente. Coordonatele punctului comun se găsesc rezolvînd sistemul format de două oarecare din cele trei ecuaţii.

Să presupunem acum că prima condiţie (a) nu este îndeplinită; aceasta înseamnă că toţi determinanţii (8) sînt nuli, iar cele trei drepte sînt paralele [cazul (c)]. În studiul făcut mai înainte am văzut însă că atunci (9') sau (10) este îndeplinită ca o consecinţă.

Prin urmare dacă este îndeplinită numai a doua condiţie (b) nu rezultă că dreptele sînt concurente; ele pot fi şi paralele.

Rezumăm discuţia de mai sus în următorul enunţ:

Dacă determinantul tuturor coeficienţilor a trei drepte (10) *este nul, atunci cele trei drepte sînt concurente sau paralele; dacă două din ele sînt concurente, atunci toate trei sînt concurente, iar dacă două sînt paralele, atunci şi a treia este paralelă cu ele.*

O enunţare şi mai concisă este următoarea:

Egalitatea (10) reprezintă condiţia ca trei drepte să fie concurente la distanţă finită sau la infinit.

7. *Altă metodă de a dovedi concurenţa a trei drepte.*

Să arătăm că dacă trei drepte sînt concurente, ecuaţia uneia din ele rezultă ca o combinaţie liniară* a celorlalte două. În adevăr dacă dreptele sînt concurente şi notăm ecuaţiile lor din (7) cu $D = 0$, $D' = 0$, $D'' = 0$, atunci se pot determina doi coeficienţi λ şi μ astfel ca să avem

$$D'' = \lambda D + \mu D'. \tag{11}$$

Aceasta înseamnă că trebuie să avem

$$\lambda A + \mu A' = A''; \quad \lambda B + \mu B' = B''; \quad \lambda C + \mu C' = C''. \tag{12}$$

* Prin *combinaţie liniară* a două expresii E_1 şi E_2 se înţelege suma acelor expresii, înmulţite fiecare cu cîte un factor: $\alpha E_1 + \beta E_2$. Dacă E_1 şi E_2 sînt ridicate la puteri, combinaţia nu mai este liniară.

Am obținut un sistem de 3 ecuații cu două necunoscute λ, μ, care este compatibil și determinat deoarece există determinanți de ordinul II diferiți de zero, iar

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

care nu este decît condiția (10) în care coloanele determinantului s-au schimbat în linii. Așadar se pot determina λ și μ astfel ca relația (11) să fie satisfăcută.

Elevii vor demonstra reciproca: dacă (11) este îndeplinită cele trei drepte sînt concurente.

O b s e r v a r e. Dacă λ și μ sînt fracționari, prin eliminarea numitorilor relația (11) devine

$$pD'' = mD + nD'.$$

E x e m p l e. 1) *Să se cerceteze dacă dreptele* $5x - 2y + 8 = 0$; $3x + 4y - 5 = 0$; $x - 3y + 6{,}5 = 0$ *sînt concurente.*

Metoda I. a) Avem

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0;$$

b) $$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 6{,}5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 13 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 6{,}5 \end{vmatrix} = 0,$$

deoarece liniile I și III au elementele proporționale. S-a scăzut linia a II-a din prima.

Metoda a II-a. Adunăm a doua ecuație cu a treia înmulțită cu 2 și obținem prima ecuație, deci dreptele sînt concurente.

2) *Dreptele* $6x + y - 8 = 0$; $4x + 3y - 5 = 0$; $2x - 2y - 3 = 0$ sînt concurente, deoarece *ultima se obține prin scăderea primelor două.*

3) *Să se determine* α *astfel ca dreptele* $2x + y - 4 = 0$; $5x - 2y + 3 = 0$; $\alpha x + 3y - 2 = 0$, *să fie concurente.*

Aici e preferabil să se folosească prima metodă. Se observă că

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ deci trebuie să avem } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \\ \alpha & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

care dezvoltat după ultima linie dă $5\alpha + 60 = 0$, de unde $\alpha = -12$.

Aplicație. *Să se determine ecuația dreptei care prin intersecția dreptelor* $2x - y + 5 = 0$, $3x + 2y - 3 = 0$ *și prin punctul* $A(-3, -2)$.

Metoda I. Intersecția dreptelor date este punctul $\omega(-1, 3)$, care se obține rezolvînd sistemul celor două ecuații. Dreapta ωA are ecuația

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5x - 2y + 11 = 0.$$

Metoda a II-a. Scriem o dreaptă oarecare ce trece prin A, $y + 2 = m(x + 3)$, deci $mx - y + 3m - 2 = 0$ și punem condiția ca aceasta, împreună cu dreptele date, să fie concurente

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 3m - 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuație în care determinantul se dezvoltă după linia I și dă $m = \frac{5}{2}$, prin urmare ecuația dreptei este $y + 2 = \frac{5}{2}(x - 3)$, adică aceeași dreaptă.

8. *Îndrumări pentru rezolvarea problemelor.* În exemplele și aplicațiile luate pînă aici am căutat să formăm deprinderea de a lucra cu coordonatele și cu metodele geometriei analitice. Pentru acest motiv am folosit date numerice, ceea ce înseamnă că toate figurile au fost legate de axele de coordonate.

Geometria analitică servește însă la rezolvarea oricărei probleme de geometrie, al cărei enunț nu se referă la axe. Atunci trebuie să *ne alegem noi* sistemul de referință, adică axele de coordonate. Alegerea axelor de coordonate are o foarte mare importanță, căci de aceasta depinde ușurarea calculelor. Nu există reguli precise pentru alegerea sistemului de referință, însă putem da unele îndrumări care pot fi de folos, după cum urmează:

a) dreptele care se aleg ca axe trebuie să fie fixe;

b) dacă printre datele problemei apare sau putem noi duce o axă de simetrie, aceasta se va lua ca axă Ox sau Oy;

c) dacă putem pune în evidență două axe de simetrie, acestea se vor alege ca axe de coordonate;

d) dacă un punct este centru de simetrie pentru datele problemei, atunci este bine ca el să fie luat ca origine;

e) dacă în enunțul problemei este vorba de un unghi drept, un triunghi dreptunghic, un dreptunghi, pătrat etc., laturile unghiului drept se vor lua ca axe;

f) dacă nu avem nici o indicație în sensul celor arătate mai înainte, atunci alegerea se face astfel încît cît mai multe puncte să aibă o parte din coordonate nule, sau dreptele să aibă poziții particulare (paralele cu axele, sau să treacă prin origine etc.), pentru a ușura calculul.

Trebuie totuși să atragem atenția că sînt cazuri cînd este bine să renunțăm la simplificări de calcul și să alegem axele oarecare, pentru a nu strica simetria rezultatelor, care pot folosi pentru demonstrații, interpretări etc. Ca exemplu vom arăta cum se află ecuațiile medianelor unui triunghi (exemplul 3).

Îndemînarea de a alege axele se capătă prin exerciții cît mai multe. Pentru ilustrarea concretă a îndrumărilor precedente, dăm cîteva exemple.

1) *Se dă un pătrat $ABCD$, pe laturile căruia se iau, în sensul $A - B - C - D$, segmentele $BM = CN$. Să se demonstreze că dreptele AM și BN sînt perpendiculare.*

Axele de coordonate se aleg laturile pătratului: AB ca axă Ox și AD ca axă Oy. Să notăm cu a latura pătratului și $BM = CN = \lambda$ variabil. Coordonatele punctelor A, B, C, M, N, se scriu direct urmărind figura 16:

$$A(0,\ 0),\ B(a,\ 0),\ C(a,\ a),\ D(0,\ a),\ M(a,\ \lambda),\ N(a - \lambda,\ a).$$

Coeficienții unghiulari ai dreptelor AM, BN sînt

$$m = \frac{\lambda}{a},\quad m' = \frac{a}{(a - \lambda) - a} = -\frac{a}{\lambda},$$

de unde se vede că $mm' = -1$ și dreptele sînt perpendiculare.

2) *Pe o latură a unui unghi se iau punctele A, B, iar pe cealaltă latură punctele C, D. Fie $E \equiv AD \cap BC$, F intersecția paralelelor duse prin A și C la laturile unghiului și G intersecția paralelelor duse prin B și D la aceleași laturi. Să se demonstreze că E, F, G sînt coliniare.*

Dacă am considera cazul particular cînd unghiul este drept, este evident că laturile unghiului ar trebui luate ca axe.

În cazul general problema se tratează cu ușurință în *axe oblice**. Axele vor fi chiar laturile unghiului.

Pentru un unghi oarecare, în axe dreptunghiulare, cea mai mare simplificare pe care o putem face este să alegem vîrful unghiului ca origine și latura AB ca axă Ox. Axa Oy va fi perpendiculară în O pe AB.

Ecuația dreptei CD va fi $y = mx$, iar punctele vor avea coordonatele: $A(a,\ 0)$, $B(b,\ 0)$, $C(c,\ cm)$, $D(d,\ md)$. Ecuațiile dreptelor AD și BC (fig. 17) sînt

$$(AD)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ d & md & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = mdx + (a - d)y - mad = 0$$

$$(BC)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c & mc & 1 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = mcx + (b - c)y - mbc = 0.$$

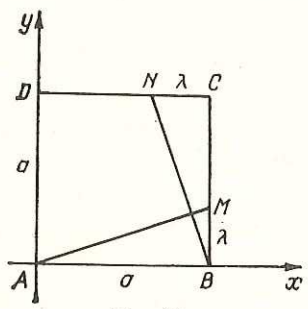


Fig. 16

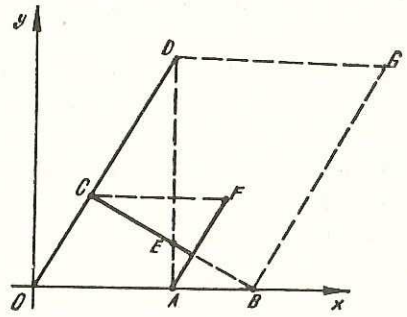


Fig. 17

* Elevii care doresc vor putea încerca,cu titlu de exercițiu, să trateze astfel problema, sub îndrumarea profesorului.

Rezolvînd sistemul se găsește

$$E\left[\frac{bd(a + c) - ac(b + d)}{bd - ac},\ \frac{mcd\,(b - a)}{bd - ac}\right].$$

Dreptele AF, CF au ecuațiile

$$(AF)\ y = m(x - a);\qquad (CF)\ y = mc$$

deci $F(a + c,\ mc)$.

În mod asemănător $G(b + d,\ md)$. Condiția ca punctele să fie coliniare este

$$\begin{vmatrix} \dfrac{bd(a + c) - ac(b + d)}{bd - ac} & \dfrac{mcd\,(b - a)}{bd - ac} & 1 \\ c + a & mc & 1 \\ b + d & md & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau, dînd factor pe prima linie pe $\dfrac{1}{bd - ac}$ și pe a doua coloană pe m:

$$\frac{m}{bd - ac}\begin{vmatrix} bd(a + c) - ac(b + d) & cd(b - a) & bd - ac \\ a + c & c & 1 \\ b + d & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deoarece $m \neq 0$, trebuie ca determinantul să fie nul. Acesta se descompune într-o diferență de doi determinanți, amîndoi nuli, deoarece primul are liniile I și II proporționale, iar al doilea liniile I și III, după cum se observă

$$\begin{vmatrix} bd(a + c) & bdc & bd \\ a + c & c & 1 \\ b + d & d & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ac(b + d) & acd & ac \\ a + c & c & 1 \\ b + d & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Punctele E, F, G sînt deci coliniare.

3) *Să se demonstreze că medianele unui triunghi sînt concurente.* Dacă am alege ca origine un vîrf al triunghiului și una din laturile ce trec prin acest vîrf ca axă Ox, trei din coordonatele vîrfurilor ar fi nule și am avea numai trei coordonate diferite de zero.

Dezavantajul este însă că se rupe simetria ecuațiilor și sîntem nevoiți să reluăm calculul de la început pentru fiecare mediană. De aceea nu vom particulariza sistemul de axe și vom vedea că după ce am stabilit ecuația unei mediane, celelalte se deduc prin permutări circulare.

Fie deci, față de un sistem de axe $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ vîrfurile triunghiului. Mijlocul laturii BC este $A'\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2},\ \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$ și mediana AA' are ecuația

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \dfrac{x_2 + x_3}{2} & \dfrac{y_2 + y_3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

care scrisă dezvoltat este

$$(AA')\ (2y_1 - y_2 - y_3)x - (2x_1 - x_2 - x_3)y + x_1(y_2 + y_3) - y_1(x_2 + x_3) = 0.$$

Ecuațiile celorlalte mediane se scriu permutînd circular vîrfurile triunghiului, adică pe x_1, x_2, x_3 și y_1, y_2, y_3. Ele se scriu deci direct

(BB') $(2y_2 - y_3 - y_1)x - (2x_2 - x_3 - x_1)y + x_2(y_3 + y_1) - y_2(x_3 + x_1) = 0$

(CC') $(2y_3 - y_1 - y_2)x - (2x_3 - x_1 - x_2)y + x_3(y_1 + y_2) - y_3(x_1 + x_2) = 0.$

Dacă adunăm cele trei ecuații obținem în prima parte zero, deci una din ecuații este o combinație liniară a celorlalte două. Aceasta arată că medianele sînt concurente (v. § 7).

Observare. Dacă s-ar scrie condiția de concurență sub formă de determinant și s-ar aduna toate liniile la prima, s-ar obține pe prima linie toate elementele nule, deci determinantul este nul și condiția este verificată.

Exerciții și probleme

56. Se dau punctele $A(3, 5)$, $M(-1, 3)$, $N(4, 1)$. Să se afle ecuațiile dreptelor duse prin A, înclinate la 45° și 135° față de MN.

[$3x - 7y + 26 = 0$; $7x + 3y - 36 = 0$.]

57. a) Se dă punctul $A(-3, 5)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului OA.

b) Se dă punctul $A(x_1, y_1)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului OA.

[a) $3x - 5y + 17 = 0$; b) $x_1x + y_1y = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2)$.]

58. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului format de punctele $A(5, 3)$, $B(-1, -2)$.

[$12x + 10y - 29 = 0$.]

59. Se dau punctele $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ și dreapta (D) $x - 4y + 7 = 0$. Să se găsească coordonatele punctului $C \in (D)$ astfel ca triunghiul ABC să fie isoscel cu baza AB.

[Mediatoarea laturii $AB \cap (D)$; $C(1, 2)$.]

60. Se dau punctele $A(3, 0)$ și $B(-1, 8)$. Prin A se duce o paralelă (D) la prima bisectoare.

a) Să se determine coeficientul unghiular al unei drepte ce trece prin B, care să taie dreapta (D) într-un punct C, astfel încît triunghiul ABC să fie isoscel cu baza AB.

b) Să se calculeze coordonatele punctului H de întîlnire a înălțimilor triunghiului.

c) Să se găsească centrul O al cercului circumscris.

[a) Mediatoarea laturii AB taie pe (D) în punctul C (13, 10). $m_{BC} = \frac{1}{7}$.

b) Mediatoarea lui AB este și înălțime. Mai trebuie o înălțime; $H\left(\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

c) $O\left(\frac{19}{3}, \frac{20}{3}\right)$.]

61. Să se calculeze unghiurile formate de dreptele $2x - y - 5 = 0$ și $x - 3y + 4 = 0$. Care este mărimea unghiului în care se află originea axelor?

[45°].

62. Se dau punctele $A(a, 0)$ și $C(2a, 3a)$. Perpendiculara dusă în A pe AC taie dreapta $x + 2a = 0$ în B. Să se arate că triunghiul ABC este isoscel.

[$AB = AC = a\sqrt{10}$.]

63. Se dă dreptunghiul $ABCD$ și din punctul A se duce perpendiculara AE pe diagonala BD, unde $E \in BC$. Să se arate că lățimea AB a dreptunghiului este medie proporțională între lungimea lui și segmentul BE.

[BC se ia ca Ox, BA ca Oy; $C(a, 0)$, $A(0, b)$. Se găsește $E\left(\frac{b^2}{a}, 0\right)$.]

64. Fie M un punct variabil pe prima bisectoare și $A(a, b)$, $B(b, c)$ două puncte fixe. Dreapta MA taie axa Ox în P, iar MB taie axa Oy în Q. Să se demonstreze că dreapta PQ are o direcție fixă.

[Coeficientul unghiular al dreptei PQ este $m = \frac{b - c}{a - b} = \text{const.}$]

65. Se dau punctele $A(2, 1)$ și $B(-5, -3)$. Să se afle punctul M, pe dreapta $y = x + 4$, astfel ca $\sphericalangle AMB = 90°$.

[$M(\alpha, \alpha + 4)$. Se scrie că $MA \perp MB$ și se află α. Două soluții: $M_1(-1, 3)$ și $M_2\left(-\frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.]

66. Se dau dreptele $x + y - 2 = 0$ și $3x - 2y + 1 = 0$.

Să se determine: a) dreapta care trece prin intersecția dreptelor date și prin punctul $M(2, 3)$; b) dreapta care trece prin intersecția dreptelor date și este paralelă cu prima bisectoare.

[a) $8x - 7y + 5 = 0$; b) $5x - 5y + 4 = 0$.]

67. Se dau punctele $A(6, 0)$, $B(0, 4)$, $C(1, 5)$. Să se arate că:

a) există relația $OA \cdot BC + OB \cdot AC = OC \cdot AB$;

b) picioarele perpendicularelor duse din origine pe laturile triunghiului ABC sînt coliniare.

68. Se dau dreptele: $x + y - 1 = 0, x + y - 2 = 0; x - 2y + 1 = 0;$ $x - 2y - 3 = 0$, care sînt laturile unui paralelogram. Să se găsească ecuațiile diagonalelor (c.d.p.).

[$3x + 6y - 5 = 0$ și $5x - 2x - 7 = 0$.]

69. Să se scrie ecuațiile înălțimilor triunghiului format de dreptele $x - y + 2 = 0;\ 3x - y + 1 = 0;\ x + 2y + 2 = 0.$

[$4x - 2y + 3 = 0;\ x + 3y + 2 = 0;\ 7x + 7y + 9 = 0$.]

70. Să se determine λ astfel ca dreapta $5x + \lambda y - 2 = 0$ să treacă prin intersecția dreptelor

$$x + 6y - 5 = 0;\ 3x + 4y + 8 = 0$$

[$\lambda = 16$.]

71. Se dă dreapta

$$(\alpha - 1)x + (\alpha - 2)y - \alpha + 3 = 0,$$

depinzînd de parametrul real α. Să se determine α astfel că dacă A, B sînt intersecțiile ei cu Ox, Oy să avem

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 10.$$

[Două soluții: $\alpha_1 = \frac{5}{2}$ și $\alpha_2 = \frac{17}{4}$.]

72. Să se demonstreze că mediatoarele unui triunghi sînt concurente.

[Ecuația unei mediatoare: $(x_2 - x_3)x + y_2 - y_3)y - \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{y_2^2 - y_3^2}{2} = 0$ etc.]

73. Se dau două drepte perpendiculare (D) și (D'). Pe (D) se iau trei puncte oarecare A, B, C, iar pe (D') la fel trei puncte A', B', C'. Să se demonstreze că punctele $E \equiv AB' \cap A'B$, $F \equiv BC' \cap B'C$, $G \equiv CA' \cap C'A$ sînt în linie dreaptă.

74. Față de sistemul de referință xOy se iau punctele $A(a, 0)$ și $B(0,b)$. Să se determine punctul M, situat pe dreapta $y = mx$, astfel ca unghiul AMB să fie drept.

Fie C al patrulea vîrf al dreptunghiului $OACB$. Să se demonstreze că $CM \perp OM$

[Abscisa lui M este $\alpha = \frac{a + mb}{m^2 + 1}$.]

75. Aceleași date ca mai înainte, însă M se află pe dreapta $x + y - b = 0$

[$M\left(\frac{a + b}{2}, \frac{b - a}{2}\right)$.]

76. Pe axele Ox, Oy se iau punctele fixe A, B și segmentele variabile $AA' = BB'$. Să se arate că mediatoarea segmentului $A'B'$ taie a doua bisectoare a axelor într-un punct fix.

[Punctul fix $P\left(\frac{a - b}{2}, -\frac{a - b}{2}\right)$.]

77. Pe o latură a unui unghi drept se dau punctele fixe A și B, iar pe cealaltă latură punctul mobil M. Se proiectează vîrful O al unghiului drept pe dreptele MA și MB, respectiv în P și Q.

a) Să se arate că dreapta PQ taie latura AB a unghiului drept într-un punct fix L.

b) Să se calculeze raportul în care L împarte segmentul $\overline{AB}$.

[a) $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $M(0, \lambda)$. Ecuația dreptei PQ: $\lambda(a + b)x + (ab - \lambda^2)y - \lambda ab = 0$. $L\left(\frac{ab}{a + b}, 0\right)$;
b) $\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}} = \frac{a^2}{b^2}$.]

78. Pe catetele AB și AC ale unui triunghi dreptunghic se construiesc, în afară, pătrate în care vîrfurile opuse lui A sînt respectiv D și E. Să se demonstreze că dreptele CD, BE și înălțimea AH a triunghiului sînt concurente.

79. Se dă paralelogramul $ABCD$. O paralelă oarecare la AB taie laturile AD și BC, respectiv în M și N, iar o paralelă la AD taie laturile AB și CD, respectiv în P și Q. Fie $E \equiv MP \cap NQ$. Să se arate că D, B, E sînt coliniare.

[Este preferabil să se arate că MP, NQ și DB sînt concurente.]

80. Fie punctele $A(1, 2)$, $B(5, 4)$ și un punct mobil pe axa Ox. Dreptele MA, MB intersectează prima bisectoare în punctele N, U, iar axa Oy în punctele V, P. Să se arate că

a) dreapta NP trece printr-un punct fix situat pe dreapta AB;

b) dreapta UV are o direcție fixă. Să se precizeze această direcție.

(Olimpiada mat. 1960, enunț parțial)

[a) $NP \cap AB$ dă $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$; b) $UV \parallel AB$.]

Capitolul 4

Separarea planului în regiuni

1. *Raportul în care o dreaptă împarte un segment.* Fiind date punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ se cere să se afle raportul în care dreapta (D) de ecuație $(D) = Ax + By + C = 0$ împarte segmentul $\overline{M_1M_2}$ (fig. 18).

Fie $M \equiv M_1M_2 \cap (D)$ și $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = k$.

Urmează să găsim expresia lui k.

Punctul M fiind pe dreapta M_1M_2 are coordonatele

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}.$$

Însă $M \in (D)$ prin urmare trebuie să verifice ecuația, adică:

$$A\frac{x_1 - kx_2}{1 - k} + B\frac{y_1 - ky_2}{1 - k} + C = 0$$

sau

$$Ax_1 + By_1 + C - k(Ax_2 + By_2 + C) = 0,$$

care dă

$$k = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} = \frac{(D_1)}{(D_2)} \qquad (1)$$

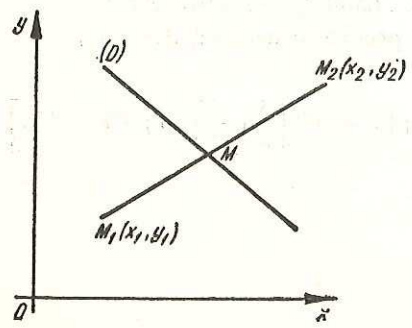


Fig. 18

unde s-a notat $(D_1) = Ax_1 + By_1 + C$ și $(D_2) = Ax_2 + By_2 + C$.

Pentru $k < 0$, punctul M este interior segmentului $\overline{M_1M_2}$, pentru $k > 0$ M este exterior.

Exemplu. *Dreapta* $2x - y + 2 = 0$ *împarte segmentul format de punctele* $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$ *în raportul*

$$k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{6 - 2 + 2}{-2 - 4 + 2} = -\frac{3}{2},$$

deci M se află între A și B. Verificarea se face prin calculul coordonatelor lui M, anume

$M\left(\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

2. *Separarea planului în regiuni de către o dreaptă.* Orice dreaptă împarte planul în două semiplane, pe care le vom numi regiuni și le vom numerota: cu I regiunea (semiplanul) care conține originea și cu II regiunea cealaltă (fig. 19). Ecuația dreptei (D) o considerăm sub forma generală

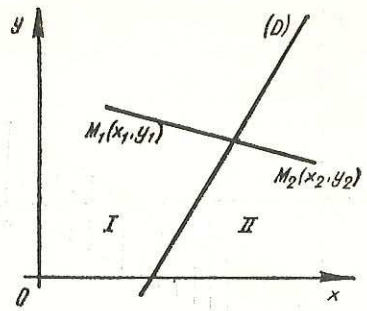


Fig. 19

$$Ax + By + C = 0. \qquad (2)$$

Dacă un punct $M_0(x_0, y_0) \in (D)$ atunci coordonatele lui verifică ecuația (2), adică $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Dacă însă punctul $M_0(x_0, y_0)$ nu se află pe dreaptă, atunci $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$, adică expresia numerică obținută are o valoare oarecare, strict pozitivă sau strict negativă.

Vom demonstra următoarele proprietăți.

a) *polinomul general de gradul I în două variabile* $f(x, y) = Ax + By + C$ *păstrează același semn pentru toate punctele situate într-o aceeași regiune;*

b) *același polinom ia valori de semne contrare pentru punctele din regiuni diferite.*

a) Dacă punctele M_1 și M_2 sînt situate în aceeași regiune, dreapta (D) taie dreapta M_1M_2 în exteriorul segmentului $\overline{M_1M_2}$ și raportul $k = \dfrac{(D_1)}{(D_2)} > 0$. Prin urmare (D_1) și (D_2) au același semn.

b) Dacă punctele M_1 și M_2 sînt în regiuni diferite, dreapta (D) întîlnește dreapta M_1M_2 într-un punct interior segmentului $\overline{M_1M_2}$ (fig. 19) și $k = \dfrac{(D_1)}{(D_2)} < 0$, adică (D_1) și (D_2) au semne contrare.

O dată demonstrate proprietățile enunțate, este de ajuns să cercetăm semnul polinomului în una din regiuni, fiindcă în cealaltă rezultă.

Dacă dreapta nu trece prin origine, atunci se caută semnul în regiunea care conține originea. Acesta este dat de

$$f(0, 0) = C. \qquad (3)$$

Dacă dreapta trece prin origine, atunci se alege alt punct, de exemplu (1,0) sau (0, 1) etc.

Exemple. a) *Care sînt punctele din plan pentru care avem* $2x - 3y - 6 < 0$?

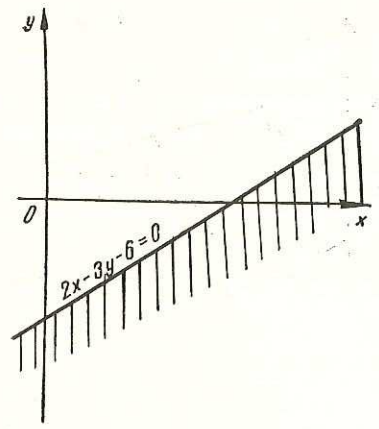


Fig. 20

Se reprezintă dreapta $2x - 3y - 6 = 0$ (fig. 20) Termenul liber este (-6), deci punctele din semiplanul care conține originea fac polinomul negativ și verifică inecuația. Se pot face verificări cu diferite puncte (0, 1), (1, 1), (3, 1) etc. Regiunea hașurată nu convine.

Altă metodă. Din $2x - 3y - 6 < 0$ rezultă $y > \frac{2x - 6}{3}$, iar din ecuația dreptei $2x - 3y - 6 = 0$ rezultă $y = \frac{2x - 6}{3}$. Se observă că punctele pentru care se verifică *inecuația* dată au ordonatele mai mari decît punctele cu aceeași abscisă din *ecuația dreptei.*

Așadar mulțimea punctelor din semiplanul situat deasupra dreptei de ecuație $2x - 3y - 6 = 0$ constituie soluțiile inecuației date.

b) *Să se rezolve inecuațiile simultane*

$$x - y < 0; \quad 3x + 4y - 12 > 0.$$

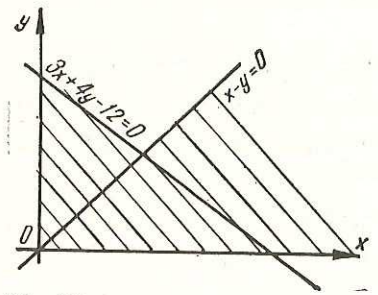


Fig. 21

Dacă facem $y=0$ în primul polinom, se vede că obținem valori negative numai pentru $x < 0$, deci regiunea care convine este cea *care conține semiaxa negativă.* A doua inecuație este verificată de regiunea *opusă originii.*

Mulțimea punctelor care satisfac simultan inecuațiile date este intersecția mulțimilor care verifică pe fiecare în parte, adică unghiul nehașurat din figura 21.

c) *Se cere mulțimea punctelor pentru care avem simultan*

$$x + 2y - 4 = 0 \text{ și } 2x - y - 2 > 0.$$

Egalitatea este verificată de toate punctele dreptei BC (fig. 22), inecuația de punctele din semiplanul opus originii.

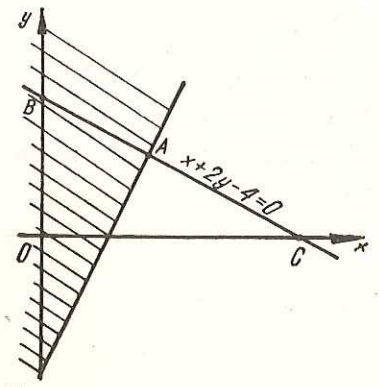


Fig. 22

Mulțimea care verifică ambele relații este formată din punctele semidreptei AC.

d) *Se dă ecuația* $x^2 - 2(\alpha + 1)\, x + \alpha^2 + \beta - 1 = 0$. *Considerînd pe* α, β *drept coordonate ale unui punct din plan, să se afle regiunea pentru care ecuația dată are rădăcini reale.*

Realizantul ecuației este $R = 4(2\alpha - \beta + 2)$; trebuie ca $2\alpha - \beta + 2 \geqslant 0$. Originea verifică inecuația, deci regiunea care dă rădăcini reale pentru ecuație este semiplanul *închis* (inclusiv dreapta) care conține originea. De-a lungul dreptei $2\alpha - \beta + 2 = 0$ ecuația dată are rădăcini reale, confundate.

3. *Aplicații la programarea liniară.* Producția unei întreprinderi, a unei unități agricole, transportul mărfurilor etc. care altădată se făceau oarecum empiric, ridică astăzi probleme de planificare în așa fel încît ținînd seamă de condițiile de lucru, posibilitățile de aprovizionare etc. să se ajungă pe totalul întreprinderii, unității agricole etc. la realizarea unui plan cu minimum de cheltuieli și cu venituri cît mai mari.

Condițiile de lucru se exprimă prin *ecuații sau inecuații de condiții*, iar realizarea finală printr-o funcție numită *de scop*, *de obiectiv* sau *de eficiență.* Cînd ecuațiile, inecuațiile și funcția sînt de gradul I, programarea se numește *liniară.*

Nu putem da mai multe lămuriri în cadrul manualului, dar cîteva aplicații vor arăta cum la unele probleme simple, rezolvarea se poate face cu ajutorul geometriei analitice. Metoda se numește „metoda grafică".

E x e m p l u l 1. *O unitate agricolă trebuie să realizeze pe un teren de* 8 *ha două feluri de culturi* A *și* B. *Cheltuielile de investiții și venitul net pe ha, la fiecare cultură sînt în mii de lei:*

	A	B
investiții	2	3
venit net	4	5

Știind că unitatea agricolă dispune de cel mult 18 mii lei pentru aceste culturi, se cere în cazul soluției optime:

a) *repartiția terenului pentru cele două culturi;*

b) *venitul net maxim realizat.*

Să notăm cu x și y suprafețele destinate respectiv culturilor A și B. Condițiile de lucru sînt:

$$x + y = 8; \qquad 2x + 3y \leqslant 18. \tag{α}$$

Venitul net este dat de funcția (de eficiență)

$$f = 4x + 5y. \tag{β}$$

Trebuie să ținem seama în plus că $x \geqslant 0$ și $y \geqslant 0$, care se numesc *condiții de nenegativitate.*

Problema se pune astfel: ținînd seama de condițiile (α) de lucru (o ecuație și o inecuație) și de condițiile de nenegativitate, să se determine x și y care fac funcția (β) maximă.

Pentru aceasta căutăm mulțimea punctelor care satisfac sistemul: $x + y - 8 = 0$ și $2x + 3y - 18 \leqslant 0$.

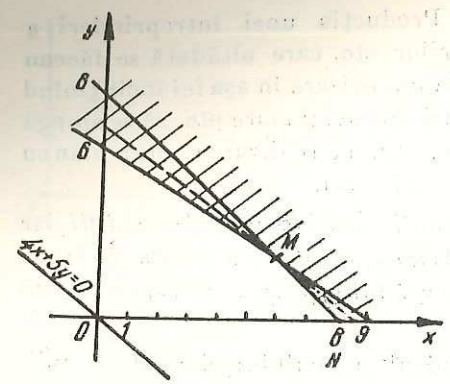


Fig. 23

Inecuația este verificată pe semiplanul care conține originea (s-a hașurat partea care nu convine), deci porțiunea din dreapta $x + y - 8 = 0$ (cadranul I) care intră în acest semiplan este segmentul $\overline{MN}$.

Ecuația (β) se scrie $y = -\frac{4}{5}x + \frac{f}{5}$ și considerînd pe f ca parametru, reprezintă drepte paralele de coeficient unghiular $m = -\frac{4}{5}$ și ordonata la origine $n = \frac{f}{4}$ (în figura 23 este desenată dreapta care trece prin origine și dă direcția). Ordonata la origine crește cînd dreapta taie segmentul MN într-un punct care se mișcă de la N la M: este deci maximă cînd dreapta trece prin M. Însă M are coordonatele (6, 2), astfel că $f_{max} = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 34$ (mii de lei).

Programarea cea mai avantajoasă este deci: cultura A pe 6 ha ($x = 6$) și cultura B pe 2 ha. Investițiile sînt de $2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 18$ mii lei și venitul de 34 mii lei. Problema are o soluție unică.

Observări. a) Să presupunem că în aceleași condiții de lucru venitul net ar fi același pentru ambele culturi, de pildă 4 (mii de lei). În acest caz funcția de eficiență ar fi $f = 4x + 4y$. Ecuația $4x + 4y - f = 0$ reprezintă o dreaptă paralelă cu MN, care dacă este verificată de un punct al lui MN, coincide cu MN. Atunci însă orice punct al segmentului MN este soluție, deci avem o infinitate de soluții.

Alegerea se face în acest caz după alte criterii de bună gospodărire.

b) Dacă am presupune veniturile astfel încît coeficientul unghiular al dreptei ce rezultă din funcția de eficiență să fie $m > -1$, atunci valoarea cea mai mare a lui f corespunde punctului N, prin urmare $y = 0$. S-ar face numai cultura A pe întreg termenul.

2. *Un centru alimentar este aprovizionat de trei centre furnizoare care dispun: primul de* 5 *autocamioane, al doilea de* 4 *autocamioane, al treilea de* 6. *Centrul alimentar are planificat să primească pe un interval dat de timp* 12 *autocamioane de marfă.*

Știind că transportul costă de la fiecare centru respectiv 4, 6 *și* 5 *zeci de lei, să se determine programarea mașinilor astfel încît costul transportului total să fie minim.*

Notînd cu x, y, z numărul de mașini pe care trebuie să-l dea fiecare furnizor, condițiile sînt următoarele: $x + y + z = 12$; $x \leqslant 5$, $y \leqslant 4$, $z \leqslant 6$,

apoi condițiile de nenegativitate $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Funcția de eficiență este $f = 4x + 6y + 5z$ și ea trebuie să fie minimă.

Fiind vorba de trei necunoscute, nu mai putem trata problema ca în cazul precedent. Vom proceda astfel: din prima ecuație rezultă $z = 12 - x - y \leqslant 6$, adică inecuația $x + y \geqslant 6$, la care se adaugă $x \leqslant 5$, $y \leqslant 4$. Înlocuind pe z în funcția de eficiență se deduce $y = x + f - 60$.

Rezumînd avem condițiile $x + y \geqslant 6$; $0 \leqslant x \leqslant 5$; $0 \leqslant y \leqslant 4$ care reprezentate în figura 24 ne dau ca regiune convenabilă interiorul triunghiului ABC.

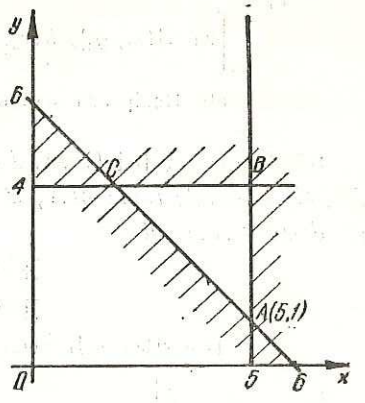


Fig. 24

Dreapta $y = x + f - 60$ paralelă cu prima bisectoare va avea ordonata la origine $(f - 60)$ minimă cînd trece prin punctul cel mai de jos al triunghiului ABC, adică prin $A(5, 1)$. Înlocuind obținem $1 = 5 + f - 60$, deci $f = 56$.

Programarea este: centrul I, cinci mașini, centrul II, 1 mașină, centrul III, 6 mașini. Costul minim al transportului $56 \times 10 = 560$ lei.

Exerciții și probleme

81. Se dau punctele $A(3, 1)$, $B(-2, 4)$ și dreapta $5x - y - 8 = 0$. Se cere raportul în care dreapta împarte segmentul $\overline{AB}$. Punctul de intersecție cu dreapta AB este interior sau exterior segmentului?

$$\left[k = -\frac{3}{11}, \text{interior.}\right]$$

82. *Se dă punctul fix* $A(1, -1)$ *și punctul variabil* $M\left(\frac{4\alpha - 6}{\alpha}, \frac{\alpha - 2}{\alpha}\right)$. Să se arate că dreapta $x - 3y + 9 = 0$ împarte segmentul AM într-un raport, constant, oricare ar fi M.

83. Teorema lui Menelaus. *O dreaptă oarecare taie laturile* BC, CA, AB *ale unui triunghi, respectiv în punctele* M, N, P. *Să se demonstreze că există relația*

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Reciproca este adevărată?

[Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ și $(D) = 0$ ecuația dreptei. $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{(D_2)}{(D_3)}$ etc. Reciproca se demonstrează geometric, prin reducere la absurd.]

84. Teorema lui Ceva. *Fie M un punct în planul unui triunghi și A', B', C' punctele unde MA, MB, MC taie respectiv laturile BC, CA, AB. Să se demonstreze că*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

[Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $M(x_0, y_0)$. Ecuația dreptei AM este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Avem $= \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix}$]

85. *Se dă un triunghi dreptunghic ABC ($A = 90°$) și un punct oarecare P. Să se cerceteze dacă există un unghi drept cu vîrful în P, astfel ca laturile lui să determine pe catetele AB, AC rapoarte egale.*

[Se iau AB, AC ca axe Ox, Oy. $B(a, 0)$, $C(0, b)$, $P(x_0, y_0)$. Laturile unghiului drept: $\lambda(x - x_0) - (y - y_0) = 0$; $x - x_0 + \lambda(y - y_0) = 0$. Rapoartele sînt $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{-\lambda x_0 + y_0}{\lambda(a - x_0) + y_0}$, $\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{-x_0 - \lambda y_0}{-x_0 + \lambda(b - y_0)}$ etc.]

86. Să se rezolve sistemul $x > 3$; $3x + y - 6 > 0$; $x - 2y - 1 > 0$.

[Regiunea din dreapta lui $x = 3$, cuprinsă în unghiul celorlalte două drepte.]

87. Să se rezolve sistemul: $3x + 2y - 6 > 0$; $y - x + 1 > 0$; $y - \frac{x}{5} - 1 < 0$.

[Interiorul triunghiului format din cele trei drepte.]

88. Să se rezolve sistemul $x^2 - 4 < 0$; $x + y - 1 < 0$.

[Fîșia dintre paralelele $x = \pm 2$ care conține originea și este mărginită de dreapta dată.]

89. Se consideră inecuațiile $2x + 3y \geqslant 6$, $6x + 2y \leqslant 11$ și funcția $f = x + 4y$. Să se determine valorile lui x și y care satisfac inecuațiile și fac funcția f minimă.

[Regiunea convenabilă este cuprinsă în unghiul ascuțit al dreptelor $2x + 3y - 6 = 0$ și $6x + 2y - 11 = 0$, dinspre Oy. Dreapta $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}f$ are ordonata la origine minimă în punctul comun celor două drepte: $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$, deci $f_{min} = \frac{11}{2}$.]

Capitolul 5

Distanța de la un punct la o dreaptă. Aria unui triunghi

1. Distanța de la origine la o dreaptă. Considerăm dreapta sub forma generală

$$(D) \quad Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

și ne propunem să găsim distanța $p = OP$ de la origine la această dreaptă (fig. 25).

Coordonatele la origine se deduc imediat

$$OA_0 = -\frac{C}{A}; \quad OB_0 = -\frac{C}{B} \tag{2}$$

Să observăm acum că coeficientul unghiular al dreptei (D) este $m = -\frac{A}{B}$ și deci coeficientul unghiular al dreptei OP ($\perp D$) este $m_{OP} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A}$. Cunoscînd tangenta se deduce imediat $\cos\alpha$ și $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3}$$

Rezultă

$$OP = p = OA_0 \cos\alpha = -\frac{C}{A} \cdot \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \text{deci}$$

$$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{4}$$

Distanța de la origine la dreaptă se va socoti, prin convenție totdeauna pozitivă și pentru aceasta se va alege convenabil semnul din fața radicalului de la numitor.

2. Distanța de la un punct oarecare la o dreaptă. Fiind dată dreapta (D) prin ecuația (1) și punctul $M_0(x_0, y_0)$ se pune problema de a găsi expresia distanței $M_0N = d$ de la punctul M_0 la dreapta (D).

Pentru aceasta, pe lîngă elementele din figura 25 vom introduce punctul $M_0\,(x_0,\ y_0)$, proiecția sa M_0' pe Ox și distanța $M_0N = d$.

Avem evident $OM_0' = x_0,\ M_0'M_0 = y_0$.

Proiectînd acum suma vectorială

$$\overrightarrow{OM_0'} + \overrightarrow{M_0'M_0} + \overrightarrow{M_0N} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP}$$

pe direcția OP și observînd că NP are proiecția nulă (fig. 26), obținem

$$OP = OM_0'\cos\alpha + M_0'M_0 \sin\alpha - M_0N$$

sau

$p = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - d$, cu observarea că OP și M_0N sînt considerate de sensuri contrare. Rezultă imediat

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p. \qquad (5)$$

Dacă însă M_0 este de aceeași parte cu originea atunci d își schimbă semnul și avem

$$d = -(x_0\cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p).$$

Pentru a avea distanța d exprimată în funcție de coeficienții dreptei (D) și de coordonatele lui M_0, înlocuim în expresia distanței elementele date de (3) și (4) și obținem

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (6)$$

În fața radicalului se va lua semnul în așa fel încît termenul liber $\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ să fie *negativ* dacă M_0 se

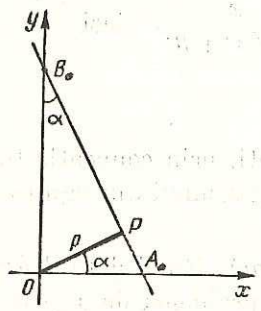


Fig. 25

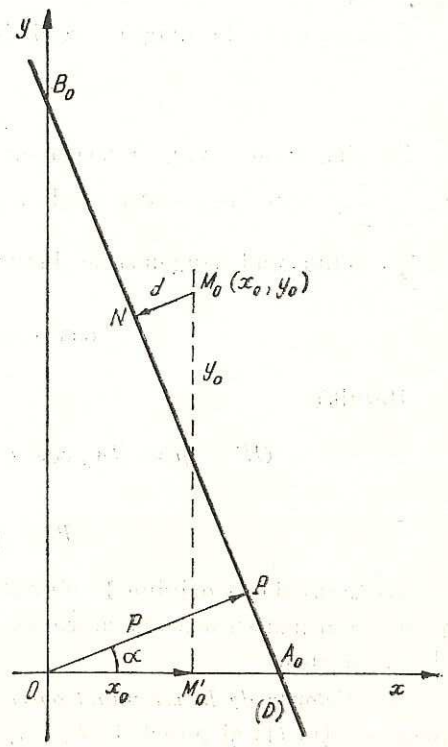


Fig. 26

află în semiplanul *opus originii*, față de (D), ceea ce corespunde expresiei (5) și se va lua semnul astfel ca termenul liber să fie *pozitiv* dacă M_0 se află în același semiplan cu originea față de (D), ceea ce corespunde expresiei (5') a lui d.

Se impun însă unele precizări pentru ca lucrurile să fie clare.

I. Există probleme în care interesează numai mărimea distanței de la un punct la o dreaptă. În acest caz nu interesează semnul distanței și se scrie

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (6')$$

E x e m p l u. *Să se afle raza cercului cu centrul în* $\omega\,(-3,\ 2)$, *tangent dreptei* $8x - 15y - 48 = 0$.

Conform formulei (6') *avem*

$$d = \frac{|8\cdot(-3) - 15\cdot 2 - 48|}{\sqrt{64+225}} = \frac{102}{17} = 6.$$

II. Există însă și probleme în care considerăm distanța ca avînd semn. În astfel de cazuri, dacă se dă distanța $d = k$, trebuie scris

$$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = k \quad \text{sau} \quad \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = k,$$

de unde rezultă $\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm k$. Este evident același lucru.

E x e m p l u. *Să se determine punctele situate pe dreapta* $3x + 2y - 12 = 0$, *care au distanța de* 3 *unități pînă la dreapta* $12x - 5y + 30 = 0$.

Punctul căutat $M(\alpha,\ \beta)$ trebuie să satisfacă următoarele condiții:

a) să aparțină dreptei date, deci $3\alpha + 2\beta - 12 = 0$;

b) distanța de la M la dreapta $12x - 5y + 30 = 0$ trebuie să fie de 3 unități, adică

$$\frac{12\alpha - 5\beta + 30}{\pm 13} = 3.$$

Sîntem astfel conduși la următoarele sisteme

I) $3\alpha + 2\beta - 12 = 0;\quad 12\alpha - 5\beta - 9 = 0$

II) $3\alpha + 2\beta - 12 = 0;\quad 12\alpha - 5\beta + 69 = 0$

care ne dau punctele $M_1(2,\ 3)$ și $M_2(-2,\ 9)$.

Punctele M_1, M_2 se află de o parte și alta a dreptei $12x - 5y + 30 = 0$.

Interpretare geometrică. Considerînd α, β drept coordonate curente, ecuațiile $12\alpha - 5\beta - 9 = 0$ și $12\alpha - 5\beta + 69 = 0$ reprezintă două drepte paralele cu dreapta $12x - 5y + 30 = 0$, de o parte și alta a ei la 3 unități distanță. Acestea întîlnesc dreapta dată $3\alpha + 2\beta - 12 = 0$ în M_1 și M_2. În acest fel se regăsește soluția geometrică a problemei.

Distanța de la un punct $M(x_0, y_0)$ la dreapta a cărei ecuație este $Ax + By + C = 0$ se poate stabili și astfel.

Fie N piciorul perpendicularei dusă din M pe dreapta dată. Coordonatele lui N se găsesc rezolvînd sistemul

$$Ax + By + C = 0;\quad y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0).$$

Se găsește

$$N\begin{cases} x = \dfrac{B(Bx_0 - Ay_0) - AC}{A^2 + B^2} \\ y = \dfrac{-A(Bx_0 - Ay_0) - BC}{A^2 + B^2}. \end{cases}$$

De aici se deduce

$$x - x_0 = -\frac{A(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2};\quad y - y_0 = -\frac{B(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}$$

de unde

$$MN^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2} \text{ și}$$

$$MN = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Calculul este aici doar schițat. Elevii îl pot face în întregime, ca exercițiu.

3. *Aria unui triunghi.* Considerăm triunghiul dat prin vîrfurile sale $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Fie AA' înălțimea din A. Aria triunghiului este dată de formula cunoscută $\mathcal{A} = \frac{1}{2} BC \cdot AA'$. Lungimea laturii BC este

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}. \tag{7}$$

Pentru calculul înălțimii AA' pornim de la ecuația dreptei BC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7'}$$

în care coeficienții lui x și y sînt: $(y_2 - y_3)$ și $-(x_2 - x_3)$.

Înălțimea AA' este distanța de la vîrful A la BC, deci

$$AA' = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} \tag{8}$$

Ținînd seama de valoarea lui BC din (7) și de formula ariei avem

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

care este expresia analitică pentru aria unui triunghi, cînd se dau coordonatele vîrfurilor.*

Acum trebuie făcută o precizare: *aria în geometria analitică are un semn.* În adevăr relația (9) ne dă aria considerînd triunghiul parcurs în sensul $A-B-C$; dacă însă sensul de parcurgere este $A-C-B$, atunci ultimele două linii ale determinantului se schimbă între ele și determinantul își schimbă semnul.

Rămîne să vedem care este sensul care dă aria pozitivă. Pentru aceasta luăm un triunghi particular, anume $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$, unde $a > 0$, $b > 0$, care dă imediat $\mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} ab$, prin urmare sensul care dă aria pozitivă este sensul trigonometric sau sensul de rotire de la Ox către Oy.

Sînt cazuri în care nu ne interesează decît mărimea ariei; atunci aceasta se ia în valoare absolută.

În particular aria triunghiului format de origine și punctele $A(x_1,y_1)$, $B(x_2, y_2)$, are ca expresie

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1). \tag{9'}$$

4. *Condiția ca trei puncte să fie în linie dreaptă* se poate regăsi pornind de la aria triunghiului. În adevăr condiția *necesară și suficientă* pentru ca aria triunghiului să fie nulă este ca cele trei puncte (presupuse distincte) să fie în linie dreaptă; rezultă că punctele sînt coliniare dacă

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exerciții și probleme

90. Să se găsească distanța de la punctul $A(1, 3)$ la dreapta $12x - 5y + 42 = 0$.

[$d = 3$.]

* Am făcut această precizare fiindcă există și o expresie a ariei atunci cînd se dau ecuațiile laturilor triunghiului.

91. Să se calculeze înălțimile triunghiului format de punctele $A(1, 0)$, $B(5, -2)$, $C(3, 3)$.

[Distanțele de la vîrfuri la laturile opuse: $\frac{16}{\sqrt{29}}$, $\frac{16}{\sqrt{13}}$, $\frac{8}{\sqrt{5}}$.]

92. Să se cerceteze dacă punctul $A(-2, 4)$ este interior sau exterior cercului cu centrul în ω (0,3), tangent dreptei $3x + 4y - 24 = 0$.

93. Să se cerceteze dacă dreapta $3x - 4y + 8 = 0$ este secantă sau exterioară cercului cu centrul în ω (2, 1), care trece prin A (6, 4).

94. Dintre dreptele paralele $15x - 8y + \lambda = 0$ (λ parametru real), să se aleagă acelea față de care punctul A (2, 2) are distanța de *o unitate*.

[$15x - 8y + 3 = 0$; $15x - 8y - 31 = 0$.]

95. Să se determine dreptele care trec prin punctul $P(-1, 2)$, față de care punctul $A(3, 5)$ are distanța de 3 unități.

[$y = 2$ și $24x - 7y + 38 = 0$.]

96. Să se determine λ astfel ca distanța de la punctul $A(3, 4)$ la dreapta variabilă $(\lambda + 3)\ x - (\lambda - 2)\ y + 3\lambda - 1 = 0$ să fie $d = \sqrt{10}$.

[$3x - y + 5 = 0$ și $x + 3y - 5 = 0$.]

97. Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele

$$48x + 14y - 21 = 0 \text{ și } 24x + 7y - 28 = 0.$$

[Distanța de la un punct al unei drepte, de exemplu (0, 4) la cealaltă dreaptă; $d = 0{,}7$.]

98. Să se calculeze distanța dintre două drepte paralele, aduse la formele $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + C' = 0$.

[Se poate alege $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ de pe prima dreaptă; $d = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.]

99. Să se calculeze proiecția segmentului determinat de punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, pe direcția dată de coeficientul unghiular m.

[Se scrie distanța de la A la dreapta care trece prin B perpendiculară pe direcția dată. Pr. $AB = \frac{|x_1 - x_2 + m(y_1 - y_2)|}{1 + m^2}$.]

100. Se dă dreapta $5x - 12y + 32 = 0$ și punctele $A(1, -1)$, $B(5, -3)$. Să se afle coordonatele punctului M, egal depărtat de A și B, care are distanța de 4 unități pînă la dreapta dată.

[$M_1(4, 0)$ și $M_2\left(\frac{180}{19}, \frac{208}{19}\right)$.]

101. Să se arate că suma distanțelor de la un punct interior la laturile unui triunghi echilateral este constantă.

[Se poate lua o latură ca Ox și mediatoarea ei ca Oy. Atenție la semnele distanțelor pentru a nu face diferență în loc de sumă. Suma constantă are valoarea înălțimii.]

102. Să se găsească pe axa Oy un punct M egal depărtat de dreptele $3x - 4y + 6 = 0$ și $4x - 3y - 9 = 0$.

[$M_1(0, 15)$ și $M_2\left(0, -\frac{3}{7}\right)$.]

103. Să se calculeze aria triunghiului format de punctele $A(1, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(-4, -3)$.

[$\mathcal{A} = 13{,}50$ unități pătrate.]

104. Să se calculeze aria patrulaterului format de punctele $A(3, 0)$, $B(2, 5)$, $C(-1, 3)$, $D(1, -4)$.

[Se descompune în triunghiuri. Atenție la semnele ariilor pentru a nu face diferența în loc de sumă, $\mathcal{A} = \frac{39}{2}$.]

105. Să se demonstreze că aria unui patrulater ale cărui vîrfuri sînt $A_i (i = 1,2,3,4)$ și care are ca diagonale A_1A_3 și A_2A_4 este dată de una din formulele

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

[Aceeași indicație ca mai înainte. Se va ține seama de proprietățile determinanților.]

106. Se dă dreapta $3x - 4y + 4 = 0$ și punctul $A(8,0)$. Să se calculeze coordonatele punctelor unde dreptele ce trec prin A și fac cu axa Ox 45° și 135° taie dreapta dată. Să se afle aria triunghiului format de cele trei drepte.

[$B(36, 28)$, $C(4, 4)$. $\mathcal{A} = 112$ unități de arie.]

107. Se dau punctele A (2, 2) și B (5, 1). Să se determine punctul C, situat pe dreapta $x - 2y + 8 = 0$, astfel încît aria triunghiului ABC să fie de 17 u².

[*Indicație.* Se ia $C(\alpha, \beta)$ care trebuie să verifice dreapta dată, iar aria $ABC = \pm 17$, căci C poate fi de o parte sau alta a dreptei date. Sistemele dau $C(12, 10)$ și $C'(-16, -4)$.]

108. Fiind date punctele A (1, 0), B (−2, 4), C (−1, 4), D (3, 5) să se găsească pe dreapta $y = 3x - 5$ un punct M astfel încît ariile triunghiurilor MAB, MCD să fie egale.

[$M_1\left(2, \frac{7}{3}\right)$, $M_2(-9, -32)$.]

Capitolul 6

Translația axelor

1. Considerăm punctul $M\ (x,\ y)$ raportat la sistemul cartezian ortogonal xOy. Dacă dăm sistemului de referință o *translație*, astfel ca originea O să vină într-un punct oarecare $O'\ (x_0,\ y_0)$, axele Ox, Oy devin $O'x'$, $O'y'$. Este evident că față de noul sistem $x'O'y'$, puncul M va avea alte coordonate, pe care le notăm cu x',y'. Ne propunem să găsim *relațiile care leagă vechile coordonate* $(x,\ y)$ *cu cele noi* $(x',\ y')$ *și cu coordonatele* $(x_0,\ y_0)$ *ale originii noi* O' *față de vechile axe.*

Pentru aceasta reamintim o teoremă cunoscută din clasele precedente: *proiecția vectorului — sumă a mai multor vectori este egală cu suma proiecțiilor vectorilor componenți.*

Pentru problema care ne interesează vom considera vectorii $\overrightarrow{OO'}$ și $\overrightarrow{O'M}$, a căror sumă este vectorul $\overrightarrow{OM}$ (fig. 27). Potrivit teoremei asupra proiecțiilor putem scrie

$$(\mathrm{pr}\cdot\overrightarrow{OM})_{Ox} = (\mathrm{pr}\cdot\overrightarrow{OO'})_{Ox} + (\mathrm{pr}\cdot\overrightarrow{O'M})_{Ox},$$

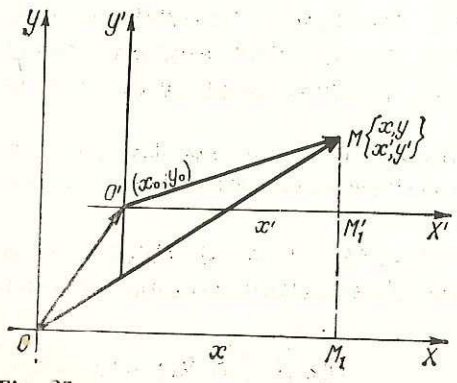


Fig. 27

însă se observă că $(\mathrm{pr}\cdot\overrightarrow{OM})_{Ox} = x$, $(\mathrm{pr}\cdot\overrightarrow{OO'})_{Ox} = x_0$ și $(\mathrm{pr}\cdot\overrightarrow{O'M})_{Ox} = x'$, astfel că relația dintre cele trei elemente este $x = x_0 + x'$. La fel se stabilește relația *asemănătoare* pentru ordonate, prin urmare relațiile căutate sînt

$$(1)\quad x = x_0 + x';\qquad y = y_0 + y'.$$

În cuvinte *abscisa veche este egală cu suma dintre abscisa originii noi și abscisa nouă; pentru ordonate avem un enunț asemănător.*

Exemplu. *Față de sistemul* xOy *se dă punctul* $M(4,\ 5)$. *Să se afle coordonatele lui* M *față de sistemul translatat în* $O(-1,\ 2)$. Avem $4 = -1 + x'$, $5 = 2 + y'$, de unde $x' = 5,\ y' = 3$.

2. *Ecuația dreptei în raport cu noile axe.* Fie $(D) = Ax + By + C = 0$ ecuația dreptei raportată la vechile axe și $O'\ (x_0,\ y_0)$ noua origine. Înlocuind x și y din relațiile (1) se obține $A\ (x_0 + x') + B(y_0 + y') + C = 0$ sau notînd $D_0 = Ax_0 + By_0 + C$,

$$Ax' + By' + D_0 = 0. \tag{2}$$

Prin urmare termenul liber este **rezultatul înlocuirii** coordonatelor (x_0,y_0) în ecuația dreptei date $(D) = 0$. Dacă **dreapta** dată trece prin noua origine, atunci $(D_0) = 0$ și ecuația dreptei **în noile** axe devine

$$Ax' + By' = 0 \tag{3}$$

Dacă dreapta este dată sub altă formă, se aduce întîi la forma generală și apoi se folosește formula (2).

3. *Elemente care rămîn invariabile față de translația de axe.*

a) *Distanța între două puncte.* Fie $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ cele două puncte raportate la sistemul cartezian xOy și $O'\ (x_0,y_0)$ punctul în care se mută originea după translație. Noile coordonate ale lui M_1 și M_2 le notăm $(x'_1,\ y'_1)$ și (x'_2,y'_2).

Distanța M_1M_2 față de vechile axe este dată de

$$(M_1M_2)_{xOy} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{4}$$

iar față de noile axe, este

$$(M_1M_2)_{x'O'y'} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}. \tag{5}$$

Însă potrivit relațiilor(1) avem

$$x_1 = x_0 + x'_1.\quad y_1 = y_0 + y'_1;\quad x_2 = x_0 + x'_2,\quad y_2 = y_0 + y'_2,$$

deci

$$x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1,\qquad y_2 - y_1 = y'_2 - y'_2, \tag{6}$$

relații care arată că $(M_1M_2)_{xOy} = (M_1M_2)_{x'O'y'}$ adică *distanța între două puncte rămîne invariabilă la o translație de axe.*

b) *Unghiul a două drepte.* Fie $(D) = Ax + By + C = 0$ și $(D') = A'x + B'y + C' = 0$ două drepte concurente, raportate la vechile axe. Coeficienții lor unghiulari sînt

$$m = -\frac{A}{B} \text{ și } m' = -\frac{A'}{B'}.$$

Ecuațiile dreptelor raportate la noile axe sînt $Ax' + By' + D_0 = 0$ și $A'x' + B'y' + D'_0 = 0$ și este clar că au aceiași coeficienți unghiulari $m = -\frac{A}{B}$, $m' = -\frac{A'}{B'}$. Dacă direcțiile dreptelor rămîn neschimbate, atunci și *unghiul celor două drepte rămîne neschimbat după translație.*

Așadar *distanța între două puncte și unghiul a două drepte sînt elemente invariante față de translația axelor de coordonate.*

Exemple. 1. *Ce devine ecuația dreptei* $2x - 5y + 12 = 0$ *dacă se dă o translație sistemului de referință astfel ca originea să vină în* $O'(1, 2)$?

Avem $D_0 = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 12 = 4$, deci ecuația dreptei față de noile axe este $2x' - 5y' + 4 = 0$.

2. *Aceeași problemă pentru dreapta* $3x + 8y + 2 = 0$, *noua origine fiind* $O'(2, -1)$.

$$D_0 = 3 \cdot 2 + 8(-1) + 2 = 0, \text{ deci } 3x' + 8y' = 0,$$

adică dreapta dată trece prin noua origine, cu alte cuvinte s-a ales ca nouă origine un punct al dreptei date.

Exerciții și probleme

109. Să se spună ce devin ecuațiile dreptelor $x + 2y - 5 = 0$; $2x + 3y - 8 = 0$; $3x - 7y = 0$; $3x - 2y + 6 = 0$, dacă originea se mută printr-o translație în O' (2, 3).

[$x' + 2y' + 3 = 0$; $2x' + 3y' + 5 = 0$; $3x' - 7y' - 15 = 0$, $3x' - 2y' + 6 = 0$ (rămîne neschimbată).]

110. Se dau dreptele $5x + y - 7 = 0$ și $3x - 5y - 21 = 0$. Ce devin ecuațiile acestor drepte dacă, prin translație, se mută originea în punctul de intersecție al celor două drepte?

[$5x' + y' = 0$; $3x' - 5y' = 0$.]

111. Se consideră ecuațiile aceleiași drepte (D) raportate la vechile axe xOy și noile axe $x'O'y'$, după translație. Să se arate că termenii liberi sînt de același semn dacă O și O' sînt de aceeași parte a dreptei (D) și de semne contrare, dacă sînt de o parte și alta a lui (D).

112. a) Se dau punctele $A(3, 2)$, $B(1, 5)$, $C(-2, -1)$. Să se spună ce devin ecuațiile laturilor triunghiului dacă se mută originea, prin translație, în centrul de greutate al triunghiului.

b) Să se trateze problema în cazul general cînd vîrfurile triunghiului sînt $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

[a) $3x' + 2y' - 7 = 0$; $6x' - 3y' + 7 = 0$; $3x' - 5y' - 7 = 0$.
b) *Indicație.* Se vor scrie ecuațiile laturilor sub formă de determinant și se va ține seama că $G\left(\frac{\Sigma x_i}{3}, \frac{\Sigma y_i}{3}\right)$. Se găsește ca termen liber $\frac{2}{3}\mathcal{A}$, unde $\mathcal{A}$ este aria triunghiului dat.]

113. Să se cerceteze care sînt dreptele a căror ecuație se păstrează după o translație de axe.

[Fie $Ax + By + C = 0$ dreapta. Trebuie ca $D_0 = C$, care arată că $-\frac{A}{B} = \frac{y_0}{x_0}$, deci dreapta trebuie să fie paralelă cu OO'.]

Capitolul 7

Locuri geometrice

1. Din geometria elementară știm că se numește *loc geometric mulțimea punctelor care se bucură de o aceeași proprietate.* În plan această mulțime de puncte poate alcătui una sau mai multe curbe. De pildă toate punctele din plan *egal depărtate de un punct fix* se găsesc pe un cerc, prin urmare locul geometric — cercul — este format dintr-o singură curbă, în timp ce punctele egal depărtate de o dreaptă sînt situate pe două drepte paralele cu dreapta dată, de o parte și alta a ei, deci locul geometric este alcătuit din *două drepte.*

Putem concepe locul geometric și în alt mod, bazat pe mișcare, deci *cinematic.* Anume putem să ne închipuim un punct M mobil, care păstrează în tot timpul mișcării proprietatea dată și generează astfel locul geometric. În acest fel punctul M coincide pe rînd cu punctele locului geometric definit mai înainte static, ca mulțime de puncte. Sîntem astfel conduși la o definiție cinematică: *se numește loc geometric figura plană descrisă de un punct* mobil M, *care satisface o anumită condiție (proprietate) dată.* Figura plană de care am vorbit poate fi alcătuită din una sau mai multe curbe sau chiar de o porțiune din plan.

În scopul de a putea da reguli precise pentru determinarea locurilor geometrice pe cale analitică, vom despărți locurile geometrice în două categorii, după condiția la care este supus punctul variabil: *a)* locuri geometrice rezultate din mișcarea unui punct care păstrează neschimbată o *relație geometrică; b)* locuri geometrice descrise prin schimbarea poziției *punctului de intersecție* a două *curbe variabile.* În acest din urmă caz, proprietatea care se păstrează este că punctul variabil se găsește mereu la întretăierea celor două curbe.

Vom studia cele două categorii de locuri geometrice, cu suficiente exemple pentru ca lucrurile să fie bine lămurite.

2. *Locuri geometrice rezultate din relații geometrice.* A găsi locul geometric al punctului $M(x, y)$ înseamnă a găsi relația de legătură între coordonatele x și y, adică ecuația locului. În cazul cînd $M(x, y)$ satisface o anumită relație geometrică, este de ajuns să transformăm relația dată într-o relație analitică și am găsit legătura între x și y. Ajungem astfel la această regulă simplă: *locul geometric al unui punct care satisface o relație geometrică se găsește transformînd relația geometrică în relație analitică.*

Exemple. 1) *Se cere locul geometric al punctelor egal depărtate de dreptele paralele* $Ax + By + C = 0$ *și* $Ax + By + C' = 0$. Fie $M(x_0, y_0)$ punctul care are distanțe egale față de cele două drepte, adică

$$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C'}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{1}$$

Semnele din fața radicalilor se pot combina în *patru* feluri care conduc însă la următoarele *două* ecuații

$$Ax_0 + By_0 + C = \pm (Ax_0 + By_0 + C').$$

Dacă se ia semnul (+) înaintea parantezei se ajunge la o imposibilitate (deoarece $C \neq C'$); dacă se ia semnul (−) se găsește

$$Ax_0 + By_0 + \frac{C + C'}{2} = 0.$$

Deoarece x_0, y_0 sînt coordonate curente, se poate șterge acum indicele și ecuația locului este dreapta

$$Ax + By + \frac{C + C'}{2} = 0 \tag{2}$$

echidistantă față de dreptele date, deoarece ordonata la origine este media aritmetică a ordonatelor la origine a dreptelor date.

2) *Să se găsească locul geometric al punctelor care au suma distanțelor față de două drepte perpendiculare, constantă și egală cu* a.

Problema poate fi studiată sub două aspecte după cum distanțele sînt socotite cu semn sau în valoare absolută. În orice caz, axele de coordonate vor fi chiar cele două drepte și atunci este foarte clar că distanțele unui punct M la cele două drepte sînt chiar coordonatele punctului. Relația geometrică dată de enunț este $\overline{MM}_1 + \overline{MM}_2 = a$.

Cazul I. Dacă distanțele sînt socotite cu semn, atunci acestea sînt coordonatele punctului M, cu semnele respective în cele patru cadrane. Relația geometrică transformată analitic este deci

$$x + y = a \tag{3}$$

și reprezintă dreapta AB (fig. 28) în întregime, deci și partea punctată. Să se observe însă că dacă M iese din cadranul I, atunci din punctul de vedere al geometriei fără semne avem *diferența distanțelor* constantă și nu suma.

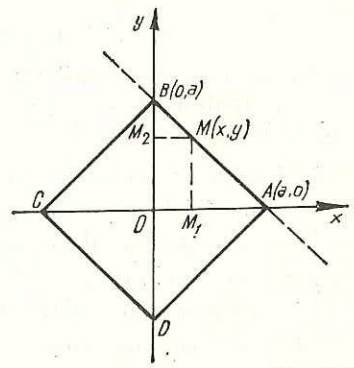


Fig. 28

Cazul II. Dacă relaţia geometrică se referă la distanţele absolute, atunci relaţia analitică este

$$|x| + |y| = a \tag{4}$$

şi reprezintă pătratul $ABCD$, lucru care se vede uşor, deoarece dacă M aparţine locului, atunci simetricele faţă de Ox, Oy şi origine aparţin de asemenea locului.

Din punctul de vedere al *geometriei elementare* problema se încadrează în al doilea caz.

Atragem atenţia că după ce s-a obţinut ecuaţia locului geometric trebuie cercetat dacă natura problemei permite ca toate punctele care verifică ecuaţia să aparţină locului, sau *numai o parte*. Este chestiunea locului geometric limitat.

3) *Fiind date trei puncte A, B, C să se găsească locul geometric al punctelor care satisfac relaţia*

$$MB^2 + MC^2 = 2 \cdot MA^2.$$

Se alege dreapta BC ca axă Ox şi mediatoarea segmentului BC ca axă Oy. Coordonatele punctelor sînt: $A(x_1, y_1)$, $B(a, 0)$, $C(-a, 0)$ şi $M(x, y)$ care este punct curent al locului. Relaţia geometrică transpusă analitic este

$$(x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = 2(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

sau, după dezvoltarea şi reducerea termenilor asemenea

$$2x_1x + 2y_1y = x_1^2 + y_1^2 - a^2. \tag{5}$$

Aceasta este ecuaţia locului geometric şi reprezintă o perpendiculară pe mediana OA a triunghiului ABC, deoarece coeficientul său unghiular este $-\frac{x_1}{y_1}$.

Discuţie. a) Problema, prin enunţul ei, nu duce la nici o limitare a locului geometric, deci locul geometric este toată dreapta.

b) *Cazuri particulare.* 1) Dacă $OA = a$, adică mediana triunghiului ABC este jumătatea laturii BC, atunci $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ şi ecuaţia locului se reduce la $x_1x + y_1y = 0$, adică perpendiculara pe OA care trece prin origine.

2) Dacă triunghiul ABC este isoscel, atunci $A \in Oy$ şi $x_1 = 0$. Ecuaţia locului devine $y = \frac{y_1^2 + a^2}{2y_1}$, o paralelă la Ox.

3) Dacă A, B, C, sînt coliniare, atunci $A \in Ox$ şi $y_1 = 0$. Ecuaţia (5) se reduce la $x = \frac{x^2 - a^2}{2x_1}$, deci o perpendiculară pe dreapta ABC.

Am dat acest model de discuţie pentru a arăta că în primul rînd trebuie văzut dacă locul este limitat sau nu, apoi este bine să se prezinte unele generalizări sau cazuri particulare interesante.

3. *Locuri geometrice rezultate din intersecţii.* În cazul locurilor rezultate din intersecţii de curbe punctul M se află la intersecţia a două curbe variabile, a căror poziţie depinde de un parametru λ. Prin urmare ecuaţia fiecărei curbe conţine variabilele x, y şi un acelaşi parametru λ care schimbă poziţia fiecărei curbe, dar nu modifică gradul ecuaţiei sale. Cele două curbe se pot scrie deci, în general, sub forma

$$f(x, y; \lambda) = 0 \text{ şi } g(x, y; \lambda) = 0 \tag{6}$$

Ne propunem să găsim metoda de a determina locul geometric al punctului M în acest caz.

Ecuaţiile (6) formează un sistem pe care îl putem rezolva în raport cu x şi y; acestea vor fi funcţii de λ, deci vom avea

$$x = \varphi(\lambda), \; y = \psi(\lambda). \tag{7}$$

Trebuie să precizăm că din punct de vedere practic rezolvarea sistemului (6) poate duce *uneori* la greutăţi destul de mari, dar, aşa cum vom vedea, această rezolvare ne interesează prea puţin.

În baza relaţiilor (7) la fiecare valoare a lui λ corespunde o pereche de valori (x, y), deci un punct în plan. Cînd λ variază continuu, punctul $M(x, y)$, îşi schimbă şi el continuu poziţia şi descrie curba-loc geometric. Pentru acest motiv se zice că (7) reprezintă *ecuaţiile parametrice* ale locului geometric. Legătura între x şi y este făcută indirect prin parametrul λ.

Pe noi ne interesează legătura directă între x şi y, deci *ecuaţia carteziană* a locului. Aceasta se face eliminînd pe λ între cele două ecuaţii (7), deci scoţînd pe λ dintr-una din ele şi introducîndu-l în cealaltă. În acest fel se obţine o relaţie de forma

$$F(x, y) = 0 \tag{7'}$$

care este ecuaţia locului geometric căutat.

Să observăm însă că ecuaţiile (6) şi (7) sînt echivalente, prin urmare putem elimina pe λ direct din (6), fără a mai trece prin (7) şi vom obţine acelaşi loc geometric.

De aici regula:

Pentru a găsi locul geometric rezultat din intersecţia a două curbe variabile, care depind de un acelaşi parametru, se elimină parametrul între ecuaţiile celor două curbe.

După cum s-a văzut sistemul (7) a fost necesar numai pentru *a demonstra* că locul geometric se obţine prin eliminarea parametrului. Se întîmplă însă cîte o dată ca eliminarea parametrului din (6) să se facă greu. Atunci trebuie încercat dacă nu cumva trecînd de la (6) la (7), eliminarea se face mai uşor între ecuaţiile (7).

Cazul cînd curbele conţin mai mulţi parametri. Se poate ca din enunţul unei probleme să apară *doi* parametri şi atunci ecuaţiile curbelor care determină locul geometric conţin doi parametri, adică sînt de forma

$$f(x, y; \lambda, \mu) = 0, \; g(x, y; \lambda, \mu) = 0. \tag{8}$$

În acest caz însă tot enunţul problemei trebuie să ne deaşi o relaţie de legătură între cei doi parametri, deci

$$h(\lambda, \mu) = 0 \tag{8'}$$

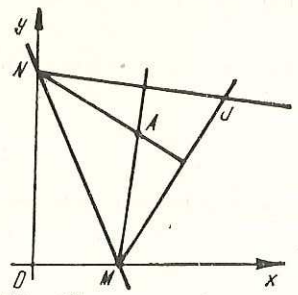


Fig. 29

Eliminarea celor doi parametri se face între cele trei ecuații (8) și (8′). În mod asemănător *trei* parametri se vor elimina între *patru* ecuații etc.

Se întîmplă uneori, destul de rar, ca o problemă să conțină doi parametri, *fără relație de legătură între ei* și totuși să existe un loc geometric. În astfel de cazuri, atunci cînd se elimină unul din parametri, se elimină de la sine și al doilea.

Exemplele care urmează vor lămuri și mai bine expunerea.

Exemple. 1. *Se consideră un unghi drept și un punct fix A. O dreaptă de direcție constantă taie laturile unghiului, respectiv în M și N. Se cere locul geometric al intersecției perpendicularei din M pe AN, cu perpendiculara din N pe AM.*

Laturile unghiului drept se aleg în mod firesc ca axe (fig. 29). Punctul A are coordonate oarecare: $A(x_0, y_0)$. Dreapta de direcție constantă o scriem sub forma $y = mx + \lambda$ (λ este parametrul problemei) unde $m =$ const. dă direcția dreptei.

Punctele $M \in Ox$ și $N \in Oy$ sînt tăieturile dreptei, iar coordonatele lor se obțin făcînd succesiv $y = 0$ și $x = 0$. Se găsește $M\left(-\frac{\lambda}{m}, 0\right)$ și $N(0, \lambda)$. Pentru dreptele AN și AM ne trebuie numai coeficienții unghiulari. Ele fiind determinate prin două puncte avem imediat

$$m_{AN} = \frac{y_0 - \lambda}{x_0}; \quad m_{AM} = \frac{y_0}{x_0 + \frac{\lambda}{m}}.$$

Rezultă ecuațiile perpendicularelor din M și N, respectiv pe AN și AM : $y = -\frac{x_0}{y_0 - \lambda}\left(x + \frac{\lambda}{m}\right)$, $y - \lambda = -\frac{x_0 + \frac{\lambda}{m}}{y_0} x$, care se mai pot scrie sub formele

$$xx_0 + yy_0 = \lambda\left(y - \frac{x_0}{m}\right) \text{ și } xx_0 + yy_0 = \lambda\left(y_0 - \frac{x}{m}\right).$$

Locul geometric al punctului J de intersecție a celor două drepte se capătă prin eliminarea parametrului λ; aceasta se obține scăzînd ecuațiile și împărțind cu $\lambda \neq 0$. Ecuația locului geometric este

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

Se observă că locul este perpendiculara dusă din A pe dreapta MN de direcție constantă.

Notă. Soluția geometrică este simplă: oricare ar fi triunghiul MJN, AM și AN sînt înălțimi, deci JA este a treia înălțime și $JA \perp MN$.

2. *Pe laturile unui unghi drept xOy se iau punctele A pe Ox și B pe Oy, apoi punctele variabile M pe Ox, N pe Oy care satisfac relația*

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = 2.$$

Să se găsească locul geometric al punctului $J = AN \cap BM$.

Am luat acest exemplu cu un anumit scop: de a arăta că dacă cele două drepte variabile coincid la un moment dat, atunci orice punct al lor este punct de intersecție și dreapta aceasta dublă apare ca loc geometric, fără a fi cel veritabil. Astfel de locuri geometrice rezultă din *nedeterminarea punctului de intersecție* și este bine să știm să le recunoaștem pentru a le separa ca să rămînă locul geometric căutat.

În problema dată axele sînt laturile unghiului drept. Coordonatele punctelor le notăm: $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $M(\alpha, 0)$, $N(0, \beta)$.

Dreptele din enunț se scriu prin tăieturi:

$$(AN) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0; \qquad (BM) \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

la care se adaugă relația de legătură

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 2.$$

Avem în față o problemă cu *doi parametri* α, β și o *relație de legătură* între ei. Între cele trei ecuații trebuie eliminați α și β.

Din primele două ecuații se scoate:

$$\beta = \frac{ay}{a - x}; \qquad \alpha = \frac{bx}{b - y};$$

acestea introduse în relația de legătură ne dau $\frac{bx}{a(b - y)} + \frac{ay}{b(a - x)} = 2$ sau efectuînd calculele

$$b^2x^2 + 2abxy + a^2y^2 - 3ab(bx + ay) + 2a^2b^2 = 0.$$

Am obținut o ecuație de gradul al II-lea. Să observăm însă că atunci cînd $N \equiv B$ deci $\beta = b$, relația de legătură ne dă $\alpha = a$, adică $M \equiv A$. În acest caz însă dreptele AN și BM coincid și toate punctele dreptei AB sînt puncte comune deci AM *trebuie* să apară ca loc geometric rezultat din nedeterminare. În consecință, ecuația de gradul al II-lea *trebuie să se descompună*.

În adevăr se observă că ecuația poate fi scrisă $(bx + ay)^2 - 3ab(bx + ay) + 2a^2b^2 = 0$, care rezolvată în raport cu $(bx + ay)$* duce la

$$bx + ay = 2ab \text{ și } bx + ay = ab \text{ sau}$$

$$(D) \quad \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - 1 = 0, \quad (D') \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Dreapta (D) este veritabilul loc geometric și se construiește imediat avînd tăieturile $2a$, $2b$; este deci paralelă cu AB.

A doua dreaptă (D') este AB, care așa cum am prevăzut trebuia să apară ca loc rezultat din nedeterminarea punctului de intersecție.

* Pentru ușurință se poate nota $bx + ay = z$.

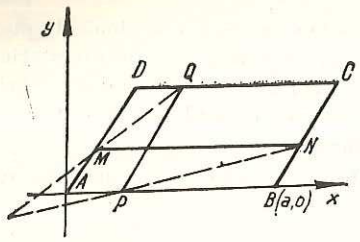


Fig. 30

Observare. La același rezultat se ajunge mai simplu în cazul de față dacă se scrie ecuația locului geometric sub forma $\frac{bx}{ab-ay} - 1 + \frac{ay}{ab-bx} - 1 = 0$. Apare imediat factorul $(bx + ay - ab)$, după care se elimină numitorul.

3. *Se dă un paralelogram $ABCD$. O paralelă la AB taie laturile AD și BC, respectiv în M și N, iar o paralelă la AD taie laturile AB și CD, respectiv în P și Q. Să se afle locul geometric al punctului $PN \cap MQ$.*

Se alege latura AB ca axă Ox și perpendiculara pe ea în A ca Oy, apoi se notează cu a abscisa lui B (fig. 30). Ecuațiile laturilor paralelogramului sînt: $(AB)\ y = 0$; $(CD)y = b$; $(AD)y = mx$; $(BC)y = m(x - a)$. Ecuațiile dreptelor MN și PQ sînt respectiv: $y = \beta$ și $y = mx + \alpha$. După cum se vede apar doi parametri α și β fără ca problema să ne dea o legătură între ei, totuși, există un loc geometric. Rezolvînd sistemele formate de dreptele MN și AD, apoi de MN și BC găsim:

$$M \cdot \left(\frac{\beta}{m}, \beta\right); \quad N\left(a + \frac{\beta}{m} \cdot \beta\right).$$

De asemenea $PQ \cap AB$ și $PQ \cap CD$ ne dau $P\left(-\frac{\alpha}{m}, 0\right)$; $\quad Q\left(\frac{b-\alpha}{m}, b\right)$.

Acum se pot scrie ecuațiile dreptelor MQ și NP, care aduse la forma generală sînt

$$(MQ) \qquad m(\beta - b)x + (b - \alpha - \beta)y + \alpha\beta = 0$$
$$(NP) \qquad m\beta x - (ma + \alpha + \beta)y + \alpha\beta = 0.$$

Prin scăderea acestor două ecuații (prima din a doua) dispar amîndoi parametrii și se obține ecuația locului

$$mbx - (b + ma)y = 0,$$

o dreaptă care trece prin origine și prin punctul C, deci locul este chiar diagonala AC a paralelogramului.

Notă. Cum se explică faptul că deși în unele probleme există *doi parametri*, fără relație de legătură între ei, totuși avem un loc geometric? Să ne închipuim în problema de față că MN rămîne fixă și variază numai PQ și să notăm cu L_α locul geometric datorit primului parametru α. Presupunem apoi pe PQ fixă și să notăm cu L_β locul datorit lui β. În general L_α și L_β sînt distincte, dar dacă se întîmplă să coincidă, cum a fost cazul aici, atunci va exista un loc geometric rezultat din variația a doi parametri, fără legătură între ei.

De exemplu dacă $ABCD$ este un trapez cu bazele AB și CD, MN paralelă cu bazele, iar PQ paralelă cu dreapta care unește mijloacele bazelor, atunci L_α este o dreaptă, diferită de diagonală, iar L_β este o conică ce trece prin A și C. Cînd bazele trapezului devin egale, deci, trapezul devine paralelogram, atît L_α cît și L_β se reduc la diagonala AC a paralelogramului.

Exerciții și probleme

114. Să se găsească locul punctelor M astfel ca diferența pătratelor distanțelor lor la două puncte fixe A și B să fie constantă.

[O perpendiculară pe AB.]

115. Să se găsească locul geometric al punctelor care au raportul distanțelor la două drepte concurente, constant.

[Două drepte care trec prin punctul comun dreptelor date. Pentru $k = 1$ se obțin cele două bisectoare.]

116. Fiind date trei puncte A, B, C să se găsească locul punctului M care satisface relația:

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = k \text{ (const.)}$$

Să se deducă problema de la exemplul 3 § 2.

117. Dîndu-se în plan $(n + 1)$ punctele: $M_1, M_2, \ldots, M_n, M_{n+1}$, să se găsească locul punctului M care satisface relația

$$MM_1^2 + MM_2^2 + \ldots MM_n^2 - n \cdot MM_{n+1}^2 = k \text{ (const.)}.$$

Caz particular $k = 0$.

[O dreaptă. Este generalizarea problemei precedente.]

118. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC = a$ și catetele $CA = b$, $AB = c$. Să se găsească locul geometric al punctelor M care satisfac relația

$$b^2 \cdot MB^2 + c^2 \cdot MC^2 - a^2 \cdot MA^2 = k \text{ (const.)}$$

Caz particular $k = 0$

[O paralelă la ipotenuză. Pentru $k = 0$ se obține o relație interesantă a punctelor de pe ipotenuză. S.G.M. IV. p. 97.]

119. Se dau patru puncte în plan A_1, A_2, A_3, A_4 astfel că $A_1A_2 = A_3A_4$. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor M care satisfac relația

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MA_3^2 + MA_4^2$$

este mediatoarea segmentului care unește mijloacele lui A_1A_2 și A_3A_4.

Se va studia și cazul cînd A_1A_3 A_2A_4 este dreptunghi iar A_1A_2, A_3A_4 diagonalele sale.

[În ultimul caz orice punct al planului satisface relația dată.]

120. Un triunghi are o latură fixă și aria constantă. Să se afle locul vîrfului mobil.

[a) Dacă aria se consideră cu semn, locul este o paralelă la bază. b) Dacă aria se consideră în modul, locul este compus din două paralele la bază.]

121. Se dă o dreaptă (D) și un punct A exterior. Dacă $M \in (D)$ și este mobil, să se afle:

a) locul mijlocului segmentului AM;

b) locul punctului care împarte într-un raport dat k segmentul AM.

[Paralele la dreapta (D).]

122. Vîrfurile A, B, C, ale unui triunghi se mișcă arbitrar pe trei drepte paralele. Să se arate că centrul de greutate G descrie un loc geometric și să se precizeze poziția lui.

[Se va lua Ox cu direcția dreptelor paralele. Atunci $A(\alpha, a)$, $B(\beta, b)$, $C(\gamma, c)$ și $y = \dfrac{a+b+c}{3} = \text{const.}$ etc. Să se observe că problema conține parametri independenți α, β, γ.]

123. Se dă unghiul drept xOy și punctul fix M_0 în planul său. Prin M_0 se duc două drepte perpendiculare dintre care una taie latura Ox în A, iar cealaltă taie latura Oy în B. Se cere locul mijlocului segmentului AB, cînd unghiul drept AM_0B se rotește în jurul lui M_0.

[Mijlocul lui AB este $I\left(\frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{y_0}{\lambda}\right),\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{x_0}{\lambda}\right)\right)$. Locul este mediatoarea segmentului OM_0.]

124. Patrulaterul $ABCD$ are vîrfurile A, B fixe, iar C și D mobile pe două drepte (Δ), (Δ') paralele între ele. Fie M, N mijloacele segmentelor AB, CD. Să se afle locul mijlocului segmentului MN.

[Problema conține doi parametri. Se va lua o paralelă la (Δ) și (Δ')+axa Ox. Atunci $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(\alpha, a)$, $D(\beta, b)$. Ordonata mijlocului lui MN este constantă. Locul este o paralelă la (Δ), (Δ') a cărei poziție este precizată.]

125. O dreaptă se deplasează paralel cu ea însăși și întîlnește axele de coordonate în M și N. Prin M și N se duc drepte cu direcții fixe; să se afle locul geometric al intersecției lor.

[O dreaptă care trece prin origine.]

126. Pe o dreaptă (D) se dau două puncte fixe, A, B și un punct mobil M. Pe perpendiculara ridicată în M pe (D) se iau segmentele constante $\overline{MP} = p$, și $\overline{MQ} = q$. Se cere locul geometric al punctului $AP \cap BQ$ (S.G.M. IV).

[Fie Q_a poziția lui Q cînd $M \equiv A$ și P_b poziția lui P cînd $M \equiv B$. Locul este dreapta Q_aP_b.]

127. Se dă un punct fix A pe axa Ox și o dreaptă (D). Prin A se duce o dreaptă variabilă (Δ) și fie $M = (\Delta) \cap (D)$, $N = (\Delta) \cap Oy$. Să se găsească locul geometric al intersecției perpendicularei pe Oy în N cu dreapta OM.

[$A(a, 0)$, și $y = mx + n$ ecuația dreptei (D). Locul cerut este $(am + n)x - ay + an = 0$, o dreaptă.]

128. O dreaptă se deplasează păstrînd direcția și întîlnește axele Ox, Oy, respectiv în A și B. Se construiește un dreptunghi $ABCD$ cu vîrful C pe o dreaptă fixă (Δ). Să se găsească locul vîrfului D (C.d.p.).

[k este coeficientul unghiular al direcției constante și $y = mx + n$ ecuația dreptei fixe. Locul este dreapta $kx + (k^2 - mk - 1)y + n = 0$.]

129. Se dau punctele fixe $A \in Ox$ și $B \in Oy$. Se iau apoi punctele variabile $A' \in Ox$ și $B' \in Oy$ astfel ca $\overline{OA'} + \overline{OB'} = \overline{OA} + \overline{OB}$. Să se găsească locul intersecției dreptelor AB' cu $A'B$ (Salmon).

[$A(a, 0)$, $B(0, b)$. Locul este $x + y = a + b$. În ecuația locului apare însă și dreapta AB. Să se explice de ce (vezi probleama 2 § 3).]

130. Se dă dreapta (D) $2x + 3y - 12 = 0$. Un punct M mobil pe (D) se proiectează în P pe Ox și în Q pe dreapta $x - y + 2 = 0$. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului PQ.

[$M(\alpha, \beta) \in (D)$ deci $2\alpha + 3\beta - 12 = 0$. Mijlocul lui PQ : $x = \frac{1}{4}(3\alpha + \beta - 2)$, $y = \frac{1}{4}(\alpha + \beta + 2)$. Se elimină α și β între cele trei ecuații. Locul este dreapta $x - 7y + 10 = 0$.]

Capitolul 8

Curbele de gradul al doilea

A. Cercul

1. *Ecuația cercului.* Cercul este locul geometric descris de un punct M care rămîne la egală distanță de un punct fix C, centrul cercului. Dacă notăm cu r raza cercului, relația geometrică pe care o satisface punctul curent M este (fig. 31).

$$CM = r.$$

Fie $C\ (a, b)$ și $M\ (x, y)$ centrul și punctul curent raportate la un sistem dreptunghiular de axe. Relația geometrică se scrie analitic

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

sau, adusă la forma rațională

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0. \qquad (1)$$

Aceasta este ecuația cercului, cînd se dau centrul și raza.

Se poate ușor arăta că reciproc orice punct pentru care $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$, satisface condiția $CM = r$, deci ecuația (1) reprezintă cercul cu centrul în C și raza r.

Dacă centrul este în origine, atunci $a = b = 0$ și ecuația devine

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \qquad (2)$$

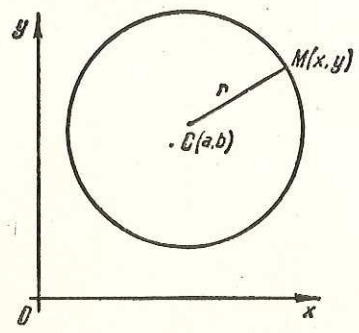


Fig. 31.

Ecuațiile (1) și (2) reprezintă cercuri numai în axe dreptunghiulare.

2. Dacă desfacem pătratele în (1) obținem ecuația cercului sub forma

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0, \qquad (3)$$

care este o ecuație de gradul al II-lea în x și y. Reciproc însă, *nu* orice ecuație de gradul al II-lea reprezintă un cerc.

În adevăr ecuația generală de gradul al II-lea în x și y este

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (4)$$

care comparată cu (3) ne duce la următoarele constatări:

1) Ecuația cercului (3) nu conține termenul în xy,, deci în (4) trebuie ca $B = 0$.

2) În (3) x^2 și y^2 au coeficienții egali cu 1, dar dacă a și b sînt fracționari prin eliminarea numitorilor se obțin coeficienți diferiți de 1, dar *egali între ei*, deci în (4) trebuie să avem $C = A$.

Prin urmare pentru ca (4) să reprezinte un cerc trebuie să aibă forma:

$$A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0 \qquad (5)$$

pe care o vom numi *ecuația generală a cercului.* Dacă împărțim cu A ($A \neq 0$, căci altfel nu mai avem cerc) și notăm $\frac{D}{A} = 2m$, $\frac{E}{A} = 2n$, $\frac{F}{A} = p$ obținem

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0 \qquad (6)$$

pe care o vom numi *ecuația normală* a cercului.

În rezumat formele principale sub care se prezintă ecuația unui cerc sînt: *ecuația generală* (5), *ecuația normală* (6) și *ecuația cu pătratele strînse* (1).

Deoarece trecerea de la ecuația generală la ecuația normală se face foarte simplu prin împărțirea cu A, formele care interesează în mod deosebit sînt (1) și (6).

3. *Interpretarea geometrică a coeficienților.* Ne referim la ecuația normală a cercului (6); aceasta comparată cu (3) ne dă

$$m = -a;\ n = -b,\ p = a^2 + b^2 - r^2. \qquad (7)$$

Coeficienții lui x și y ($2m$ și $2n$) sînt coordonatele centrului *dublate* și cu *semn schimbat.* Pentru interpretarea lui p ducem din origine tangenta OT la cerc (fig. 32) și din triunghiul dreptunghic OCT scoatem: $OT^2 = OC^2 - r^2 = a^2 + b^2 - r^2$, deci

$$p = OT^2.$$

Așa cum arată și figura, s-a presupus originea exterioară cercului.

Dacă originea este interioară cercului, atunci se duce coarda care trece prin O și este perpendiculară pe diametrul OC; fie T' unul din punctele unde aceasta taie cercul. Avem (fig. 33)

$$OT'^2 = r^2 - OC^2 = r^2 - (a^2 + b^2) = -(a^2 + b^2 - r^2),$$

de unde

$$p = -OT'^2$$

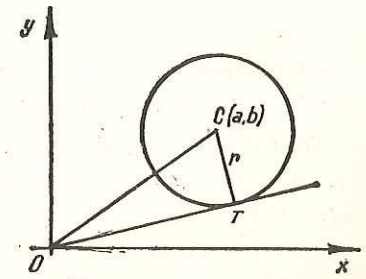


Fig. 32

În ambele cazuri p reprezintă puterea originii față de cerc. În primul caz puterea originii este dată de *pătratul tangentei* OT, în al doilea caz puterea originii este dată de *pătratul semicoardei* $OT' \perp OC$ luat cu semnul (—).

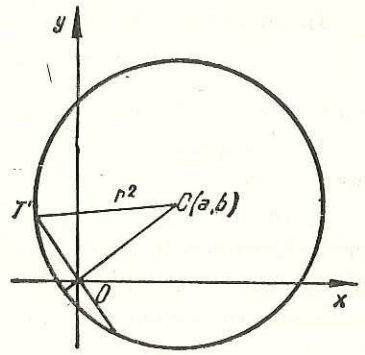


Fig. 33

De aici rezultă că numai privind ecuația unui cerc putem spune dacă originea este *exterioară* sau *interioară* cercului, după cum termenul liber p este respectiv *pozitiv* sau *negativ*. Dacă $p = 0$, cercul trece prin origine.

4. *Determinarea centrului și a razei.* Considerăm cercul dat prin ecuația normală

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0.$$

Din relațiile (7) rezultă imediat:

$$a = -m, \quad b = -n, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2 - p} \tag{8}$$

care dau coordonatele centrului și raza. Coordonatele centrului sînt *jumătățile coeficienților lui x și y, cu semnul schimbat*. Expresia razei ne conduce la următoarea discuție:

I. Dacă $a^2 + b^2 - p > 0$, raza este reală și cercul de asemenea real.

II. Dacă $a^2 + b^2 - p = 0$, atunci $r = 0$, deci cercul se reduce la un punct. Ecuația lui se scrie

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0, \tag{9}$$

și singurele *valori reale* care anulează această sumă de pătrate sînt cele care anulează fiecare pătrat, adică $x = a$, $y = b$, deci punctul (a, b).

III. Dacă $a^2 + b^2 - p < 0$, raza cercului este imaginară și cercul este imaginar. Deoarece r^2 este negativ, ecuația cercului scrisă cu pătratele strînse este

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + r^2 = 0. \tag{10}$$

De data aceasta nu mai există nici o pereche de valori reale (x, y) care să verifice ecuația (10).

5. *Cazuri particulare.* a) Dacă $b = 0$, centrul cercului se află pe axa Ox, iar ecuația cercului se reduce la $x^2 + y^2 + 2mx + p = 0$. *Lipsește termenul în y.*

b) Dacă $a = 0$, centrul cercului se află pe Oy, iar ecuația este $x^2 + y^2 + 2ny + p = 0$. *Lipsește termenul în x.*

c) Dacă $p = 0$, ecuația cercului rămîne $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny = 0$ și cercul trece prin origine (vezi și § 3).

Exemple. 1) Ecuația cercului cu centrul în origine și cu raza $r = 2$ este $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

2) Cercul cu centrul $C(1, 2)$ și raza $r = 5$ are ecuația $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 25 = 0$ sau $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. Deoarece $p < 0$, originea este interioară cercului.

3) Să se strîngă în pătrate ecuația cercului $x^2 + y^2 + x - 4y - 2 = 0$.

Avem $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, $r^2 = \frac{1}{4} + 4 + 2 = \frac{25}{4}$; ecuația este

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 - \frac{25}{4} = 0.$$

4) Să se afle centrul și raza cercului a cărei ecuație este

$$3(x^2 + y^2) - 4x + 6y + 3 = 0.$$

Se împarte întîi cu 3 și se obține ecuația normală, de unde

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = -1, \quad r^2 = \frac{4}{9} + 1 - 1 = \frac{4}{9}; \quad r = \frac{2}{3}.$$

5) Să se scrie sub forma strînsă în pătrate ecuația cercului

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 8 = 0.$$

Avem $a = 2$; $b = -1$, $r^2 = 4 + 1 - 8 = -3$, deci $r = i\sqrt{3}$. Cercul este imaginar și ecuația cerută este

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + 3 = 0.$$

6) Să se spună unde are centrul, cercul de ecuație

$$x^2 + y^2 + 6x - 2\lambda y = 0.$$

Coordonatele centrului sînt $a = -3$, $b = \lambda$, deci centrul se află pe dreapta $x = -3$.

6. *Determinarea unui cerc.* Se știe că un cerc este determinat de trei puncte care nu sînt în linie dreaptă. Acest lucru, cunoscut din geometrie, va trebui să-l regăsim pe cale analitică. Pentru ca un cerc să treacă printr-un punct $M_0(x_0, y_0)$ trebuie ca ecuația cercului să fie verificată de coordonatele punctului. Însă ecuația unui cerc conține trei parametri m, n, p, deci pentru determinarea lor trebuie trei ecuații și acestea se obțin scriind că cercul trece prin trei puncte. Dacă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ sînt cele trei puncte, atunci pentru primul punct trebuie să avem

$x_1^2 + y_1^2 + 2mx_1 + 2ny_1 + p = 0$, sau $2mx_1 + 2ny_1 + p = -(x_1^2 + y_1^2)$

și asemănător pentru celelalte două puncte. Obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} 2mx_1 + 2ny_1 + p &= -(x_1^2 + y_1^2) \\ 2mx_2 + 2ny_2 + p &= -(x_2^2 + y_2^2) \\ 2mx_3 + 2ny_3 + p &= -(x_3^2 + y_3^2) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Necunoscutele fiind $2m$, $2n$, p, condiția ca sistemul să fie compatibil și determinat (sistem Cramer) este ca determinantul coeficienților să fie diferit de zero, adică

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (12)$$

relație care arată că cele trei puncte A, B, C nu trebuie să fie coliniare. Cu această condiție $2m$, $2n$, p au valori unice și cercul este perfect determinat.

E x e m p l u. *Să se găsească ecuația cercului determinat de punctele* $(-1, 1)$, $(2, -1)$, $(1, 3)$.

Înlocuind coordonatele fiecărui punct în ecuația normală a cercului se obține sistemul

$$2m - 2n - p = 2;\ 4m - 2n + p = -5;\ 2m + 6n + p = -10$$

care dă $m = -\frac{11}{10}$, $n = -\frac{9}{10}$, $p = -\frac{12}{5}$. Ecuația cercului este $5(x^2 + y^2) - 11x - 9y - 12 = 0$.

Altă metodă. Se determină centrul cercului ca intersecție a două mediatoare ale triunghiului, apoi raza ca distanță de la centru la unul din punctele date.

O b s e r v ă r i. a) Dacă se dau numai două puncte, se obțin numai *două ecuații* cu *trei necunoscute*. Se pot scoate *două necunoscute* în funcție de a treia și ecuația cercului depinde de un singur parametru.

b) Dacă se dă un singur punct, atunci condiția ca cercul să treacă prin acest punct duce la *o ecuație* cu *trei necunoscute*, deci se poate scoate una din ele ca funcție de celelalte două. Ecuația cercului depinde de *doi parametri*. *Exemplu*: cercurile care trec prin origine $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny = 0$.

7. Ca și dreapta, cercul poate fi determinat în mai multe feluri, dar totdeauna vor trebui determinați trei parametri. Astfel dacă se cunosc coordonatele centrului (a, b) și raza r, cercul este perfect determinat. Să se observe că a da centrul echivalează cu două condiții, căci sînt determinați a și b.

În afară de aceste două moduri de a determina un cerc, se pot imagina și altele. De exemplu dacă se pune condiția ca centrul să se afle pe o dreaptă, aceasta dă o relație între coordonatele centrului, deci o ecuație etc.

1) *Să se determine cercul cu centrul pe dreapta* $x = 3$, *tangent axei Oy și care trece prin punctul* $A(5, 4)$.

Din cei trei parametri a, b, r, condițiile problemei fixează doi: $a = 3$ și $r = 3$. Lăsînd pe b nedeterminat vom scrie ecuația

$$(x - 3)^2 + (y - b)^2 - 9 = 0.$$

Obligăm acest cerc să treacă prin $A(5, 4)$ și obținem $(5 - 3)^2 + (4 - b)^2 - 9 = 0$ sau $(b - 4)^2 = 5$ de unde $b = 4 \pm \sqrt{5}$, deci două soluții. Ecuațiile celor două cercuri se obțin înlocuind valorile lui b în ecuația de mai înainte.

2) *Să se scrie ecuația cercului cu centrul în* $C(5, 5)$ *și tangent dreptei* $3x + 4y - 5 = 0$.

Cunoscînd centrul ne trebuie numai raza. Aceasta se află ca distanță de la C la dreapta dată, deci $r = \left|\frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 - 5}{5}\right| = 6$. Ecuația cercului este $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 - 36 = 0$ sau $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 14 = 0$.

3) *Să se scrie ecuația cercului tangent axei Ox în punctul* $A(4, 0)$ *și care trece prin punctul* $(-2, 2)$.

Se dau trei condiții: să treacă prin cele două puncte și să fie tangent axei Ox. Centrul se află pe paralela dusă prin A la Oy, deci $a = 4$, $b = \lambda$. Geometric se vede că $r = \lambda$ deci scriem ecuația cercului $(x - 4)^2 + (y - \lambda)^2 - \lambda^2 = 0$ sau $x^2 + y^2 - 8x - 2\lambda y + 16 = 0$. Ca să treacă prin punctul $(-2, 2)$ trebuie ca $4 + 4 + 16 - 4\lambda + 16) = 0$, de unde $\lambda = 10$. Ecuația cercului este $x^2 + y^2 - 8x - 20y + 16 = 0$.

Exerciții și probleme

131. Să se scrie ecuația cercului cu centrul în origine și cu raza $r = 4$, apoi a cercului cu aceeași rază, dar cu centrul în punctul $(-3, -5)$.

$[x^2 + y^2 - 16 = 0;\ x^2 + y^2 + 6x + 10y + 18 = 0.]$

132. Se cere centrul și raza cercului a cărui ecuație este

$$x^2 + y^2 - 2x + 2\sqrt{5}\,y - 10 = 0.$$

Care este poziția originii față de acest cerc?

$[(1, -\sqrt{5});\ r = 4.$ Originea este interioară.$]$

133. Aceeași problemă pentru cercul $8(x^2 + y^2) + 4x + 12y - 27 = 0$. Să se pună ecuația cercului sub forma strînsă în pătrate.

$\left[C\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right),\ r = 2.$ Originea interioară.$\right]$

134. Să se pună sub forma strînsă în pătrate cercurile:

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 25 = 0; \quad 2(x^2 + y^2) + 6x - 2y + 5 = 0.$$

[Cerc imaginar; cerc de rază nulă.]

135. Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctele $A(1, 1)$, $B(2, 0)$, $C(3, 2)$. Să se afle centrul, raza și lungimea tangentei duse din origine la cerc.

$\left[3(x^2 + y^2) - 13x - 7y + 14 = 0; \quad OT^2 = \frac{14}{3}.\right]$

136. Se cere ecuația cercului determinat de punctele $A(-4, 0)$, $B(4, 4)$ și originea axelor.

[$x^2 + y^2 + 4x - 12y = 0$.]

137. Se dau punctele $A(-1, 4)$, $B(3, -2)$. Să se scrie ecuația cercului care are pe AB ca diametru.

[Se determină centrul și raza; $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$.]

138. Se dau punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Să se scrie ecuația cercului cu diametrul AB.

[Generalizarea problemei precedente.
$x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.]

139. Să se scrie ecuația cercului care trece prin origine și este tangent dreptei $x + 2 = 0$, în punctul $(-2, -3)$.

$\left[a = \lambda,\ b = -3,\ r = \lambda + 2.\ \text{Se găsește } \lambda = \frac{5}{4};\ x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + 6y = 0.\right]$

140. Să se scrie ecuația cercului tangent axei Ox în origine și care trece prin punctul $A(\sqrt{3}, -3)$. Să se determine centrul și raza.

[$x^2 + y^2 + 4y = 0$. $C(0, -2)$, $r = 2$.]

B. Elipsa

8. **Definiție.** *Elipsa este locul geometric al punctelor care au suma distanțelor la două puncte fixe constantă.*

Punctele fixe se numesc *focare* și se notează cu F și F'. Dacă M este un punct curent pe elipsă, distanțele FM, $F'M$ poartă numele de *raze vectoare*.

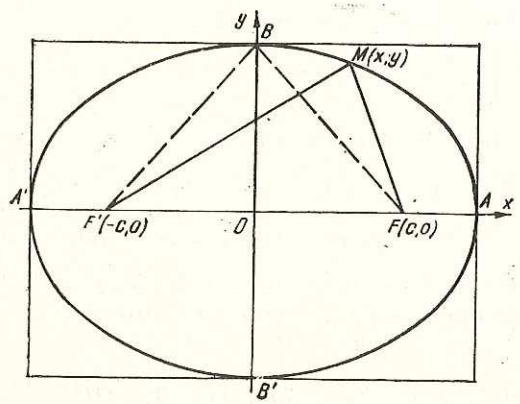


Fig. 34

Potrivit definiției, relația geometrică pe care o satisface punctul M este

$$MF + MF' = 2a \text{ (constant)}. \quad (13)$$

Pentru a găsi *ecuația elipsei* este de ajuns să transformăm analitic această relație. Alegem pe FF' ca axă Ox și mediatoarea segmentului FF' ca axă Oy (fig. 34). Se notează $FF' = 2c$,

prin urmare $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, iar punctul curent M are coordonatele (x, y). Relația (13) devine

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a. \quad (14)$$

Ecuația curbei trebuie dată însă sub formă rațională. De aceea izolăm un radical și ridicăm la pătrat. Obținem

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

sau, după reduceri de termeni și izolarea radicalului rămas:

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx. \quad (15)$$

Se ridică din nou la pătrat și se ordonează termenii. În acest fel se obține ecuația

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0. \quad (16)$$

În triunghiul MFF' se știe că $MF + MF' > FF'$ sau $2a > 2c$, deci $a > c$, astfel că $a^2 - c^2 > 0$. Se poate nota prin urmare

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad (17)$$

și împărțind în (16) cu a^2b^2 se capătă forma definitivă a ecuației elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (18)$$

Pentru a găsi punctele de intersecție ale curbei cu axele de coordonate facem pe rînd $y = 0$ și $x = 0$. Rezultă $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ pe Ox și $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ pe Oy. $AA' = 2a$ se numește axa mare a elipsei, iar $BB' = 2b$ axa mică. Jumătățile lor, adică $OA = a$ și $OB = b$ sînt semiaxele elipsei. Cînd $M \equiv B$ avem $BF = BF' = 2a$, dar $BF = BF'$, astfel că $BF = a$. Din triunghiul dreptunghic OBF se deduce

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (19)$$

care de fapt este relația (17) interpretată acum geometric.

9. *Forma elipsei.* Din ecuația (18) a elipsei se scoate

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \quad (20)$$

Vom studia numai ramura de curbă $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, pentru care $y \geqslant 0$. Cealaltă se deduce prin simetrie față de axa Ox.

Forma curbei rezultă din reprezentarea ei grafică. Domeniul de existență este dat de condiția $a^2 - x^2 \geqslant 0$, prin urmare $-a \leqslant x \leqslant a$, deci numai între A' și A. Deoarece în (18) x și y se găsesc la puteri pare, curba este simetrică atît în raport cu Ox cît și în raport cu Oy, deci și în raport

cu originea. De aici rezultă că este de ajuns să se studieze numai porțiunea de curbă cuprinsă în cadranul 1, adică între O și A. Derivata pentru funcția considerată [cu semnul (+)] este

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{21}$$

Pentru $x > 0$, y' este negativ deci curba descreşte; în plus $y'(0) = 0$ și $\lim_{x \to a} y'(x) = -\infty$, deci tangenta în B este paralelă cu Ox, iar cea din A paralelă cu Oy. Tabloul de variație rezumă acest studiu

x	0		a
$y'(x)$	0	$-$	$-\infty$
y	b	descreşte	0

Reprezentarea grafică este dată, cu completările din celelalte cadrane, în figura 34 și arată că toată curba este închisă în dreptunghiul format de paralelele la axe duse prin punctele A, A', B, B'. Aceste patru puncte poartă numele de *vîrfurile elipsei.*

Dacă $b = a$, elipsa *devine cerc*, iar *distanța focală este nulă.*

Ecuația elipsei apare sub forma simplă (18) fiindcă s-au ales ca axe de coordonate tocmai axele ei de simetrie. De aceea se zice că (18) reprezintă ecuația elipsei, raportată la axele ei.

În cazul cînd elipsa este raportată la axe dreptunghiulare oarecare, ecuația rămîne de gradul al II-lea, dar forma nu mai este simplă.

NOTĂ. Profităm de faptul că știm să efectuăm o translație de axe, pentru a arăta care este ecuația unei elipse raportate la axe paralele cu axele ei de simetrie. În adevăr, fie xOy un sistem de axe paralele cu axele elipsei și $x'Oy'$ sistemul de referință format din axele elipsei.

Translația de axe care aduce pe O în $O'(p, q)$ ne dă relațiile $x = p + x'$, $y = q + y'$. Ecuația elipsei, raportată la axele ei, este

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

prin urmare față de vechile axe xOy va fi

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b} - 1 = 0$$

unde (p, q) sînt coordonatele centrului O' al elipsei față de sistemul de axe xOy.

E x e m p l e. a) *Să se determine vîrfurile și semiaxele elipsei* $2x^2 + 4y^2 - 5 = 0$.

Ecuația se scrie $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} + \frac{y^2}{\frac{5}{4}} - 1 = 0$, din care se deduce $a = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Vîrfurile sînt $A\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$, $A'\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $B'\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) *Să se determine elementele elipsei* $3x^2 + 5y^2 + 9 = 0$. Din ecuația dată se deduce $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{9}{5}} + 1 = 0$ care seamănă cu ecuația elipsei, dar nu poate fi verificată pentru valori reale ale lui x și y, deoarece suma a trei numere pozitive nu poate fi nulă. Este o *elipsă imaginară*, lucru care se constată dacă vrem să aflăm semiaxele, intersectînd cu $y = 0$ și cu $x = 0$.

10. 1) *Construcția elipsei prin mișcare continuă.* Fie F, F' focarele elipsei de construit și $UV = 2a$ lungimea axei mari. Se înfig în foaia de hîrtie, și anume în F și F', două ace, apoi se trece peste ele un fir ale cărui capete s-au înnodat între ele, astfel ca lungimea totală a firului, după ce s-a făcut nodul, să fie $l = FF' + 2a$. Se întinde bine firul cu vîrful unui creion, apoi se mișcă vîrful M al creionului pe foaia de hîrtie (fig. 35). Curba desenată de vîrful creionului M este elipsa cu focarele F, F' și axa mare $2a$, deoarece $MF + MF' = l - FF' = 2a$.

În acest fel construiesc grădinarii ronduri eliptice de flori, înfigînd în pămînt doi țăruși peste care se trece o sfoară întinsă de un al treilea țăruș mobil care trasează pe teren elipsa.

2) *Construcția elipsei prin puncte. Metoda I.* Fie F, F' focarele elipsei. Desenăm separat un segment $UV = AA' = 2a$. Cu o deschidere de compas $VR < VU$ tragem un cerc cu centrul în F', iar cu raza RU un alt cerc cu centrul în F (fig. 36). Cele două cercuri se taie în două puncte M și M'

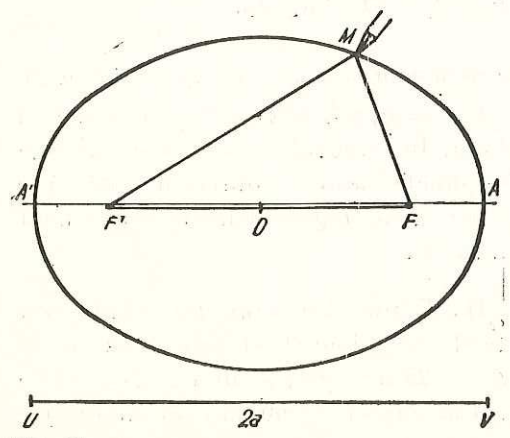


Fig. 35

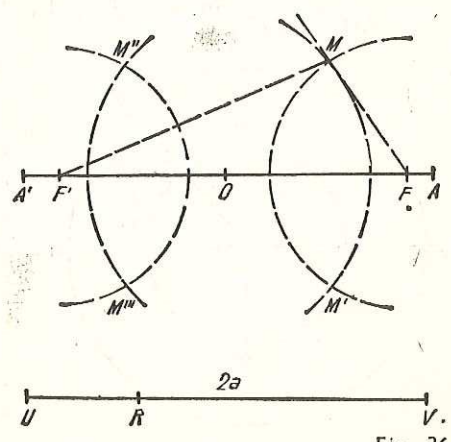


Fig. 36

(simetrice față de AA'), care aparțin elipsei, deoarece $MF + MF' = VR + RU = 2a$.

Schimbînd între ele centrele F și F', ale celor două cercuri, se obțin încă două puncte, simetrice cu primele față de BB'. Se găsesc astfel pentru fiecare punct $R \in UV$ cîte patru puncte ale elipsei. Construim atîtea puncte, cîte sînt necesare pentru a trage curba.

Observare. Dacă nu se cunoaște distanța focală FF', ci axa mare și axa mică, focarele se construiesc pe baza observării pe care am făcut-o că $BF = BF' = a$. Cercul cu centrul în B și cu raza a taie axa mare în punctele F, F', focarele elipsei. De aici încolo construcția se face ca mai înainte.

Metoda a II-a. Presupunem cunoscute axa mare și axa mică, dar nu mai folosim focarele. Să notăm cu y ordonata elipsei și cu Y ordonata cercului de rază a, avînd același centru ca și elipsa. Ținînd seama de relația (20) avem $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, însă din ecuația cercului rezultă $Y = \sqrt{a^2 - x^2}$, prin urmare se poate scrie

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}. \tag{22}$$

Să ducem acum cercurile concentrice cu razele a și b, apoi doi diametri perpendiculari, unul care taie cercul mare în A și A', al doilea care taie cercul mic în B și B' (fig. 37). Aceste patru puncte sînt vîrfurile elipsei.

O rază variabilă întîlnește cercul mic în P și pe cel mare în Q. Se duce prin P o paralelă la AA' și prin Q o paralelă $QN (N \in AA')$ la BB'. Fie M punctul lor comun. Teorema lui Thales ne dă

$$\frac{NM}{NQ} = \frac{OP}{OQ}, \text{ însă } NQ = Y,\ OP = b,\ OQ = a, \text{ deci } \frac{MN}{Y} = \frac{b}{a}.$$

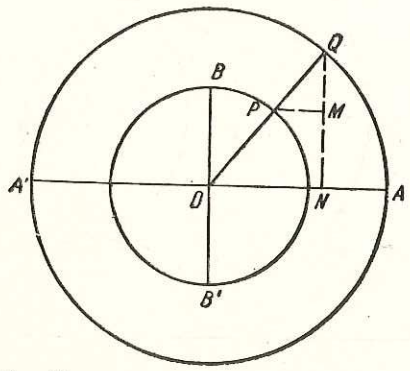


Fig. 37

Aceasta comparată cu relația (22) arată că $\overline{NM} = y$, adică M este un punct al elipsei. În acest fel se pot construi oricîte puncte vrem. Să observăm însă că la fiecare rază OQ obținem un singur punct M.

11. *Elipsa este proiecția unui cerc.* Cercul cu diametrul cît axa mare $AA' = 2a$ a elipsei se numește *cerc principal* al elipsei. Vrem să arătăm în cele ce urmează că *elipsa este proiecția cercului său principal pe un anumit plan*. Pentru aceasta să reluăm relația (22) pe care o punem sub forma $y = Y \cdot \frac{b}{a}$. Însă $\frac{b}{a} < 1$, deci se poate găsi un unghi α pentru care $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ și atunci $y = Y \cos\alpha$. Să ne închipuim că elipsa rămîne în planul ei, în timp ce rotim cercul său principal în jurul axei mari AA', cu unghiul α. Ordonata QN a cercului rămîne într-un plan perpendicular pe AA' și fie Q_1 noua poziție a lui Q și M proiecția lui Q_1 pe planul elipsei. (Se poate folosi figura 38, unde Q se va considera ca fiind Q_1). Prin urmare $\sphericalangle MNQ_1 = \alpha$ și $\overline{NM} = \overline{NQ_1}\cos\alpha = Y\cos\alpha = Y \cdot \frac{b}{a}$, cu alte cuvinte $\overline{NM} = y$, ordonata elipsei. Așadar ordonata elipsei este proiecția ordonatei cercului său principal, înclinat cu unghiul α, dat de $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, pe planul elipsei. Aceasta arată că punctele elipsei sînt proiecțiile punctelor de pe cerc, sau că elipsa însăși este proiecția cercului său principal.

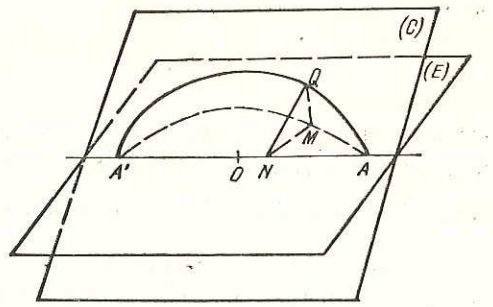


Fig. 38

Acest lucru se poate arăta și pe altă cale, analitică. Fie un cerc cu diametrul $AA' = 2a$ așezat într-un plan (C) (fig. 38). Prin AA' ducem un alt plan (E) și să notăm cu α unghiul lor diedru. Unghiul plan corespunzător unghiului diedru este format din două perpendiculare duse dintr-un punct al muchiei comune AA', una în planul (C) și una în planul (E). Fie Q un punct pe cerc, N proiecția lui pe AA' și M proiecția lui pe planul (E). Conform celor spuse mai înainte avem $\alpha = \sphericalangle QNM$.

În planul (C) punctul Q are coordonatele $X = \overline{ON}$ și $Y = \overline{NQ}$. În planul (E), punctul M are coordonatele $x = \overline{ON}$ și $y = \overline{NM} = \overline{NQ}\cos\alpha$. Deci

$$x = X;\ y = Y\cos\alpha \text{ sau } Y = \frac{y}{\cos\alpha}. \tag{23}$$

Coordonatele punctului Q trebuie să verifice ecuația cercului cu diametrul $AA' = 2a$, deci

$$X^2 + Y^2 - a^2 = 0.$$

Locul geometric al punctului M se află înlocuind pe X și Y în ecuația cercului, deci

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\alpha} - a^2 = 0,$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\cos^2\alpha}-1=0;$$

aceasta reprezintă o elipsă cu semiaxele a și $b=a\cos\alpha$. Deducem că: *elipsa este proiecția cercului său principal, așezat într-un plan care face cu planul elipsei un unghi* α *dat de relația* $\cos\alpha=\frac{b}{a}$.

12. *Ecuațiile parametrice ale elipsei.* În figura 37 să notăm $\sphericalangle NOQ=\theta$. Știm că punctul M aparține elipsei, dar coordonatele lui M sînt $x=\overline{ON}=OQ\cos\theta=a\cos\theta$ și $y=\overline{NM}=OP\sin\theta=b\sin\theta$. Prin urmare coordonatele parametrice ale elipsei sînt

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta. \tag{24}$$

Ca verificare, dacă se scot $\cos\theta$ și $\sin\theta$ și se introduc în relația fundamentală $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ se obține ecuația carteziană a elipsei.

Ținem să atragem atenția asupra unui lucru, anume că θ este unghiul făcut de raza cercului principal (OQ) cu axa mare a elipsei și în general este diferit de unghiul făcut de raza vectoare OM a elipsei cu axa mare, adică în general $\theta\neq\sphericalangle AOM$. Aceste două unghiuri sînt egale numai cînd M coincide cu A, B, A' sau B', deci pentru valorile $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$.

13. *Aria elipsei.* Am văzut că elipsa este proiecția cercului său principal pe un plan care face cu planul cercului unghiul dat de $\cos\alpha=\frac{b}{a}$. Aria cercului principal fiind πa^2, aria elipsei va fi aria cercului înmulțită cu cosinusul unghiului de proiecție adică

$$\mathcal{A}=(\pi a^2)\cos\alpha=\pi a^2\frac{b}{a}=\pi ab.$$

C. Hiperbola

13. Definiție. *Hiperbola este locul geometric al punctelor care au modulul diferenței distanțelor la două puncte fixe constantă.*

Punctele fixe se numesc focare și se notează în mod obișnuit cu F și F'. Dacă M este un punct curent al hiperbolei, MF și MF' poartă numele de raze vectoare. Conform definiției, relația geometrică pe care trebuie să o satisfacă punctul M este

$$|MF'-MF|=2a$$

sau

$$MF'-MF=\pm 2a\ (\text{const.}) \tag{25}$$

Ecuația locului geometric al punctului M se găsește transformînd analitic această relație geometrică. Se aleg axele de coordonate astfel: FF' ca axă Ox și mediatoarea lui FF' ca axă Oy (fig.39).

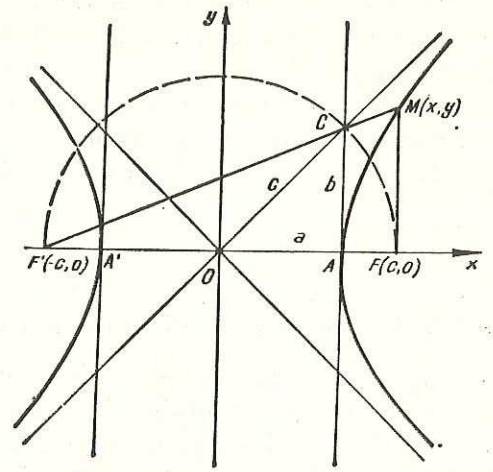


Fig. 39

Notăm, ca și la elipsă, $FF'=2c$, deci $F(c,0)$, $F'(-c,0)$.

$M(x,y)$ fiind punctul curent al locului geometric, relația (13) scrisă analitic este

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{25'}$$

Ecuația curbei trebuie adusă la formă rațională. Pentru aceasta trecem al doilea radical în partea a doua a ecuației și ridicăm la pătrat. Obținem

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2.$$

După reducerea termenilor asemenea și trecerea în prima parte a tuturor celor care nu conțin radicali, avem

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

O nouă ridicare la pătrat ne dă, după ordonarea termenilor

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2-a^2(c^2-a^2)=0. \tag{25''}$$

Este cazul să observăm aici că am obținut *exact aceeași ecuație* (16) *de la elipsă*, ceea ce rezultă imediat înmulțind cu (-1) și schimbînd semnele în paranteze.

Deosebirea vine din altă parte. Dacă la elipsă am avut $a>c$, la hiperbolă din triunghiul MFF' rezultă $FF'>|MF'-MF|=2a$, adică $c>a$ și atunci expresia c^2-a^2 este pozitivă. Prin urmare se poate nota

$$c^2-a^2=b^2 \tag{26}$$

și ecuația ((25)) devine, după împărțirea cu a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{27}$$

care este forma definitivă a ecuației hiperbolei.

Punctele de intersecție cu axele se obțin făcînd succesiv $y = 0$ și $x = 0$. Pe axa Ox avem $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$, iar pe axa Oy se constată că *nu avem puncte reale*, deci axa Oy nu taie hiperbola.

Pentru aceste motive AA' se numește *axa transversă*, iar A și A' sînt vîrfurile hiperbolei, pe cîtă vreme axa Oy este axa netransversă.

14. *Forma hiperbolei.* Din (27) se deduce

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \tag{28}$$

și este de ajuns să se studieze ramura $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, deoarece cealaltă se trage prin simetrie față de axa Ox. Ceva mai mult, dînd lui x valori egale și semne contrare se obține pentru y aceeași valoare; punctele căpătate astfel sînt simetrice față de Oy, prin urmare curba este simetrică și față de Oy.

De aceea este de ajuns să studiem curba în primul cadran și restul se construiește simetric față de ambele axe și față de origine.

Ne ocupăm deci numai de ramura

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \tag{28'}$$

care, pe partea pozitivă a axei Ox, are domeniul de existență dat de $x^2 - a^2 \geqslant 0$, adică $x \geqslant a$.

Asimptote. Se observă imediat că nu există asimptote paralele cu axele ($\lim_{x\to\infty} y = \infty$). Căutăm deci asimptotele oblice.

Avem $m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a}$;

$n = \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \frac{b}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0$, astfel că asimptota este $y = \frac{b}{a} x$. Ținînd seama de simetria curbei față de axe înseamnă că avem în total două asimptote, anume

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{29}$$

Acestea de fapt se deduc din ecuația hiperbolei (16) *dacă se lasă la o parte termenul liber*, adică

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{29'}$$

Derivata pentru ramura (8') este $y' = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, care pentru $x > 0$ rămîne mereu pozitivă, deci funcția este crescătoare. Avem apoi $\lim_{x\to a} y' = \infty$ care arată că tangenta în A este perpendiculară pe Ox și $\lim_{x\to\infty} y' = \frac{b}{a}$, care arată că există o dreaptă de coeficient unghiular $\frac{b}{a}$, care este tangentă hiperbolei în punctul de la infinit; aceasta este asimptota $y = \frac{b}{a} x$. Tabloul de variație se reduce deci la

x	a		$+\infty$
y'	∞	$+$ $+$	$+\frac{b}{a}$
y	0	crește	$+\infty$

Acum se poate construi bine curba, avînd grijă ca ramurile ei să se apropie necontenit de asimptote, cu tendința de a deveni tangentele lor la infinit. Forma hiperbolei este dată în figura 39.

Se atrage atenția că forma simplă (27) sub care se prezintă ecuația hiperbolei, se datorește faptului că este *raportată la axele ei de simetrie*. Cazul cînd sistemul de referință este oarecare depășește cadrul manualului.

O b s e r v a r e. Ecuația hiperbolei se capătă imediat din ecuația elipsei, dacă se înlocuiește b^2 prin $(-b^2)$. Aceasta înseamnă că semiaxa b se înlocuiește cu bi, unde $i^2 = -1$. Vom vedea în cele ce urmează că multe din proprietățile elipsei se transpun la hiperbolă prin această simplă înlocuire.

NOTĂ. Se poate arăta, ca și la elipsă și în mod cu totul asemănător, că dacă axele hiperbolei sînt paralele cu axele de coordonate, atunci ecuația hiperbolei este

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $O'(p, q)$ este centrul hiperbolei. Elevii pot face acest lucru ca un exercițiu de translație a axelor.

E x e m p l u. *Să se determine vîrfurile, focarele și asimptotele hiperbolei* $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$.

Se scrie hiperbola sub forma $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{8}{5}} - 1 = 0$, de unde rezultă imediat: $a^2 = 4$, $b^2 = \frac{8}{5}$, $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{28}{5}$. Prin urmare, vîrfurile sînt $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$ și focarele $F\left(2\sqrt{\frac{7}{5}}, 0\right)$, $F'\left(-2\sqrt{\frac{7}{5}}, 0\right)$. Ecuațiile asimptotelor se deduc ușor: $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}\, x$.

15. Pentru ca ecuațiile (18) și (27) să reprezinte în întregime locul geometric al punctelor care au *suma* sau *diferența* distanțelor la punctele fixe F, F' constantă, trebuie dovedit că *reciproc* orice punct M care satisface una sau alta din aceste ecuații aparține locului geometric respectiv, adică $MF + MF' = 2a$ = constant sau $|MF - MF'| = 2a$ = const.

Presupunem deci că $M(x_0, y_0)$ este un punct arbitrar *situat pe elipsa (E)*, *adică*

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0 \Rightarrow y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2). \tag{30}$$

Atunci

$$MF^2 = (x_0 - c)^2 + y_0^2 = x_0^2 - 2cx_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2 =$$

$$= \frac{c^2}{a^2}x_0^2 - 2cx_0 + a^2 = (a - \frac{c}{a}x_0)^2.$$

Dar la elipsă $\frac{c}{a} < 1$ și din (30) rezultă $|x_0| < a$ prin urmare $a - \frac{c}{a}x_0 > 0$, astfel că

$$MF = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = a - \frac{c}{a}x_0. \tag{31}$$

Schimbînd pe c în $(-c)$ se obține

$$MF' = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = a + \frac{c}{a}x_0 \tag{31'}$$

și prin adunare

$$MF + MF' = 2a.$$

Rezultă că oricare ar fi $M(x_0, y_0) \in (E)$, este satisfăcută relația de definiție a elipsei.

Pentru hiperbolă calculul este asemănător, dar trebuie ținut seama că de data aceasta avem

$c^2 = a^2 + b^2$ și $|x_0| > a$, deci $\frac{c}{a}x_0 - a > 0$. Se găsește

$$MF = \frac{c}{a}x_0 - a$$

$$MF' = \frac{c}{a}x_0 + a$$

de unde se deduce $|MF - MF'| = 2a$ și relația de definiție a hiperbolei este satisfăcută.

16. *Hiperbola echilateră raportată la axele ei* este un caz particular al hiperbolei, anume cazul cînd $b = a$. Ecuația hiperbolei echilatere este așadar

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0 \text{ sau } x^2 - y^2 = a^2. \tag{32}$$

Asimptotele se deduc imediat: $y = \pm x$, adică bisectoarele axelor de coordonate. Hiperbola echilateră are prin urmare asimptotele perpendiculare.

17. *Hiperbola echilateră raportată la asimptote.* Faptul că asimptotele hiperbolei echilatere sînt perpendiculare face ca ele să poată fi luate drept axe de coordonate. Desigur, ecuația capătă altă înfățișare, care trebuie neapărat cunoscută, fiindcă sub această formă intervine în unele fenomene fizice.

Considerăm prima bisectoare ca axă transversă (fig. 40), cu vîrfurile A_1, A'_1, deci $OA_1 = OA'_1 = a$ și focarele F_1, F_1', deci $OF_1 = OF'_1 = a\sqrt{2}$ ($c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$). Proiectînd pe axe, sub unghiul de 45°, obținem coordonatele vîrfurilor și ale focarelor

$$A_1\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$A'_1\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$F_1(a, a),\ F'_1\ (-a, -a).$$

Pentru a găsi ecuația hiperbolei echilatere scriem că punctul curent $M(x, y)$ satisface relația

$$MF_1 - MF'_1 = \pm 2a$$

care transformată analitic devine

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} -$$

$$- \sqrt{(x + a)^2 + (y + a)^2} = \pm 2a.$$

Se trece al doilea radical în partea a doua a ecuației, se ridică la pătrat și se reduc termenii asemenea. Se obține

$$\pm\sqrt{(x + a)^2 + (y + a)^2} =$$

$$= a + x + y.$$

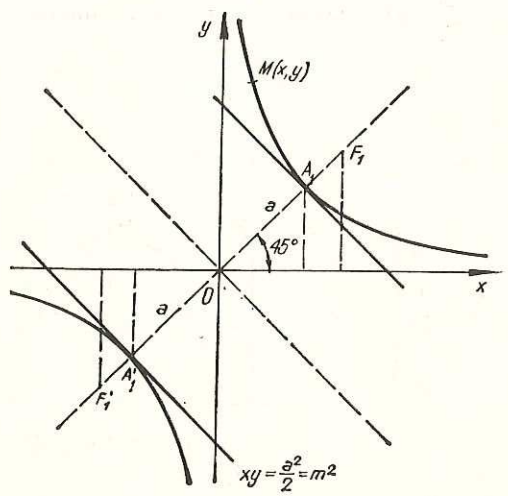


Fig. 40

O nouă ridicare la pătrat ne dă, după ce se fac reducerile,

$$xy = \frac{a^2}{2} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2. \qquad (33)$$

Aceasta este ecuația hiperbolei echilatere. Dacă se notează $\frac{a}{\sqrt{2}} = m$, ecuația hiperbolei echilatere se scrie

$$xy = m^2. \qquad (33')$$

Din această ecuație se deduce

$$y = \frac{m^2}{x}, \qquad (33'')$$

de unde se vede că y variază invers proporțional cu x. Toate mărimile aritmetice, geometrice, mecanice, fizice etc. care variază invers proporțional cu variabila de care depind, au ca reprezentare grafică hiperbole echilatere raportate la asimptote.

Exemple: *Laturile unui dreptunghi a cărui arie este constantă* $xy = a^2$, *legea lui Boyle-Mariotte* $pv =$ const. etc.

Hiperbola echilateră (33) au (33′) are vîrfurile pe prima bisectoare, în $A_1(m, m)$, $A(-m, -m)$; de fapt ea se obține din hiperbola raportată la axele de simetrie printr-o rotație de 45°, în sens trigonometric (fig. 40).

Dacă rotirea se face în sens invers, deci cu unghiul de (−45°), axa transversă este cea de-a doua bisectoare, iar ecuația hiperbolei are forma

$$xy = -m^2.$$

18. *Hiperbola conjugată.* Ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \qquad (34)$$

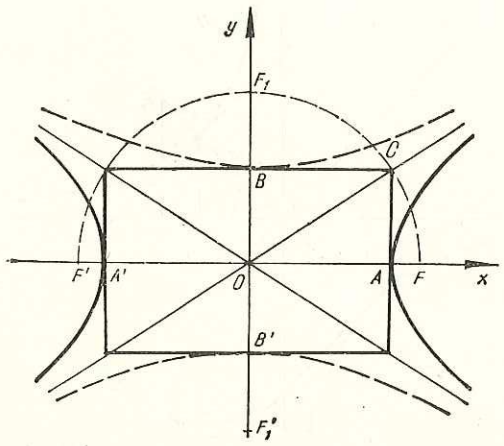


Fig. 41

reprezintă de asemenea o hiperbolă, care însă taie axa Oy în două puncte $B(0, b)$ și $B'(0, -b)$, dar nu taie axa Ox (fig. 41, hiperbola punctată). Prin urmare, de data aceasta *Oy este axa transversă* și *Ox axa netransversă.*

Hiperbola (34) și hiperbola studiată mai înainte

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (34')$$

au aceleași axe și aceleași asimptote $y = \pm \frac{b}{a} x$, însă (34) este așezată în unghiul asimptotelor care cuprinde axa Oy, adică acolo unde nu există nici un punct al hiperbolei (34′). Hiperbolele (34 și (34′) se numesc *hiperbole conjugate.*

19. 1) *Construcția unui arc de hiperbolă prin mișcare continuă.* Se presupun date focarele F, F' și lungimea $2a$ a axei transverse. Este evident că vîrfurile A, A' se pot fixa imediat, dar ele rezultă și prin trasarea ramurilor de hiperbolă.

Se ia o riglă și se fixează cu un capăt în F', astfel ca să se poată roti în jurul lui F'. Lungimea $F'E$ a riglei trebuie să fie mai mare decît FF'. Se ia apoi un fir de lungime l, astfel ca $l = F'E - 2a$ și se fixează un capăt al lui în F, iar celălalt la extremitatea E a riglei. Se întinde firul cu vîrful M al unui creion care se sprijină pe riglă (fig. 42). Rotind rigla în jurul focarului F', vîrful M al creionului descrie un arc de hiperbolă, deoarece

$$MF' - MF = EF' - (EM + MF) = EF' - l = 2a.$$

Schimbînd centrul de rotație al riglei în F și legînd al doilea capăt al firului în F', se obține în mod asemănător un arc din a doua ramură a hiperbolei.

2) *Construcția hiperbolei prin puncte.* Cînd vrem să figurăm prin puncte o hiperbolă trebuie să procedăm într-o anumită ordine, așa cum arătăm aici.

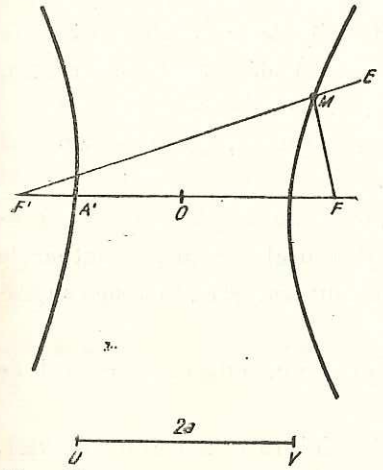


Fig. 42

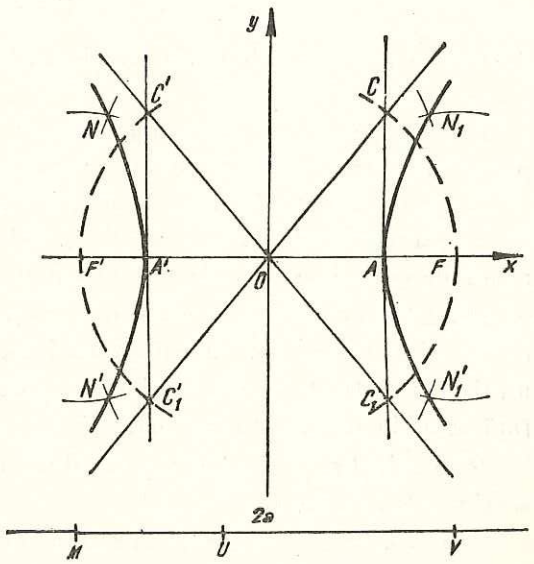


Fig. 43

a) Se așază vîrfurile A, A' și focarele F, F', care se presupun date ($AA' = 2a$, $FF' = 2c > 2a$).

b) Se desenează *asimptotele*. Pentru aceasta se duc în A și A' perpendicularele pe AA' (tangentele în A și A' la hiperbolă), apoi se descrie cercul cu centrul în O și cu raza $OF = c$, care taie cele două perpendiculare în C și C' (fig. 43). Avem $AC = b$, deoarece triunghiul dreptunghic OAC ne dă $AC^2 = OC^2 - OA^2 = c^2 - a^2 = b^2$.

Coeficientul unghiular al dreptei OC este $m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, deci OC este chiar asimptota hiperbolei. Rezultă următoarea construcție: se duce cercul cu centrul în O și cu raza $OF = c$, care taie tangentele la vîrfurile hiperbolei în patru puncte care formează un dreptunghi. Diagonalele acestui dreptunghi sînt asimptotele hiperbolei.

În particular la hiperbola *echilateră* $a = b$ și dreptunghiul devine pătrat; diagonalele, deci asimptotele, fac 45° cu axele.

c) După ce am așezat vîrfurile, focarele și am construit asimptotele, urmează să găsim și cîteva puncte, pentru a putea trasa curba.

Luăm separat o dreaptă și pe ea segmentul $UV = AA' = 2a$, apoi luăm un punct M pe dreaptă, în afara segmentului UV. Descriem un cerc cu raza MU și cu centrul în F', apoi un al doilea cerc cu raza MV și cu centrul în F. Aceste două cercuri se taie în două puncte N, N' simetrice față de Ox. Avem

$$NF - NF' = MV - MU = 2a,$$

deci N aparține hiperbolei. Simetricul său față de Ox aparține de asemenea hiperbolei.

Dacă se păstrează razele, dar se inversează centrele, se obțin încă două puncte ale curbei, simetrice cu cele precedente, față de Oy. Prin urmare, cu un singur punct M putem construi *patru* puncte ale curbei.

Trasarea hiperbolei este mult ajutată de asimptote, ținînd seama că ramurile curbei se apropie necontenit de ele.

20. *Elipsa și hiperbola* se obțin ca secțiuni făcute cu un plan într-o suprafață conică de rotație. Suprafața conică se obține prelungind generatoarele unui con la infinit, de o parte și de cealaltă a vîrfului, astfel că întreaga suprafață este simetrică față de vîrf.

Prin vîrful suprafeței conice să ducem un plan $P\varphi$, paralel cu planul de secțiune P în suprafața conică.

a) Dacă $P\varphi$ nu întîlnește suprafața conică în nici un punct afară de vîrf, secțiunea făcută de P în suprafața conică este o *elipsă*.

b) Dacă $P\varphi$ taie suprafața conică după două generatoare distincte, secțiunea făcută de P în suprafața conică este o *hiperbolă*. De aceea elipsa și hiperbola se mai numesc *secțiuni conice*, sau mai scurt *conice*. Deoarece ambele curbe au *centru de simetrie*, ele poartă numele de *conice cu centru*.

Această origine comună a celor două curbe, ca secțiuni conice, explică asemănarea proprietăților lor, pe care am constatat-o pînă aici și pe care o vom urmări și în cele ce urmează.

Exerciții și probleme

141. Să se găsească ecuația unei elipse avînd axele de coordonate ca axe de simetrie și trecînd prin punctele M (3, 4), N (6, 2). (C.d.p. I. Dumitriu).

[$a^2 = 45$; $b^2 = 20$.]

142. Să se găsească ecuația elipsei care trece prin punctul M (5, −3) și are axa mică egală cu $6\sqrt{2}$.

[$a^2 = 50$; $b^2 = 18$.]

143. Fie M un punct pe elipsa de semiaxe a și b, F_1 și F_2 focarele sale, iar O centrul său. Să se arate că avem relația:

$$MF_1 \cdot MF_2 + MO^2 = a^2 + b^2.$$

[Se pot folosi (31), (31'). Se poate pleca și de la relația de definiție a elipsei, se ridică la pătrat și se ține seama de teorema medianei.]

144. Se dă elipsa $(E) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și se notează cu (E_1) rezultatul înlocuirii lui x și y din (E) prin x_1 și y_1. Să se demonstreze că:

a) dacă $P(x_1, y_1)$ este interior elipsei, atunci $(E_1) < 0$;

b) dacă $P(x_1, y_1)$ este exterior elipsei, atunci $(E_1) > 0$.

[a) Se duce prin P o paralelă la Oy care taie elipsa în $Q(x_0, y_0)$. Avem $x_1 = x_0$, $y_1 < y_0$, deci $(E_1) < 0$. b) Același procedeu.]

145. Capetele A și B ale unui segment de lungime constantă alunecă pe două drepte perpendiculare. Fie M un punct fix al acestui segment. Se cere locul punctului M.

[Se ia OA ca axă Ox și se notează $\overline{AM} = b$, $\overline{MB} = a$. Locul este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Proprietatea se folosește la construcția elipsografului.]

146. Fie $\overline{MN}$ ordonata unui punct variabil pe un cerc cu centrul în origine și Q punctul care împarte această ordonată într-un raport constant $\frac{\overline{MQ}}{\overline{QN}} = k$. Se cere locul geometric al punctului Q.

[Elipsă.]

147. Să se afle ecuația hiperbolei, raportată la axele sale, știind că are axa transversă de 12 unități și trece prin punctul $M\ (8, \sqrt{7})$.

$[a^2 = 36;\ b^2 = 9]$

148. Să se găsească ecuația unei hiperbole, raportată la axele sale, știind că trece prin punctele $C\ (5\sqrt{2};\ 2\sqrt{5})$ și $D\ (45,\ 40)$

$[a^2 = 25,\ b^2 = 20.]$

149. Fiind dată hiperbola cu semiaxele a și b, cu focarele F_1 și F_2 și cu centrul O, să se arate că dacă M este un punct al curbei, avem relația:

$$OM^2 - MF_1 \cdot MF_2 = a^2 - b^2.$$

150. Se dă hiperbola $H = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ și se notează cu H_1 rezultatul înlocuirii în H a lui x, y prin x_1, y_1. Să se demonstreze că:

a) dacă $P\ (x_1,\ y_1)$ este în afara ramurilor hiperbolei, atunci $H_1 < 0$;

b) dacă $P\ (x_1,\ y_1)$ este interior uneia din ramurile hiperbolei, atunci $H_1 > 0$.

[a) Se duce prin P o paralelă la Ox, care taie hiperbola în $Q(x_0, y_0)$.

Avem $x_1 < x_0$, $y_1 = y_0$, deci $H_1 < \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$.

b) Același procedeu, sensul inegalităților se schimbă.]

151. Într-o hiperbolă echilateră, segmentul care unește centrul O cu un punct oarecare de pe curbă este medie proporțională între cele două raze vectoare FM, $F'M$ care unesc focarele cu punctul M, adică

$$OM^2 = FM \cdot F'M.$$

[Se va trata direct apoi ca particularizare a problemei precedente.]

152. Fie $x^2 - y^2 = a^2$ o hiperbolă echilateră. Să se arate că ordonata MN a unui punct M de pe această curbă este egală cu tangenta dusă din N la cercul descris pe axa transversă a curbei, ca diametru (C.d.p.)

D. Parabola

21. D e f i n i ț i e. *Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de o dreaptă fixă și de un punct fix. Dreapta fixă se numește* directoarea *parabolei, iar punctul fix,* focarul *parabolei.*

Pentru a găsi ecuația parabolei ne alegem întîi un sistem de referință, anume: perpendiculara din focarul F pe directoarea (D) ca axă Ox și paralela la (D) dusă la jumătatea distanței dintre **focar** și **directoarea** (D), ca

axă Oy. Notăm $A \equiv (D) \cap Ox$. Fie M un punct al parabolei și N proiecția lui pe directoare (fig. 44).

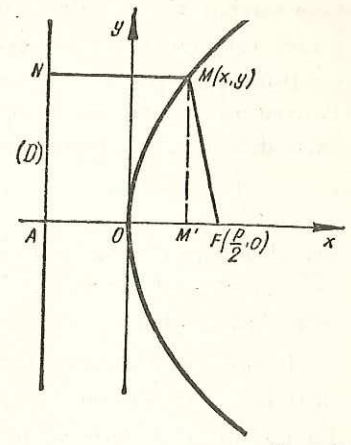


Fig. 44

Se obișnuiește să se noteze $AF = p$, de unde rezultă: $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ și $A\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$. MF se numește, ca și la elipsă sau hiperbolă, rază vectoare. Relația geometrică pe care o satisface punctul M se deduce din enunț

$$MF = MN. \tag{35}$$

Dacă $M\ (x,\ y)$ este un punct curent al parabolei, avem $MN = x - \left(-\frac{p}{2}\right) = x + \frac{p}{2}$, astfel încît (35) devine

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{35'}$$

Ridicînd la pătrat și trecînd toți termenii în prima parte se obține

$$y^2 - 2px = 0. \tag{36}$$

Elevii vor arăta, așa cum s-a făcut la elipsă și la hiperbolă, că reciproc, orice punct situat pe parabola $y^2 - 2px = 0$ satisface relația de definiție $MF = MN$.

Aceasta este ecuația parabolei, raportată la axele alese; p se numește *parametrul parabolei.*

O b s e r v a r e . Dacă s-ar schimba între ele A cu F, aceasta ar însemna să se înlocuiască p cu $(-p)$ și ecuația parabolei ar deveni

$$y^2 + 2px = 0. \tag{36'}$$

Parabolele (36) și (36') sînt dispuse simetric față de axa Oy.

22. *Forma parabolei.* Să notăm cu (Γ) parabola. Dacă $M\ (x_0,\ y_0) \in (\Gamma)$, adică verifică ecuația (36), este clar că și $M_1\ (x_0, -y_0)$ verifică ecuația, deci $M_1 \in (\Gamma)$. Însă M și M_1 sînt simetrice față de Ox, astfel că parabola are punctele simetrice față de Ox; prin urmare Ox (perpendiculara dusă din focar pe directoare) este axa de simetrie a parabolei. Acest lucru se poate constata și rezolvînd ecuația (36) în raport cu y; se obține $y = \pm\sqrt{2px}$ care reprezintă două ramuri de curbă, simetrice față de Ox. Originea O apar-

ține curbei și este singurul punct care coincide cu simetricul său. Acest punct este *vîrful parabolei*. Rezultă că axa Oy taie curba în două puncte confundate, deci este tangentă la parabolă și se numește *tangenta la vîrf*. Pentru a ne da seama de forma curbei, este de ajuns să studiem ramura așezată deasupra axei Ox

$$y = \sqrt{2px}; \tag{37}$$

restul se completează prin simetrie. Curba există pentru $x \geqslant 0$ și se observă că y crește odată cu x. Nu există nici un fel de asimptote. Forma curbei este dată în figura 44.

Parabola se obține, ca și elipsa sau hiperbola, prin secțiunea unei suprafețe conice cu un plan, însă de data aceasta planul trebuie să fie paralel cu un *plan tangent la suprafața conică*, de-a lungul unei generatoare. Așadar și parabola este o *secțiune conică*, însă *fără centru de simetrie*, sau mai scurt, *conică fără centru*.

Ecuația parabolei se prezintă sub forma simplă (36) datorită faptului că am ales axele în mod particular. Se zice că (36) este ecuația parabolei, *raportată la axa de simetrie și la tangenta la vîrf*.

Dacă parabola se raportează la alte axe, ecuația ei nu mai apare sub forma simplă (36).

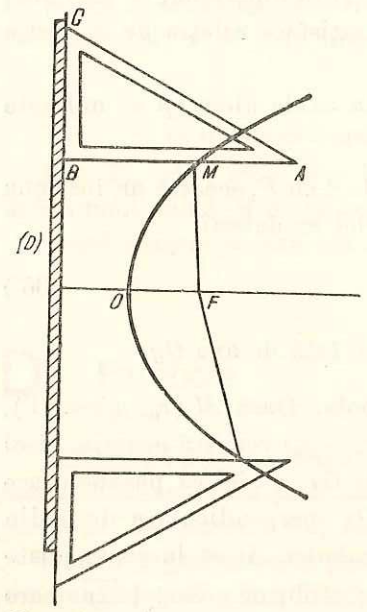


Fig. 45

23. 1) *Construcția unui arc de parabolă prin mișcare continuă.* Fie (D) directoarea și F focarul parabolei. Se așază o riglă L, astfel ca marginea ei să se suprapună dreptei (D) și un echer a cărui catetă mică BC se sprijină pe riglă. Un fir de lungime egală cu cateta mare AB a echerului se fixează cu un capăt în F și cu celălalt în vîrful A al echerului. Se întinde bine firul cu vîrful M al unui creion, care se sprijină pe cateta AB (fig. 45). Cînd echerul se deplasează, alunecînd cu cateta BC pe rigla L, punctul M descrie un arc de parabolă, deoarece $AM + MB = AM + MF$, adică $MB = MF$.

Răsturnînd echerul se descrie arcul de parabolă simetric față de perpendiculara dusă din F pe (D).

2) *Construcția parabolei prin puncte*

Metoda I. Cu vîrful compasului în F descriem un cerc cu raza r, apoi ducem o paralelă (Δ) la directoarea (D), la distanța r, de la A spre F (fig. 46). Punctele comune cercului și dreptei astfel construite aparțin parabolei deoarece sînt egal depărtate de directoare și de focar.

Metoda a II-a se desprinde din faptul că triunghiul FMN este isoscel. Se ia un punct N pe directoare, se duce prin N paralela NM la Ox, apoi mediatoarea segmentului NF, care întîlnește pe NM în M. Acesta este un punct al parabolei, deoarece $MN = MF$.

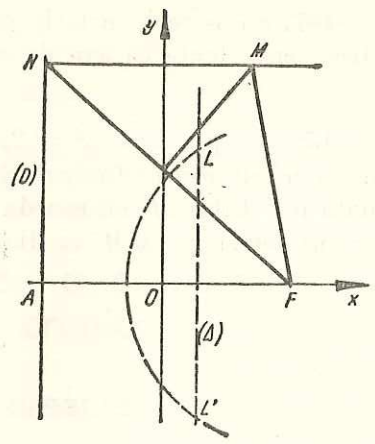


Fig. 46

Prima metodă dă deodată două puncte simetrice și se poate trage curba de ambele părți ale axei. Prin a doua metodă, la fiecare punct $N \in (D)$ se obține un singur punct M al parabolei. Vom vedea însă mai tîrziu că mediatoarea segmentului NF este chiar tangenta în M la parabolă, fapt care permite trasarea mult mai exactă a curbei în jurul punctului M.

Exerciții și probleme

153. Se dă un punct fix O și o dreaptă fixă (D). O dreaptă variabilă, care trece prin O, taie pe (D) în N. Se cere locul intersecției perpendicularelor în N pe (D) și în O pe ON.

[Se ia $Ox \perp (D)$ și $Oy \parallel (D)$; $y^2 - ax = 0$.]

154. Să se determine ecuația parabolei raportată la axă și la tangenta la vîrf, știind că trece prin punctul (2, 5).

[$2y^2 - 25x = 0$.]

155. Ce devine ecuația parabolei $y^2 - 3x = 0$, dacă se dă o translație a axelor astfel ca noua origine să fie punctul O' (3, 2)?

$$\left[y'^2 + 4y' - 3x' - 5 = 0 \text{ sau } x' = \frac{1}{3}y'^2 + \frac{4}{3}y' - \frac{5}{3}.\right]$$

156. Ce devine ecuația $y^2 + 6y - 8x + 17 = 0$, dacă se mută originea, prin translație, în punctul (1, −3)?

157. Să se scrie ecuația parabolei raportată la axa ei de simetrie și la directoare, luate ca axe de coordonate.

[$y^2 - 2px + p^2 = 0$.]

158. Pe parabola $y^2 = 2px$ se consideră punctul M avînd abscisa de două ori cît aceea a focarului și se duce coarda MM' simetrică față de ordonata punctului M, cu coarda OM, O fiind vîrful parabolei. Să se arate că cercul descris pe MM' ca diametru trece prin vîrf (C.d.p).

[Este suficient să se arate că $OM \perp OM'$.]

Capitolul 9

Intersecția unei conice cu o dreaptă. Intersecția a două cronice.

A. Intersecția unei conice cu o dreaptă

1. Am arătat în capitolul precedent că *elipsa* (caz particular *cercul)*, *hiperbola* și *parabola* se obțin ca secțiuni ale unui con de rotație cu un plan care, pentru fiecare curbă, îndeplinește anumite condiții. Pentru acest motiv ele poartă numele de *secțiuni conice* sau mai pe scurt *conice*. Cercul, elipsa și hiperbola sînt *conice cu centru*, fiindcă au centru de simetrie, iar parabola este *conică fără centru*.

A intersecta o conică cu o dreaptă înseamnă a găsi punctele care se află și pe conică și pe dreaptă, prin urmare coordonatele lor trebuie să verifice atît ecuația dreptei, cît și pe cea a conicei, adică să verifice un sistem de forma

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x,\ y) = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = mx + n \\ f(x,\ y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

unde $f(x, y) = 0$ reprezintă una oarecare din conice, deci în orice caz este o ecuație de gradul al II-lea. Dar un sistem alcătuit dintr-o ecuație de gr. I și una de gr. al II-lea are totdeauna *două soluții* care pot fi: a) *reale și distincte* și corespund la două puncte de intersecție reale și distincte; dreapta este secantă conicei; b) *confundate* în care caz dreapta taie conica în două puncte confundate, adică este tangent conicei; c) *complexe conjugate*: dreapta nu taie conica.

Punctele corespunzătoare se numesc și ele imaginar conjugate și au următoarele proprietăți: a) dreapta determinată de două puncte imaginar conjugate este reală; b) mijlocul segmentului determinat de două puncte imaginar conjugate este real.

În cele ce urmează ne vom ocupa de intersecția unei drepte cu fiecare conică în parte, pentru a determina condițiile în care ea este secantă, tangentă sau exterioară conicei respective.

2. *Intersecția unei drepte oarecare cu un cerc cu centrul în origine* este dată de sistemul

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0;\ y = mx + n. \tag{2}$$

Înlocuind pe y în prima ecuație obținem ecuația de gradul al II-lea

$$(1 + m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0 \tag{3}$$

care dă abscisele x_1, x_2 ale punctelor de intersecție. Ordonatele se obțin înlocuind pe x_1 și x_2 în expresia lui y din (2). Fără a rezolva ecuația (14) putem să ne dăm seama care este poziția dreptei față de cerc. În adevăr realizantul ecuației este

$$R = 4[m^2n^2 - (1 + m^2)(n^2 - r^2)] = 4[r^2(1 + m^2) - n^2]. \tag{4}$$

Sînt următoarele situații posibile:

— *Dacă* $R > 0$ rădăcinile sînt reale și dreapta taie cercul efectiv în două puncte distincte, deci este secantă cercului. Deoarece $r > 0$ trebuie să avem din (4)

$$r > \left| \frac{n}{\sqrt{1+m^2}} \right|. \tag{5}$$

Observînd că partea a II-a a inegalității este distanța de la origine la dreapta dată, rezultă că dreapta este secantă cercului dacă această distanță este mai mică decît raza; regăsim pe cale analitică un lucru cunoscut din geometrie.

— *Dacă* $R = 0$ rădăcinile sînt confundate și dreapta este tangentă cercului. Din (5) rezultă

$$r = \left| \frac{n}{\sqrt{1+m^2}} \right|, \tag{6}$$

deci raza trebuie să fie egală cu distanța de la centru (origine) la dreaptă, lucru știut din geometrie.

— *Dacă* $R < 0$ dreapta taie cercul în două puncte imaginare și este exterioară cercului. În acest caz $r < \left| \frac{n}{\sqrt{1 + m^2}} \right|$, adică raza este mai mică decît distanța de la centru la dreapta dată.

3. *Cazul general:* o dreaptă și un cerc oarecare, deci

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \quad \text{și} \quad y = mx + n. \tag{7}$$

Se poate proceda direct prin eliminarea lui y, dar în acest fel sînt necesare unele calcule care devin inutile dacă reducem problema la cea precedentă.

Pentru aceasta să dăm sistemului de axe o translație luînd ca nouă origine centrul cercului $C(a, b)$. Formulele, în care x', y' reprezintă noile coordonate, sînt

$$x = a + x',\ y = b + y'. \tag{8}$$

Sistemul (7) devine

$$x'^2 + y'^2 - r^2 = 0;\ y' = mx' + ma - b + n. \tag{8'}$$

Comparînd cu sistemul (2) singura deosebire este că n din ecuația dreptei este înlocuit cu $(ma - b + n)$.

Rezultă imediat

$$R = 4[r^2(1 + m^2) - (am - b + n)^2] \tag{9}$$

de unde cazurile care urmează.

Dacă $R > 0$, rădăcinile sînt reale și dreapta secantă cercului.

Din (9) se deduce condiția $r > \left| \frac{am - b + n}{\sqrt{1 + m^2}} \right|$, adică raza cercului trebuie să fie mai mare decît distanța de la centrul $C(a, b)$ la dreapta dată $mx - y + n = 0$.

Dacă $R = 0$, rădăcinile sînt confundate și dreapta este tangentă cercului. Condiția este

$$r = \left| \frac{am - b + n}{\sqrt{1 + m^2}} \right|,$$

adică raza egală cu distanța de la centru la dreaptă.

Dacă $R < 0$, rădăcinile sînt complexe și dreapta este exterioară cercului. Sensul inegalității fiind contrar primului caz, raza cercului trebuie să fie mai mică decît distanța de la centru la dreaptă.

Exemple. 1) *Se cer punctele de intersecție ale cercului* $x^2 + y^2 + x - y - 6 = 0$ *cu dreapta* $2x + 3y - 7 = 0$.

Din ecuația dreptei se scoate $y = \frac{7 - 2x}{3}$ care dus în ecuația cercului dă $13x^2 - 13x - 26 = 0$ sau $x^2 - x - 2 = 0$, cu rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, la care corespund $y_1 = 3$, $y_2 = 1$. Punctele căutate sînt $(-1, 3)$ și $(2, 1)$.

2) *Să se spună dacă dreapta* $3x + y - 25 = 0$ *este secantă cercului* $x^2 + y^2 - 65 = 0$ *și, în caz afirmativ, să se afle coordonatele punctelor de intersecție.*

Notînd cu r raza cercului și cu d distanța de la origine la dreaptă, avem

$$r^2 = 65;\ d = \frac{25}{\sqrt{10}},\ \text{deci}\ d^2 = \frac{625}{10} = 62{,}5,\ \text{de unde}\ r > d.$$

Dreapta este secantă. Coordonatele se află rezolvînd sistemul. Avem $y = 25 - 3x$, care dus în ecuația cercului ne dă $x^2 - 15x + 56 = 0$. Rădăcinile sînt $x_1 = 7$, $x_2 = 8$ și, înlocuindu-le în ecuația dreptei, găsim $y_1 = 4$, $y_2 = 1$.

Punctele de intersecție sînt: $(7, 4)$ și $(8, 1)$.

3) *Dreapta* $3x - 5y - 15 = 0$ *întîlnește cercul* $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$?

Elementele cercului sînt centrul $(-1, 3)$ și raza $r = \sqrt{1 + 9 + 15} = 5$. Distanța de la centru la dreapta dată este $d = \left|\frac{-3 - 15 - 15}{\sqrt{9 + 25}}\right| = \frac{33}{\sqrt{34}} > 5$.

Rezultă $d > r$ și dreapta este exterioară cercului.

4. Problemele care urmează se pot trata deodată pentru elipsă și hiperbolă, deoarece singura deosebire între ecuațiile celor două curbe este că b^2 se înlocuiește prin $(-b^2)$. Dacă însă am studia problemele numai pentru elipsă și le-am transpune fără demonstrație la hiperbolă, procedeul nu ar fi convingător, fiindcă nu se poate ști dinainte dacă simpla înlocuire a lui b^2 prin $(-b^2)$ duce totdeauna la rezultatul corect. Dacă am face studiul separat pentru fiecare curbă, atunci ar trebui să refacem multe calcule cu totul asemănătoare. De aceea vom face un studiu simultan pentru cele două curbe și în acest scop vom scrie ecuațiile lor concentrate în una singură:

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{10}$$

astfel că pentru $\varepsilon = +1$ se obține elipsa, iar pentru $\varepsilon = -1$ hiperbola.

5. *Intersecția elipsei sau hiperbolei cu o dreaptă.* Pentru a găsi coordonatele punctelor de intersecție ale elipsei sau hiperbolei cu dreapta $y = mx + n$ trebuie să rezolvăm sistemul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0; \quad y = mx + n. \tag{11}$$

Eliminînd numitorii în prima ecuație și înlocuind pe y din ecuația dreptei se capătă

$$\varepsilon b x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) - \varepsilon a^2b^2 = 0 \text{ sau}$$

$$(a^2m^2 + \varepsilon b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - \varepsilon b^2) = 0 \tag{12}$$

Această ecuație ne dă abscisele punctelor de intersecție ale dreptei cu elipsa, dacă se ia $\varepsilon = +1$ sau cu hiperbola, dacă se ia $\varepsilon = -1$. Ordonatele corespunzătoare se obțin din ecuația dreptei, înlocuind pe x cu valorile date de (12).

Discuție. Punctele de intersecție dintre dreapta dată și curba respectivă sînt reale, confundate sau imaginare după cum realizantul ecuației (12) este *pozitiv*, *zero* sau *negativ*. Notînd cu R realizantul, avem

$$R = 4a^4m^2n^2 - 4a^2(a^2m^2 + \varepsilon b^2)(n^2 - \varepsilon b^2) = 4a^2b^2[b^2 + \varepsilon(a^2m^2 - n^2)].$$

Dar semnul realizantului este același cu semnul expresiei

$$E = b^2 + \varepsilon(a^2m^2 - n^2)$$

care pentru elipsă ($\varepsilon = 1$) devine

$$E_e = a^2m^2 + b^2 - n^2, \tag{13}$$

iar pentru hiperbolă ($\varepsilon = -1$)

$$E_h = b^2 - a^2m^2 + n^2. \tag{14}$$

Cazul elipsei. a) *Dacă* $E_e > 0$, adică $|n| < \sqrt{a^2m^2 + b^2}$, punctele de intersecție sînt *reale* și *distincte*, iar dreapta este *secantă* elipsei.

b) *Dacă* $E_e = 0$ adică $n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$, dreapta taie elipsa în două puncte *confundate* și prin urmare este *tangentă* elipsei.

c) *Dacă* $E_e < 0$, deci $|n| > \sqrt{a^2m^2 + b^2}$, punctele de intersecție sînt imaginare și dreapta este *exterioară*.

Cazul hiperbolei. I. Presupunînd $a^2m^2 - b^2 < 0$, prin urmare $b^2 - a^2m^2 > 0$, avem totdeauna $E_h > 0$, deci dreapta $y = mx + n$ taie totdeauna hiperbola în două puncte *reale și distincte*, adică este secantă curbei.

Condiția de mai sus cere ca $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$; aceasta din punct de vedere geometric înseamnă că paralela dusă prin origine la dreapta dată este conținută în unghiurile asimptotelor, în care se află și ramurile hiperbolei. De aici concluzia: *orice paralelă la o dreaptă care trece prin origine și taie ramurile unei hiperbole este de asemenea o secantă a hiperbolei.*

II. Presupunem acum $a^2m^2 - b^2 > 0$. Putem avea următoarele situații:

a) Dacă $E_h > 0$, adică $n > \sqrt{a^2m^2 - b^2}$, punctele de intersecție sînt *reale* și dreapta este *secantă* hiperbolei.

b) Dacă $E_h = 0$, sau $n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$, punctele de intersecție sînt *confundate* și dreapta este *tangentă* hiperbolei.

c) Dacă $E_h < 0$, deci $|n| < \sqrt{a^2m^2 - b^2}$, punctele de intersecție sînt *imaginare* și dreapta nu taie hiperbola; ea este situată între cele două ramuri ale hiperbolei.

III. $a^2m^2 - b^2 = 0$, de unde $m = \pm\frac{b}{a}$. În acest caz ecuația (12) nu mai este de gradul al II-lea, ci de gradul I și nu mai există decît un singur punct de intersecție la distanță finită. Al doilea punct este la infinit (elevii vor demonstra că dacă în ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a \to 0$, una din rădăcini tinde către ∞). Dar $m = \pm\frac{b}{a}$ sînt coeficienții unghiulari ai asimptotelor hiperbolei. De aici proprietatea:

Orice paralelă la una din asimptotele hiperbolei taie curba într-un singur punct la distanță finită.

Pentru hiperbola echilateră discuția este aceeași cu specificarea că, deoarece $a = b$, expresia $a^2m^2 - b^2$ devine $a^2(m^2 - 1)$.

Exemple. a) *Să se afle punctele de intersecție ale elipsei* $\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$, *cu dreapta* $7x + 2y - 10 = 0$.

Din ecuația dreptei se scoate $y = \frac{10 - 7x}{2}$, care dus în ecuația elipsei dă $25x^2 - 70x + 48 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = \frac{6}{5}$, $x_2 = \frac{8}{5}$, la care corespund $y_1 = \frac{4}{5}$, $y_2 = -\frac{3}{5}$.

b) *Dreapta* $y = 2x + 7$ *este exterioară elipsei* $x^2 + 3y^2 - 9 = 0$.

În adevăr din ecuația elipsei se deduce $a^2 = 9$, $b^2 = 3$. Expresia $E_e = a^2m^2 + b^2 - n^2$ devine $E_e = 9 \cdot 4 + 3 - 49 = -10 < 0$, deci punctele de intersecție ale dreptei cu elipsa sînt imaginare.

c) *Să se determine punctele comune ale dreptei* $x - 2y + 4 = 0$ *cu hiperbola* $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

Din ecuația dreptei rezultă $x = 2y - 4$ care dus în ecuația hiperbolei dă

$$9(4y^2 - 16y + 16) - 16y^2 - 9 \cdot 16 = 0.$$

După reducerea termenilor asemenea și împărțirea cu 4 se obține $5y^2 - 36y = 0$, deci $y_1 = 0$ și $y_2 = \frac{36}{5}$ la care corespund $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{52}{5}$. Dreapta taie hiperbola în punctele $A'(-4, 0)$ — vîrful hiperbolei — și $P\left(\frac{52}{5}, \frac{36}{5}\right)$.

d) *Dreapta* $y = 2x - 8$ *este tangentă hiperbolei* $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} - 1 = 0$. *Să se afle punctul de contact.*

Înlocuind pe y în ecuația hiperbolei se obține

$36x^2 - 25 \cdot 4(x^2 - 8x + 16) - 25 \cdot 36 = 0$, care se împarte cu 4 și după ordonarea termenilor dă

$$16x^2 - 8 \cdot 25x + 25^2 = 0 \text{ sau } (4x - 25)^2 = 0.$$

Punctul de contact are coordonatele $\left(\frac{25}{4}, \frac{9}{5}\right)$.

6. *Intersecția parabolei cu o dreaptă.* Punctele comune parabolei cu dreapta $y = mx + n$ se găsesc rezolvînd sistemul

$$y^2 - 2px = 0; \quad y = mx + n. \tag{15}$$

Înlocuind pe y în prima ecuație se obține ecuația care dă abscisele

$$m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0. \tag{16}$$

Ordonatele se capătă înlocuind rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației (16) în ecuația dreptei.

Discuție. Realitatea punctelor de intersecție depinde de realizantul ecuației (16), care este

$$R = (mn - p)^2 - m^2n^2 = p(p - 2mn). \tag{17}$$

Presupunem $p > 0$, adică parabola îndreptată către x pozitiv. Putem avea următoarele cazuri:

a) $R > 0$, dacă $p > 2mn$. Rădăcinile sînt *reale* și distincte și dreapta este secantă *parabolei*.

b) $R = 0$, dacă $p = 2mn$. Rădăcinile sînt *confundate* și dreapta este *tangentă* parabolei.

c) $R < 0$, dacă $p < 2mn$. Rădăcinile sînt *complexe* și dreapta nu taie parabola, adică este *exterioară* ei.

Exemple. a) *Ce poziție are dreapta* $2x - 3y + 6 = 0$, *față de parabola* $y^2 - 6x$?

Eliminînd pe y se găsește $2x^2 - 15x + 18 = 0$, cu rădăcinile $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 6$. Din ecuația dreptei rezultă $y_1 = 3$, $y_2 = 6$. Dreapta taie deci parabola în punctele $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ și $(6, 6)$.

b) *Să se arate că dreapta* $x - 2y + 3 = 0$ *este tangentă parabolei* $y^2 - 3x = 0$.

Prin eliminarea lui y se obține ecuația $x^2 - 6x + 9 = 0$, cu rădăcina dublă $x = 3$. Punctul de tangență este $(3, 3)$.

c) *Să se arate că dreapta* $4x + 2y + 1 = 0$ *este exterioară parabolei* $y^2 - x = 0$.

În adevăr înlocuind pe $y = -\frac{4x + 1}{2}$ în ecuația parabolei se găsește ecuația $16x^2 + 4x + 1 = 0$, ale cărei rădăcini sînt complexe.

B. Intersecția a două conice

7. Ecuația unei conice fiind de gradul al II-lea, punctele de intersecție a două conice sînt date de un sistem de două ecuații în care fiecare ecuație este de gradul al II-lea; aceasta are în general *patru soluții*. Două conice au deci în general *patru puncte comune*: acestea pot fi toate *patru reale și distincte*, *două reale* distincte și *două confundate*, *două puncte duble*, două puncte reale și două imaginare etc.

În manualul de față, exceptînd cercul al cărui studiu se face pe ecuația generală, celelalte conice se studiază pe ecuații reduse, adică raportate la axele lor de simetrie. De aceea două astfel de conice nu se pot intersecta decît în puncte dispuse *simetric* față de una (cazurile parabolă-elipsă, parabolă-hiperbolă), sau față de ambele axe (elipsă-hiperbolă).

Un cerc însă dacă nu are centrul pe una din axe *poate intersecta* oricare din celelalte conice în 4, 3, 2 etc. puncte reale, fără ca acestea să prezinte simetrie față de axe.

Puncte de intersecție se găsesc efectiv rezolvînd sistemul format de cele două ecuații de gr. II. Cazul intersecției a două cercuri necesită însă o pre-

zentare separată pentru două motive: a) studiul cercului s-a făcut pe ecuația generală și b) apar unele particularități specifice cercurilor. Este tocmai ceea ce facem în cele ce urmează.

8. *Punctele de intersecție a două cercuri.* Cercurile date prin ecuațiile normale

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0;\ x^2 + y^2 + 2m'x + 2n'y + p' = 0 \quad (18)$$

Coordonatele punctelor comune trebuie să verifice ambele ecuații (18), deci și ecuația obținută prin scăderea lor, adică

$$2(m - m')x + 2(n - n')y + p - p' = 0, \quad (19)$$

care reprezintă o dreaptă.

Așadar sistemul (18) este echivalent cu sistemul format din *una din ecuațiile* (18) împreună cu ecuația de gradul I (19). Ca urmare două cercuri au două puncte de intersecție *reale*, *confundate* sau *imaginare*, după cum dreapta (19) este *secantă*, *tangentă* sau *exterioară* oricăruia din cele două cercuri date.

Din cele spuse mai sus rezultă că dreapta (19), pe care o notăm cu (Δ), trece prin punctele comune celor două cercuri:

a) dacă acestea sînt reale și distincte, (Δ) este *secanta* lor *comună*, b) dacă cercurile sînt tangente, (Δ) este tangenta lor comună, c) dacă cercurile sînt exterioare, (Δ) este exterioară ambelor cercuri.

Dreapta (Δ)se numește *axa radicală* a celor două cercuri și este perpendiculară pe linia care unește centrele lor*.

b) *Cercurile sînt date prin ecuațiile generale*

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0;\quad A'(x^2 + y^2) + B'x + C'y + D' = 0. \quad (20)$$

În acest caz ecuațiile se aduc la forma normală, împărțind respectiv cu A și cu A' și mai departe se procedează așa cum s-a arătat mai înainte.

Exemple. 1) *Se cer punctele comune cercurilor*

$$x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0;\quad x^2 + y^2 + y - 2 = 0.$$

Prin scăderea celor două ecuații se obține dreapta (axa radicală) $3x + y + 2 = 0$. Aceasta luată împreună cu oricare din cele două cercuri (de ex. cu primul) ne dă coorodonatele punctelor de intersecție: $A(0, -2)$ și $B\left(-\frac{9}{10}, \frac{7}{10}\right)$.

2) Să se afle punctele de intersecție ale cercurilor $2(x^2 + y^2) - 5x + 10y + 10 = 0$; $3(x^2 + y^2) + 2x - 4y - 23 = 0$. Scrise sub forma normală ecuațiile sînt

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + 5y + 5 = 0;\ x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{23}{3} = 0.$$

Prin scădere se obține (axa radicală) $x - 2y - 4 = 0$, din care se scoate $x = 2y + 4$. Introdus în oricare din cele două cercuri se obține: $5y^2 + 16y + 11 = 0$, cu rădăcinile

* Elevii vor demonstra proprietatea.

$y_1 = -1$; $y_2 = -\frac{11}{5}$, la care corespund $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{2}{5}$. Punctele de intersecție ale cercurilor sînt $(2, -1)$ și $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

Exerciții și probleme

159. Se cere poziția fiecăreia din dreptele: $3x + 4y - 35 = 0$, $4x - 3y + 20 = 0$; $12x - 5y - 78 = 0$, față de cercul cu centrul în origine și cu raza $r = 6$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție reale.

[Secanta: $M\left(\frac{-16 + 6\sqrt{5}}{5}, \frac{12 + 8\sqrt{5}}{5}\right)$, $N\left(\frac{-16 - 6\sqrt{5}}{5}, \frac{12 - 8\sqrt{5}}{5}\right)$.

Tangenta: $T\left(\frac{72}{13}, -\frac{30}{13}\right)$.]

160. Să se afle intersecția cercului $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 80 = 0$ cu dreapta $4x + 3y - 70 = 0$.

[Dreapta este tangentă în (10, 10).]

161. Să se spună dacă cercul cu centrul în $C(4, 0)$, tangent dreptei $4x + 3y - 6 = 0$ taie sau nu dreapta $4x - 3y - 6 = 0$.

[Este tangent și la a doua dreaptă. Se calculează distanța de la C la drepte.]

162. Ce poziție are dreapta $(1 - \lambda^2)x - 2\lambda y + 2(1 + \lambda^2) = 0$ față de cercul cu centrul în origine și cu raza $r = 2$?

[Tangentă.]

163. Să se scrie ecuațiile tangentelor la cercul $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$, perpendiculare pe dreapta $12x + 5y - 50 = 0$.

[Se determină λ astfel ca distanța de la centrul cercului la dreapta $5x - 12y + \lambda = 0$ să fie egală cu raza. Două soluții: $5x - 12y - 49 = 0$; $5x - 12y + 29 = 0$.]

164. Să se găsească ecuația secantei paralele cu dreapta $x - 2y = 0$, care determină în cercul $x^2 + y^2 - 8x = 0$, o coardă $MN = 2$.

[$x - 2y - 4 \pm 5\sqrt{3} = 0$.]

165. Să se calculeze lungimea coardei determinată de dreapta $4x + 3y - 8 = 0$, în cercul cu centrul $C(2, 1)$ tangent dreptei $5x - 12y + 15 = 0$.

[Se calculează distanța de la centru la coardă și se folosește teorema lui Pitagora. *Altfel*: Se caută M și N intersecțiile cercului cu dreapta, apoi se calculează MN; $MN = 1{,}6$.]

166. Să se scrie ecuația cercului cu raza $r = 2$, tangent axei Ox și dreptei $3x + 4y - 24 = 0$.

[Patru soluții: $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$; $x^2 + y^2 - \frac{52}{3}x - 4y +$

$+ \frac{679}{9} = 0$; $x^2 + y^2 - 28x - 4y + 196 = 0$; $x^2 + y^2 - \frac{44}{3}x - 4y + \frac{484}{9} = 0$. Se notează centrul $C(\alpha, \beta)$ și fiind tangent la Ox rezultă $\beta = \pm 2$; se scrie apoi că distanța de la centru la dreapta dată este ± 2.]

167. Să se determine mulțimea cercurilor care trec prin origine și prin punctul $A(2, 1)$ și care au cu dreapta $x - y - 2 = 0$ două puncte de intersecție, distincte.

$\left[x^2 + y^2 + 2mx - (4m + 5)y = 0, \text{ unde } m \in \left(-\infty, \frac{7}{2} - 2\sqrt{5}\right) \cup \left(\frac{7}{2} + 2\sqrt{5}, +\infty\right)\right]$

168. Se cere ecuația cercului cu centrul în $\omega(-2, 5)$ și tangent cercului $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.

[Se scrie că suma sau diferența razelor este egală cu distanța centrelor. Două soluții.]

169. Să se determine punctele de intersecție dintre elipsa $x^2 + 3y^2 - 27 = 0$ și dreapta $x - y - 3 = 0$.

$\left[(0, -3) \text{ și } \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right).\right]$

170. Să se ducă în elipsa $x^2 + 4y^2 = 9$ o coardă al cărui mijloc să fie punctul $M(2, 1)$. (C.d.p.).

[Se duce dreapta $y - 1 = \lambda(x - 2)$, care taie elipsa în două puncte astfel ca $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2$, de unde se scoate λ.]

171. Să se determine ecuația unei drepte înclinate cu 60° față de axa Ox, care să determine în hiperbola echilateră $x^2 - y^2 = a^2$ o coardă de lungime $2a\sqrt{2}$ (S.G.M. VI).

$[y = \sqrt{3}x \pm 2a.]$

172. O dreaptă paralelă la axa netransversă a unei hiperbole taie o asimptotă a ei în M, o ramură a hiperbolei în N și axa transversală în P. Să se arate că avem $PM^2 - PN^2 = \text{const.}$ cînd dreapta variază (C.d.p.).

173. O paralelă (Δ) la axa netransversă taie o hiperbolă în punctele M și N. Paralelele la una din asimptote, duse prin M și N, taie axa netransversă, respectiv în P și Q. Să se demonstreze că produsul $OP \cdot OQ = \text{const.}$, atunci cînd ($\Delta$) variază.

[Constanta este b^2.]

174. Să se găsească un punct M pe elipsa $\frac{x^2}{369} + \frac{y^2}{144} - 1 = 0$, așa fel ca razele vectoare să fie perpendiculare.

[$M(x_0, y_0)$. Condiția de perpendicularitate duce la $x_0^2 + y_0^2 = 225$, deci M trebuie să fie pe acest cerc și pe elipsă. Patru puncte: $x = \pm \frac{9\sqrt{41}}{5}$, $y = \pm \frac{48}{5}$.]

(*) 175. Să se trateze problema de mai sus în cazul general și să se găsească condiția ca să existe soluții. Cum se pot construi grafic cele patru puncte? Să se deducă și pe cale geometrică condiția ca să existe soluții.

Pentru ce fel de elipsă avem numai două soluții și care sînt ele?

[Condiția este $c > b$. Dacă $c = b$, deci $a = b\sqrt{2}$, numai două soluții.]

176. Să se determine ecuația unei parabole raportată la axa de simetrie și la tangenta la vîrf, știind că este tangentă dreptei $3x - 2y + 4 = 0$. Să se afle punctul de tangență.

$\left[y^2 - 12x = 0; \quad T\left(\frac{4}{3}, 4\right).\right]$

177. Să se găsească ecuația parabolei raportată la axă și la tangenta la vîrf, știind că tangenta paralelă cu dreapta $5x - 4y - 2 = 0$ trece prin punctul A (4, 7).

$[y^2 - 10x = 0.]$

178. Să se determine paralela la prima bisectoare, care determină în parabola $y^2 - 2px = 0$, o coardă de lungime $2p$.

$\left[y = x + \frac{p}{4}.\right]$

179. Să se cerceteze dacă cercurile

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 9 = 0$; $4(x^2 + y^2) - 10x + 11y - 12 = 0$

au puncte comune și să se precizeze poziția lor relativă.

[Nu se intersectează. Cercul al doilea este interior primului.]

180. Se cer punctele de intersecție ale cercurilor

$5(x^2 + y^2) - 20x + 10y - 96 = 0$; $5(x^2 + y^2) - 4x + 18y - 32 = 0$.

$\left[\text{Cercurile sînt tangente în } T\left(-\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}\right).\right]$

181. Aceeași problemă pentru cercurile

$x^2 + y^2 - 3x + 9y - 20 = 0$; $2(x^2 + y^2) - 5x + 22y - 49 = 0$.

[Axa radicală $x + 4y - 9 = 0$. Punctele comune: $A(1, 2)$; $B(5, 1)$.]

182. Să se determine punctele de intersecție dintre cercul $x^2 + y^2 - 18x + 16 = 0$ și parabola $y^2 - 8x = 0$.

[(2, 4), (2, −4), (8, 8), (8, −8).]

Capitolul 10

Probleme de tangenţă

A. Tangente cu direcţia dată

1. a) *Cercul cu centrul în origine.* Condiţia ca dreapta $y = mx + n$ să fie tangentă cercului $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, este ca să-l taie în două puncte confundate. Înlocuind pe y în ecuaţia cercului se obţine ecuaţia de gr. II al cărui realizant este dat, în capitolul 9, de relaţia (4). Prin urmare pentru ca $R = 0$ trebuie să avem

$$n = \pm r\sqrt{1 + m^2}.$$

Dacă m este dat, atunci rezultă că avem două valori pentru n şi deci două tangente de direcţie dată, anume

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}. \tag{1}$$

Dacă ne interesează şi *punctele de contact*, acestea ştim că se află pe diametrul perpendicular pe direcţia tangentei, deci de coeficient unghiular $\left(-\frac{1}{m}\right)$. Prin urmare punctele de contact se pot găsi intersecînd fiecare din cele două drepte cu $y = -\frac{1}{m}x$, adică rezolvînd sistemele

$$y = -\frac{1}{m}x;\ y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}. \tag{2}$$

Observare. Punctele de contact s-ar putea obţine şi altfel, de pildă: a) intersectînd cercul cu fiecare tangentă, ceea ce revine la a rezolva două sisteme de gradul al II-lea; b) intersectînd cercul cu perpendiculara pe direcţia tangentei, deci $y = -\frac{1}{m}x$, ceea ce revine la a rezolva un sistem de gradul al II-lea cu rădăcini distincte.

Metoda pe care am dat-o în manual este mai simplă fiindă reduce problema la sisteme de gradul I. În plus are avantajul că aflarea tangentelor şi a punctelor de contact constituie probleme independente.

b) *Centrul cercului este* $\omega(a, b)$, deci ecuaţia cercului este

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0. \tag{3}$$

Să mutăm axele, printr-o translaţie, cu originea în ω. Formulele sînt $x = a + x'$, $y = b + y'$ şi ecuaţia cercului devine

$$x'^2 + y'^2 - r^2 = 0. \tag{3'}$$

Dreapta $y = mx + n$ prin translaţie nu-şi schimbă direcţia, prin urmare coeficientul unghiular m rămîne acelaşi. În aceste condiţii tangentele la cercul (3'), cu direcţia dată de m, sînt

$$y' = mx' \pm r\sqrt{1 + m^2}. \tag{4}$$

Revenind la vechile axe avem $x' = x - a$, $y' = y - b$, deci tangentele la cercul (3) sînt

$$y - b = m(x - a) \pm r'\sqrt{1 + m^2}. \tag{4'}$$

Punctele de contact se află intersectînd fiecare tangentă cu perpendiculara dusă din centrul cercului pe ea, adică rezolvînd sistemele:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2};\ y - b = -\frac{1}{m}(x - a). \tag{5}$$

Din felul cum se scriu tangentele paralele cu o dreaptă dată se desprinde că este necesar să determinăm centrul şi raza cercului.

E x e m p l u. *Să se scrie tangentele la cercul* $x^2 + y^2 - 3x + 6y + 9 = 0$, *înclinate la* $60°$ *pe axa* Ox.

Centrul cercului este $\omega\left(\frac{3}{2}; -3\right)$ şi raza $r = \sqrt{\frac{9}{4} + 9 - 9} = \frac{3}{2}$. Coeficientul unghiular al dreptei: $m = \sqrt{3}$. Ecuaţiile tangentelor rezultă: $y + 3 = \sqrt{3}\left(x - \frac{3}{2}\right) \pm \frac{3}{2}\sqrt{1 + 3}$, deci separîndu-le avem

$$2\sqrt{3}x - 2y - 3\sqrt{3} = 0 \text{ şi } 2\sqrt{3}x - 2y - 3(4 + \sqrt{3}) = 0.$$

Punctele de contact se găsesc intersectînd fiecare tangentă cu $y + 3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{2}\right)$. Se găsesc $T_1\left[\frac{3}{4}(2 + \sqrt{3}), -\frac{15}{4}\right]$ şi $T_2\left(\frac{3}{4}(2 - \sqrt{3}), -\frac{9}{4}\right]$.

2. *Elipsa.* Condiţia ca dreapta $y = mx + n$ unde m este dat să fie tangentă elipsei, adică să o taie în două puncte confundate este (9, § 5, cazul (b): $E_e = a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$, adică,

$$n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

de unde rezultă $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$. (6)

Luînd pe rînd semnul (+), apoi (−) se vede că cele două tangente paralele sînt *simetrice* față de centrul elipsei, deoarece taie axa Oy în două *puncte simetrice*.

Să se observe că fiind dat m, totdeauna există două tangente la elipsă, avînd coeficientul unghiular m, deoarece $a^2m^2 + b^2 > 0$.

Dacă $a = b = r$ regăsim ecuațiile tangentelor la cerc, cu o direcție dată, cînd centrul cercului este în origine.

Tangentele de direcție date, la hiperbolă. Tot la cap. 9, § 5, am găsit condiția ca dreapta $y = mx + n$ să fie tangentă hiperbolei, anume $E_h = b^2 - a^2m^2 + n^2 = 0$, de unde $n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$. Înlocuind în ecuația dreptei, se găsesc ecuațiile tangentelor care au direcția dată de coeficientul unghiular m:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}. \tag{7}$$

Ca și la elipsă, ele sînt simetrice față de centrul hiperbolei.

În particular dacă $a = b$ obținem ecuațiile tangentelor, cu direcția dată de m, la hiperbola echilaterală:

$$y = mx \pm a\sqrt{m^2 - 1}. \tag{7'}$$

Spre deosebire de elipsă și cerc, la hiperbolă nu se pot duce tangente paralele cu orice dreaptă, deci pentru orice m. În adevăr pentru ca tangentele să fie reale trebuie ca $a^2m^2 - b^2 > 0$, deci

$$m < -\frac{b}{a} \text{ sau } m > \frac{b}{a}. \tag{8}$$

Prin urmare, trebuie ca direcția tangentei să facă cu axa Ox un unghi mai mare (în valoare absolută) decît al asimptotei.

Altfel spus, *o paralelă dusă prin centrul hiperbolei*, la o tangentă oarecare a curbei, este exterioară unghiului asimptotelor care cuprinde axa Ox, deci nu *întîlnește curba*.

Exemple. a) *Să se scrie ecuațiile tangentelor cu direcția dată de* $m = \frac{1}{2}$ *la elipsa* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$. *Să se afle coordonatele punctelor de contact.*

Avem $n = \pm\sqrt{9 \cdot \frac{1}{4} + 4} = \pm\frac{5}{2}$. Ecuațiile tangentelor sînt $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ și $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ sau $x - 2y + 5 = 0$ și $x - 2y - 5 = 0$.

Intersectînd elipsa cu fiecare din cele două drepte se găsesc punctele de contact $T\left(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$, $T'\left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$.

b) *Tangentele la elipsă paralele cu a doua bisectoare sînt:*

$$y = -x \pm \sqrt{a^2 + b^2} \text{ sau } x + y \pm \sqrt{a^2 + b^2} = 0.$$

c) *Tangentele la hiperbolă paralele cu prima bisectoare sînt:*

$$y = x \pm \sqrt{a^2 - b^2} \text{ sau } x - y \pm \sqrt{a^2 - b^2} = 0.$$

Astfel de tangente nu există decît la hiperbolele care au $a > b$, deci unghiul asimptotelor, în care este situată hiperbola, este mai mic decît 90°.

3. *Parabola.* Pentru ca dreapta $y = mx + n$ să fie tangentă parabolei $y^2 - 2px = 0$, trebuie îndeplinită condiția [9, § 6] ca $p - 2mn = 0$, adică

$$n = \frac{p}{2m}.$$

Rezultă că la parabolă se poate duce o *singură tangentă* cu direcția dată de coeficientul unghiular m și aceasta este

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \tag{9}$$

Iată o deosebire față de conicele cu centru, la care se pot duce *două* tangente cu direcția dată.

Exemplu. *Să se scrie ecuațiile tangentelor la parabolă, paralele cu bisectoarele axelor.*

Facem pe rînd în (9) $m = 1$ și $m = -1$ și obținem

$$y = x + \frac{p}{2}; \quad y = -x - \frac{p}{2}.$$

B. Tangenta într-un punct al unei conice

4. *Tangenta într-un punct al unei curbe oarecare*

Reamintim din analiza matematică interpretarea geometrică a derivatei unei funcții: derivata unei funcții $y = f(x) : X \to R$ în punctul de abscisă $x_0 \in X$ este *tangenta trigonometrică* a unghiului α format de tangenta geometrică în punctul corespunzător M la curbă, cu axa Ox. În limbaj analitic vom spune mai scurt: *derivata funcției calculată în punctul* M (pentru $x = x_0$) *este coeficientul unghiular al tangentei în* M *la curbă* (fig. 47).

Dacă notăm $y'_0 = f'(x_0)$, atunci

$$m = y'_0 = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha \tag{10}$$

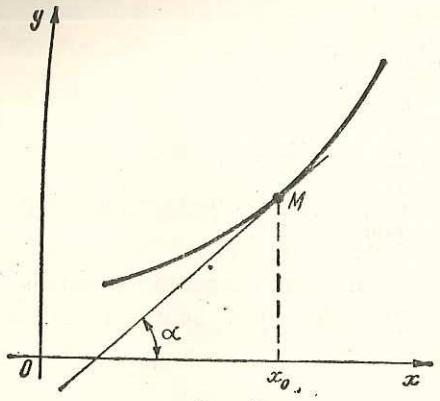


Fig. 47

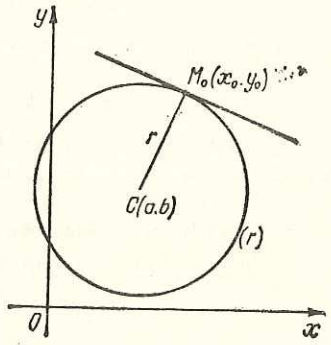


Fig. 48

Ecuația tangentei în M la curbă se va scrie ca dreapta care trece prin $M(x_0, y_0)$ și are direcția cunoscută $m = y_0'$, deci

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) \tag{11}$$

cu condiția $y_0 = f(x_0)$.

Cînd se scrie ecuația tangentei trebuie scrisă imediat și condiția ca punctul să se găsească pe curbă. *Altfel* (11) *nu mai reprezintă tangenta la curbă.*

Exemplu. *Să se scrie ecuația tangentei la curba* $y = \dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$, *în punctul* $M(-1, 0)$.

Punctul se află pe curbă. Derivata $y' = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x-1)^2}$, pentru $x = -1$ ne dă $y'_M = -\dfrac{3}{2}$, deci ecuația tangentei este

$$y = -\frac{3}{2}(x + 1) \quad \text{sau} \quad 3x + 2y + 3 = 0.$$

Ca verificare sistemul format de ecuația curbei și a tangentei trebuie să aibă o soluție dublă ($x = -1$).

5. *Tangenta într-un punct al unui cerc.* Considerăm cercul (Γ) dat prin centrul său $C(a, b)$ și raza r (fig. 48), deci avînd ecuația

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Dacă $M_0(x_0, y_0) \in (\Gamma)$, atunci trebuie ca

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0. \tag{12}$$

Pentru coeficientul unghiular al tangentei în M_0 scoatem din ecuația cercului

$$(y - b)^2 = r^2 - (x - a)^2$$

și derivăm în ambele părți în raport cu x:

$$2(y - b)y' = -2(x - a) \Rightarrow y' = -\frac{x - a}{y - b}.$$

Prin urmare coeficientul unghiular este $y_0' = -\dfrac{x_0 - a}{y_0 - b}$ și ecuația tangentei

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}(x - x_0) \text{ cu condiția (12).}$$

Ecuația se mai scrie sub forma

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

Aceasta se transformă, observînd că

$$x - x_0 = x - a - (x_0 - a) \text{ și } y - y_0 = y - b - (y_0 - b)$$

și se obține

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) - (x_0 - a)^2 - (y_0 - b)^2 = 0.$$

Ținînd seama de relația de condiție (12), ecuația tangentei în M_0 este

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) - r^2 = 0 \tag{13}$$

cu condiția $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$.

Ecuația (13) se ține minte foarte ușor dacă se scrie ecuația cercului cu termenii *dedublați*;

$$(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) - r^2 = 0,$$

apoi primele paranteze din cele două produse le lăsăm așa cum sînt, iar în celelalte înlocuim x și y prin x_0 și y_0. Se zice că ecuația tangentei se obține din ecuația cercului *prin dedublare.*

Dacă cercul are *centrul în origine*, atunci $a = b = 0$ și ecuația tangentei devine

$$xx_0 + yy_0 - r^2 = 0 \text{ cu condiția } x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0. \tag{14}$$

Să considerăm acum cazul cînd ecuația cercului este dată sub forma normală

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0.$$

Dezvoltînd parantezele din (13) și grupînd convenabil termenii se poate scrie tangenta sub forma

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Însă știm că $a = -m$, $b = -n$ și $a^2 + b^2 - r^2 = p$; ecuația tangentei devine

$$xx_0 + yy_0 + m(x + x_0) + n(y + y_0) + p = 0 \tag{15}$$

cu condiția

$$x_0^2 + y_0^2 + 2mx_0 + 2ny_0 + p = 0.$$

Să se observe că $(x + x_0)$ și $(y + y_0)$ au drept coeficienți *jumătățile* coeficienților lui x și y din ecuația normală a cercului. Ecuația (15) se poate obține din ecuația cercului tot prin dedublare scriind: $x^2 = x \cdot x$, $y^2 = y \cdot y$, $2x = x + x$, $2y = y + y$, adică

$$x \cdot x + y \cdot y + m(x + x) + n(y + y) + p = 0.$$

Acum în fiecare termen lăsăm un x sau y neschimbat, iar celui de-al doilea îi punem un indice și căpătăm (15). Dacă cercul este dat prin ecuația generală $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, se împarte întîi cu A și se aduce la forma normală și numai după aceea se scrie tangenta prin dedublare.

Exemple. 1) Tangenta în punctul $A(2, -4)$ la cercul $x^2 + y^2 - 20 = 0$ este $x \cdot 2 + y(-4) - 20 = 0$ sau

$$x - 2y - 10 = 0.$$

2) Tangenta la cercul $x^2 + y^2 - 5x + 4y = 0$ în punctul $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este

$$x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2\left(y + \frac{1}{2}\right) = 0$$

sau

$$8x - 10y + 1 = 0.$$

Atragem atenția că atunci cînd se dă cercul și punctul, primul lucru care trebuie făcut este să se verifice dacă punctul se află pe cerc. În cele două exemple de mai sus verificarea o poate face ușor cititorul.

6. *Tangenta într-un punct al elipsei sau hiperbolei.* Scriem ecuațiile elipsei și hiperbolei condensate în

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0 \begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ elipsa} \\ \varepsilon = -1 \text{ hiperbola} \end{cases} \qquad (16)$$

Pentru tangenta la curbă în $M_0(x_0, y_0)$ avem nevoie de derivata funcției y, deci de y'. Pentru aceasta scoatem din ecuația curbei

$$y^2 = \varepsilon b^2 - \frac{\varepsilon b^2}{a^2} x^2$$

de unde, prin derivare în ambele părți în raport cu x, obținem

$$2yy' = -2\frac{\varepsilon b^2}{a^2} x \qquad \text{sau} \qquad y' = -\frac{\varepsilon b^2 x}{a^2 y}.$$

În punctul $M_0(x_0, y_0)$ vom avea $y_0' = -\frac{\varepsilon b^2 x_0}{a^2 y_0}$ și ecuația tangentei se scrie

$$y - y_0 = -\frac{\varepsilon b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

sau, înmulțind cu y_0 și împărțind cu εb^2

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{\varepsilon b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{\varepsilon b^2}\right) = 0,$$

cu condiția ca M_0 să verifice ecuația (8), adică

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0.$$

Însă, în baza acestei condiții, suma din paranteză este egală cu unitatea, astfel încît forma definitivă a tangentei la curbă (16) este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{\varepsilon b^2} - 1 = 0, \text{ cu condiția } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0.$$

Acum separăm cele două curbe luînd pentru elipsă $\varepsilon = +1$ și pentru hiperbolă $\varepsilon = -1$ și obținem:

Tangenta la elipsă în punctul $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0, \text{ cu condiția } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (17)$$

Tangenta la hiperbolă în punctul $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0, \text{ cu condiția } \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (18)$$

Dacă se elimină numitorii, ecuațiile tangentelor se scriu

$b^2xx_0 + a^2yy_0 - a^2b^2 = 0$ pentru elipsă (17′)

$b^2xx_0 - a^2yy_0 - a^2b^2 = 0$ pentru hiperbolă (18′)

Exemple. a) *Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa* $x^2 + 9y^2 - 4 = 0$, *în punctele care au abscisa* $x = 1$. Din ecuația elipsei se deduce, pentru $x = 1$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tangentele în cele două puncte $M_1\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $M_2\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\frac{x \cdot 1}{4} \pm \frac{y\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{9}} - 1 = 0 \text{ sau separate}$$

$$x + 3\sqrt{3}y - 4 = 0 \text{ și } x - 3\sqrt{3}y - 4 = 0.$$

Ele se întîlnesc pe axa Ox în punctul $(4, 0)$.

b) *Să se scrie ecuația tangentei la hiperbola* $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$, *în punctul* $(4, 3)$.

Punctul verifică ecuația curbei, deci se găsește pe hiperbolă. Ecuația tangentei este $\frac{x \cdot 4}{8} - \frac{y \cdot 3}{9} - 1 = 0$ sau $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1 = 0$. Sub această formă se observă imediat că tăieturile dreptei sînt $P(2, 0)$, $Q(0, -3)$.

7. *Tangenta într-un punct al parabolei.* Ecuația parabolei

$$y^2 - 2px = 0 \tag{19}$$

dă $y^2 = 2px$, de unde, prin derivare, $2yy' = 2p$. Rezultă $y' = \frac{p}{y}$. În punctul $M(x_0, y_0)$ de pe parabolă vom avea $y_0 = \frac{p}{y_0} = m$, coeficientul unghiular al tangentei. Atunci ecuația tangentei este

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \text{ sau } yy_0 - y_0^2 - px + px_0 = 0.$$

Deoarece M aparține parabolei trebuie ca $y_0^2 = 2px_0$ și înlocuind în ecuația precedentă se obține pentru tangentă forma definitivă

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0 \tag{20}$$

cu condiția $y_0^2 - 2px_0 = 0$.

Ecuația tangentei într-un punct al parabolei se deduce din ecuația parabolei prin același procedeu de dedublare ca la cerc, anume se scrie parabola sub forma

$$yy - p(x + x) = 0,$$

apoi se pune indice unui y și unui x.

Exemplu. *Să se scrie ecuațiile tangentelor la parabola* $y^2 - 2px = 0$, *în punctele care se proiectează pe axă în focar.* Fie M și M' aceste puncte, care au, evident, abscisa $x = \frac{p}{2}$. Din ecuația parabolei rezultă $y = \pm p$, deci $M\left(\frac{p}{2}, p\right)$ și $M'\left(\frac{p}{2}, -p\right)$. Înlocuind în (20) se obțin cele două tangente

$$py - p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0 \text{ și } -py - p\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0 \text{ sau}$$

$$x - y + \frac{p}{2} = 0 \quad \text{și} \quad x + y + \frac{p}{2} = 0.$$

Se observă că ele sînt paralele cu bisectoarele axelor de coordonate și trec prin punctul $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ unde directoarea parabolei taie axa Ox.

Din cele constatate la cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă, rezultă următoarea

Regulă. *Tangenta într-un punct* (x_0, y_0) *al unei conice se scrie prin metoda dedublării.*

C. Tangentele dintr-un punct exterior

8. Problema tangentelor la o conică nu este complet studiată, dacă nu se consideră și cazul tangentelor duse dintr-un punct exterior. Aici vom da numai indicații cum se poate rezolva problema, precum și un exemplu, fără însă a face un studiu amănunțit. Dintre diferitele metode alegem una simplă, care necesită numai cunoștințele din acest manual.

Fie $P(x_0, y_0)$ punctul exterior conicei. Scriem ecuația tangentei la conică, cu direcția dată m, sub forma

$$y = mx + f(m) \tag{21}$$

unde $f(m)$ este $b - am + r\sqrt{1 + m^2}$ la cerc, $\sqrt{a^2m^2 + b^2}$ la elipsă și hiperbolă sau $\frac{p}{2m}$ la parabolă. Acestei tangente îi impunem condiția să treacă prin punctul P și obținem

$$y_0 = mx_0 + f(m), \tag{22}$$

ecuație cu o singură necunoscută m, care, exceptînd parabola, este irațională. Rezolvarea ei ne conduce la o ecuație de gr. II cu două soluții reale m_1, m_2. Tangentele căutate se scriu ca drepte care trec prin $P(x_0, y_0)$ și au direcții m_1, m_2, deci

$$y - y_0 = m_1(x - x_0) \text{ și } y - y_0 = m_2(x - x_0). \tag{23}$$

Exemplu. *Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul* $A(-13, -4)$ *la cercul* $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

Elementele cercului sînt centrul $\omega(2, 1)$ și raza $r^2 = 5$. Ecuația în m este

$$(-5 + 15m)^2 = 5(1 + m^2) \text{ sau } 22m^2 - 15m + 2 = 0,$$

care dă $m_1 = \frac{1}{2}$ și $m_2 = \frac{2}{11}$. Cele două tangente au, așadar, ecuațiile

$$y + 4 = \frac{1}{2}(x + 13) \quad \text{și} \quad y + 4 = \frac{2}{11}(x + 13)$$

sau, eliminînd numitorii

$$x - 2y + 5 = 0 \quad \text{și} \quad 2x - 11y - 18 = 0.$$

Exerciţii şi probleme

183. Se dă cercul $4(x^2 + y^2) + 8x - 12y + 9 = 0$ şi punctul $A(-3,2)$. Să se găsească ecuaţiile tangentelor la cerc:

a) paralele cu dreapta $15x + 8y - 12 = 0$;

b) perpendiculare pe diametrul care trece prin A.

[a) $m = -\frac{15}{8}$; $15x + 8y + 20 = 0$; $15x + 8y - 14 = 0$; b) $m = 4$; $8x - 2y + 11 \pm 2\sqrt{17} = 0$]

184. Se dă cercul $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

a) Să se arate că dreapta $12x - 5y + 19 = 0$ este tangentă la cerc şi să se determine punctul de tangenţă.

b) Să se scrie ecuaţiile laturilor pătratului circumscris cercului, în care una din laturi este pe dreapta de mai sus.

[a) $T\left(-\frac{21}{13}, -\frac{1}{13}\right)$; b) $5x + 12y - 56 = 0$, $5x + 12y + 74 = 0$, $12x - 5y - 111 = 0$.]

185. Un cerc cu raza de 3 unităţi este tangent unei drepte (Δ). Care este lungimea umbrei aruncate pe (Δ), dacă razele soarelui sînt înclinate la 150° pe (Δ)?

Generalizare pentru un cerc de rază r situat oricum faţă de (Δ), razele soarelui avînd o direcţie dată.

[Se alege (Δ) ca Ox şi perpendiculara din centrul cercului pe (Δ) ca Oy. Lungimea umbrei este de 12 unităţi. În general: $2r\frac{\sqrt{1+m^2}}{|m|}$.]

186. Să se scrie ecuaţia tangentei în punctul $(-3, 1)$ la cercul $x^2 + y^2 - 10 = 0$.

[$3x - y + 10 = 0$.]

187. Să se scrie ecuaţia tangentei în punctul $(-1, -2)$ la cercul $x^2 + y^2 - 6x + 3y - 5 = 0$.

[$8x + y + 10 = 0$.]

188. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la cercul

$$x^2 + y^2 - 3x + y + 2 = 0$$

în punctele de intersecţie cu axa Ox.

[$x - y - 1 = 0$; $x + y - 2 = 0$.]

189. Să se scrie ecuaţiile tangentelor duse din origine la cercul $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$ (C.d.p.)

[Ecuaţia în m: $8m^2 - 12m + 3 = 0$. Tangentele: $y = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}x$.]

190. Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin origine şi prin punctele $A(1, 0)$, $B(0, 2)$. Să se scrie apoi ecuaţiile tangentelor în punctele O, A, B şi să se verifice că aceste tangente întîlnesc laturile opuse ale triunghiului OAB în trei puncte coliniare.

[$x^2 + y^2 - x - 2y = 0$. Tangentele: $x + 2y = 0$, $x - 2y - 1 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$. Punctele pe laturi: $M\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $N\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $P(-4, 0)$.]

191. Fie AB diametrul unui cerc şi (T), (T') tangentele în A şi B. Tangenta dusă într-un punct variabil M întîlneşte pe (T) şi (T'), respectiv în P şi Q. Să se demonstreze că:

1) $AP \cdot BQ = \text{const.}$ 2) Diametrii care trec prin P şi Q sînt perpendiculari.

192. Un cerc de rază r se reazemă pe podea şi pe un perete vertical; planul cercului este perpendicular pe ambele plane. Unde trebuie aşezată o sursă luminoasă A pe podea, în planul cercului, astfel ca umbra aruncată de cerc pe perete să fie de două ori cît diametrul cercului?

[Intersecţiile planului cercului cu podeaua şi peretele se iau ca axe Ox şi Oy. Fie $OB = 4r$ umbra pe perete şi $OA = \alpha$. Dreapta AB se scrie prin tăieturi; ea trebuie să fie tangentă cercului cu centrul $C(r, r)$, de rază r.]

193. Se dă cercul $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$. Să se găsească $M \in Ox$ din care ducînd tangentele la cerc, acestea să determine pe dreapta $y = 6$ un segment de 6 unităţi.

[$M(\alpha, 0)$. Tangentele din M la cerc: $y = m_1(x - \alpha)$, $y = m_2(x - \alpha)$, m_1 şi m_2 rădăcinile ecuaţiei în m. Rezultă pentru $y = 6$; $x_1 = \frac{6}{m_1}$, $x_2 = \frac{6}{m_2}$. Se scrie că $|x_2 - x_1| = 6$ etc.; $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$.]

194. Să se determine cercul care este tangent axei Ox şi trece prin punctele $A(2, 3)$, $B(4, 1)$. Un cerc tangent axei Ox are ecuaţia $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0$.

[Un cerc tangent axei Ox are ecuaţia $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0$. Se găsesc două cercuri cu centrele $(5 + \sqrt{6}, 4 + \sqrt{6})$ şi $(5 - \sqrt{6}, 4 - \sqrt{6})$.]

195. Să se scrie ecuația elipsei care trece prin punctele $M(6, 4)$, $B(0, 5)$, elipsa fiind raportată la axele sale.

Să se scrie ecuația tangentei în punctul M.

$$\left[\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{15}-1=0;\ 3x+8y-50=0.\right]$$

196. Să se scrie ecuația tangentei la elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1=0$, în punctul din cadranul I care are $x=2$.

$$[3x+4\sqrt{3}y-24=0.]$$

197. Să se găsească ecuația unei elipse, raportată la axele sale, știind că are axa mare egală cu 8 și este tangentă dreptei $y=x+5$ (C.d.p.).

$$[a^2=16,\ b^2=9.]$$

198. Să se găsească ecuația unei elipse care este raportată la axele sale, știind că axa mică este de 6 unități și are ca tangentă dreapta $x-2y+14=0$.

$$[a^2=160,\ b^2=9.]$$

199. Să se determine ecuația elipsei, raportată la axele sale, care este tangentă dreptelor $x-4y+13=0$ și $4x-5y-25=0$.

Să se figureze elipsa și dreptele.

$$[a^2=25,\ b^2=9.]$$

200. Să se afle ecuația elipsei, raportată la axele sale, care este tangentă dreptei $2x+3\sqrt{3}y-24=0$, în punctul $(3, 2\sqrt{3})$.

$$[a^2=36,\ b^2=16.]$$

201. Să se găsească ecuația hiperbolei, raportată la axele sale, care este tangentă dreptei $3x-2y-8=0$, în punctul (6, 5).

$$[a^2=16,\ b^2=20.]$$

202. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}-1=0$, paralele cu dreapta $2x-y+2=0$.

$$[y=2x\pm 8.]$$

203. Să se găsească ecuația unei hiperbole, știind că este raportată la axele sale, că distanța focală este $FF'=10$ și că este tangentă dreptei $5x-4y-16=0$.

$$[a^2=16,\ b^2=c^2-a^2=9.]$$

204. Să se afle ecuația hiperbolei, raportată la axele sale, care este tangenta dreptelor $7x-5y-25=0$ și $8x-5\sqrt{2}y-20=0$.

$$[a^2=25,\ b^2=24.]$$

205. Să se determine hiperbola echilateră raportată la axe:

a) care trece prin punctul (13,5);

b) care este tangentă dreptei $3x-2y-10=0$;

c) a cărei tangentă în punctul corespunzător abscisei focarului are ordonata la origine $y=3$.

[a) $x^2-y^2=144$; b) $x^2-y^2=20$; c) $x^2-y^2=9$.]

206. Se duce prin mijlocul semiaxei OB' o paralelă la axa mare a unei elipse, care taie elipsa în punctele M și N. Să se arate că tangenta în M este paralelă coardei BN și tangenta în N este paralelă coardei BM.

207. O tangentă variabilă la elipsă întîlnește tangentele duse la extremitățile A, A' ale axei mari în punctele P și Q. Să se demonstreze că produsul $AP\cdot A'Q$ este constant. Să se precizeze dinainte care este constanta.

[Pentru a preciza constanta, se duce tangenta în B, poziție particulară.]

208. Aceleași date ca mai sus. Să se arate că segmentul PQ al tangentei variabile este văzut din focare sub un unghi drept.

209. Să se arate că produsul distanțelor de la focare la o tangentă oarecare a elipsei este constant (C.d.p.).

210. Produsul distanțelor de la un focar la două tangente paralele este constant. Să se caute legătura dintre această problemă și cea precedentă.

[Din cauza simetriei, distanțele din această problemă sînt egale cu cele din problema precedentă.]

211. Se duce tangenta într-un punct M al unei hiperbole. Să se arate că M este mijlocul segmentului din tangentă, cuprins între asimptote.

212. O dreaptă întîlnește o hiperbolă în M și N, iar asimptotele ei în P și Q. Să se arate că segmentele MN și PQ au același mijloc.

Să se deducă de aici proprietatea din problema precedentă.

213. Să se afle ecuațiile tangentelor duse din punctul $P(5, 7)$ la elipsa $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}-1=0$.

$$[3x+5y-50=0;\ x+3y-26=0.]$$

214. Să se găsească ecuațiile tangentelor duse din punctul $C\ (7a, 8b)$ la hiperbola cu semiaxele a și b, raportată la axele sale.

$$\left[\frac{5x}{3a}-\frac{4y}{3b}-1=0;\ \frac{13x}{-5a}+\frac{12y}{5b}-1=0.\right]$$

215. Se dă hipebola echilateră raportată la axele sale și cercul care are ca diametru axa transversă. O paralelă la Ox taie cercul în M și hiper-

bola în N. Să se determine această paralelă astfel ca tangentele în M și N la cele două curbe să fie perpendiculare.

$\left[y = \pm \frac{a}{\sqrt[4]{2}}.\right]$

216. O elipsă și o hiperbolă au aceleași focare. Să se arate că în punctele de intersecție tangentele la cele două curbe sînt perpendiculare (curbele sînt ortogonale).

217. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de directoare și tangenta la vîrf, pe o tangentă de direcție m, în funcție de m și de parametrul p al parabolei.

$\left[\frac{p}{2}\sqrt{1+m^2}.\right]$

218. Se dă parabola $y^2 - 2px = 0$. Să se determine înclinarea tangentei pe care axele de coordonate taie un segment egal cu $p\sqrt{3}$.

[Înclinarea: $\pm 30°$.]

219. Să se găsească ecuația unei parabole, știind că axele determină pe tangenta paralelă dreptei $5x - 12y - 4 = 0$, un segment de 13 unități.

$\left[m = \frac{5}{12},\ \frac{p^2}{4m^2} + \frac{p^2}{4m^2} = 13^2,\ \text{deci}\ y^2 - \frac{25}{3}x = 0.\right]$

220. Dacă N este un punct situat pe directoarea unei parabole, să se demonstreze că mediatoarea segmentului FN (F, focarul) este tangentă la parabolă.

$\left[N\left(-\frac{p}{2},\ y_0\right)\right.$. Mediatoarea are ecuația $2yy_0 - y_0^2 - 2px = 0$. Fie $M(x_0, y_0)$ pe parabolă, astfel ca $NM \parallel Ox$. Avem $y_0^2 = 2px_0$ etc.$\left.\right]$

221. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul $A(12p, 7p)$ la parabola $y^2 - 2px = 0$.

$[x - 2y + 2p = 0;\ x - 12y + 72p = 0.]$

222. Se dă parabola $y^2 - 8x = 0$ și dreapta $y = 2x + 3$. Să se găsească coordonatele punctului M, așezat pe dreapta dată, astfel ca tangentele duse din M la parabolă să determine pe tangenta la vîrf un segment de: a) 3 unități; b) $2\sqrt{3}$ unități.

$\left[\text{a) } M(0, 3),\ M'(-1, 1);\ \text{b) } M\left(\frac{1}{2}, 4\right);\ M'\left(-\frac{3}{2}, 0\right).\right]$

223. Fie M_0 un punct pe o parabolă cu focarul F. Prin F se duce coarda AB paralelă cu tangenta în M_0 și mărginită la parabolă. Să se arate că avem $AB = 4FM_0$ (C.d.p.).

224. Se duce o coardă prin focarul unei parabole. Să se arate că raportul dintre produsul segmentelor determinate de focar pe coardă și coarda întreagă este constant (Salmon).

$\left[\text{Raportul este: } \frac{p}{2}.\right]$

225. Se dă parabola $y^2 - 2px = 0$ și dreptele $x = \pm\frac{p}{8}$, care întîlnesc axa parabolei în A și B. O tangentă variabilă a parabolei întîlnește cele două drepte, respectiv în P și Q. Să se determine coeficientul unghiular al tangentei, astfel ca dreptele PB și AQ să fie perpendiculare.

$[m = \pm\sqrt{-1 + \sqrt{5}}]$

226. Se dă elipsa raportată la axe, cu semiaxele a, b și parabola $y^2 - 2px = 0$. Ce condiție trebuie să îndeplinească elipsa, pentru ca cele două curbe să fie ortogonale? Să se arate dacă condiția este îndeplinită, atunci oricare ar fi p, parabola este ortogonală elipsei.

[$b = a\sqrt{2}$, elipsa are semiaxa mare pe Oy. Se va lua un punct $M(x_0, y_0)$, presupus pe elipsă și pe parabolă și se va scrie că tangentele în M la cele două curbe sînt perpendiculare.]

227. Fie M un punct situat pe o parabolă. Tangenta și normala (perpendiculară pe tangentă) în M întîlnesc axa parabolei, respectiv în T și N, iar M se proiectează pe axă în M'. Să se arate că:

a) Mijlocul segmentului TM' este vîrful parabolei.

b) Segmentul $M'N$ este constant și egal cu parametrul parabolei*.

228. Prin focarul unei parabole se duce o coardă AB. Să se demonstreze că tangentele în A și B la parabolă sînt perpendiculare.

---

* Segmentul TM' se numește substangenta, iar $M'N$ subnormala relativă la punctul M.

Capitolul 11

Proprietăţi ale elipsei, hiperbolei şi parabolei

1. *Tangenta la elipsă într-un punct M este bisectoarea exterioară a unghiului format de razele vectoare ale lui M.*

Fie $M(x_0, y_0)$ un punct al elipsei, prin urmare

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Ecuaţia razei vectoare FM este

$$(FM) \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = y_0 x - (x_0 - c)y - cy_0 = 0. \tag{2}$$

Pentru raza vectoare $F'M$ este destul să schimbăm pe c în $(-c)$ şi găsim ecuaţia

$$(F'M) y_0 x - (x_0 + c)y + cy_0 = 0. \tag{3}$$

Adăugăm şi ecuaţia tangentei în M

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0 \tag{4}$$

Fie P un punct pe tangentă şi $N \in F'M$ pe prelungirea segmentului $F'M$. Notăm $\sphericalangle FMP = \alpha$ şi $\sphericalangle PMN = \beta$ (fig. 49). Trebuie să arătăm că $\alpha = \beta$ sau că $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Coeficienţii unghiulari sînt: $m_{MF} = \frac{y_0}{x_0 - c}$, $m_{MP} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, $m_{MN} = \frac{y_0}{x_0 + c}$, de unde rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} - \frac{y_0}{x_0 - c}}{1 - \frac{b^2 x_0}{a^2(x_0 - c)}} = \frac{-b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 + b^2 c x_0}{y_0[(a^2 - b^2)x_0 - a^2 c]}.$$

Dacă ţinem seama că $a^2 - b^2 = c^2$, iar din (1)

$$b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2, \text{ atunci } \operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2(cx_0 - a^2)}{y_0 c(cx_0 - a^2)} = \frac{b^2}{cy_0}.$$

În mod asemănător

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{y_0}{x_0 + c} + \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 - \frac{b^2 x_0}{a^2(x_0 + c)}} = \frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0 + b^2 c x_0}{y_0(c^2 x_0 + a^2 c)} = \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{y_0 c(cx_0 + a^2)},$$

deci $\operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{cy_0} = \operatorname{tg}\alpha$.

Dacă tangenta este bisectoarea exterioară, atunci perpendiculara pe tangentă în M — care se numeşte normala la elipsă — este bisectoarea interioară a unghiului format de razele vectoare FM, $F'M$.

O b s e r v a r e. În baza acestei proprietăţi, dacă o jumătate de elipsă ar fi oglindită pe partea interioară şi dacă s-ar aşeza o sursă luminoasă într-un focar, atunci razele luminoase s-ar concentra în celălalt focar. Pentru acest motiv proprietatea poartă numele de proprietatea optică a elipsei.

2. *Tangenta într-un punct M al unei hiperbole este bisectoarea interioară a unghiului format de razele vectoare ale punctului M* (fig. 50).

Elevii vor reface calculul, urmărind cele spuse la elipsă şi ţinînd seama că $M(x_0, y_0)$ satisface ecuaţia hiperbolei. Este un exerciţiu instructiv. Noi ne vom mulţumi să amintim că pentru hiperbolă este deajuns să înlocuim pe b^2 prin $(-b^2)$ şi atunci, dacă $\sphericalangle FMP = \alpha$, $\sphericalangle PMN = \beta$ (de data aceasta obtuze), avem $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{cy_0}$, deci $\alpha = \beta$. Dar atunci şi unghiurile ascuţite din interiorul triunghiului FMN sînt egale (fig. 50).

O b s e r v a r e. *Normala* la hiperbolă este, evident, bisectoarea unghiului exterior lui FMF'.

3. Consecinţe. a) *Construcţia tangentei la elipsă şi hiperbolă.* Fie M punctul în care vrem să ducem tangenta *la elipsă*. Prelungind raza vectoare $F'M$ cu lungimea $MN = MF$ (fig. 49) se formează triunghiul isoscel FMN, în care bisectoarea (tangenta) este şi înălţime şi mediană. Prin urmare tangenta în M se poate construi fie ca *mediatoare* a segmentului FN, fie ca *mediană* a triunghiului FMN.

La hiperbolă, construcţia tangentei într-un punct M se face în mod asemănător, cu deosebirea că segmentul $MN = MF$ se ia pe raza vectoare MF' şi nu pe prelungirea ei (fig. 50). Se obţine triunghiul isoscel FMN. Restul construcţiei, ca la elipsă.

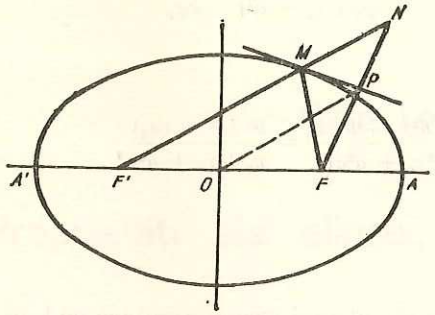


Fig. 49

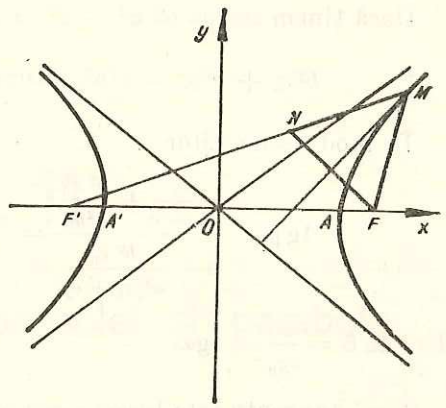


Fig. 50

4. *Tangenta la parabolă într-un punct M este bisectoarea unghiului format de raza vectoare și paralela la axă dusă prin M.*

Potrivit definiției parabolei triunghiul FMN(fig. 46) este isoscel, deci pentru ca tangenta în M să fie bisectoarea unghiului FMN ea trebuie să fie înălțime în acest triunghi. Din ecuația tangentei

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0$$

se deduce coeficientul unghiular $m_t = \frac{p}{y_0}$.

Dreapta care unește punctele $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $N\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ are coeficientul unghiular $m_{FN} = \frac{y_0}{-p} = -\frac{y_0}{p}$, de unde se vede că tangenta în M este perpendiculară pe FN.

5. *Directoare la elipsă sau hiperbolă.* Să ducem o perpendiculară pe axa mare AA' (la hiperbolă pe axa transversă), la o distanță $OE = x$ de centru, dată de

$$x = \frac{a^2}{c}.$$

La elipsă $a > c$, deci $x = a \cdot \frac{a}{c} > a$ și dreapta este exterioară segmentului AA' (deci exterioară elipsei); la hiperbolă $a < c$ și $x = a \cdot \frac{a}{c} < a$, deci $E \in AA'$ (dreapta este tot *exterioară* hiperbolei).

Dreapta $x = \frac{a^2}{c}$ se numește directoarea elipsei sau a hiperbolei.

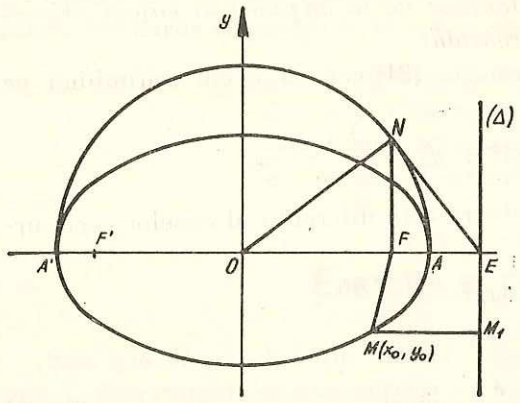


Fig. 51

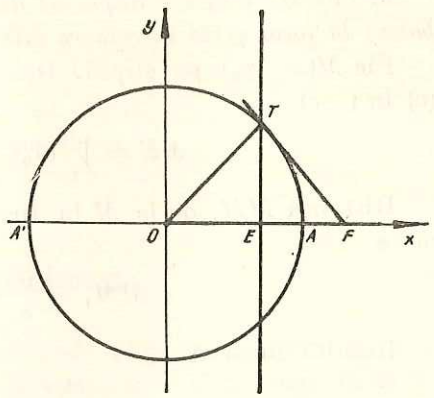


Fig. 52

Construcția directoarei la elipsă. Fie N punctul de pe cercul principal care are aceeași abscisă ca focarul (fig. 51). *Tangenta în N la cercul principal taie axa Ox în punctul E.*

În adevăr din triunghiul dreptunghic ONE, în care NF este înălțime, rezultă $ON^2 = OF \cdot OE$, de unde

$$OE = \frac{ON^2}{OF} = \frac{a^2}{c}.$$

Perpendiculara în E pe AA' este dreapta $x = \frac{a^2}{c}$, prin urmare directoarea elipsei, corespunzătoare focarului F.

A doua directoare corespunde focarului F' și are drept ecuație

$$x = -\frac{a^2}{c}.$$

Se observă că cele două directoare sînt simetrice față de centrul elipsei.

Construcția directoarei la hiperbolă. Se duce tangenta din focarul F la cercul cu diametrul AA' și se notează cu T punctul de tangență. *Perpendiculara dusă din T pe axa transversă este directoarea corespunzătoare focarului F* (fig. 52).

În adevăr dacă E este proiecția lui T pe axa Ox, atunci din triunghiul dreptunghic OTF avem

$$OT^2 = OE \cdot OF, \text{ deci } OE = \frac{OT^2}{OF} = \frac{a^2}{c}.$$

A doua directoare, corespunzătoare focarului F', este simetrică primei directoare față de origine, adică

$$x = -\frac{a^2}{c}.$$

6. Teoremă. *Raportul distanțelor de la un punct al elipsei (hiperbolei) la focar și la directoare este constant.*

Fie $M(x_0, y_0)$ pe elipsă. Din relația (31) cap. 8 avem schimbînd pe (c) în $(-c)$:

$$MF = \sqrt{(x_0-c)^2 + y_0^2} = \frac{a^2 - cx_0}{a}.$$

Distanța MM_1 de la M la directoare este diferența absciselor, prin urmare

$$MM_1 = \frac{a^2}{c} - x_0 = \frac{a^2 - cx_0}{c}.$$

Rezultă imediat

$$\frac{MF}{MM_1} \quad \frac{c}{a} = \text{const.}$$

Acest raport constant se notează cu litera e (să nu se confunde cu baza logaritmilor naturali) și se numește *excentricitatea elipsei*. Deoarece la elipsă $c < a$, avem $e = \frac{c}{a} < 1$. Excentricitatea arată cît de depărtate de centru (deci cît de excentrice) sînt focarele pe axa mare. Dacă $e = 0$, atunci $c = 0$ și elipsa se reduce la un cerc; dacă $e = 1$, atunci $c = a\,(b = 0)$ și elipsa degenerează în axa mare AA'. Prin urmare cu cît excentricitatea este mai mică cu atît elipsa se apropie mai mult de cerc.

La hiperbolă problema se tratează în mod asemănător cu deosebirea că $MF = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \frac{cx_0 - a^2}{a}$ și $MM_1 = x_0 - \frac{a}{c} = \frac{cx_0 - a^2}{c}$, de unde

$$\frac{MF}{MM_1} = \frac{c}{a} = \text{const.}$$

Ca și la elipsă raportul acesta se notează cu e și se numește *excentricitatea hiperbolei*. La hiperbolă însă $c > a$, deci $e = \frac{c}{a} > 1$; hiperbola are excentricitatea *supraunitară*.

7. *Diametri*. Orice dreaptă care trece prin centrul unei elipse sau al unei hiperbole se numește *diametru**.

8. *Excentricitatea parabolei* este, ca și la celelalte conice, raportul dintre distanțele de la punctul M de pe parabolă, la focar și la directoare, adică $e = \frac{MF}{MN}$ (fig. 46). Dar la parabola $MF = MN$ și deci $e = 1$.

* Aceeași denumire (deci tot diametru) se dă și *segmentului* determinat de un diametru într-o elipsă sau hiperbolă.

După cum se vede excentricitatea este un element care caracterizează cele patru curbe de gradul al II-lea, și anume

$e = 0$ caracterizează cercul
$0 < e < 1$ caracterizează elipsa
$e = 1$ caracterizează parabola
$e > 1$ caracterizează hiperbola.

Exerciții și probleme

229. Fie M punctul din primul cadran unde elipsa este tăiată de diagonala dreptunghiului circumscris ei. Să se arate că OM și tangenta în M sînt egal înclinate pe axa mare a elipsei.

[Se arată că punctul N în care tangenta taie axa Ox are abscisa de două ori mai mare decît abscisa lui M, deci OMN este isoscel.]

230. Tangenta într-un punct M al elipsei taie tangentele de la extremitățile A, A' ale axei mari în punctele P și Q. Să se demonstreze că dreptele PF și QF' și perpendiculara M pe tangentă (normala la elipsă) sînt concurente.

231. Să se arate că suma inverselor pătratelor a doi diametri perpendiculari într-o elipsă este constantă. Să se găsească dinainte constanta, fără calcul.

[Doi diametri perpendiculari sînt chiar axele, deci constanta este: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.]

232. Să se demonstreze că dacă axa mare AA' a unei elipse este egală cu diagonala pătratului care are ca latură distanța focală FF', atunci segmentul MN perpendicular pe tangenta într-un punct curent M, unde $N \in Ox$, este media geometrică a segmentelor $F'N$ și NF.

233. Perpendiculara pe tangenta într-un punct M (normala) al unei hiperbole echilatere, raportată la axe, taie aceste axe în P și Q. Să se arate că M este mijlocul segmentului PQ.

Capitolul 12

Locuri geometrice

1. Nu este cazul să repetăm cele ce am spus despre locurile geometrice la capitolul 7. Acolo locurile geometrice erau numai linii drepte, aici vor putea fi și cercuri, elipse, hiperbole, parabole. Avînd însă cunoștință și despre ecuația unei conice, care este de gradul al II-lea, putem aduce completările care urmează.

Găsirea locurilor geometrice cu ajutorul geometriei elementare se rezumă la un cadru destul de restrîns, anume la acele curbe care pot fi ușor recunoscute: linia dreaptă, cercul, parabola etc.

Geometria analitică este aceea care a pus ordine în chestiunea locurilor geometrice, și anume sub două aspecte:

a) Orice problemă de loc geometric tratată pe cale analitică ne duce la un rezultat, adică la o ecuație (care eventual se poate descompune) și aceasta reprezintă una sau mai multe curbe.

b) Gradul ecuației curbei-loc geometric ne arată gradul de dificultate a problemei: dacă ecuația este de gradul I, locul este o dreaptă, dacă ecuația este de gradul al II-lea, curba este o conică (caz particular cerc); dacă însă curba este de grad mai mare, atunci se face reprezentarea grafică folosind metodele analizei matematice.

Mai trebuie precizat un lucru: uneori locul geometric este limitat, deși din punct de vedere analitic obținem o ecuație care reprezintă o curbă întreagă. Limitarea se obține fie prin considerații geometrice, fie analitice.

Faptul că din punct de vedere analitic se obține curba întreagă se explică prin aceea că în geometria analitică intră în joc și elementele imaginare. De pildă dacă o dreaptă este exterioară unui cerc, punctele de intersecție sînt imaginare, dar mijlocul segmentului este un punct real.

Considerăm necesare cîteva exemple.

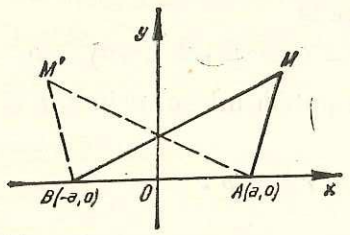


Fig. 53

2. *Locuri rezultate din relații geometrice.* 1) *Fiind date două puncte fixe A, B, să se afle locul geometric al punctului M* care satisface relația

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \text{ (const.)}.$$

Se ia în mod firesc AB ca axă Ox. Axa Oy va fi mediatoarea segmentului AB. Motivarea este că dacă luăm două puncte M, M' simetrice față de mediatoare, avem evident $MA^2 + MB^2 = M'A^2 + M'B^2 = k^2$ și mediatoarea este axă de simetrie a locului (fig. 53). Coordonatele punctelor sînt deci:

$$A(a, 0),\ B(-a, 0),\ M(x, y).$$

Relația geometrică, scrisă analitic, devine

$$(x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = k^2$$

sau

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{2} - a^2.$$

Locul este un cerc real dacă $\frac{k^2}{2} - a^2 > 0$. Pentru $k = 2a = AB$ locul este cercul cu diametrul AB.

Dacă un punct M aparține locului, atunci raza cercului este $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.}$ Se deduce de aici:

Dacă o latură a unui triunghi este fixă, iar suma pătratelor celorlalte două constantă, vîrful mobil al triunghiului descrie cercul cu centrul în mijlocul laturii fixe, avînd mediana ca rază.

3. *Să se afle locul geometric al punctelor M din care se pot duce tangente egale la două cercuri date.*

Notăm cu x_0, y_0 coordonatele lui M și cu T, T' punctele de tangență. Relația geometrică este

$$MT = MT' \quad \text{sau} \quad MT^2 = MT'^2. \tag{1}$$

Ecuațiile cercurilor (C) și (C') de centre C și C' și raze r, r' sînt

$$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0;\ x^2 + y^2 + 2m'x + 2n'y + p' = 0 \tag{2}$$

cu centrele $C(-m, -n)$, $C'(-m', -n')$.

Relația (1) sub a doua formă se poate scrie, cu teorema lui Pitagora,

$$MC^2 - r^2 = MC'^2 - r'^2$$

sau

$$(x_0 + m)^2 + (y_0 + n)^2 - r^2 = (x_0 + m')^2 + (y_0 + n')^2 - r'^2.$$

După reducerea termenilor asemenea se ajunge la

$$2(m - m')x_0 + 2(n - n')y_0 + (m^2 + n^2 - r^2) - (m'^2 + n'^2 - r'^2) = 0.$$

Însă x_0, y_0 sînt coordonate curente deci acum le putem înlocui prin x, y și ținînd seama că

$$m^2 + n^2 - r^2 = p; \quad m'^2 + n'^2 - r'^2 = p'.$$

Se ajunge la ecuația locului geometric:

$$2(m - m')x + 2(n - n')y + p - p' = 0 \qquad (3)$$

care este o dreaptă și se numește *axa radicală* a celor două cercuri. Se observă imediat că *ecuația dreptei-loc geometric* (3) *se obține prin scăderea ecuațiilor* (2) *ale celor două cercuri.*

Dacă cercurile sînt secante, locul geometric cerut este axa radicală din care se scoate coarda comună celor două cercuri, deoarece din punctele ei nu se pot duce tangente la cercuri.

Elevii vor arăta că axa radicală este perpendiculară pe linia centrelor celor două cercuri.

4. *Locuri rezultate din intersecții.* Dăm exemple de locuri geometrice care rezultă din intersecții de curbe depinzînd: a) de un parametru, b) de doi parametri cu o relație de legătură.

1) *Pe tangenta dusă într-un punct fix al cercului* (C) *se ia un punct mobil* M. *Se duce din* M *a doua tangentă la cerc, punctul de contact fiind* N. *Se cere locul geometric al ortocentrului (punctul de întîlnire al înălțimilor) triunghiului* AMN, *cînd* M descrie tangenta în A.

Metoda I. Folosim doi parametri. Alegem tangenta în A ca axă Ox și A ca origine (fig. 54). Centrul cercului este $\omega(0, r)$, iar ecuația cercului

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0. \qquad (4)$$

Tangenta în $N(x_0, y_0) \in (\omega)$ are ecuația

$$xx_0 + yy_0 - r(y + y_0) = 0$$

cu condiția

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ry_0 = 0. \qquad (5)$$

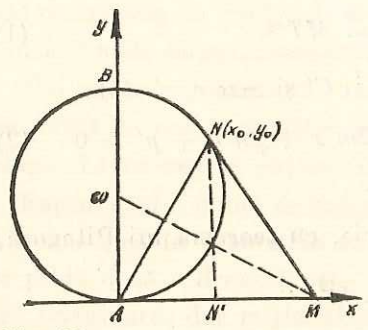


Fig. 54

Tangenta taie axa Ox în $M\left(\frac{ry_0}{x_0}, 0\right)$. În triunghiul AMN ne trebuie numai două înălțimi și le alegem astfel: $NN' \parallel Oy$ și $M\omega$ a cărei ecuație se scrie prin tăieturi. Ecuațiile sînt

$$(NN')\ x = x_0; \quad (M\omega)\ \frac{x_0 x}{ry_0} + \frac{y}{r} - 1 = 0.$$

Adăugînd relația de condiție (5) avem de eliminat parametrii x_0, y_0 între trei ecuații.

Din prima ecuație rezultă $x_0 = x$, care dus în a doua dă $y_0 = -\frac{x^2}{y - r}$. Acestea duse în relația de condiție (5) ne dau locul geometric

$$x^2 + \frac{x^4}{(y - r)^2} + 2r\frac{x^2}{y - r} = 0$$

sau

$$x^2(x^2 + y^2 - r^2) = 0.$$

Locul geometric se descompune în $x = 0$ (dreapta $A\omega$) și cercul $x^2 + y^2 = r^2$ cu centrul în A și raza r, care este *locul veritabil.*

Dreapta $A\omega$ rezultă din nedeterminarea punctului de intersecție, anume cînd $M \to \infty$ tangentele în A și N devin paralele ($N \equiv B$). Două din înălțimi sînt AB și BA care se confundă și această dreaptă apare în ecuația locului (cap. 7. § 3, exemplul 2).

Metoda a II-a. Putem folosi și un singur parametru. Pentru aceasta scriem o tangentă la cerc cu direcția nedeterminată: $y - r = \lambda x + r\sqrt{1 + \lambda^2}$ care taie axa Ox (tangenta fixă) în $M\left(\frac{-r(1 + \sqrt{1 + \lambda^2})}{\lambda}, 0\right)$. Considerăm de data aceasta ortocentrul determinat de înălțimile $M\omega$ și perpendiculara din A pe MN, adică $-\frac{\lambda x}{r(1 + \sqrt{1 + \lambda^2})} + \frac{y}{r} - 1 = 0$ și $y = -\frac{1}{\lambda}x$. (6)

Din a doua ecuație se scoate $\lambda = -\frac{x}{y}$, care se introduce în prima, scrisă sub forma

$$-\lambda x + (y - r)(1 + \sqrt{1 + \lambda^2}) = 0 \quad \text{ne dă}$$

$x^2 + y^2 - ry = (r - y)\sqrt{x^2 + y^2}$ sau ridicînd la pătrat $(x^2 + y^2)^2 - 2ry(x^2 + y^2) + r^2y^2 =)r^2 - 2ry + y^2)\ (x^2 + y^2)$.

Aceasta se reduce la $x^2(x^2 + y^2 - r^2) = 0$, ca în metoda precedentă.

2. *Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la elipsă.*

Cele două tangente fiind perpendiculare vor avea drept coeficienți unghiulari m și $-\frac{1}{m}$. Ecuațiile lor se scriu ca tangente la elipsă cu direcția dată, deci

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \text{ și } y = -\frac{1}{m}x + \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{m^2} + b^2}.$$

Locul geometric al intersecției celor două tangente se obține eliminînd parametrul m. Pentru aceasta se elimină numitorul la cea de-a doua ecuație, apoi se separă radicalii și se ridică la pătrat. Ecuațiile devin

$$y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2m^2 + b^2$$
$$m^2y^2 + 2mxy + x^2 = a^2 + m^2b^2.$$

Prin adunare se capătă

$$(1 + m^2)x^2 + (1 + m^2)y^2 = (1 + m^2)a^2 + (1 + m^2)b^2,$$

ecuație care se împarte cu $1 + m^2 \neq 0$ și dă locul geometric

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Locul este un cerc concentric cu elipsa, cu raza cît diagonala dreptunghiului construit pe semiaxe. Acest cerc este circumscris dreptunghiului care încadrează elipsa și se numește *cercul lui Monge* sau cercul *ortoptic*.

Observare. Problema asemănătoare la hiperbolă ne dă ca loc geometric cercul $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$, cu raza $r = \sqrt{a^2 - b^2}$. Locul nu există decît la hiperbolele care au $a > b$. În cazul hiperbolei echilatere locul se reduce la $x^2 + y^2 = 0$, adică originea, iar tangentele sînt chiar asimptotele.

4. *Se cere locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la o parabolă.*

Ecuația unei tangente la parabola $y^2 - 2px = 0$ este $y = \lambda x + \frac{p}{2\lambda}$, iar a tangentei perpendiculară pe ea: $y = -\frac{x}{\lambda} - \frac{p\lambda}{2}$. Pentru eliminarea lui λ se scriu ecuațiile astfel

$$\lambda y = \lambda^2 x + \frac{p}{2} \quad \text{și} \quad -\lambda y = x + \lambda^2 \frac{p}{2}.$$

Adunînd se obține $(\lambda^2 + 1)\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0$, adică

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Locul căutat este *directoarea parabolei.*

Exerciții și probleme

234. Să se afle locul geometric al punctelor M care satisfac relația

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k^2,$$

A, B fiind două puncte fixe, iar α, β, k niște coeficienți constanți.

[Cerc.]

235. Să se afle locul punctelor care satisfac relația

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2 \text{ (const.)},$$

A, B, C fiind trei puncte fixe. Generalizare în cazul a n puncte fixe.

[Cerc cu centrul în centrul de greutate al triunghiului ABC. Se va considera și cazul cînd A, B, C sînt coliniare.]

236. Se dă o dreaptă și un punct fix O exterior dreptei. Dacă P este mobil pe dreapta dată și $M \in OP$ astfel că $OM \cdot OP = k$, să se afle locul punctului M.

[Originea în O. Un cerc care trece prin O.]

237. Se cere locul punctelor care au raportul distanțelor la două puncte fixe constant.

[Un cerc. Cînd constanta este 1, cercul devine mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte.]

238. Se cere locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente cu lungimea l, la cercul cu centrul $\omega(a, b)$ și cu raza r.

[M punctul al cărui loc se cere, T punctul de tangență. Relația geometrică este $\omega M^2 = \omega T^2 + TM^2$. Locul este cercul concentric cu raza $\sqrt{r^2 + l^2}$.]

239. Să se determine pe dreapta $3x - y + 4 = 0$ punctele din care se pot duce tangente de 4 unități lungime la cercul $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$.

[Intersecțiile dreptei cu cercul ale cărui puncte au tangentele de 4 unități față de cercul dat. $M(-2, -2)$; $N\left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$.]

240. Să se găsească punctele care au tangentele de lungime 3 unități față de cercul $x^2 + y^2 - 4 = 0$ și tangentele de $\sqrt{5}$ unități față de cercul $x^2 + y^2 - 7x - 14y + 20 = 0$.

$\left[M(-2, 3); N\left(\frac{18}{5}, \frac{1}{5}\right).\right]$

241. Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor

$$x = 2 + \cos\alpha; \quad y = -1 - \sin\alpha$$

[Cercul $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$.]

242. Să se afle locul piciorului perpendicularei dusă din punctul $A(1, 5)$ pe o dreaptă care trece prin punctul $B(5, 3)$.

[Cercul cu diametrul AB.]

243. Extremitățile unui segment de lungime constantă alunecă pe două drepte perpendiculare. Se cere locul mijlocului segmentului.

[Cercul cu centrul în origine.]

244. Se cere locul punctului care împarte într-un raport dat k segmentul ce unește un punct M de pe cercul (C), cu punctul fix A. Caz particular $k = -1$.

[Cerc.]

245. Fiind dat un cerc, se cere locul mijloacelor coardelor ce trec printr-un punct fix.

[ω centrul cercului și A punctul fix. Dacă A este interior cercului, locul este cercul cu diametrul $A\omega$. Se vor discuta celelalte cazuri.]

246. O dreaptă variabilă (Δ) care trece prin punctul fix A taie axa Ox în M. Se ia pe Oy punctul N, astfel ca $ON = OM$. Se cere locul intersecției dreptei (Δ) cu perpendicluara dusă din N pe ea.

[$A(a, b)$. Locul este $x^2 + y^2 - (a - b)x - (a + b)y = 0$.]

247. La capetele segmentului $AB = 2a$ se ridică perpendicularele AU și BV. O dreaptă ce trece prin A taie pe BV în N, iar alta care trece prin B taie pe AU în M. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor AN și BM, știind că $AM \cdot BN = 4a^2$.

[Simetria arată că mediatoarea segmentului AB se ia ca axă Oy. Cercul $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.]

248. Se dă un triunghi dreptunghic ABC. Să se găsească locul punctului M astfel ca perpendicularele ridicate în A, B, C respectiv pe MA, MB, MC să fie concurente.

[Cercul circumscris triunghiului.]

249. Se dau axele dreptunghiulare Ox, Oy și o dreaptă (D). Se cere locul geometric al punctului M care are proiecțiile P, Q, R pe cele două axe și pe dreapta (D) în linie dreaptă.

[Cercul circumscris triunghiului format de axe și de dreapta (D). Teorema lui Simson particularizată la triunghi dreptunghic.]

250. Se dau trei puncte A, B, C în linie dreaptă. Să se afle locul punctelor de contact al tangentelor duse din A la un cerc variabil ce trece prin B și C.

[Originea în A; $B(b,\ 0)$, $C(c,\ 0)$. Cercul $x^2 + y^2 - bc = 0$. Se poate folosi puterea punctului pentru lungimea tangentei.]

251. Se dau două cercuri cu centrele în ω și ω'. M fiind un punct mobil pe axa radicală a celor două cercuri, se cere locul geometric al intersecției perpendicularelor ridicate în ω și ω', respectiv pe $M\omega$ și $M\omega'$.

[Este indicat să se aleagă drept axe, linia centrelor și axa radicală a celor două cercuri. Locul este mediatoarea segmentului $\omega\omega'$.]

* **252.** Se dau punctele P, Q și un cerc fix cu centrul pe dreapta PQ. Fie M, N capetele unui diametru variabil al cercului. Se cere locul intersecției dreptelor MP și NQ.

[Originea în centrul cercului. $P(a,\ 0)$, $Q(b,\ 0)$, $M(r,\ \cos\alpha,\ r\sin\alpha)$, $N(-r\cos\alpha, -r\sin\alpha)$. Locul este cercul $\left(x - \frac{2ab}{a+b}\right)^2 + y^2 = r^2\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$]

(*) **253.** Două cercuri de centre O și O' se taie în A și B. Prin A se duce o secantă variabilă, care întîlnește cele două cercuri, respectiv în M și N. Se cere: a) locul mijlocului segmentului MN; b) locul intersecției dreptelor OM și $O'N$.

[a) Cerc cu centrul la mijlocul distanței centrelor. b) Cerc care trece prin cele două centre.]

254. Într-un cerc se duc doi diametri perpendiculari AB și CD. O dreaptă variabilă ce trece prin C taie diametrul AB în M și cercul în N.

Să se afle locul geometric al intersecției paralelei la CD, dusă prin M, cu tangenta la cerc în N (S.G.M., VI).

[Originea în centrul cercului. $A(r,\ 0)$, $C(0,\ r)$ Se găsesc ecuațiile $x = \pm r$; $y = -r$. Să se aleagă locul veritabil și să se explice de ce apar celelalte.]

255. Se dă un punct A și o dreaptă (D). Prin A se duce o secantă variabilă care taie dreapta (D) în M și în acest punct se ridică perpendiculara pe (D). Pe această perpendiculară se poartă segmentul $\overline{MN} = \overline{MA}$. Să se găsească locul lui N.

[Se ia (D) ca axă Oy și perpendiculara din A pe (D) ca Ox. Locul este hiperbola echilateră raportată la aceste axe, cu un vîrf în A.]

256. O tangentă variabilă întîlnește în M și M' tangentele duse la extremitățile axei mari ale unei elipse. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor MA' și $M'A$.

[Elipsa cu axa mică pe jumătate. Se ia $MA = \lambda$ și atunci $M'A = \frac{b^2}{\lambda}$.]

257. O elipsă are axa mare $AA' = 2 \cdot BB'$. O tangentă variabilă taie tangenta dusă în B în punctul N și tangenta dusă în B' în punctul N'. Se cere locul intersecției perpendicularelor duse din N și N' respectiv pe BN' și $B'N$.

[Cercul $x^2 + y^2 - b^2 = 0$.]

258. O paralelă (Δ) la una din asimptotele unei hiperbole întîlnește hiperbola în punctul M. Tangenta în M la hiperbolă taie aceeași asimptotă în N. Se cere locul geometric al intersecției dreptei (Δ) cu paralela dusă prin N la a doua asimptotă.

[$\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2} - 1 = 0$.]

259. Se cere locul geometric al mijloacelor coardelor paralele dintr-o elipsă sau hiperbolă.

[Un diametru al conicei (segment).]

260. Pe o parabolă se consideră un punct M variabil și simetricul său M' față de axa de simetrie. Se cere locul geometric al intersecției tangentei în M cu paralela dusă prin M' la axa de simetrie (S.G.M. III).

$$\left[y = -\frac{2p}{3}x.\right]$$

261. Pe o parabolă se consideră un punct M variabil și simetricul său M' față de axa de simetrie. A fiind un punct fix pe axa parabolei, se cere locul geometric al intersecției dreptei MA cu paralela dusă prin M' la axă (S.G.M. III).

[$y^2 + 2p(x - 2a) = 0$. Parabolă.]

262. Fie F focarul unei parabole, M un punct mobil pe ea și A un punct fix pe axa de simetrie.

Să se găsească locul intersecției dreptei MF cu paralela dusă prin A la tangenta în M.

Să se dea și o soluție geometrică (S.G.M. VIII).

[Cerc cu centrul în F și cu raza FA.]

263. Se dă o parabolă, un punct A pe axa ei și dreapta (D), perpendiculară pe axă, trecînd prin simetricul lui A față de vîrf. Tangenta într-un punct M al parabolei taie dreapta (D) în N. Să se afle locul geometric al intersecției dreptei MA cu paralela dusă prin N la axa parabolei, cînd M descrie curba. Particularizare cînd A coincide cu vîrful parabolei.

[$y^2 - p(x - a) = 0$; caz particular $a = 0$.]

264. Se dă parabola $y^2 - 2px = 0$. Se cere locul punctului M, astfel ca tangentele duse din M la parabolă să determine pe tangenta la vîrf un segment de lungime dată a.

[$y^2 - 2px = a^2$. Aceeași parabolă, deplasată astfel ca pentru $x = 0$, $y = \pm a$.]

265. Se dă un cerc și o dreaptă (D). Să se afle locul punctului M astfel ca tangentele duse din M la cercul dat să fie egale cu distanța de la M la dreapta (D). Particularizări.

[Se ia (D) ca axă Oy și perpendiculara din centrul ω al cercului ca Ox. Locul este parabola $y^2 = 2ax - (a^2 - r^2)$. Cazuri particulare: 1) $a = r$; 2) $-a = r$; 3) $r = 0$.]

Probleme recapitulative

1. Se dau dreptele $3x - 4y + 6 = 0$ și $4x - 3y - 9 = 0$. Să se determine paralela la a doua bisectoare a axelor de coordonate, care să formeze între cele două drepte un segment de $5\sqrt{2}$ unități.

[Două soluții: $y = -x + 50$ și $y = -x - 20$.]

2. Să se afle vîrfurile unui triunghi, cunoscînd mijloacele laturilor $P(3, -1)$, $Q(1, 7)$, $R(-4, 3)$.

[Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Se scrie că P este mijlocul lui AB etc., și se obține un sistem de ecuații.]

3. Se împart laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi în același raport prin punctele M, N, P. Să se demonstreze că triunghiul MNP are același centru de greutate ca și ABC. (Teorema lui Pappus).

4. Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ vîrfurile unui triunghi ale cărui laturi le notăm cu a, b, c. Să se demonstreze că centrul cercului înscris triunghiului are coordonatele

$$x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}; \quad y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}.$$

[Fie AA' bisectoarea și J centrul cercului înscris. Se ține seama de rapoartele $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ și $\frac{\overline{JA'}}{\overline{JA}}$.]

5. O dreaptă variabilă care trece prin punctul $A(0, 5)$ taie dreptele $x - 2 = 0$ și $x - 3 = 0$, respectiv în B și C. Să se arate că:

a) Paralela dusă prin B la OC trece printr-un punct fix.

b) Aria triunghiului OBC este constantă.

c) Există o poziție a dreptei ABC, astfel ca $\sphericalangle BOC = 45°$.

Pentru acest caz să se calculeze celelalte unghiuri ale triunghiului OBC (E. Morțun).

[a) Punctul fix $J\left(0, \frac{5}{3}\right)$; b) $S = \frac{5}{2}$ unități pătrate; c) $\lambda = -2$ și $\lambda = -\frac{13}{6}$, λ fiind coef. unghiular al dreptei ABC. Pentru $\lambda = -\frac{13}{3}$, $\operatorname{tg} B = -9$, $\operatorname{tg} C = \frac{4}{5}$.]

6. Care sînt punctele din plan care satisfac sistemul:

$$2x - 5y + 4 = 0; \quad x + 2y - 3 > 0; \quad 3x - 4y + 2 < 0?$$

2) Să se afle lungimea segmentului de dreaptă pe care sînt situate punctele găsite.

3) Dacă se permută circular semnele $=$, $>$, $<$, se obțin încă două sisteme. Care dintre ele este incompatibil?

7. Se dau patru puncte A, B, C, D într-un plan orientat și se cere locul geometric al punctului M astfel ca să avem relația între arii:

$$S_{MAB} + S_{MCD} = S_{MBC} + S_{MDA}$$

[O dreaptă.]

8. Se dă unghiul drept xOy, o dreaptă oarecare (D) și un punct mobil M pe (D). Fie P și Q proiecțiile lui M, respectiv pe Ox și Oy. Se cere:

a) Locul geometric al intersecției paralelei duse prin P la (D), cu perpendiculara dusă din Q pe (D).

b) Locul intersecției paralelei duse prin Q la (D) cu perpendiculara dusă din P pe (D).

c) unghiul celor două locuri geometrice.

[Locurile sînt două drepte perpendiculare.]

9. $C(a, b)$ este un punct fix din planul axelor rectangulare Ox și Oy, iar A și B proiecțiile acestui punct pe axe. Prin C trece o dreaptă mobilă pe care se proiectează punctele A și B, respectiv în C' și C'', ale căror proiecții pe AC sînt respectiv A' și A''. Tot punctele C' și C'' se proiectează pe BC în B' și B''. Toate proiecțiile fiind ortogonale, se cere:

a) Să se arate că oricum s-ar roti dreapta mobilă în jurul punctului C, dreapta $A''B''$ are o direcție fixă.

b) Să se afle locul descris de mijlocul segmentului $A'B''$.

c) Idem, locul mijlocului segmentului $A''B'$ (Șc. Polit. Buc., Lucrare parțială, 1939).

[a) $m = -\frac{a}{b}$; b) $\frac{2x}{3a} + \frac{2y}{3b} - 1 = 0$; c) $ax - by = a^2 - b^2$. Cele două drepte-loc geometric sînt perpendiculare.]

10. Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(4, 2)$, $C(2, 3)$ și se cere:

a) locul geometric al punctelor care satisfac relația:

$$MA^2 + MB^2 - MC^2 = 20;$$

b) locul geometric al punctelor care satisfac relația:

$$MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 7;$$

c) să se cerceteze dacă există puncte în plan care să satisfacă deodată ambele relații.

[a) Cercul $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$; b) dreapta $y = 2$; c) $M_1[2(1 + \sqrt{3}), 2]$; $M_2[2(1 - \sqrt{3}), 2]$.]

11. Se dau dreptele (D) $ax + 3y - 10 = 0$ și (D') $4x + by - 20 = 0$, unde a, b sînt parametri reali.

1, Să se determine și să se reprezinte mulțimea punctelor $M(a, b)$ astfel ca dreptele date să fie paralele. Se creează astfel o corespondență între punctele M și perechile de drepte (D, D'). Să se determine în special punctul M_0 pentru care (D) și (D') coincid.

2. Să se determine punctul M_1 astfel ca distanța între dreptele paralele (D, D') să fie de 5 unități.

3. Să se determine mulțimea punctelor N pentru care dreptele (D, D') sînt perpendiculare.

4. Să se caute locul geometric al intersecției dreptelor (D), (D') care satisfac condiția de la (1) și să se interpreteze rezultatul găsit.

5. Locul geometric al intersecției dreptelor (D) și (D') care satisfac condiția de la (3).

[**1.** $ab = 12$; $M_0(2, 6)$. **2.** $M_1\left(\frac{5}{4}, \frac{48}{5}\right)$. **3.** Dreapta $4a + 3b = 0$. **4.** $D \parallel D'$, deci nu se intersectează. Totuși calculul dă $2x + 3y - 10 = 0$, loc rezultat din nedeterminare, deoarece $(D) \equiv (D')$. **5.** cerc.]

12. Se dau două axe perpendiculare Ox, Oy și punctele A, B pe axa Ox. Se duce cercul fix (C) descris pe OA ca diametru, iar prin punctele date A, B un cerc variabil (C'), care taie cercul (C) în A și în punctul mobil P. Să se găsească locul punctului al doilea de intersecție M, al dreptei OP cu cercul C', cînd acest cerc variază (C.G.M., XXIX).

[$A(a, 0)$, $B(b, 0)$. Ecuația locului se desface în $x^2 + y^2 - ax = 0$ și $x - b = 0$. Cea din urmă este locul cerut.]

13. Se dă curba $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\lambda} + \frac{\lambda}{\sqrt{x+1}}$ și fie M punctul unde curba taie axa Oy. Să se arate că:

a) atunci cînd λ variază, curba rămîne tangentă dreptei $y = 2$;

b) tangenta la curbă în M este în același timp tangentă cercului cu centrul în origine și cu raza $r = 2$ (S.G.M., VIII).

14. Se consideră o elipsă și o hiperbolă, avînd aceleași semiaxe a și b, axele lor fiind suprapuse.

1) O dreaptă dusă prin centrul lor comun taie elipsa în O și hiperbola în Q. Să se determine această dreaptă, astfel ca tangentele în P și Q la curbele respective să fie perpendiculare între ele.

2) Pe una din tangentele comune la cele două curbe, să se determine un punct M, astfel ca tangentele duse din M la elipsă și hiperbolă (diferite de tangenta comună) să fie perpendiculare între ele (S.G.M., IV).

[1) $y = \pm \frac{b^2}{a^2} x$, care taie curbele în punctele reale. Tangentele sînt paralele cu bisectoarele.

2) Două soluții: $M\left(a, \sqrt{-2a^2 + \sqrt{4a^2 + b^2}}\right)$ și simetricul său față de Ox].

15. Fie A punctul unde directoarea unei parabole date întîlnește axa ei de simetrie: Se duce cercul cu centrul în A, tangent exterior parabolei. O secantă variabilă care trece prin vîrful parabolei taie cercul în punctul N și parabola în M. Să se afle locul geometric al intersecției tangentelor în M și N la parabolă și la cerc (S.G.M., V).

[$x + 3p = 0$, paralelă la Oy.]

16. 1) Să se arate că pentru ca patru puncte, așezate pe parabola $y^2 - 2px = 0$ să fie conciclice, ordonatele lor trebuie să verifice relația

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.$$

2) Fie A și B două puncte fixe pe o parabolă. Un cerc variabil care trece prin A și B mai taie parabola în M și N.

Ținînd seama de relația de la (1), să se afle locul geometric al intersecției tangentelor în M și N la parabolă (S.G.M., VI).

[1) Se elimină x între ecuația parabolei și a unui cerc oarecare și se găsește o ecuație de gradul al IV-lea în y, fără termenul de gradul al III-lea.

2) Fie $A\left(\frac{a^2}{2p}, a\right)$, $B\left(\frac{b^2}{2p}, b\right)$, $M\left(\frac{\alpha^2}{2p}, \alpha\right)$, $N\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$.

Avem $\alpha + \beta + a + b = 0$. Se găsește locul $y = \frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{a + b}{2}$, o paralelă la Ox.]

17. Se dă elipsa raportată la axele sale și parabola care are vîrful în centrul elipsei, iar focarul F comun cu al elipsei.

1) Să se arate că aceste două curbe se taie sub unghiul dat de relația

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1 + e}{e(1 - e)}} \quad (e = \text{excentricitatea elipsei}).$$

2) Distanța de la unul din punctele de intersecție M pînă la focar este

$$MF = \frac{a^2 + c^2}{a + c} \text{ (S.G.M., VII)}.$$

18. Raportate la un sistem de axe ortogonale se dau punctele: $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$ și dreapta (d) de ecuație $y = p$. Dreapta (d) intersectează

segmentul AC în D și segmentul BC în E. Se notează cu D' și E' respectiv proiecțiile lui D și E pe AB.

1. Să se determine p astfel ca cercul cu diametrul DE să fie tangent la AB, apoi să se afle coordonatele punctului de tangență.

2. Să se afle locul geometric al centrului dreptunghiului $DD'E'E$ cînd p variază.

3. Să se determine valoarea lui p pentru care aria dreptunghiului $DD'E'E$ este maximă.

(Bacalaureat, iunie 1968)

[1) $p = \frac{3}{2}$; $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. 2) $3x + 2y - 3 = 0$. 3) $p = \frac{3}{2}$.]

19. Se dă mulțimea de elipse care au aceeași axă mare $AA' = 2a$. Pe fiecare elipsă din această mulțime se consideră punctul P, din primul cadran xOy, care se proiectează în focarul $F(m, 0)$ și se notează cu C proiecția originii axelor pe tangenta în P la elipsă.

a) Să se determine și să se figureze arcele de curbă (C) și (P) pe care se găsesc toate punctele C și P corespunzătoare elipselor din mulțimea dată.

b) Se notează cu K intersecția tangentei în P la una din elipse cu axa yy', iar cu I intersecția tangentei în P la curba (P) cu tangenta în C la curba (C). Să se calculeze coordonatele punctelor K și I și să se interpreteze rezultatele.

c) Să se afle ecuația acelei elipse din mulțimea dată, pentru care unghiul ascuțit φ format de cele două tangente în P la elipsă și la curbă (P) are valoarea maximă.

[a) (C) $x^2 + y^2 - ay = 0$; (P) $y = -\frac{x^2}{a} + a$, numai arcele din cadranul I. b) $K(0, a)$; $I\left(\frac{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{2}, a\right)$, λ semiaxa pe Oy. c) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{3a^2 - 2\lambda^2}$. Elipsa căutată $x^2 + 2y^2 - a^2 = 0$].

20. Se dă cercul (C) de ecuație $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ și un punct M mobil pe acest cerc. Fie (C_1) cercul cu centrul în M, tangent în P la axa Ox, iar (C_2) cercul cu centrul în M, tangent în Q la axa Oy. Fie DE coarda comună a cercurilor (C) și (C_1), iar FG coarda comună a cercurilor (C) și (C_2). Dreptele MP și DE se intersectează în I, iar dreptele MQ și FG se intersectează în H.

1. Să se arate că punctul I este mijlocul segmentului MP.

2. Să se afle locul geometric al punctului I cînd M parcurge cercul (C).

3. Să se arate că suma distanțelor punctului O la dreptele DE și FG este constantă, atunci cînd M parcurge cercul (C).

4. Să se exprime aria triunghiului IOH în funcție de abscisa punctului M și de raza cercului (C) și să se afle maximul acestei arii cînd M descrie cercul (C).

(Bacalaureat, iunie 1967)
[2] Elipsă.]

21. Să se scrie ecuația parabolei raportată la axa $x'x$ ca axă de simetrie, axa $y'y$ ca tangentă la vîrf și cu focarul în punctul $F(3, 0)$; pe această parabolă se consideră un punct mobil P. Să se arate că punctul de intersecție N al perpendicularei dusă din O pe tangenta în P la parabolă cu dreapta FP, se deplasează pe cercul $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

(Bacalaureat, august 1970, enunț parțial)

Să se dea și o soluție pe cale geometrică.

22. Se dau ecuațiile $x^2 - y^2 = 5$ și $xy = 6$.

1. Să se precizeze ce curbă reprezintă fiecare ecuație și să se afle coordonatele punctelor de intersecție ale celor două curbe.

2. Să se scrie ecuațiile tangentelor la cele două curbe în punctul lor comun M situat în primul cadran și să se verifice că ele sînt perpendiculare.

3. Tangenta la prima curbă în M intersectează asimptotele acestei curbe în punctele A și B, iar tangenta la curba a doua, în același punct, intersectează asimptotele curbei a doua în punctele C și D. Să se arate că punctele A, B, C, D sînt vîrfurile unui pătrat.

(Bacalaureat, iunie 1966)
[1) $M(3, 2)$, $M'(-3, -2$.]

Nr. colilor de tipar : 9,5
Tiraj : 57 600 ex.
Bun de tipar : 28.XI.1973

Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.
Com. nr. 30 717/20 489