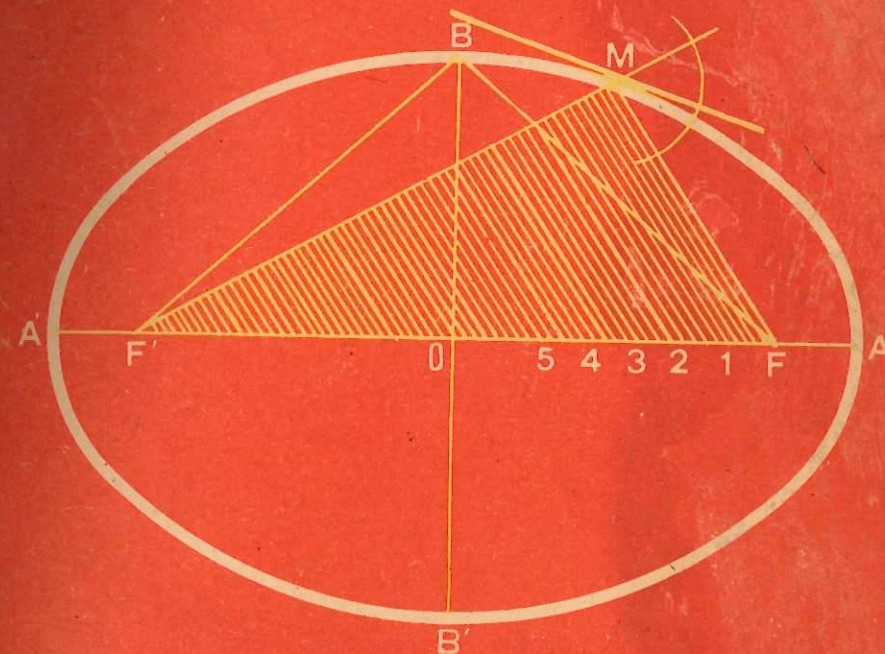


$$\begin{cases} y = n+1, & g(x), \\ \frac{x}{n} + \frac{5}{7} = 0 & f(n) \end{cases}$$

CONSTANTIN UDRIȘTE

VALERIA TOMULEANU

MATEMATICĂ



GEOMETRIE ANALITICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI, 1985

Conf. univ. dr. Constantin Udriște

Prof. Valeria Tomuleanu

MATEMATICĂ

GEOMETRIE ANALITICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A XI-A



Editura Didactică și Pedagogică — București

Partea teoretică a fost realizată de Constantin Udriște, iar problemele au fost realizate de ambii autori.

La redactarea finală s-a ținut seama de literatura de specialitate existentă și de observațiile și sugestiile deosebit de utile făcute de prof. univ. dr. docent Radu Miron, prof. univ. dr. Octavian Stănășilă, conf. univ. dr. Vasile Oproiu, dr. Zaharia Stoian, lector univ. dr. Stere Ianuș, asistent univ. dr. Oltin Dogaru, prof. gr. I Ion Maftei, prof. gr. I Livia Petrescu, prof. gr. I Mihaela Săcuiu, prof. gr. I Gheorghe Vernic.

Referenți: lector univ. dr. STERE IANUȘ
prof. gr. I MIHAELA SĂCUIU
prof. gr. I ION MAFTEI

Redactor: prof. VIORICA FĂTU
Tehnoredactor: ION MIREA
Coperta: ELISABETA VERONICA DUMITRACHE

Capitolul I

CALCUL VECTORIAL

§ 1. Vectori liberi

Un vector liber are trei elemente caracteristice: *direcție, sens și lungime (normă sau modul)*. Acestea vor fi definite în continuare. Precizăm însă de la început că nu orice entitate descrisă prin „direcție, sens și mărime” este un vector liber.

Fie A și B două puncte din plan. Segmentul $[AB]$ este bine determinat de extremitățile sale A și B , iar sensul de parcurs pe un asemenea segment este bine determinat de o ordonare a acestor extremități. Aceste observații justifică următoarea:

Definiție. O pereche ordonată (A, B) de puncte din plan se numește **segment orientat** (vector legat în punctul A) și se notează cu $\vec{AB}$.

Fie $\vec{AB}$ un segment orientat. Punctul A se numește *originea* lui $\vec{AB}$, iar punctul B se numește *extremitatea* lui $\vec{AB}$. Dacă $A \neq B$, atunci segmentul orientat $\vec{AB}$ se reprezintă grafic prin săgeata care unește pe A cu B (fig. I. 1). În cazul când $A = B$ se obține ceea ce se numește *segmentul orientat nul* $\vec{AA}$, care se reprezintă grafic prin punctul A .

Segmentele orientate $\vec{AB}$ și $\vec{CD}$ se numesc:

- 1) *egale*, dacă $A = C$ și $B = D$ (coincid);
- 2) *opuse*, dacă $A = D$ și $B = C$.

Dreapta determinată de segmentul orientat $\vec{AB}$ se numește *dreapta suport* a lui $\vec{AB}$ și se notează cu AB . Această dreaptă este unic determinată numai dacă $A \neq B$; orice dreaptă care trece prin punctul A este dreaptă suport pentru segmentul orientat nul $\vec{AA}$. Două segmente orientate se numesc *coliniare* dacă dreptele lor suport sînt egale (coincid); două segmente orientate se numesc *paralele* dacă dreptele suport corespunzătoare sînt paralele.

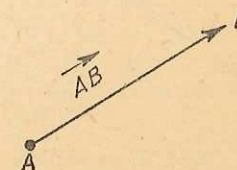


Fig. I. 1.

Două drepte d și d' din plan se numesc „egale sau paralele“ dacă $d \subset d'$, $d' \subset d$ (coincid) sau $d \cap d' = \emptyset$ (sînt disjuncte).

Teoremă*. Relația binară „egale sau paralele“ este o relație de echivalență pe mulțimea dreptelor din plan.

Demonstrație. Relația „egale sau paralele“ este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Reflexivitatea este totuna cu egalitatea. Simetria rezultă din reflexivitate și din simetria paralelismului între drepte: dacă $d = d'$, atunci și $d' = d$; dacă $d \parallel d'$, atunci și $d' \parallel d$. Tranzitivitatea decurge din faptul că două drepte paralele cu o a treia sînt sau egale sau paralele.

Reamintim că o relație de echivalență definită pe o mulțime determină o împărțire a mulțimii respective în clase de echivalență (submulțimi disjuncte), într-o clasă de echivalență intrînd toate elementele echivalente între ele. În cazul relației „egale sau paralele“ definită pe mulțimea dreptelor din plan, clasele de echivalență se numesc *direcții*. Cu alte cuvinte o *direcție* este o familie de drepte paralele (fig. I. 2), fiecare dreaptă din această familie fiind un reprezentant al direcției din care face parte. Astfel „direcția unei drepte“ se utilizează ca sinonim pentru „familia de drepte paralele cu o dreaptă dată“ sau pentru „clasa de echivalență determinată de dreapta respectivă în raport cu relația egale sau paralele“.

Un segment orientat nenul $\overrightarrow{AB}$ determină în mod unic dreapta suport AB . De aceea direcția dreptei suport poate fi atașată direct oricărui segment orientat care determină dreapta. Astfel direcția dreptei AB se numește *direcția segmentului orientat nenul* $\overrightarrow{AB}$. Ținînd seama că dreapta suport a unui segment orientat nul nu este unic determinată, admitem că direcția unui asemenea segment este *nedeterminată*.

Definiție. Se spune că două segmente orientate au aceeași direcție dacă:

- 1) ambele sînt nenule și dreptele lor suport aparțin aceleiași direcții, sau
- 2) ambele sînt nule.

Teoremă. Relația binară „aceeași direcție“ pentru segmente orientate este o relație de echivalență pe mulțimea segmentelor orientate.

Demonstrație. Temă.

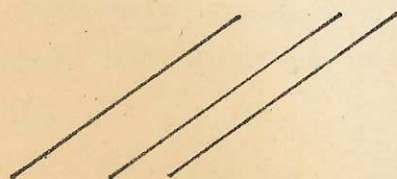


Fig. I. 2

Pentru segmentele orientate nenule direcțiile sînt clasele de echivalență ale dreptelor suport relativ la relația „egale sau paralele“. Cu alte cuvinte două segmente orientate nenule au aceeași direcție dacă și numai dacă ele sînt coliniare sau paralele.

* Fie E o mulțime oarecare nevidă. Se numește *relație binară* pe E o submulțime a produsului cartezian $E \times E$. O relație binară pe E care este reflexivă, simetrică și tranzitivă se numește *relație de echivalență* pe E .

Fie d o dreaptă din plan. Pe dreapta d se pot stabili două și numai două sensuri de parcurs (ordini ale punctelor dreptei, consecință a axiomelor de ordine) pe care le vom nota prin săgeți. O dreaptă d împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește *dreaptă orientată* (fig. I. 3).

Definiție. Două segmente orientate nenule coliniare au același sens dacă sensurile de parcurs determinate pe dreapta suport comună coincid.

Două segmente orientate nenule paralele au același sens dacă extremitățile lor se află în același semiplan determinat de dreapta care unește originile segmentelor (fig. I. 4).

Teoremă. Relația binară „aceleași sens“, pentru segmente orientate nenule de aceeași direcție, este o relație de echivalență.

Demonstrație. Temă.

Două segmente orientate nenule care au același sens au implicit și aceeași direcție. Clasele de echivalență relative la relația „aceleași sens“ se numesc *sensuri*. Evident există numai două asemenea clase: *sensul inițial* impus de un segment orientat nenul fixat și *opusul* său. Admitem că sensul unui segment orientat nul este *nedeterminat*.

Familia de drepte paralele cu o dreaptă dată este direcția dreptei respective. O direcție pentru care s-a fixat același sens (de parcurs) pe toate dreptele pe care le conține se numește *direcție orientată* (fig. I. 3). Pentru fixarea unei direcții orientate este suficientă indicarea unui segment orientat nenul pe una dintre dreptele familiei numită direcție.

Fie $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat. Prin *lungimea (norma sau modulul)* lui $\overrightarrow{AB}$ înțelegem lungimea segmentului neorientat $[AB]$, adică distanța dintre punctele A și B . Un segment orientat nul are lungimea zero și reciproc orice segment orientat de lungime zero este nul. Două segmente neorientate care au aceeași lungime se numesc *segmente congruente*.

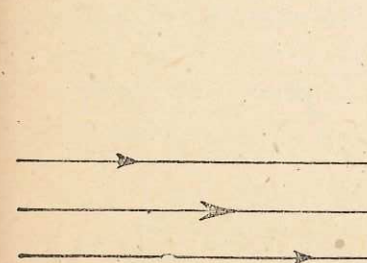


Fig. I. 3

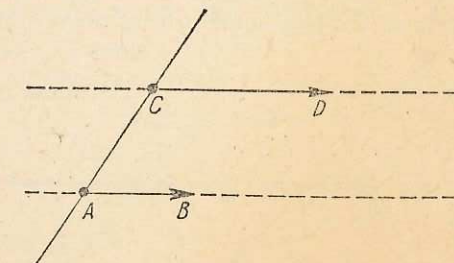


Fig. I. 4

Definiție. Două segmente orientate au aceeași lungime dacă segmentele neorientate corespunzătoare sînt congruente.

Teoremă. Relația binară „aceeași lungime” pentru segmente orientate este o relație de echivalență.

Demonstrație. Relația „aceeași lungime” pentru segmente orientate este definită prin relația de congruență pentru segmente neorientate, iar aceasta din urmă este o relație de echivalență.

* * *

Relațiile binare „aceeași direcție”, „același sens” și „aceeași lungime” pentru segmentele orientate din plan generează o nouă relație binară pentru segmentele orientate, esențială în definirea noțiunii de vector liber.

Definiție. Două segmente orientate nenule se numesc echipolente dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu $\overrightarrow{CD}$, atunci vom scrie $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Temă. Să se demonstreze implicația $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$ (fig. I. 5).

Teoremă. Relația de echipolență pentru segmente orientate nenule este o relație de echivalență.

Demonstrație. Relația de echipolență este reflexivă, simetrică și tranzitivă deoarece fiecare dintre relațiile „aceeași direcție”, „același sens” și „aceeași lungime” satisfac aceste trei proprietăți.

Prelungim relația de echipolență și la segmentele orientate nule: toate segmentele orientate nule sînt echipolente între ele. Astfel obținem o relație de echipolență pe mulțimea tuturor segmentelor orientate din plan care este o relație de echivalență.

Definiție. Clasele de echivalență ale segmentelor orientate, relative la relația de echipolență, se numesc vectori liberi.

Cu alte cuvinte un *vector liber* este o submulțime a mulțimii tuturor segmentelor orientate care se bucură de proprietățile: (1) este formată din segmente echipolente între ele și (2) conține toate segmentele echipolente cu un segment fixat al său. Fiecare segment orientat din clasa numită vector liber este un *reprezentant* al clasei. Direcția, sensul și lungimea care sînt respectiv comune tuturor segmentelor orientate ce definesc un vector liber se numesc

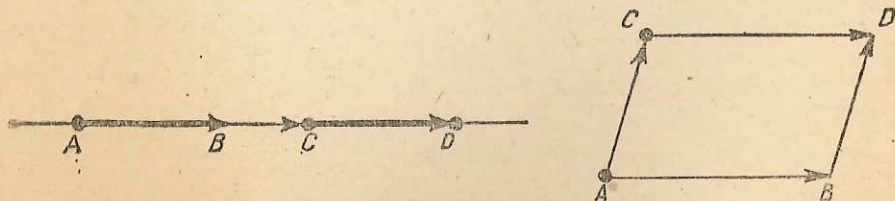


Fig. I. 5

direcția, sensul și lungimea vectorului liber. Intuitiv vectorul liber poate fi gândit ca un segment orientat care migrează în plan păstrându-și direcția și sensul.

Vectorii liberi se notează cu litere mici cu bară deasupra $\bar{a}, \bar{b}, \dots$, iar în desen sînt reprezentanți printr-unul dintre segmentele orientate echipolente care definesc clasa numită vector. În contextul reprezentanților vectorii liberi se mai notează și prin $\overline{AB}, \overline{CD}, \dots$; evident $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$, adică $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al lui $\overline{AB}$.

Presupunem că am fixat o unitate de măsură (etalon) pentru lungimile segmentelor neorientate. În acest caz lungimea unui vector liber va fi dată printr-un număr real pozitiv care reprezintă măsura comună a tuturor segmentelor neorientate corespunzătoare segmentelor orientate din clasa numită vector, în raport cu unitatea de măsură. Notății pentru lungime: $\|\bar{a}\|, \|\overline{AB}\|, d(A, B)$.

Vectorul liber caracterizat prin faptul că are lungimea zero, iar direcția și sensul sînt nedeterminate se numește *zero* sau *vector nul*. El se notează cu $\bar{0}$ și este reprezentat de orice segment orientat $\overrightarrow{AA}$.

Un vector de lungime unu se numește *versor* sau *vector unitar* (unitate).

Vectorii liberi care au aceeași direcție se numesc *vectori coliniari*. Vectorul zero este coliniar cu orice alt vector. Reprezentanții vectorilor coliniari sînt segmente orientate coliniare sau paralele. Doi vectori coliniari care au aceeași lungime însă au sensuri opuse se numesc *vectori opuși*. Dacă unul dintre ei este notat cu $\bar{a}$, atunci opusul său este notat cu $-\bar{a}$ (fig. I. 6).

Doi vectori liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt *egali*, și se scrie $\bar{a} = \bar{b}$, dacă reprezentanții lor sînt echipolenți sau, echivalent, dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Notăm planul cu p și mulțimea vectorilor liberi din plan cu V . În p fixăm un punct O pe care îl vom numi *origine*. Oricărui alt punct $M \in p$ îi corespunde un vector liber și numai unul $\overline{OM} \in V$ al cărui reprezentant este segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$. Într-adevăr, dacă $M \neq M'$, atunci $\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{OM'}$ și deci $\overline{OM} \neq \overline{OM'}$. Reciproc, oricărui vector $\bar{r}$ îi corespunde un punct M și numai unul, astfel încît $\overrightarrow{OM}$ să reprezinte pe $\bar{r}$. Vectorul $\overline{OM}$ se numește *vectorul de poziție* al punctului M față de punctul origine O , iar observațiile precedente se rezumă prin teorema următoare.

Teoremă. Fie O punctul origine. Funcția care asociază fiecărui punct $M \in p$ vectorul său de poziție $\overline{OM} \in V$ este o bijecție între p și V .

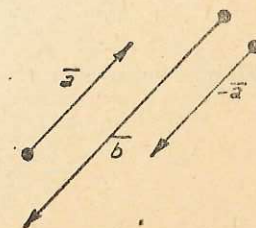


Fig. I. 6

1. Fie O un punct din plan și $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat. Să se figureze:

- 1) mulțimea C a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au aceeași lungime cu $\overrightarrow{AB}$;
- 2) mulțimea D a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au aceeași direcție cu $\overrightarrow{AB}$;
- 3) mulțimea S a extremităților segmentelor orientate cu originea O care au același sens cu $\overrightarrow{AB}$.

Să se găsească: $C \cup D$, $C \cap D$; $C \cup S$, $C \cap S$; $D \cup S$, $D \cap S$.

2. Fie d o dreaptă și $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat. Să se determine mulțimea extremităților segmentelor orientate cu originea pe d care au aceeași direcție și aceeași lungime cu $\overrightarrow{AB}$. Să se formuleze și să se rezolve o problemă analogă pentru cercul de centru O și rază r .
3. Fie O un punct din plan. Să se arate că aplicația care asociază fiecărui vector liber reprezentantul său cu originea O este o bijecție între mulțimea vectorilor liberi și mulțimea segmentelor orientate cu originea O .

§ 2. Adunarea vectorilor

Fie punctele O, A, B și O', A', B' . Dacă $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ și $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, atunci $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$.

Lăsând pe seama cititorului celelalte cazuri, noi ne vom referi la cazul din figura I. 7: $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ implică $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{OO'}$, iar $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ implică $\overrightarrow{BB'} \sim \overrightarrow{AA'}$; prin tranzitivitate $\overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{BB'}$ și deci $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$. Această observație stă la baza definiției sumei a doi vectori liberi.

Definiție. Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori liberi. Fie $\overrightarrow{OA}$ un reprezentant al vectorului $\vec{a}$ și $\overrightarrow{AB}$ un reprezentant al vectorului $\vec{b}$. Vectorul liber $\vec{c}$ reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$ se numește suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și se notează $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ sau $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (fig. I. 8).

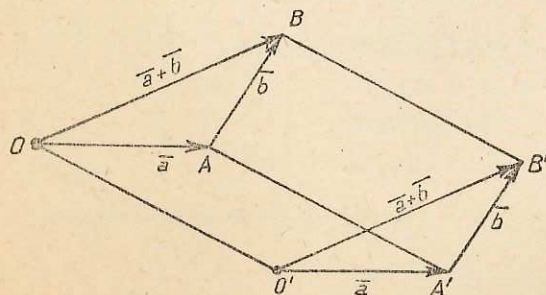


Fig. I. 7

Regula cuprinsă în definiția precedentă, pentru determinarea sumei a doi vectori liberi, se numește *regula triunghiului*.

Adunarea vectorilor
 $+ : V \times V \rightarrow V, (\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$
 este o lege de compoziție internă bine definită deoarece

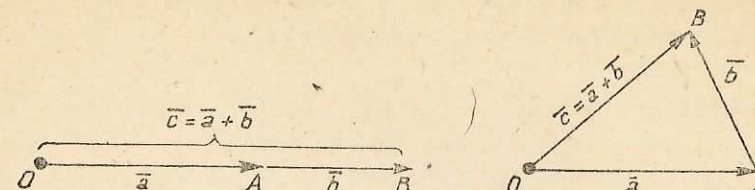


Fig. I. 8

vectorul liber $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ nu depinde de alegerea punctului O . Într-adevăr, dacă fixăm un alt punct O' și efectuăm construcția din figura I. 7, avem șirul de implicații

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{AA'} \\ \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{BB'} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OO'} \sim \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'},$$

adică $\overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{O'B'}$ sînt reprezentanți ai aceluiași vector liber.

Temă. Să se analizeze cazul coliniarității.

Teoremă. Adunarea vectorilor liberi are următoarele proprietăți:

- 1) *asociativitate*: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$;
- 2) *0 este element neutru*: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a} \in V$;
- 3) *opusul lui $\vec{a}$ este simetricul lui $\vec{a}$* : $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}, \forall \vec{a} \in V$;
- 4) *comutativitate*: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$.

Demonstrație. Cazurile specifice coliniarității sînt lăsate drept teme. 1) Ținem seama de definiția adunării și urmărim figura I.9: $\overrightarrow{OB}$ este reprezentantul sumei $\vec{a} + \vec{b}$, iar $\overrightarrow{OC}$ este reprezentantul sumei $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul sumei $\vec{b} + \vec{c}$, iar $\overrightarrow{OC}$ este reprezentantul sumei $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Rezultă $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, ca vectori liberi definiți de același reprezentant.

Această proprietate permite să scriem $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ în loc de $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ sau de $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

2)–3). **Temă.**

4) Fie $\vec{a}, \vec{b} \in V$. Urmărim figura I. 10: $\overrightarrow{AB}$ este reprezentantul lui $\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}$ este reprezentantul lui $\vec{b}$, iar $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul lui $\vec{a} + \vec{b}$; de asemenea

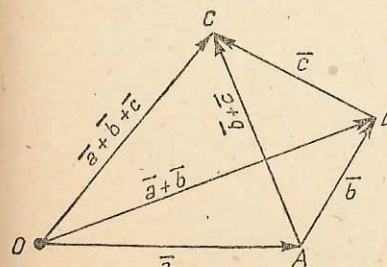


Fig. I. 9

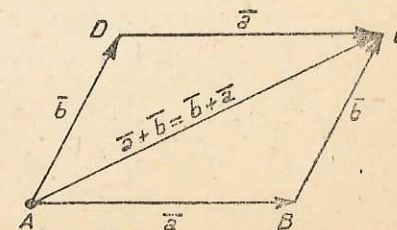


Fig. I. 10

$\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{BC}$ reprezintă pe $\vec{b}$, $\overrightarrow{DC} \sim \overrightarrow{AB}$ reprezintă pe $\vec{a}$, iar $\overrightarrow{AC}$ reprezintă pe $\vec{b} + \vec{a}$. Rezultă $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Această proprietate conduce la o nouă regulă pentru determinarea sumei a doi vectori nenuli, necoliniari, numită *regula paralelogramului*; se desenează $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} \in \vec{b}$ și se determină punctul C cu proprietatea că $ABCD$ este un paralelogram; segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$ este reprezentantul lui $\vec{a} + \vec{b}$.

Proprietățile 1), 2), 3) arată că adunarea definește pe V ceea ce se numește o *structură de grup aditiv*, iar proprietatea 4) arată că acest grup este *comutativ*. De aceea V se mai numește și *grupul aditiv comutativ al vectorilor liberi*.

Fie vectorii liberi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Prin suma acestor n vectori înțelegem vectorul obținut adunând pe $\vec{a}_1$ cu $\vec{a}_2$, apoi rezultatul cu $\vec{a}_3$ și așa mai departe pînă la $\vec{a}_n$. Asociativitatea adunării vectorilor are drept consecință faptul că suma celor n vectori este bine definită, adică ea nu se schimbă dacă înlocuim o parte din termenii consecutivi cu suma lor. Această observație permite notația simplificată $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$. În plus, comutativitatea permite să schimbăm ordinea termenilor.

Fie punctele $O, A_1, \dots, A_n$ astfel încît $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}$, ..., $\vec{a}_n = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ (fig. I. 11). Găsim $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3 = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{OA_3}$, ..., $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_{n-1}) + \vec{a}_n = \overrightarrow{OA_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{OA_n}$. Acest mod de adunare a celor n vectori se numește *regula poligonului* și este o generalizare a regulii triunghiului.

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori liberi. Suma dintre vectorul $\vec{a}$ și opusul lui $\vec{b}$, adică $\vec{a} + (-\vec{b})$, se numește *diferența dintre vectorul $\vec{a}$ și vectorul $\vec{b}$* și se notează cu $\vec{a} - \vec{b}$. Dacă $\overrightarrow{AB}$ este reprezentantul lui $\vec{a}$, iar $\overrightarrow{AD}$ este reprezentantul lui $\vec{b}$, atunci reprezentantul lui $\vec{a} - \vec{b}$ este $\overrightarrow{DB}$ (fig. I. 12). Cu alte cuvinte, dacă fixăm pe A drept origine, atunci vectorul liber definit de segmentul orientat $\overrightarrow{DB}$ este egal cu diferența dintre vectorul de poziție al extremității B a segmentului $\overrightarrow{DB}$ și vectorul de poziție al originii D a segmentului $\overrightarrow{DB}$.

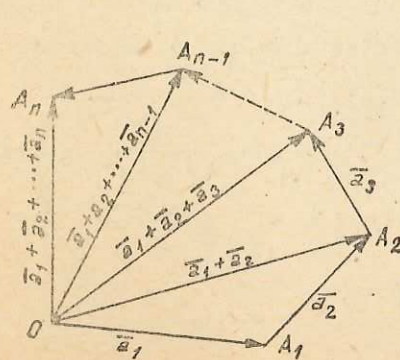


Fig. I. 11

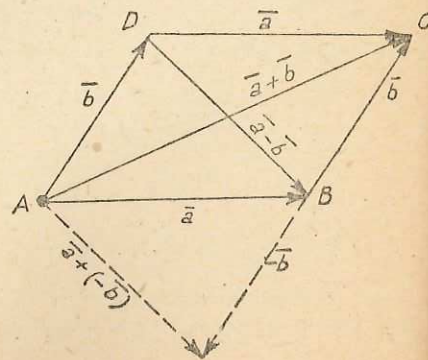


Fig. I. 12

Operația care asociază fiecărei perechi $(\vec{a}, \vec{b})$ diferența $\vec{a} - \vec{b}$ se numește *scăderea vectorilor*. Proprietățile scăderii vectorilor sînt consecințe ale proprietăților adunării vectorilor.

Comparînd relațiile $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ ajungem la concluzia că într-o egalitate vectorială, „putem trece un termen dintr-o parte în alta” cu condiția să-l înlocuim cu opusul său.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie segmentul $[AB]$ și M_0 mijlocul său. Să se verifice că pentru orice punct M din plan avem $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{MM_0}$.

Soluție (fig. I. 13). Regula triunghiului dă $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0A}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0B}$, iar definiția opusului conduce la $\overrightarrow{M_0A} = -\overrightarrow{M_0B}$. Acestea implică $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0A}) + (\overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0B}) = (\text{asociativitate și comutativitate}), (\overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{MM_0}) + (\overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{M_0B}) = (\overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{MM_0}) + \vec{0} = (\vec{0} \text{ este element neutru}), \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{MM_0}$.

2. Fie un dreptunghi $ABCD$. Dacă M este un punct din plan astfel încît $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$, atunci să se exprime suma $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ în funcție de $\overrightarrow{BA}$.

Soluție (fig. I. 14). Succesiv găsim $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = (\text{regula triunghiului}), (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD}) = (\text{asociativitate și comutativitate}), (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}) = (\vec{0} \text{ este element neutru}), \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$.

3. Să se demonstreze egalitățile

$$(\vec{a} + \vec{c}) - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b}, (\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

Soluție. Deoarece justificările sînt de aceeași natură pentru ambele egalități, o vom demonstra numai pe prima. Deoarece $(\vec{b} + \vec{c}) + [(-\vec{b}) + (-\vec{c})] = [\vec{b} + (-\vec{b})] + [\vec{c} + (-\vec{c})] = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ rezultă că opusul lui $\vec{b} + \vec{c}$, adică $-(\vec{b} + \vec{c})$ este egal cu $(-\vec{b}) + (-\vec{c})$. De aceea $(\vec{a} + \vec{c}) - (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{c}) + [(-\vec{b}) + (-\vec{c})] = (\vec{a} + \vec{c}) + [(-\vec{b}) + (-\vec{c})] = [\vec{a} + (-\vec{b})] + [\vec{c} + (-\vec{c})] = (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{0} = \vec{a} - \vec{b}$.

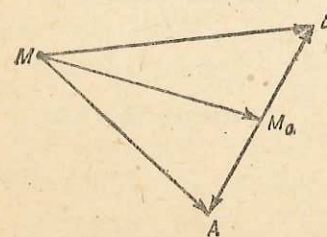


Fig. I. 13

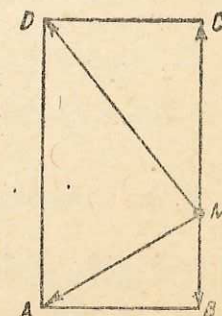


Fig. I. 14

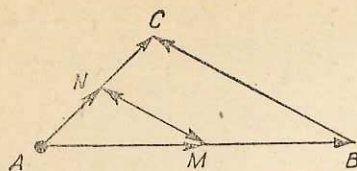


Fig. I. 15

4. Fie triunghiul ABC și M, N respectiv mijloacele laturilor $[AB]$ și $[AC]$. Să se arate că $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}$.

Soluție (fig. I. 15). Mai întâi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Pe de altă parte, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}$. Rezultă $\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AN}) - (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}$.

5. Asupra punctului material M din plan acționează forțele $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ca în figura I.16. Știind că direcțiile forțelor $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$ sunt ortogonale, că unghiul dintre direcțiile forțelor $\vec{f}_2$ și $\vec{f}_3$ este de 45° și că $\|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = \sqrt{2}$ daN, $\|\vec{f}_3\| = 3$ daN, să se determine direcția, sensul și mărimea forței rezultante ce acționează asupra punctului M .

Soluție. Regula paralelogramului arată că $\vec{r}_1$ este rezultanta (suma) forțelor $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$. Direcția și sensul lui $\vec{r}_1$ sunt indicate pe figură, iar lungimea lui $\vec{r}_1$ este $\|\vec{r}_1\| = \sqrt{\|\vec{f}_1\|^2 + \|\vec{f}_2\|^2} = 2$ daN. Adunând pe $\vec{r}_1$ cu $\vec{f}_3$ (regula paralelogramului) găsim rezultanta căutată $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{f}_3$.

Fie α unghiul ascuțit dintre direcția lui $\vec{r}_1$ și direcția lui $\vec{r}$, iar β unghiul ascuțit dintre direcția lui $\vec{f}_2$ și direcția lui $\vec{r}$. Evident $\alpha = \beta + 45^\circ$, iar β este mai mic decât 45° . Din figura I. 16 se observă că $\tan \alpha = \frac{\|\vec{f}_3\|}{\|\vec{r}_1\|}$, adică $\alpha = \arctg \frac{3}{2}$. Rezultă $\beta = \arctg \frac{3}{2} - 45^\circ$ și astfel direcția rezultantei $\vec{r}$ este precizată în raport cu direcția lui $\vec{f}_2$. Sensul lui $\vec{r}$ este marcat pe figură, iar $\|\vec{r}\| = \sqrt{\|\vec{r}_1\|^2 + \|\vec{f}_3\|^2} = \sqrt{13}$ daN.

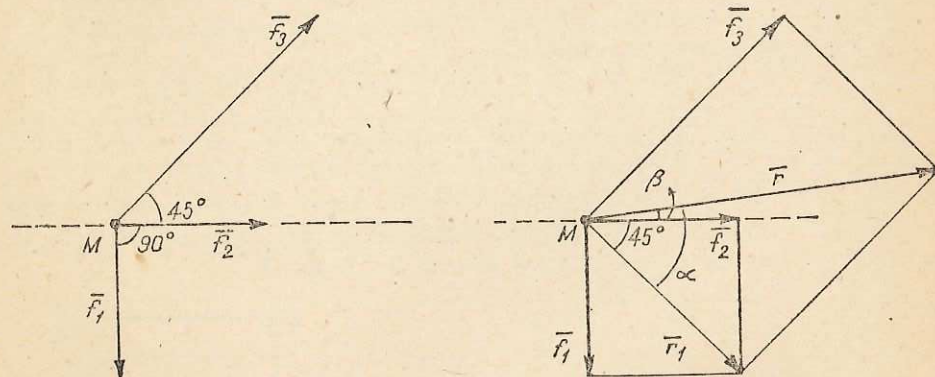


Fig. I. 16

§ 3. Înmulțirea vectorilor cu numere reale

Fie $\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale, iar V mulțimea vectorilor liberi din plan.

Definiție. Fie $t \in \mathbb{R}$ și $\vec{a} \in V$. Prin produsul dintre vectorul $\vec{a}$ și numărul real t vom înțelege vectorul $t\vec{a}$ definit astfel:

1) dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $t \neq 0$, atunci $t\vec{a}$ este vectorul care are aceeași direcție cu $\vec{a}$, același sens cu $\vec{a}$ dacă $t > 0$ și sens contrar dacă $t < 0$, lungimea $|t| \|\vec{a}\|$ (fig. I. 17);

2) dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $t = 0$, atunci $t\vec{a} = \vec{0}$.

Din definiție decurge că $t\vec{a}$ este un vector colinar cu $\vec{a}$.

Exemple. 1) Vectorul $(-1)\vec{a}$ are aceeași direcție cu $\vec{a}$, sensul contrar sensului lui $\vec{a}$ și lungimea egală cu lungimea lui $\vec{a}$. De aceea $(-1)\vec{a}$ este opusul lui $\vec{a}$, adică $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

2) Vectorul $3\vec{a}$ are direcția lui $\vec{a}$, sensul lui $\vec{a}$ și lungimea egală cu triplul lungimii lui $\vec{a}$.

3) Vectorul $-\frac{1}{2}\vec{a}$ are direcția lui $\vec{a}$, sensul contrar lui $\vec{a}$ și lungimea egală cu jumătate din lungimea lui $\vec{a}$.

4) Oricărui vector $\vec{a}$ de lungime $\|\vec{a}\| > 0$ i se asociază un vector $\vec{a}_0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$, avînd aceeași direcție și același sens cu $\vec{a}$, numit *versorul* lui $\vec{a}$. Într-adevăr, $\|\vec{a}_0\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \right\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \|\vec{a}\| = 1$. Relația de definiție pentru $\vec{a}_0$ este echivalentă cu $\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{a}_0$.

Aplicația definită pe $\mathbb{R} \times V$ cu valori în V care asociază fiecărei perechi ordonate $(t, \vec{a})$ vectorul $t\vec{a}$ este o lege de compoziție externă între elementele lui V și ale lui $\mathbb{R}$ numită *înmulțirea vectorilor liberi cu numere reale*. În contextul acestei operații numerele reale se mai numesc și *scalari*, iar operația în sine *înmulțirea vectorilor liberi cu scalari*.

Teoremă. Înmulțirea vectorilor liberi cu numere reale are următoarele proprietăți:

1) $1\vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a} \in V$;

2) $s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{a} \in V$;

3) *distributivitate față de adunarea numerelor reale:*

$$(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a} \in V;$$

4) *distributivitate față de adunarea vectorilor:*

$$t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V.$$

Demonstrație. Relația 1) este imediată. Dacă numerele reale sau vectorii sînt zero, atunci și relațiile 2), 3), 4) sînt imediate.

2)–3). **Te m ă.**

4) Cazul coliniarității îl lăsam drept temă.

Fie $\vec{OA}$ reprezentantul vectorului $\vec{a}$ și $\vec{AB}$ reprezentantul vectorului $\vec{b}$.

Atunci $\vec{OB}$ este reprezentantul vectorului $\vec{a} + \vec{b}$ (fig. I. 18).

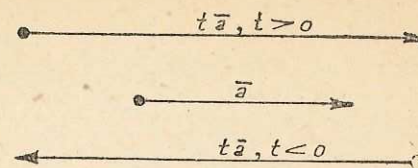


Fig. I. 17

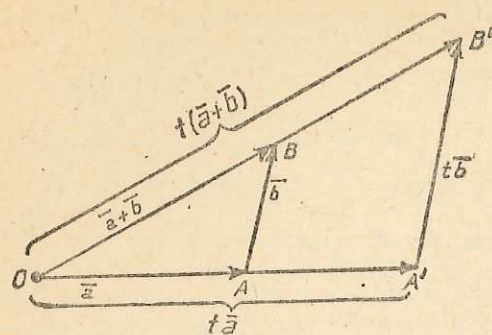


Fig. I. 18

Presupunem $t > 0$ și notăm cu $\overrightarrow{OA'}$ reprezentantul vectorului $t\vec{a}$ și cu $\overrightarrow{OB'}$ reprezentantul vectorului $t(\vec{a} + \vec{b})$. Se observă că $OAB \sim OA'B'$ (fig. I.18) avind un unghi comun și laturile, care determină acest unghi, de lungimi proporționale. Rezultă $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{AB}$, adică $\overrightarrow{A'B'}$ este reprezentantul vectorului

$t\vec{b}$. Deci $\overrightarrow{OB'}$ este reprezentantul sumei $t\vec{a} + t\vec{b}$, adică $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$. Cazul $t < 0$ se tratează analog.

Să prezentăm câteva consecințe directe ale definiției și ale teoremei precedente, consecințe ce constituie puncte de sprijin ale tehnicii de calcul elementar (demonstrațiile sînt lăsate drept teme):

$$-(t\vec{a}) = (-t)\vec{a} = t(-\vec{a}),$$

$$(s - t)\vec{a} = s\vec{a} + (-t)\vec{a} = s\vec{a} + (-t\vec{a}) = s\vec{a} - t\vec{a},$$

$$s(\vec{a} - \vec{b}) = s[\vec{a} + (-\vec{b})] = s\vec{a} + (-s)\vec{b} = s\vec{a} + (-s\vec{b}) = s\vec{a} - s\vec{b},$$

$\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$. Ca urmare, adunarea și scăderea vectorilor liberi, precum și înmulțirea vectorilor liberi cu numere reale au proprietăți analoge adunării, scăderii și înmulțirii numerelor reale.

Proprietățile adunării vectorilor liberi, date în teorema din § 2, și proprietățile înmulțirii vectorilor liberi cu numere reale, date în teorema din acest paragraf, arată că V este ceea ce se numește un *spațiu vectorial peste mulțimea numerelor reale*. Din acest motiv, în cele ce urmează, mulțimea V va fi numită *spațiul vectorial al vectorilor liberi din plan*.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $\vec{a} \in V$ și $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $\underbrace{\vec{a} + \dots + \vec{a}}_{n \text{ termeni}} = n\vec{a}$.

Soluție. Urmărind figura I. 19 se observă că $\underbrace{\vec{a} + \dots + \vec{a}}_{n \text{ termeni}} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \dots +$

$+ \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{OA_n}$, iar $\overrightarrow{OA_n}$ are direcția lui $\vec{a}$, sensul lui $\vec{a}$ și lungimea $n \|\vec{a}\|$.

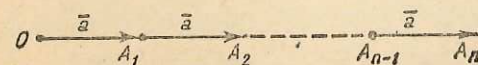


Fig. I. 19

Notă. Relația din această problemă poate fi privită ca o consecință a teoremei din acest paragraf.

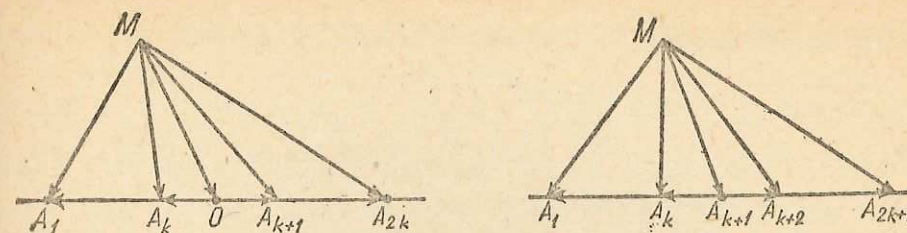


Fig. I. 20

2. Fie d o dreaptă pe care se fixează $n \geq 2$ puncte echidistante. Se notează cu O mijlocul segmentului $[A_1A_n]$ și cu M un punct arbitrar din plan, exterior dreptei d . Să se arate că

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{MA_n} = n\overrightarrow{MO}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

Soluție. Dacă $n = 2k$, atunci punctul O se află între A_k și A_{k+1} , iar dacă $n = 2k + 1$, atunci punctul O coincide cu A_{k+1} (fig. I. 20). Regula triunghiului dă $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pe de altă parte $(\overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_{k+1}}) + \dots + (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}$ sau $\overrightarrow{OA_{k+1}} + \dots + (\overrightarrow{OA_{k-1}} + \overrightarrow{OA_{k+2}}) + \dots + (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_{2k+1}}) = \vec{0}$. De aceea $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$. Astfel găsim

$$\sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MO} = n\overrightarrow{MO}.$$

3. Se dă hexagonul regulat $ABCDEF$. Să se exprime vectorii liberi $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ în funcție de vectorii liberi $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ și $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Soluție (fig. I. 21). Relațiile $AD \parallel BC$, $\overrightarrow{AD}$ are același sens cu $\overrightarrow{BC}$, $d(A, D) = 2d(B, C)$ implică $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$. Aceasta împreună cu $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{b}$ conduc la $\overrightarrow{AD} = 2(\vec{c} - \vec{b})$. Analog, din $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{b} = 2\vec{c} - 3\vec{b}$ găsim $\overrightarrow{AE} = 2\vec{c} - 3\vec{b}$. În final, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{c} = \vec{c} - 2\vec{b}$, deci $\overrightarrow{AF} = \vec{c} - 2\vec{b}$.

4. Se dau vectorii liberi $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Să se calculeze $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $(x + y)(\vec{a} - \vec{b}) - (x - y)(\vec{a} + \vec{b})$.

Soluție. Ținând seama de proprietățile adunării vectorilor și proprietățile înmulțirii dintre vectori și numere reale, obținem

$$\vec{a} + \vec{b} = (\vec{i} + \vec{j}) + (2\vec{i} - \vec{j}) = (\vec{i} + 2\vec{i}) + (\vec{j} - \vec{j}) = 3\vec{i},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (\vec{i} + \vec{j}) - (2\vec{i} - \vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{i} + \vec{j} = -\vec{i} + 2\vec{j},$$

$$(x + y)(\vec{a} - \vec{b}) - (x - y)(\vec{a} + \vec{b}) = (x + y)(-\vec{i} + 2\vec{j}) - (x - y)(3\vec{i}) = -x\vec{i} + 2x\vec{j} - y\vec{i} + 2y\vec{j} - 3x\vec{i} + 3y\vec{i} = (2y - 4x)\vec{i} + (2x + 2y)\vec{j}.$$

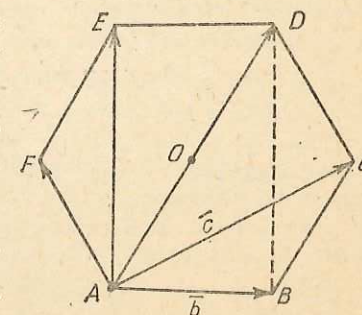


Fig. I. 21

5. Să se discute și să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \lambda \bar{x} + \bar{y} = \bar{a} \\ \bar{x} + \lambda \bar{y} = \bar{b}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluție. În a doua ecuație înmulțim ambele părți cu λ , apoi scădem parte cu parte din prima ecuație. Rezultă $(1 - \lambda^2)\bar{y} = \bar{a} - \lambda\bar{b}$.

Dacă $\lambda \neq \pm 1$, atunci ecuația în $\bar{y}$ are soluție unică $\bar{y} = \frac{1}{1 - \lambda^2}(\bar{a} - \lambda\bar{b})$ și deci sistemul are soluția unică $(\bar{x}, \bar{y})$ unde

$$\bar{x} = \frac{1}{1 - \lambda^2}(\bar{b} - \lambda\bar{a}), \quad \bar{y} = \frac{1}{1 - \lambda^2}(\bar{a} - \lambda\bar{b}).$$

Dacă $\lambda = \pm 1$ și $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, atunci ecuația în $\bar{y}$ este o identitate și sistemul admite soluțiile $(\bar{x}, \bar{y})$, unde $\bar{x} = \bar{b} - \lambda\bar{y}$, $\bar{y} \in V$.

Dacă $\lambda = \pm 1$ și $\bar{a} \neq \lambda\bar{b}$, atunci ecuația în $\bar{y}$ este o imposibilitate și sistemul nu are soluții.

§ 4. Dependență liniară

Fie V spațiul vectorial al vectorilor liberi din plan. Adunarea vectorilor și înmulțirea vectorilor cu numere reale generează exprimări de tipul $\bar{b} = 2\bar{e} + 2\bar{d}$, $\bar{e} = \frac{1}{2}\bar{i} + \pi\bar{j}$, etc.

Fie $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in V$, $n \in \mathbb{N}^*$. Orice vector de forma

$$\bar{a} = t_1\bar{a}_1 + \dots + t_n\bar{a}_n, \quad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$$

se numește *combinație liniară* a celor n vectori $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$.

Definiție. Vectorii $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ se numesc *liniar dependenți* dacă există n numere reale $t_1, \dots, t_n$ nu toate nule astfel încât

$$t_1\bar{a}_1 + \dots + t_n\bar{a}_n = \bar{0}.$$

Vectorii $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ se numesc *liniar independenți* dacă nu sînt liniar dependenți, adică dacă orice relație

$$t_1\bar{a}_1 + \dots + t_n\bar{a}_n = \bar{0} \text{ implică } t_1 = \dots = t_n = 0.$$

Observații. 1) Vectorul liber zero este liniar dependent: $t\bar{0} = \bar{0}$.

2) Orice vector liber nenul este liniar independent: $t\bar{a} = \bar{0}$, $\bar{a} \neq \bar{0} \Rightarrow t = 0$.

3) Dacă $\bar{a} = \bar{0}$ sau $\bar{b} = \bar{0}$, atunci vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ sînt liniar dependenți.

4) Dacă $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ sînt liniar dependenți, atunci și $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}, \dots, \bar{a}_{n+p}$ sînt tot liniar dependenți. O parte dintre vectorii liniar independenți $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ sînt tot vectori liniar independenți.

Vectorii $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ sînt liniar dependenți dacă și numai dacă cel puțin unul dintre ei se poate exprima ca o combinație liniară de ceilalți vectori. Într-adevăr, pentru $t_i \neq 0$, relația $t_1\bar{a}_1 + \dots + t_{i-1}\bar{a}_{i-1} + t_{i+1}\bar{a}_{i+1} + \dots + t_n\bar{a}_n = \bar{0}$ este echivalentă cu

$$\bar{a}_i = -\frac{t_1}{t_i}\bar{a}_1 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i}\bar{a}_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i}\bar{a}_{i+1} - \dots - \frac{t_n}{t_i}\bar{a}_n.$$

Teoremă. Vectorii liberi $\bar{a}, \bar{b} \in V$ sînt liniar dependenți dacă și numai dacă sînt coliniari.

Demonstrație. Presupunem că vectorii $\bar{a}, \bar{b} \in V$ sînt liniar dependenți, adică $r\bar{a} + s\bar{b} = \bar{0}$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Fie $s \neq 0$. Găsim $\bar{b} = -\frac{r}{s}\bar{a}$ și deci $\bar{b}$ și $\bar{a}$ sînt

coliniari (dacă $s = 0$ sau dacă unul dintre vectori este $\bar{0}$, atunci funcționează convenția că vectorul zero are aceeași direcție cu orice vector).

Reciproc, presupunem că $\bar{a}, \bar{b} \in V$ sînt coliniari. Dacă $\bar{a} = \bar{0}$ sau $\bar{b} = \bar{0}$, atunci vectorii $\bar{a}, \bar{b}$ sînt evident liniar dependenți. În caz contrar, adică $\bar{a}, \bar{b} \in V - \{\bar{0}\}$, notăm cu $\bar{a}_0$ versorul lui $\bar{a}$ și cu $\bar{b}_0$ versorul lui $\bar{b}$. Avem $\bar{a} = \|\bar{a}\| \bar{a}_0$, $\bar{b} = \|\bar{b}\| \bar{b}_0$ și $\bar{b}_0 = \pm \bar{a}_0$. Pentru $\bar{b}_0 = \bar{a}_0$ găsim $\bar{b} = \|\bar{b}\| \bar{a}_0 = \|\bar{b}\| \bar{a}_0 = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|} \bar{a}$ și deci $\bar{b} = t\bar{a}$, unde $t = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}$. Deci $t\bar{a} - 1\bar{b} = \bar{0}$, adică $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt liniar dependenți. Analog se justifică cazul $\bar{b}_0 = -\bar{a}_0$.

Deoarece dependența liniară în V este echivalentă cu coliniaritatea rezultă că orice doi vectori liberi necoliniari sînt liniar independenți.

Teoremă. Oricare trei vectori liberi din V sînt liniar dependenți.

Demonstrație. Fie $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$. Dacă doi dintre ei sînt coliniari, atunci aceștia sînt liniar dependenți și deci $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sînt liniar dependenți. Presupunem acum că $\bar{a}$ și $\bar{b}$ nu sînt coliniari, adică sînt liniar independenți. Fie $\vec{OA}, \vec{OB}$ și $\vec{OC}$ reprezentanții lui $\bar{a}, \bar{b}$, și $\bar{c}$ (fig. I.22). Se observă că $\vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON}$. Pe de altă parte, $\vec{OM}$ și $\vec{OA}$ sînt coliniari, adică $\vec{OM} = r\vec{OA}$; analog $\vec{ON} = s\vec{OB}$. Deci $\vec{OC} = r\vec{OA} + s\vec{OB}$ sau altfel scris $\bar{c} = r\bar{a} + s\bar{b}$, adică $r\bar{a} + s\bar{b} - 1\bar{c} = \bar{0}$.

Această teoremă arată că numărul maxim de vectori liniar independenți din V este 2.

Definiție. Numărul maxim de vectori liniar independenți din V , adică 2, se numește *dimensiunea* lui V . O pereche ordonată $(\bar{a}, \bar{b})$ de vectori liberi necoliniari (liniar independenți) se numește *bază* a lui V .

Fie $(\bar{a}, \bar{b})$ o bază în V , fie $\bar{c}$ un vector oarecare din V și $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ reprezentanții vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. După cum am arătat în demonstrația teoremei precedente (fig. I. 22), relația $\vec{OC} = \vec{OM} + \vec{ON} = r\vec{OA} + s\vec{OB}$ este totuna cu

$$\bar{c} = r\bar{a} + s\bar{b},$$

adică orice vector liber $\bar{c}$ poate fi exprimat ca o combinație liniară de $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Se observă că

$$r = \pm \frac{d(O, M)}{d(O, A)}, \quad s = \pm \frac{d(O, N)}{d(O, B)},$$

pentru fiecare luîndu-se $+$ sau $-$ după cum vectorii respectivi $\vec{OM}$ și $\vec{OA}$, $\vec{ON}$ și $\vec{OB}$ sînt

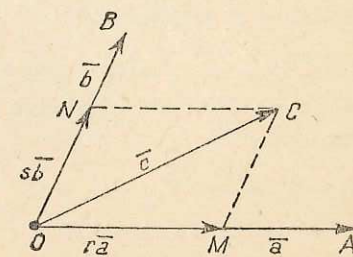


Fig. I.22

de același sens sau de sens opus. Deseori se spune că vectorul $\vec{c}$ a fost *descompus după vectorii bazei*. Descompunerea lui $\vec{c}$ după vectorii bazei este unică. Într-adevăr, sînt adevărate implicațiile:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}, \vec{b} = \text{lin. indep.} \\ \vec{c} = r_1 \vec{a} + s_1 \vec{b} \\ \vec{c} = r_2 \vec{a} + s_2 \vec{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{a}, \vec{b} = \text{lin. indep.} \\ (r_1 - r_2) \vec{a} + (s_1 - s_2) \vec{b} = \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow r_1 - r_2 = 0, s_1 - s_2 = 0,$$

adică $r_1 = r_2, s_1 = s_2$.

Numerele reale r și s definite prin $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$ se numesc *coordonatele* vectorului liber $\vec{c}$ în raport cu baza $(\vec{a}, \vec{b})$. Dacă la fiecare vector $\vec{c}$ îi asociem perechea ordonată (r, s) a coordonatelor lui față de baza $(\vec{a}, \vec{b})$ obținem o corespondență biunivocă între V și $\mathbb{R}^2$. Această corespondență se numește sistem de coordonate pe V determinat de baza $(\vec{a}, \vec{b})$ și se notează prin scrierea alăturată a vectorului și a perechii coordonatelor sale, adică $\vec{c}(r, s)$.

Cazuri particulare: $\vec{0}(0, 0)$, $\vec{a}(1, 0)$, $\vec{b}(0, 1)$.

Teoremă. Fie $\vec{c}_1(r_1, s_1)$ și $\vec{c}_2(r_2, s_2)$ doi vectori liberi dați prin coordonatele lor în raport cu o bază $(\vec{a}, \vec{b})$ fixată în V .

1) Vectorii $\vec{c}_1$ și $\vec{c}_2$ sînt egali dacă și numai dacă au coordonatele corespunzătoare egale, adică

$$\vec{c}_1 = \vec{c}_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2, s_1 = s_2.$$

2) A aduna pe $\vec{c}_1$ cu $\vec{c}_2$ înseamnă a aduna coordonatele corespunzătoare, adică $\vec{c}_1 + \vec{c}_2$ are coordonatele $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$.

3) A înmulți pe $\vec{c}_1$ cu numărul real t înseamnă a înmulți coordonatele lui $\vec{c}_1$ cu t , adică

$$t\vec{c}_1 \text{ are coordonatele } (tr_1, ts_1).$$

4) c_1 este coliniar cu $\vec{c}_2$ dacă și numai dacă coordonatele lor sînt proporționale.

Demonstrație. 2) Ținînd seama de proprietățile operațiilor cu vectori liberi găsim

$$\vec{c}_1 + \vec{c}_2 = (r_1 \vec{a} + s_1 \vec{b}) + (r_2 \vec{a} + s_2 \vec{b}) = (\text{asociativitatea și comutativitatea sumei}, (r_1 \vec{a} + r_2 \vec{a}) + (s_1 \vec{b} + s_2 \vec{b}) = (\text{distributivitatea înmulțirii față de adunarea numerelor reale}), (r_1 + r_2) \vec{a} + (s_1 + s_2) \vec{b}.$$

1), 3), 4) Temă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie a, b, c lungimile laturilor și α, β, γ măsurile unghiurilor unui triunghi. Să se arate că oricare ar fi vectorii $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, următorii vectori sînt liniari dependenți:

$$\begin{array}{ll} 1) a\vec{x} + b\vec{y}, & (\sin \alpha)\vec{x} + (\sin \beta)\vec{y}; \\ 2) b\vec{y} + c\vec{z}, & (\sin \beta)\vec{y} + (\sin \gamma)\vec{z}; \\ 3) c\vec{z} + a\vec{x}, & (\sin \gamma)\vec{z} + (\sin \alpha)\vec{x}. \end{array}$$

Soluție. Ne oprim la cazul 1), celelalte tratîndu-se analog. Teorema sinusurilor implică $a = 2R \sin \alpha, b = 2R \sin \beta$. Rezultă $a\vec{x} + b\vec{y} = (2R \sin \alpha)\vec{x} + (2R \sin \beta)\vec{y} = 2R[(\sin \alpha)\vec{x} + (\sin \beta)\vec{y}]$ și deci 1. $(a\vec{x} + b\vec{y}) - 2R[(\sin \alpha)\vec{x} + (\sin \beta)\vec{y}] = 0$. Deoarece există perechea de numere reale nenule $(1, 2R)$ care au o combinație liniară egală cu vectorul zero, vectorii $a\vec{x} + b\vec{y}, (\sin \alpha)\vec{x} + (\sin \beta)\vec{y}$ sînt liniar dependenți.

2. Fie $\vec{a}, \vec{b}$ doi vectori liniar independenți. Ce relație trebuie să satisfacă numerele x, y, z, u pentru ca vectorii $x\vec{a} + y\vec{b}, z\vec{a} + u\vec{b}$ să fie liniar independenți?

Soluție. Egalitatea $r(x\vec{a} + y\vec{b}) + s(z\vec{a} + u\vec{b}) = \vec{0}$ este echivalentă cu $(rx + sz)\vec{a} + (ry + su)\vec{b} = \vec{0}$. Aceasta din urmă împreună cu ipoteza că $\vec{a}, \vec{b}$ sînt liniar independenți implică $rx + sz = 0, ry + su = 0$. Astfel perechile (r, s) trebuie să fie soluțiile unui sistem liniar și omogen. Sistemul admite numai soluția $r = 0, s = 0$ dacă și numai dacă $xu - yz \neq 0$.

3. Un corp cu greutatea de 200 N este suspendat cu ajutorul unei bare solide articulată la un capăt, de masă neglijabilă, și cu ajutorul unui fir, ca în figura I.23. Să se determine mărimea tensiunii în fir și mărimea forței de compresie a barei.

Soluție. Izolăm punctul M de sistem și figurăm forțele care acționează asupra lui (fig. I.23); $\vec{G}$ este greutatea corpului, $\vec{T}$ este tensiunea în fir, iar $\vec{F}$ este forța de compresie a barei. Sistemul se află în echilibru dacă și numai dacă $\vec{T} + \vec{F} = -\vec{G}$. Cu alte cuvinte vectorul $-\vec{G}$ a fost descompus după vectorii $\vec{T}$ și $\vec{F}$. Rezultă $\|\vec{T}\| = \|\vec{G}\| \cos 30^\circ = 200 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N}$, $\|\vec{F}\| = \|\vec{G}\| \cos 60^\circ = 100 \text{ N}$.

4. Fie triunghiul ABC astfel încît $\vec{BC}, \vec{CA}, \vec{AB}$ să fie reprezentanții vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. În V fixăm baza $(\vec{a}, \vec{b})$. Să se găsească coordonatele vectorilor $\vec{c}, \vec{AA}_1, \vec{BB}_1, \vec{CC}_1$, unde A_1, B_1, C_1 sînt respectiv mijloacele laturilor $[BC], [CA], [AB]$. Să se arate că $[\vec{AA}_1], [\vec{BB}_1], [\vec{CC}_1]$ pot fi laturile unui triunghi.

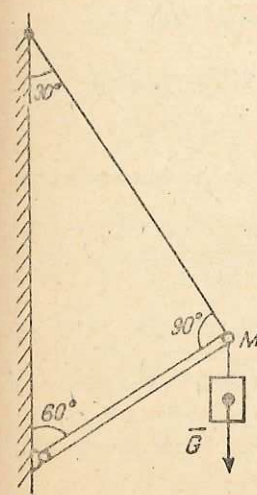


Fig. I. 23

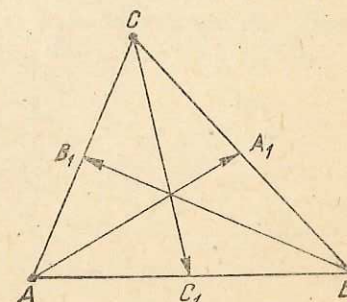
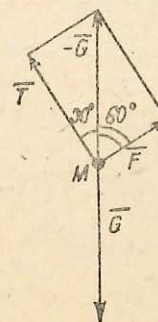


Fig. I. 24

Soluție (fig. I. 24). Se observă că $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$, adică $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ sau $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$. Deci $(-1, -1)$ sunt coordonatele vectorului $\vec{c}$ în raport cu baza $(\vec{a}, \vec{b})$.

Analog,

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{b} - (-\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} = -\frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Astfel $(-\frac{1}{2}, -1)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sunt respectiv coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ și $\overrightarrow{CC_1}$ față de baza $(\vec{a}, \vec{b})$.

În general, segmentele neorientate corespunzătoare reprezentanților vectorilor liberi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ pot fi laturile unui triunghi dacă și numai dacă $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. În cazul nostru, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, adică $[AA_1], [BB_1], [CC_1]$ pot fi laturile unui triunghi.

5. Fie un triunghi ABC , iar $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ baza lui V .

1) Fie P simetricul lui B în raport cu C . Să se găsească coordonatele vectorului $\overrightarrow{AP}$.

2) Se iau punctele Q și R astfel încît $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Să se determine coordonatele vectorilor $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{RP}$ și să se arate că punctele P, Q, R sunt coliniare.

Soluție (fig. I. 25). 1) Urmărind figura și ținînd seama de ipoteză găsim $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, adică $(-1, 2)$ sunt coordonatele lui $\overrightarrow{AP}$ în raport cu baza $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2) Analog,

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{RA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} +$$

$$+ 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC},$$

adică $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{4}{3}, 2)$ sunt respectiv coordonatele vectorilor $\overrightarrow{RQ}$, $\overrightarrow{RP}$ în raport cu baza $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Punctele P, Q, R sunt coliniare deoarece se verifică relația $\overrightarrow{RP} = 4\overrightarrow{RQ}$ adică reprezentanții $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{RQ}$ sunt coliniari.

6. Se dau $\vec{a}(1, 2)$ și $\vec{b}(x - 2y, x + y)$. Să se determine x și y astfel încît $\vec{a} = \vec{b}$.

Soluție. Reamintim că doi vectori raportați la aceeași bază sînt egali dacă și numai dacă au coordonatele corespunzătoare egale. Deci $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x - 2y = 1, x + y = 2$. Rezolvînd acest sistem găsim

$$x = \frac{5}{3}, y = \frac{1}{3}.$$

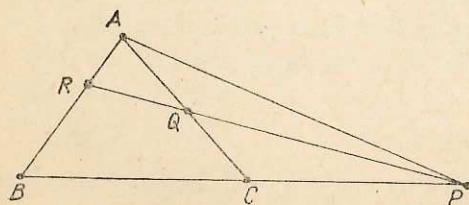


Fig. I. 25

7. Fie $(\vec{a}, \vec{b})$ o bază în V și vectorii $\vec{u}(-1, 1)$, $\vec{v}(\pi, \sqrt{2})$, $\vec{w}(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

Să se calculeze, coordonatele vectorilor următori

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, & \quad \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \\ 2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w}, & \quad \vec{u} - \vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w}, \\ \sqrt{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}, & \quad \vec{u} + \frac{1}{\pi}\vec{v} - 4\vec{w}. \end{aligned}$$

Soluție. Întrucît tehnica de calcul este esențial aceeași ne oprim la următorul caz, celelalte rămînînd drept teme.

$\vec{u} + \frac{1}{\pi}\vec{v} - 4\vec{w} = (-\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{\pi}(\pi\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}) - 4(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}) =$ (distributivitatea înmulțirii cu numere reale față de adunarea vectorilor, asociativitatea și comutativitatea adunării vectorilor), $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\vec{b} - 2\vec{a} + 6\vec{b} =$ (asociativitatea adunării și distributivitatea înmulțirii față de adunarea numerelor reale), $-2\vec{a} +$ $+ (7 + \frac{\sqrt{2}}{\pi})\vec{b}$. Deci coordonatele vectorului $\vec{u} + \frac{1}{\pi}\vec{v} - 4\vec{w}$ sînt $(-2, 7 + \frac{\sqrt{2}}{\pi})$. Acestea puteau fi găsite și direct ținînd seama că „coordoanatele unei sume algebrice sînt suma algebrică a coordonatelor”.

§ 5. Proiecție ortogonală

Fie $\vec{a} \in V$ și d o dreaptă din plan. Notăm reprezentantul lui $\vec{a}$ prin $\overrightarrow{AB}$.

Presupunem că $\overrightarrow{AB}$ nu este nul, iar dreapta AB nu este perpendiculară pe d . Prin A și B ducem dreptele h și k respectiv perpendiculare pe d . Notăm $\{A'\} = h \cap d$, $\{B'\} = k \cap d$ și construim $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$ (fig. I. 26). Segmentul $\overrightarrow{A'B'}$ este proiecția ortogonală a lui $\overrightarrow{AB}$ sau a lui $\overrightarrow{AB''}$ pe d .

Teoremă. Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de reprezentantul $\overrightarrow{AB}$ al lui $\vec{a}$.

Demonstrație. Fie $\overrightarrow{CD}$ un alt reprezentant al lui $\vec{a}$, iar $\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{C'D''}$ segmentele orientate construite după același procedeu ca și $\overrightarrow{A'B'}$, respectiv $\overrightarrow{A'B''}$.

Trebuie să arătăm că $\overrightarrow{A'B'} \sim$

$\sim \overrightarrow{C'D'}$ (fig. I. 26).

Segmentele $\overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{C'D'}$ au: (1) aceeași direcție deoarece sînt situate pe dreapta d , (2) același sens deoarece B' se află la dreapta lui A' , iar D' se află la dreapta

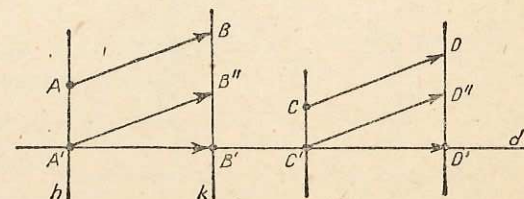


Fig. I. 26

lui C' , (3) aceeași lungime deoarece triunghiul $A'B'B''$ este congruent cu triunghiul $C'D'D''$. De aceea $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{C'D'}$.

Dacă dreapta AB este perpendiculară pe d , atunci $A' = B'$ și deci $A'B'$ este segmentul orientat nul. Dacă $a = 0$, adică $A = B$, atunci din nou $A' = B'$ și deci $\overrightarrow{A'B'}$ este segmentul orientat nul.

Explicațiile precedente justifică următoarea definiție.

Definiție. Vectorul liber $\overrightarrow{A'B'}$ se numește *proiecția ortogonală a vectorului a pe dreapta d* și se notează cu $\pi_d(\vec{a})$.

Teoremă. Un vector liber are aceeași proiecție ortogonală pe două drepte paralele.

Demonstrație. Fie vectorul $\vec{a}$ reprezentat de $\overrightarrow{AB}$ și d, d' două drepte paralele. Cazurile $A = B$ și $A \neq B, AB \perp d, d'$ sînt lăsate drept temă. Situația standard este prezentată de figura I. 27 în care $h, k \perp d, A \in d, \{E\} = k \cap d, \{F\} = h \cap d', \{G\} = k \cap d'$. Rezultă că $FGEA$ este un dreptunghi și deci $\overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{FG}$.

Din această teoremă rezultă că proiecția ortogonală a unui vector liber pe o dreaptă d nu depinde decît de direcția lui d . De aceea dacă $\vec{u}$ este un vector nenul, de aceeași direcție cu d , atunci în loc de *proiecția ortogonală a lui $\vec{a}$ pe d* și notația $\pi_d(\vec{a})$ vom utiliza denumirea de *proiecția ortogonală a lui $\vec{a}$ pe vectorul nenul $\vec{u}$* și notația $\pi_{\vec{u}}(\vec{a})$.

Teoremă. Fie $\vec{u} \in V - \{0\}$. Pentru orice $\vec{a}, \vec{b} \in V$ și orice număr real t avem

$$\begin{aligned}\pi_{\vec{u}}(\vec{a} + \vec{b}) &= \pi_{\vec{u}}(\vec{a}) + \pi_{\vec{u}}(\vec{b}), \\ \pi_{\vec{u}}(t\vec{a}) &= t\pi_{\vec{u}}(\vec{a}).\end{aligned}$$

Proprietățile cuprinse în această teoremă arată că $\pi_{\vec{u}}: V \rightarrow V, \vec{a} \rightarrow \pi_{\vec{u}}(\vec{a})$ este ceea ce se numește o *funcție liniară*.

Fie $\vec{u}$ un vector liber nenul și $\vec{u}_0$ versorul său, adică $\vec{u} = \|\vec{u}\| \vec{u}_0, \|\vec{u}_0\| = 1$. Dacă $\vec{a}$ este un vector liber arbitrar, atunci $\pi_{\vec{u}}(\vec{a})$ este un vector coliniar cu $\vec{u}_0$ și deci există un număr real $pr_{\vec{u}}\vec{a}$ astfel încît $\pi_{\vec{u}}(\vec{a}) = (pr_{\vec{u}}\vec{a})\vec{u}_0$ (fig. I.28).

Definiție. Numărul real $pr_{\vec{u}}\vec{a}$ definit prin relația $\pi_{\vec{u}}(\vec{a}) = (pr_{\vec{u}}\vec{a})\vec{u}_0$ se numește *mărimea algebrică a proiecției ortogonale $\pi_{\vec{u}}(\vec{a})$*

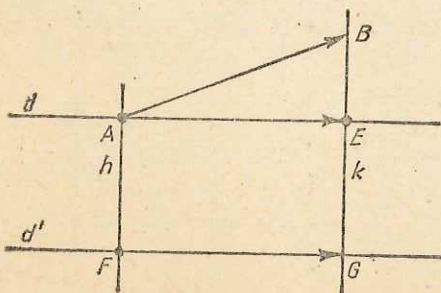


Fig. I. 27

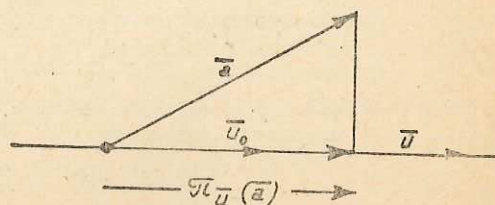


Fig. I. 28

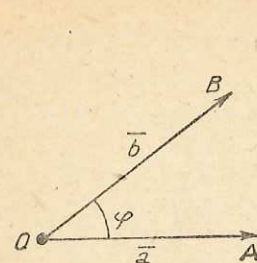


Fig. I. 29

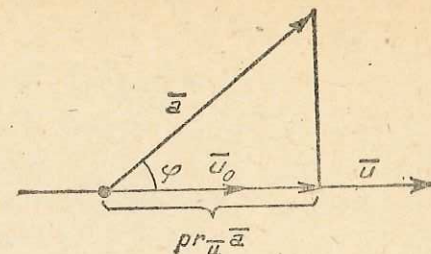


Fig. I. 30

Proprietățile lui $\pi_{\vec{u}}$ implică

$$\begin{aligned}pr_{\vec{u}}(\vec{a} + \vec{b}) &= pr_{\vec{u}}\vec{a} + pr_{\vec{u}}\vec{b}, \\ pr_{\vec{u}}(t\vec{a}) &= tpr_{\vec{u}}\vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori liberi nenuli și $\overrightarrow{OA}$, respectiv $\overrightarrow{OB}$ reprezentanții acestor vectori. Unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ determinat de $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ se numește *unghiul* dintre vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. I.29). Această definiție este corectă întrucît originea comună O a reprezentanților nu joacă nici un rol. Dacă cel puțin unul dintre vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este vectorul zero, atunci unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este nedeterminat.

Vectorii nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se numesc *ortogonali* dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$.

Admitem că $\vec{0}$ este ortogonal pe orice vector.

Cunoașterea unghiului φ dintre vectorul $\vec{a}$ și vectorul nenul $\vec{u}$ permite să explicităm numărul $pr_{\vec{u}}\vec{a}$ în funcție de $\|\vec{a}\|$ și de $\cos \varphi$ (fig. I.30),

$$pr_{\vec{u}}\vec{a} = \|\vec{a}\| \cos \varphi.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau vectorii nenuli $\vec{a}, \vec{b}$. Ce relație trebuie să existe între $\vec{a}$ și $\vec{b}$ pentru ca vectorul $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ să aibă direcția bisectoarei unghiului determinat de reprezentanții $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ ai lui $\vec{a}$ respectiv $\vec{b}$? În această ipoteză să se expliciteze $\pi_{\vec{u}}(\vec{a}), \pi_{\vec{u}}(\vec{b}), \pi_{\vec{u}}(\vec{a} + \vec{b})$ și relația dintre acești vectori.

Soluție (fig. I.31). Se observă că reprezentantul lui $\vec{u}$ este $\overrightarrow{AC}$, figura $ABCD$ fiind un paralelogram. Dacă AC este bisectoarea unghiului BAD , atunci $ABCD$ este un romb. Rezultă $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$.

Evident $AC \perp BD$, ca diagonale în rombul $ABCD$. Notînd $\{O\} = AC \cap BD$, segmentul orientat $\overrightarrow{AO}$ este reprezentantul lui $\pi_{\vec{u}}(\vec{a})$ și al lui $\pi_{\vec{u}}(\vec{b})$. Deci $\pi_{\vec{u}}(\vec{a}) = \pi_{\vec{u}}(\vec{b})$. Pe de altă parte, $\pi_{\vec{u}}(\vec{a} + \vec{b}) = \pi_{\vec{u}}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, adică $\pi_{\vec{u}}(\vec{a} + \vec{b}) = \pi_{\vec{u}}(\vec{a}) + \pi_{\vec{u}}(\vec{b})$.

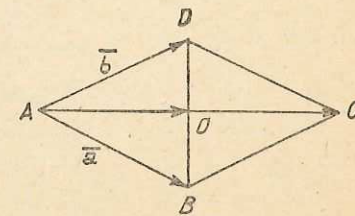


Fig. I.31

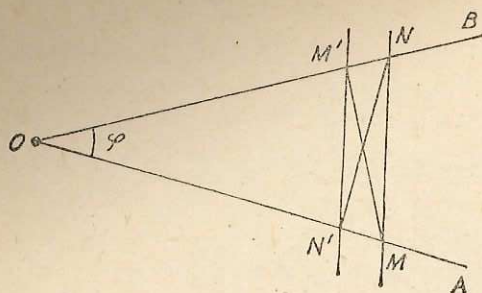


Fig. 1.32

2. Fie semidreptele $[OA, [OB$ și φ măsura unghiului determinat de ele. Fie $M \in [OA$ și $N \in [OB$ astfel încât $d(O, M) = d(O, N)$. Notăm proiecția ortogonală a lui M pe OB cu M' , iar proiecția ortogonală a lui N pe OA cu N' . Să se arate că:

1) $\text{pr}_{\overline{ON}} \overline{OM} = \text{pr}_{\overline{OM}} \overline{ON}$,

2) dreptele MN și $M'N'$ sunt paralele.

Soluție (fig. 1.32). 1) Evident, $\text{pr}_{\overline{ON}} \overline{OM} = \|\overline{OM}\| \cos \varphi = \|\overline{ON}\| \cos \varphi = \text{pr}_{\overline{OM}} \overline{ON}$.

2) Fie $\frac{1}{\|\overline{OM}\|} \overline{OM}$ versorul lui $\overline{OM}$ și $\frac{1}{\|\overline{ON}\|} \overline{ON}$ versorul lui $\overline{ON}$. Găsim $\overline{NM'} = \overline{OM'} - \overline{ON'} = \pi_{\overline{ON}}(\overline{OM}) - \pi_{\overline{OM}}(\overline{ON}) = (\text{pr}_{\overline{ON}} \overline{OM}) - \frac{1}{\|\overline{OM}\|} \overline{OM} - (\text{pr}_{\overline{OM}} \overline{ON}) - \frac{1}{\|\overline{ON}\|} \overline{ON} = (\cos \varphi) (\overline{OM} - \overline{ON}) = (\cos \varphi) \overline{NM}$, adică vectorii nenuli $\overline{NM'}$ și $\overline{NM}$ sunt coliniari. Deci $MN \parallel M'N'$.

Temă. Comparați la 2) — soluția cu varianta sintetică.

§6. Produs scalar

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori liberi. Dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $\vec{b} \neq \vec{0}$, atunci notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Definiție. Numărul real

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi, & \text{dacă } \vec{a} \neq \vec{0}, \text{ și } \vec{b} \neq \vec{0}, \\ 0, & \text{dacă } \vec{a} = \vec{0} \text{ sau } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

se numește **produsul scalar** al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Altfel spus produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul lungimilor lor prin cosinusul unghiului dintre ei, compromisul pentru vectorul zero fiind evident în consens cu definiția inițială.

Produsul scalar a doi vectori nenuli este un număr strict pozitiv dacă unghiul dintre ei este ascuțit, adică $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, sau strict negativ dacă unghiul dintre ei este obtuz, adică $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Produsul scalar este nul dacă și numai dacă cei doi vectori sunt ortogonali.

Asociind fiecărei perechi de vectori liberi produsul lor scalar obținem o funcție $\cdot: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ numită **produs scalar** pe V .

Teoremă. Produsul scalar are următoarele proprietăți:

1) *comutativitate:* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$;

2) *omogenitate:* $t(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (t\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (t\vec{b})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$;

3) *distributivitate față de adunare:* $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$;

4) *pozitivitate:* $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$, $\forall \vec{a} \in V$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Demonstrație. 1) Dacă $\vec{a} = \vec{0}$ sau $\vec{b} = \vec{0}$, atunci $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = 0$; dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$ și $\vec{b} \neq \vec{0}$, atunci $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos \varphi = \vec{b} \cdot \vec{a}$; am ținut seama de comutativitatea produsului numerelor reale și de faptul că unghiul dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$ coincide cu unghiul dintre $\vec{b}$ și $\vec{a}$.

2) *Temă.*

3) Cazul $\vec{a} = \vec{0}$ este evident. Pentru a demonstra această proprietate în ipoteza $\vec{a} \neq \vec{0}$ ne ajutăm de noțiunea de mărime algebrică a unei proiecții ortogonale.

Fie $\vec{e}$ un versor și $\vec{b}$ un vector oarecare. Se observă că $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b} = \vec{e} \cdot \vec{b}$, adică măsura algebrică a proiecției ortogonale a vectorului $\vec{b}$ pe versorul $\vec{e}$ este produsul scalar dintre $\vec{b}$ și $\vec{e}$.

Exprimăm pe $\vec{a} \neq \vec{0}$ în forma $\vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{e}$, $\|\vec{e}\| = 1$. Relația $\text{pr}_{\vec{e}}(\vec{b} + \vec{c}) = \text{pr}_{\vec{e}} \vec{b} + \text{pr}_{\vec{e}} \vec{c}$ este echivalentă cu $\vec{e} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{e} \cdot \vec{b} + \vec{e} \cdot \vec{c}$. Înmulțind cu $\|\vec{a}\|$ și ținând seama de 2) deducem $(\|\vec{a}\| \vec{e}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\|\vec{a}\| \vec{e}) \cdot \vec{b} + (\|\vec{a}\| \vec{e}) \cdot \vec{c}$, c.e.t.d.

4) Demonstrația este imediată. Facem însă observația că relația $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ este echivalentă cu $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, ultima permițând calculul lungimii vectorului liber $\vec{a}$ dacă cunoaștem produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{a}$.

Definiția și proprietățile produsului scalar conferă spațiului vectorial al vectorilor liberi din plan o structură de *spațiu euclidian*.

Consecințe. 1) Relația $|\cos \varphi| \leq 1$ implică *inegalitatea Cauchy*

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|.$$

Astfel modulul produsului scalar a doi vectori este cel mult egal cu produsul lungimilor celor doi vectori. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow \cos \varphi = 1$, adică $\varphi = 0$ sau $\pi \Leftrightarrow$ cei doi vectori sunt coliniari.

2) Inegalitatea lui Cauchy implică *inegalitatea triunghiului* (Minkowski)

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Într-adevăr, $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2} \leq \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2} = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$

Evident avem egalitate $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ (sunt coliniari și) au același sens.

3) Fie $(\vec{u}, \vec{v})$ o bază în V și $\vec{a} = r_1 \vec{u} + s_1 \vec{v}$, $\vec{b} = r_2 \vec{u} + s_2 \vec{v}$.

Proprietățile produsului scalar implică

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (r_1 \vec{u} + s_1 \vec{v}) \cdot (r_2 \vec{u} + s_2 \vec{v}) = \dots = r_1 r_2 (\vec{u} \cdot \vec{u}) + (r_1 s_2 + r_2 s_1) (\vec{u} \cdot \vec{v}) + s_1 s_2 (\vec{v} \cdot \vec{v}).$$

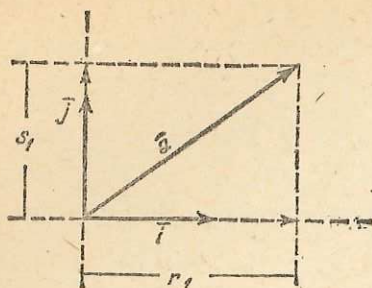


Fig. 1.33

Cu alte cuvinte produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ va fi cunoscut dacă se dă tabelul 1. Pentru calcule este avantajos să alegem baze pentru care tabelul 1 să fie cât mai simplu posibil. Acesta este și cazul bazelor formate din versori ortogonali.

	$\vec{u}$	$\vec{v}$
$\vec{u}$	$\vec{u} \cdot \vec{u}$	$\vec{u} \cdot \vec{v}$
$\vec{v}$	$\vec{v} \cdot \vec{u}$	$\vec{v} \cdot \vec{v}$

TABELUL 1

	$\vec{i}$	$\vec{j}$
$\vec{i}$	$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$	$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$
$\vec{j}$	$\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$	$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

TABELUL 2

Bază ortonormată. O bază din V formată din versori ortogonali se numește *bază ortonormată*. Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată, adică o bază care satisface relațiile din tabelul 2. Coordonatele unui vector $\vec{a}$ (fig. 1.33), în raport cu o asemenea bază, se numesc *coordonațe euclidiene*. Presupunind $\vec{a} = r_1\vec{i} + s_1\vec{j}$, se observă că $\vec{i} \cdot \vec{a} = r_1 = \text{pr}_{\vec{i}}\vec{a}$, $\vec{j} \cdot \vec{a} = s_1 = \text{pr}_{\vec{j}}\vec{a}$, adică coordonatele euclidiene sînt măsurile algebrice ale proiecțiilor ortogonale pe versorii $\vec{i}$, respectiv $\vec{j}$.

Dacă $\vec{a} = r_1\vec{i} + s_1\vec{j}$, $\vec{b} = r_2\vec{i} + s_2\vec{j}$, atunci se constată $\vec{a} \cdot \vec{b} = r_1r_2 + s_1s_2$, adică produsul scalar a doi vectori raportați la aceeași bază ortonormată este suma produselor coordonatelor corespundente. În particular, punînd $\vec{a} = \vec{b}$ găsim

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{r_1^2 + s_1^2},$$

adică lungimea unui vector este egală cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor coordonatelor euclidiene.

Se observă că

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow r_1r_2 + s_1s_2 = 0,$$

adică doi vectori raportați la aceeași bază ortonormată sînt ortogonali, dacă și numai dacă suma produselor coordonatelor corespundente este nulă. Mai mult, pentru $\vec{a}, \vec{b} \in V - \{\vec{0}\}$, avem

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{r_1r_2 + s_1s_2}{\sqrt{r_1^2 + s_1^2} \sqrt{r_2^2 + s_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Știind că $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = 1$, să se calculeze $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

Soluție. Prin definiție $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$. Ținînd seama de distributivitatea față de adunare găsim $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0$; pozitivitatea și comutativitatea implică $\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$. Deci $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{3}{2}$.

2. Să se verifice că vectorii

$$\vec{u} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} - \vec{b}$$

sînt ortogonali față de $\vec{a}$.

Soluție. Efectuăm $\vec{a} \cdot \vec{u}$ ținînd seama de distributivitate și omogenitate,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{u} &= \vec{a} \cdot [(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}] = \vec{a} \cdot [(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}] - \vec{a} \cdot [(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}] = \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0. \end{aligned}$$

Analog, se calculează $\vec{a} \cdot \vec{v}$.

3. Să se arate că dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt ortogonali, atunci vectorii $\vec{a} + \vec{b}$ și $\vec{a} - \vec{b}$ au normele egale.

Soluție (fig. 1.34, cazul vectorilor nenuli). Trebuie să demonstrăm implicația

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|.$$

Într-adevăr,

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2},$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2}.$$

4. Știind că $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, iar unghiul φ dintre $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este $\frac{\pi}{3}$, să se determine r astfel încît $\vec{a} = r\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{b} = -\vec{u} + 2\vec{v}$ să fie ortogonali.

Soluție. Condiția $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ este echivalentă cu $(r\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 2\vec{v}) = 0$ sau $-r(\vec{u} \cdot \vec{u}) + (2r - 1)\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$. Deoarece $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, găsim $-r + (2r - 1)\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 0$, adică $r = \frac{3\sqrt{2} - 8}{2\sqrt{2}}$.

5. Se știe că vectorul $\vec{a} + \vec{b}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{a} - 3\vec{b}$, iar vectorul $3\vec{a} - 2\vec{b}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{a} - \vec{b}$. Să se găsească $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Soluție. Relația $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 0$ este echivalentă cu $\|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\|\vec{b}\|^2 = 0$, iar relația $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$ este echivalentă cu $2\|\vec{a}\|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\|\vec{b}\|^2 = 0$. Eliminînd termenul care conține pe $\vec{a} \cdot \vec{b}$ găsim $\|\vec{a}\|^2 + 5\|\vec{b}\|^2 = 0$. Deci $\|\vec{a}\| = 0$, $\|\vec{b}\| = 0$, adică $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$.

6. Utilizînd produsul scalar și definiția liniar independenței, să se arate că orice doi vectori nenuli ortogonali sînt liniar independenți.

Soluție. Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori nenuli, cu proprietatea $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Relația $r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$ implică $(r\vec{a} + s\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, $(r\vec{a} + s\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, adică $r\|\vec{a}\|^2 + s(\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0$, $r(\vec{a} \cdot \vec{b}) + s\|\vec{b}\|^2 = 0$. Acestea din urmă împreună cu ipotezele implică $r = 0$ și $s = 0$.

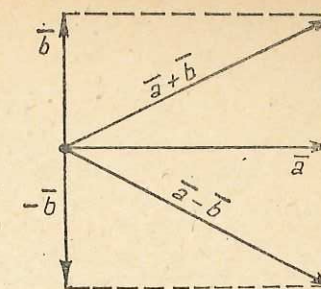


Fig. 1.34

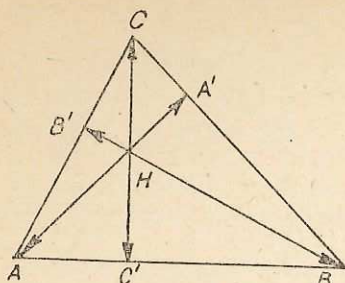


Fig. I.35

7. Să se arate că înălțimile unui triunghi sint concurente.

Soluție. Fie înălțimile AA' și CC' și H punctul lor de intersecție. Unim pe B cu H și prelungim segmentul $[BH]$ pînă în B' (fig. I.35). Deoarece $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}$, relațiile $AA' \perp BC$, $CC' \perp AB$ sint echivalente cu $\overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = 0$, $\overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$. Aceste două egalități implică $\overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC}) = 0$, adică $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ sau $HB' \perp CA$.

Te m ă. Comparați soluția vectorială cu cea sintetică:

8. În V se fixează o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$.

1) Să se calculeze

$$(\vec{i} - \vec{j}) \cdot (2\vec{i}), (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (\pi\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}).$$

2) Să se determine unghiul vectorilor

$$\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - 2\vec{j}.$$

3) Să se arate că vectorii

$$2\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + 2\vec{j}$$

sint liniar independenți.

Soluție. 1), 2). Se folosesc formulele stabilite la partea teoretică. Deci

$$(\vec{i} - \vec{j}) \cdot (2\vec{i}) = 2, (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (\pi\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}) = 2\pi - 3\sqrt{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}, \text{ adică } \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

3) Reamintim că doi vectori nenuli raportați la aceeași bază sint necoliniari (sau liniar independenți) numai dacă nu au coordonatele proporționale. În cazul nostru

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$$

și de aceea cei doi vectori nu sint coliniari.

§ 7. Probleme propuse

1. 1) Să se arate că două segmente orientate $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sint echipolente, dacă și numai dacă segmentele orientate $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{CB}$ au același mijloc.

2) Fie A, A', B, B' patru puncte în plan. Dacă notăm cu M, N două puncte din același plan, astfel încît $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'}$ și $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BB'}$, să se arate că $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}$.

Indicație. 1) Mijlocul segmentului orientat $\overrightarrow{AD}$ este un punct O de pe dreapta AD cu proprietatea $d(A, O) = d(O, D)$. Se vor cerceta separat cazurile: punctele A, B, C, D coliniare, punctele A, B, C, D necoliniare. În cazul necoliniarității, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABCD$ este un paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{CB}$ au același mijloc.

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Se notează cu O_1, O_2 mijloacele diagonalelor $[AC]$ respectiv $[BD]$. Să se arate că:

$$1) 2\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC},$$

2) dacă $4\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, atunci $ABCD$ este un paralelogram.

Indicație. 1) $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_2D} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO_2}$.

2) Relațiile din 1) și 2) implică $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0}$.

3. Se dau vectorii $\vec{u} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{v} = 6\vec{i} - 9\vec{j}$, $\vec{w} = -2\vec{i} - 9\vec{j}$.

Să se calculeze $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$.

4. Trei vectori au suma egală cu $\vec{0}$, și sint necoliniari. Notînd cu $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ respectiv $\overrightarrow{OC}$ reprezentanții celor trei vectori, să se arate că O este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Indicație. Pe $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OC}$ construim paralelogramul $OAB'C$. Notînd cu E centrul paralelogramului $OAB'C$ găsim $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OE}$.

5. Fie triunghiul ABC și A', B', C' mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

1) Să se arate că pentru orice punct M al planului avem

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MA'} + 2\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{MB'} + 2\overrightarrow{BB'} = 3\overrightarrow{MC'} + 2\overrightarrow{CC'}.$$

2) Să se arate că există un punct G și numai unul (centrul de greutate al triunghiului ABC) cu proprietatea

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

3) Să se demonstreze că orice punct M al planului satisface relația

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Indicație. 2) Se ține seama de relațiile din 1).

6. Fie două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ de centre de greutate G și G' . Să se verifice relația $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$ și cu ajutorul acesteia să se dea o condiție necesară și suficientă pentru ca cele două triunghiuri să aibă același centru de greutate.

Indicație. Fie A_1 mijlocul lui $[BC]$, A'_1 mijlocul lui $[B'C']$ etc. Rezultă: $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{GG'} + \frac{2}{3} \overrightarrow{A'_1A'}$ și alte două relații analoage.

7. În vîrfurile unui pătrat cu latura a se află sarcinile electrice pozitive egale cu $+q$. În centrul pătratului se pune o sarcină electrică negativă $-Q$. Să se calculeze raportul $\frac{Q}{q}$ astfel încît forțele care acționează asupra fiecăreia din cele patru sarcini electrice q să aibă rezultanta egală cu zero.

R. Se ține seama de legea lui Coulomb. Asupra fiecăreia sarcini electrice q acționează patru forțe al căror echilibru conduce la relația $\frac{Q}{q} = \frac{1}{4} (1 + 2\sqrt{2})$.

8. Fie punctele A, B, C, D și numerele a, b, c , fixate. Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$ definim punctele M, N, P, Q prin

$$\overrightarrow{BM} = (a + x)\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BN} = (b - x)\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{DQ} = (b + x)\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{DP} = (c - x)\overrightarrow{DC}.$$

Să se verifice că $\overline{MP} + \overline{NQ}$ este un vector constant.

Indicație. $\overline{MP} + \overline{NQ}$ se exprimă în funcție de a, b, c și de $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$.

9. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat înscris în cercul de centru O și rază R .

1) Fixând baza $(\overline{OA}, \overline{OB})$ să se găsească coordonatele vectorilor $\overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}$.

2) Să se arate că $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} = \vec{0}$.

$$\text{R. } \overline{OC} \left(-1, \frac{1}{2 \cos 36^\circ} \right), \overline{OD} \left(-\frac{1}{2 \cos 36^\circ}, -\frac{1}{2 \cos 36^\circ} \right), \overline{OE} \left(\frac{1}{2 \cos 36^\circ}, -1 \right).$$

10. Fie A, B, C trei puncte în plan, astfel încît vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ să fie liniar independenți.

1) Să se arate că relația $\overline{MB} = t_1 \overline{MC}$ definește un punct M din plan, dacă $t_1 \in \mathbb{R} + \{1\}$ iar vectorii $\overline{MB}$ și $\overline{BC}$ sînt liniar dependenți.

2) Se consideră punctele N și P care verifică relațiile $\overline{NC} = t_2 \overline{NA}$ și $\overline{PA} = t_3 \overline{PB}$, $t_2, t_3 \in \mathbb{R} - \{1\}$. Să se exprime vectorii $\overline{PN}$ și $\overline{PM}$ în raport cu baza $(\overline{AB}, \overline{AC})$.

3) Ce relație trebuie să verifice numerele reale t_1, t_2, t_3 pentru ca vectorii $\overline{PN}$ și $\overline{PM}$ să fie liniar dependenți?

R. 1) $\overline{BC}$ este nenul și deci $\overline{MB} = r \overline{BC} = r(\overline{BM} + \overline{MC})$. Relația $\overline{MB} = t_1 \overline{MC}$ și $B \neq C$ arată că $M \neq C$ și deci $r \neq -1$.

$$2) \overline{PN} = \frac{t_3}{1-t_3} \overline{AB} + \frac{1}{1-t_2} \overline{AC}, \overline{PM} = \left(\frac{t_3}{1-t_2} + \frac{t_1}{1-t_1} \right) \overline{AB} - \frac{t_1}{1-t_1} \overline{AC},$$

$$3) t_1 t_2 t_3 = 1.$$

11. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ definiți în raport cu baza $(\vec{a}, \vec{b})$ prin egalitățile $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{v} = x\vec{a} + 7\vec{b}$, $\vec{w} = 8\vec{a} + y\vec{b}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1) Pentru ce valoare $x \in \mathbb{R}$ vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt liniar dependenți?

2) Pentru ce valori $y \in \mathbb{R}$ vectorii $\vec{u}$ și $\vec{w}$ sînt liniar independenți?

$$\text{R. } 1) x = -\frac{21}{2}; 2) y \neq -\frac{16}{3}.$$

12. Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată și vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{d} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}$.

1) Să se calculeze normele acestor vectori.

2) Care sînt versorii asociați acestor vectori?

3) Să se calculeze $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{b}$, $\vec{c} \cdot \vec{d}$.

13. Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori ortogonali și cu normele egale. Să se arate că vectorii care formează următoarele perechi sînt ortogonali:

$$1) 2\vec{a} + \vec{b} \text{ și } \vec{a} - 2\vec{b},$$

$$2) \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \text{ și } -\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{4}{2}\vec{b},$$

$$3) -0,2\vec{a} + 1,6\vec{b} \text{ și } -1,6\vec{a} - 0,2\vec{b}.$$

14. Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a lui V și vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

1) Să se găsească vectorul $\vec{v}$ ortogonal pe $\vec{i}$ și care satisface condiția $\vec{a} \cdot \vec{v} = 3$.

2) Să se determine $\pi_{\vec{b}}(\vec{v})$ și mărimea algebrică a acestei proiecții.

$$\text{R. } 1) \vec{v} = 3\vec{j}; 2) \text{ Se determină } t \text{ și } \vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ astfel încît } t\vec{b} + \vec{c} = \vec{v}, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$$

$$\text{Rezultă } \pi_{\vec{b}}(\vec{v}) = \frac{6}{5}\vec{b}, \text{ pr}_{\vec{b}} \vec{v} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

15. În triunghiul ABC , mediana corespunzătoare laturii $[AB]$ intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D . Să se arate că dacă mijlocul G al coardei $[CD]$ este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci $2c^2 = a^2 + b^2$.

Indicație. Fie O centrul cercului circumscris;

$$\overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}), \overline{GC} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} - 2\overline{OC}), \overline{OG} \cdot \overline{CG} = 0 \Rightarrow 2 \cos 2C - \cos 2A - \cos 2B = 0; \text{ se ține seama de teorema sinusurilor.}$$

16. Fie V spațiul vectorial al vectorilor liberi și $(\vec{a}, \vec{b})$ o bază în V . Notînd cu $\vec{a} = r\vec{u} + s\vec{v}$ un vector arbitrar din V , definim funcțiile $n_1: V \rightarrow [0, \infty)$, $n_1(\vec{a}) = \max\{|r|, |s|\}$, $n_2(\vec{a}) = \sqrt{r^2 + s^2}$, $n_3(\vec{a}) = |r| + |s|$. Să se arate că

$$n_1(\vec{a}) \leq n_2(\vec{a}) \leq n_3(\vec{a}) \leq 2n_1(\vec{a}), \quad n_1(\vec{a}) \leq n_2(\vec{a}) \leq \sqrt{2} n_1(\vec{a}),$$

$$n_i(\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}, \quad n_i(t\vec{a}) = |t| n_i(\vec{a}), \quad n_i(\vec{a} + \vec{b}) \leq n_i(\vec{a}) + n_i(\vec{b}), \quad t \in \mathbb{R}, \vec{b} \in V.$$

Indicație. Primele relații se transcriu:

$$\max\{|r|, |s|\} \leq \sqrt{r^2 + s^2} \leq |r| + |s| \leq 2 \max\{|r|, |s|\}.$$

Capitolul II

DREAPTA

§ 1. Reper cartezian

Geometria analitică în plan este o metodă care constă în studiul figurilor geometrice plane cu ajutorul numerelor reale sau a perechilor ordonate de numere reale. Prin aceasta raționamentelor sintetice li se substituie raționamente algebrice. Calculul vectorial poate servi ca instrument de bază în această convertire.

Fie planul p și V spațiul vectorial real al vectorilor liberi din acest plan. După cum s-a văzut în Capitolul I, § 1, fixarea unui punct O în plan permite stabilirea unei bijecții naturale între p și V : fiecărui punct $M \in p$ i se atașează vectorul de poziție, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, al punctului M față de originea O . Originii $O \in p$ îi corespunde vectorul de poziție $\vec{0} \in V$, iar simetricului lui M față de origine îi corespunde vectorul de poziție $-\vec{r}$.

Având în vedere unele avantaje în raționamente și calcule se preferă determinarea punctelor din p cu ajutorul vectorilor de poziție în raport cu originea O , iar pentru vectorii liberi se preferă reprezentarea lor în raport cu o bază ortonormată din V .

Definiție. Fie O un punct din p și $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a lui V . Ansamblul $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ se numește reper cartezian în plan (fig. II.1).

Punctul O se numește originea reperului, iar $(\vec{i}, \vec{j})$ se numește baza reperului. Coordonatele euclidiene (x, y) ale vectorului de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

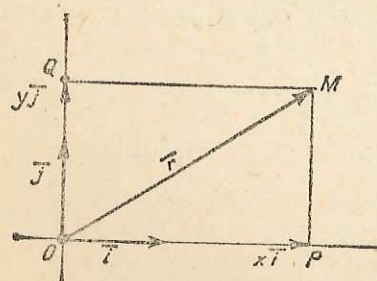


Fig. II.1

(fig. II.1) poartă numele de coordonatele carteziene ale punctului M față de reperul ortonormat $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$. Numărul real $x = \vec{i} \cdot \vec{r} = \text{pr}_{\vec{i}} \vec{r}$ se numește abscisă, iar numărul real $y = \vec{j} \cdot \vec{r} = \text{pr}_{\vec{j}} \vec{r}$ se numește ordonată. Fixarea unui reper cartezian în plan determină o bijecție între p și $\mathbb{R}^2$: fiecărui punct $M \in p$ i se atașează coordonatele carteziene. Această bijecție se numește sistem de coordo-

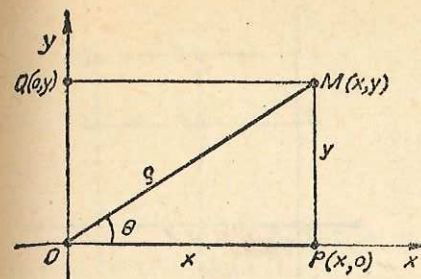


Fig. II.2

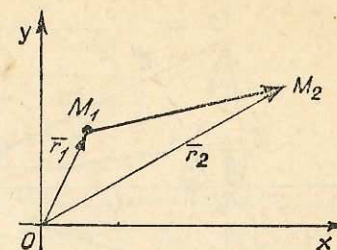


Fig. II.3

nate cartezian definit de reperul $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ pe mulțimea punctelor din plan și se notează prin scrierea alăturată a punctului și a coordonatelor sale, adică $M(x, y)$.

Axa determinată de punctul O și de versorul $\vec{i}$ se numește axa Ox sau axa absciselor, iar axa determinată de punctul O și de versorul $\vec{j}$ se numește axa Oy sau axa ordonatelor. Toate punctele de pe axa Ox sunt caracterizate prin faptul că au ordonata nulă; toate punctele de pe axa Oy sunt caracterizate prin faptul că au abscisa nulă.

Deseori reperul cartezian este indicat prin xOy , prin aceasta înțelegându-se că s-a fixat originea O și axele ortogonale Ox și Oy (fig. II.2). În acest caz versorii ortogonali $\vec{i}$ și $\vec{j}$ rezultă din context.

Axele împart planul în patru regiuni

I : $x > 0, y > 0$; II : $x < 0, y > 0$; III : $x < 0, y < 0$; IV : $x > 0, y < 0$, numite cadrane deschise. Mulțimea $\{M(x, y) | x \in \mathbb{R}, y > 0\}$ se numește semiplanul superior, iar mulțimea $\{M(x, y) | x \in \mathbb{R}, y < 0\}$ se numește semiplanul inferior.

Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper cartezian în plan și $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ două puncte date. Vectorul liber $\overrightarrow{M_1M_2}$ reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{M_1M_2}$ este diferența dintre vectorul de poziție al extremității M_2 și vectorul de poziție al originii M_1 (fig. II.3). Deci

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

De aici obținem distanța dintre punctele M_1 și M_2 , anume

$$d(M_1, M_2) = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Observație (fig. II.2). Notăm lungimea $\|\vec{r}\|$ cu ρ și unghiul dintre $\vec{i}$ și $\vec{r}$ cu θ . Unghiul θ se consideră pe intervalul $[0, 2\pi)$. Rezultă $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, adică fiecărui punct $M \neq O$ din plan i se poate asocia o singură pereche ordonată de numere reale (ρ, θ) , $\rho \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Numerele ρ și θ se numesc coordonatele polare ale punctului M . Se scrie $M(\rho, \theta)$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ se dau punctele $A(1, 1)$, $B(-1, -3)$, $C(8, 0)$, $D(0, 4)$.

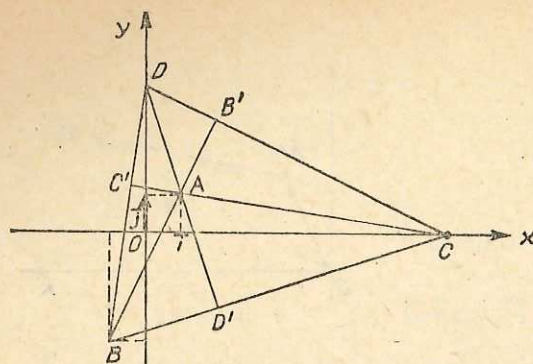


Fig. II.4

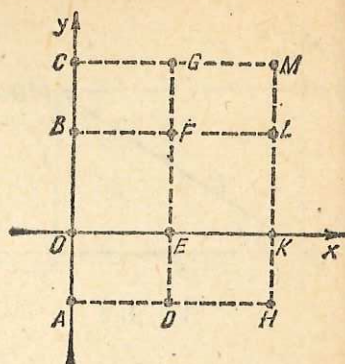


Fig. II.5

- 1) Să se scrie coordonatele vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$ și $\overline{BC}$.
- 2) Să se calculeze lungimile vectorilor $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ și $\angle ABC$.
- 3) Să se calculeze produsele scalare $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$, $\overline{AC} \cdot \overline{DB}$ și să se arate că fiecare dintre punctele A, B, C, D este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei puncte.

Soluție (fig. II.4). 1) Deoarece $\overline{OA} = \vec{i} + \vec{j}$, $\overline{OB} = -\vec{i} - 3\vec{j}$, rezultă $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-\vec{i} - 3\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}) = -2\vec{i} - 4\vec{j}$. Deci $\overline{AB}$ are coordonatele $(-2, -4)$.

Analog $\overline{AC}(7, -1)$, $\overline{CD}(-8, 4)$, $\overline{DB}(-1, -7)$, $\overline{BC}(9, 3)$.

2) Ținând seama că $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată găsim $\|\overline{BA}\| = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Analog $\|\overline{BC}\| = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$. Cu acestea găsim $\cos ABC = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \|\overline{BC}\|} = \frac{(2\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (9\vec{i} + 3\vec{j})}{\|2\vec{i} + 4\vec{j}\| \cdot \|9\vec{i} + 3\vec{j}\|} = \frac{2 \cdot 9 + 4 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 4^2} \sqrt{9^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, adică $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$.

- 3) Deoarece $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată calculele sunt următoarele

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = (-2\vec{i} - 4\vec{j}) \cdot (-8\vec{i} + 4\vec{j}) = (-2)(-8) + (-4)4 = 0,$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = (7\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} - 7\vec{j}) = 7(-1) + (-1)(-7) = 0.$$

Rezultă $AB \perp CD$, $AC \perp DB$, adică fiecare dintre punctele A, B, C, D este ortocentrul triunghiului determinat de celelalte trei puncte.

2. În plan fixăm reperul cartezian xOy . Să se figureze punctele corespunzătoare elementelor mulțimii $\{0, 3, 6\} \times \{-2, 0, 3, 5\}$. Să se găsească cea mai mică și cea mai mare distanță dintre elementele acestei mulțimi. Există în această mulțime trei puncte care să determine un triunghi isoscel? Dar echilateral?

Soluție. Elementele produsului cartezian sunt date în tabelul 1. Dacă notăm $A(0, -2)$, $O(0, 0)$, $B(0, 3)$, $C(0, 5)$, $D(3, -2)$, $E(3, 0)$, $F(3, 3)$, $G(3, 5)$, $H(6, -2)$, $K(6, 0)$, $L(6, 3)$, $M(6, 5)$ obținem figura II. 5.

TABELUL 1

x	-2	0	3	5
0	(0, -2)	(0, 0)	(0, 3)	(0, 5)
3	(3, -2)	(3, 0)	(3, 3)	(3, 5)
6	(6, -2)	(6, 0)	(6, 3)	(6, 5)

Se observă că $d(O, A) = 2$, iar figura II. 5 pune în evidență că acest număr reprezintă cea mai mică distanță. Analog, $d(A, M) = d(H, C) = \sqrt{85}$ este cea mai mare distanță.

Deoarece $d(B, O) = d(B, F)$, $OB \perp BF$ triunghiul OBF este dreptunghic isoscel. Nu există nici un triunghi echilateral întrucât triunghiurile isoscele ce se pot forma sînt fie dreptunghice, fie au lungimea jumătății bazei și lungimea înălțimii numere întregi.

§ 2. Dreapta determinată de un punct și de un vector director

Presupunem că planul a fost raportat la un reper cartezian. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct și $\vec{a}(u, v)$ un vector nenul. Există o singură dreaptă d care are direcția lui $\vec{a}$ și care trece prin M_0 (fig. II.6).

Teoremă. Fie $\vec{r}_0$ vectorul de poziție al punctului M_0 și $\vec{r}$ vectorul de poziție al unui punct oarecare $M(x, y)$ din plan. Punctul M aparține dreptei d determinată de M_0 și de $\vec{a} \neq \vec{0}$ dacă și numai dacă

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație (fig. II.6). Punctul M aparține dreptei d dacă și numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$ și $\vec{a}$ sînt coliniari. Deoarece $\vec{a}$ este nenul, aceasta este echivalent cu faptul că există $t \in \mathbb{R}$ astfel încît $\overline{M_0M} = t\vec{a}$. Ținând seama că $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ rezultă relația din enunț.

Egalitatea $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$ se numește *ecuația vectorială a dreptei d* , iar t se numește *parametru*. Deoarece $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, $\vec{a} = u\vec{i} + v\vec{j}$, ecuația vectorială este echivalentă cu două relații scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

care se numesc *ecuațiile parametrice ale dreptei d* .

Deci

$$d = \{M(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbb{R}\}$$

sau mai scurt

$$d : x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbb{R}.$$

Vectorul nenul $\vec{a}(u, v)$ care dă direcția dreptei d se numește *vector director*. Coor-

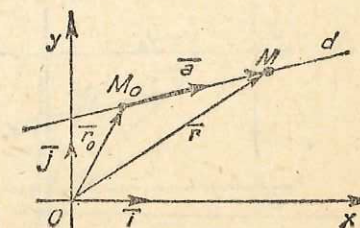


Fig. II.6

natele sale u și v se numesc *parametri directori ai dreptei d* . Evident orice vector $t\vec{a}$, $t \neq 0$, joacă același rol cu $\vec{a}$. În particular direcția lui d poate fi dată și prin versorul director $\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$.

Exemplu. Punctul $M_0(1, -1)$ și vectorul $\vec{a}(-2, 1)$ determină dreapta d de ecuație vectorială $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{i} - \vec{j} + t(-2\vec{i} + \vec{j})$, $t \in \mathbb{R}$. Această ecuație vectorială este echivalentă cu ecuațiile parametrice $x = 1 - 2t$, $y = -1 + t$, $t \in \mathbb{R}$ sau cu ecuația carteziană $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{1}$. Versorul director al lui d este $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\vec{i} + \vec{j})$.

Dacă $uv \neq 0$, atunci ecuațiile parametrice sînt echivalente cu ecuația carteziană

$$\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v}.$$

Uneori se utilizează această reprezentare chiar dacă $uv = 0$ (deoarece $\vec{a}(u, v)$ este nenul, cel mult unul dintre numerele u și v se poate anula). În acest caz se face convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

Dacă $u = 0$, atunci găsim $x = x_0$ și deci dreapta este paralelă cu Oy (dreaptă verticală). Dacă $v = 0$, atunci $y = y_0$, și dreapta este paralelă cu Ox (dreaptă orizontală, figura II.7). În particular: $Oy : x = 0$, $Ox : y = 0$.

Dacă $u \neq 0$, atunci ecuația carteziană a dreptei d (dreaptă oblică) se poate scrie în forma

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Numărul $m = \frac{v}{u}$, $u \neq 0$, se numește *panta* sau *coeficientul unghiular* al dreptei d și reprezintă tangenta unghiului $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, determinat de versorul $\vec{i}$ și vectorul director $\frac{1}{u} \vec{a}$ (fig. II.8).

Sensul adjectivelor „vertical”, „orizontal” și „oblic” se raportează la reperul cartezian xOy .

Exemplu. Punctul $M_0(1, -1)$ și panta $m = -\frac{1}{2}$ determină dreapta oblică de ecuație $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$. Această dreaptă este aceeași cu cea din exemplul precedent. De ce?

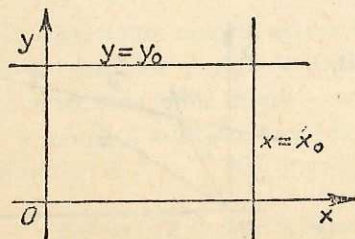


Fig. II.7

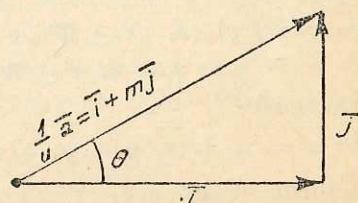


Fig. II.8

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se scrie diversele ecuații ale dreptei d determinată de punctul $M_0(-1, 2)$ și vectorul director $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Soluție. Ecuația vectorială a dreptei d este $\vec{r} = -\vec{i} + 2\vec{j} + t(2\vec{i} + \vec{j})$, $t \in \mathbb{R}$. Punând $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ rezultă ecuațiile parametrice $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Eliminând parametrul t găsim ecuația carteziană sub formă de rapoarte $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1}$. Aceasta se mai scrie $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$, punându-se în evidență panta $m = \frac{1}{2}$.

2. Să se scrie diversele ecuații ale dreptei d care trece prin punctul $A(2, \sqrt{3})$ și face cu x un unghi de 60° .

Soluție. Panta dreptei d este $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$. Rezultă ecuația carteziană $y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 2)$. Aceasta este echivalentă cu $\frac{y - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{x - 2}{1}$. Deoarece partea stîngă depinde numai de y , iar partea dreaptă depinde numai de x rezultă că valoarea comună a rapoartelor este un număr real t , independent de x și de y . Egalînd cu t și explicitînd pe x și y găsim ecuațiile parametrice $x = 2 + t$, $y = \sqrt{3}(1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Rezultă ecuația vectorială $x\vec{i} + y\vec{j} = 2\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + t(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Ecuațiile mișcării uniforme a unui punct material $M(x, y)$ sînt $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, unde $t \in [0, \infty)$ reprezintă timpul.

1) Care este viteza lui M ?

2) Să se găsească distanța parcursă de la momentul $t_1 = 0$ la momentul $t_2 = 10$.

Soluție. Se observă că ecuațiile date reprezintă o semidreaptă din dreapta de vector director $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$. Acesta este chiar vectorul viteză.

1) Găsim viteza $\|\vec{v}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2) Pentru $t_1 = 0$ obținem punctul $M_1(5, -3)$, iar pentru $t_2 = 10$ obținem punctul $M_2(-15, 17)$. Distanța cerută este $d(M_1, M_2) = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} = \|\vec{v}\|(t_2 - t_1)$.

§ 3. Dreapta determinată de două puncte distincte

Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ determină o (singură) dreaptă d . Pentru a scrie ecuația carteziană a acestei drepte vom considera că ea este determinată de punctul M_1 și de vectorul

director $\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$ (fig. II.9). Astfel

$$d : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

cu convenția făcută în §2 referitoare la anularea numitorilor.

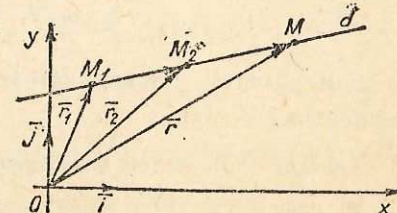


Fig. II.9

Utilizând determinanții ecuația precedentă se mai scrie în formele echivalente

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Oricare dintre aceste ecuații în $\mathbb{R}^2$ conduce la condiția ca trei puncte date $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, să fie coliniare:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Următoarele afirmații sînt imediate și stabilesc legătura între modalitățile de determinare a dreptei prin două puncte și printr-un punct și o direcție.

Dacă $x_2 - x_1 \neq 0$, atunci dreapta M_1M_2 are coeficientul unghiular

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \theta, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Punînd

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

rezultă că ecuațiile parametrice ale dreptei determinată de $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ sînt

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De aici se observă imediat că segmentul $[M_1, M_2]$ este caracterizat prin

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

sau altfel scris

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_1 + tx_2, \\ y = (1 - t)y_1 + ty_2, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Pentru $t = 0$ obținem punctul M_1 , pentru $t = 1$ găsim punctul M_2 , iar pentru $t = \frac{1}{2}$ se găsește mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, adică punctul de coordonate

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Evident punctele corespunzătoare lui $t \in (0, 1)$ sînt puncte interioare pentru segmentul $[M_1M_2]$.

Aplicații. 1) Împărțirea unui segment orientat nenul într-un raport dat.

Se spune că punctul M împarte segmentul orientat nenul $\overrightarrow{M_1M_2}$ în raportul $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ dacă satisface condiția $\overrightarrow{M_1M} = k\overrightarrow{MM_2}$. Deoarece $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$,

$\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}$, condiția de definiție este echivalentă cu $x - x_1 = k(x_2 - x)$, $y - y_1 = k(y_2 - y)$ și deci coordonatele punctului M sînt

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}, \quad k \neq -1, \quad k = \text{fixat}.$$

Pentru $k = 0$, obținem punctul M_1 , iar pentru $k = 1$ obținem mijlocul segmentului $\overrightarrow{M_1M_2}$. Pentru $k > 0$, punctul M este interior segmentului $\overrightarrow{M_1M_2}$, iar pentru $k < 0$, punctul M este exterior segmentului $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Observație. Ecuațiile $x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}$, $y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$, $k \in \mathbb{R} - \{-1\}$ reprezintă dreapta M_1M_2 ca și $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$, $t \in \mathbb{R}$. Legătura dintre parametrul t și parametrul k este $t = \frac{k}{1 + k}$.

2) Centru de greutate. Fie punctele distincte $M_1, M_2, \dots, M_n$ avînd vectorii de poziție $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \dots, \overrightarrow{OM_n}$ și numerele reale $m_1, m_2, \dots, m_n$ cu proprietatea $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$. Punctul G definit prin

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

se numește centrul de greutate al sistemului de puncte $(M_1, M_2, \dots, M_n)$ relativ la sistemul de ponderi $(m_1, m_2, \dots, m_n)$.

Dacă $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ și $G(x, y)$, atunci

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Dacă $m_1 = m_2 = \dots = m_n$, atunci sistemul de puncte se zice omogen. În acest caz centrul de greutate are coordonatele

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

În particular, pentru $n = 2$ obținem mijlocul segmentului $[M_1M_2]$, iar pentru $n = 3$ obținem coordonatele centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau punctele $A\left(-\frac{4}{5}, 2\right)$, $B\left(\frac{2}{5}, 4\right)$, $C(1, 5)$, $D\left(-\frac{7}{5}, 1\right)$. Să se găsească ecuațiile dreptelor distincte determinate de aceste puncte.

Soluție. Dreapta AB are ecuația $\frac{x + \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{y - 2}{4 - 2}$, adică $\frac{x + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{y - 2}{2}$.

Deoarece $\frac{1 + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{5 - 2}{2}$, punctul C se află pe dreapta AB , adică punctele A, B, C sînt coliniare.

analog,

$$-\frac{\frac{7}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{1-2}{2}$$

arată că punctele A, B, D sînt coliniare.

2. Se dau punctele $A(-1, 0)$, $B(1, -2)$. Să se determine:

1) coordonatele simetricului lui A față de B ,

2) coordonatele punctului M care împarte segmentul $\overrightarrow{AB}$ în raportul π .

Soluție. 1) Fie (x, y) coordonatele simetricului lui A față de B . Egalitățile $\frac{-1+x}{2} = 1$,

$$\frac{0+y}{2} = -2 \text{ conduc la } x = 3, y = -4.$$

2) Preferăm înlocuirea directă în formule. Rezultă

$$x = \frac{-1 + \pi}{1 + \pi}, y = \frac{-2\pi}{1 + \pi}.$$

3. Să se verifice că mijlocul segmentului care unește mijloacele diagonalelor unui patrulater de vîrfuri $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, este centrul de greutate al sistemului omogen de puncte (M_1, M_2, M_3, M_4) .

Soluție (fig. II.10). Coordonatele mijlocului A al segmentului $[M_1M_2]$ sînt $x_A = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_A = \frac{y_1+y_2}{2}$, iar coordonatele mijlocului B al segmentului $[M_3M_4]$ sînt $x_B = \frac{x_3+x_4}{2}$, $y_B = \frac{y_3+y_4}{2}$. Mijlocul G al segmentului $[AB]$ are coordonatele $x_G = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$, $y_G = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$, adică G este centrul de greutate specificat în problemă.

§ 4. Ecuația carteziană generală a unei drepte

Fie un punct $M_0(x_0, y_0)$ avînd vectorul de poziție $\vec{r}_0(x_0, y_0)$ și fie $\vec{n}(a, b)$ un vector nenul. Există o singură dreaptă d ce trece prin M_0 și este perpendiculară pe $\vec{n}$ (fig. II. 11).

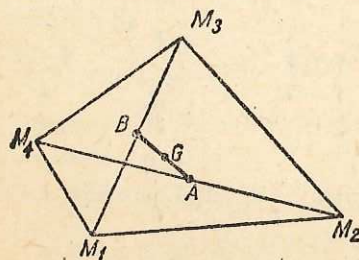


Fig. II.10

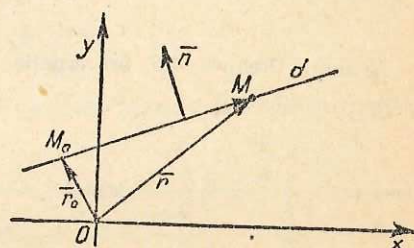


Fig. II.11

Teoremă. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar și $\vec{r}(x, y)$ vectorul său de poziție. Punctul M aparține dreptei d , determinată de M_0 și de $\vec{n} \neq \vec{0}$, dacă și numai dacă

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0.$$

Demonstrație. Punctul M aparține lui d dacă și numai dacă vectorii $\vec{n}$ și $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ sînt ortogonali. Pe de altă parte ortogonalitatea este echivalentă cu anularea produsului scalar.

Deoarece $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ecuația $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ în V este echivalentă cu ecuația

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

în $\mathbb{R}^2$, aceasta din urmă numindu-se *ecuația carteziană a unei drepte ce trece prin M_0 și este perpendiculară pe vectorul nenul $\vec{n}$* . Vectorul nenul $\vec{n}$ se numește *vectorul normal* al dreptei d . Precizăm că orice vector $t\vec{n}$, $t \neq 0$, joacă același rol cu $\vec{n}$.

Teoremă. Fie $\vec{a}(u, v)$ și $\vec{n}(a, b)$ doi vectori nenuli. Ecuațiile

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, t \in \mathbb{R} \text{ în } V, \begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ în } \mathbb{R}^2;$$

$\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v}$ în $\mathbb{R}^2$; $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ în V ; $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ în $\mathbb{R}^2$ sînt echivalente cu ecuația

$$ax + by + c = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Demonstrație. Raționamentul direct îl lășăm drept temă.

Reciproc, este suficient să arătăm că ecuația $ax + by + c = 0$ reprezintă o dreaptă. Într-adevăr, dacă (x_0, y_0) este o soluție a acestei ecuații, atunci găsim $c = -ax_0 - by_0$ și ecuația se scrie în forma echivalentă

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

care reprezintă o dreaptă ce trece prin $M_0(x_0, y_0)$ și este perpendiculară pe $\vec{n}(a, b)$.

Ecuația $ax + by + c = 0$ în $\mathbb{R}^2$, pentru care $a^2 + b^2 \neq 0$, se numește *ecuația carteziană generală a unei drepte*. Deoarece $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$ este un polinom de gradul întâi în x și y , uneori se spune că dreptele sînt *curbe algebrice de ordinul unu*.

Deci

$$d = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

sau mai scurt

$$d: ax + by + c = 0.$$

Vectorul normal al unei drepte date prin ecuația carteziană generală este $\vec{n}(a, b)$, iar vectorul director al aceleiași drepte este $(b, -a)$. În cazul $b \neq 0$,

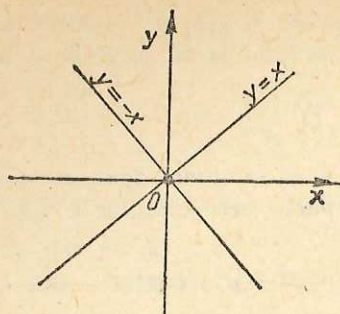


Fig. II.12

coeficientul unghiular este $m = -\frac{a}{b}$ și ecuația dreptei corespunzătoare se poate scrie în forma carteziană explicită

$$y = mx + n.$$

Ecuația generală a unei drepte ce trece prin origine este

$$ax + by = 0.$$

Dacă $b \neq 0$, atunci putem scrie $y = mx$, $m = -\frac{a}{b}$. În particular, pentru $m = 1$ obținem $y = x$ care este ecuația primei bisectoare a unghiului axelor de coordonate, iar pentru $m = -1$ obținem $y = -x$ care este ecuația celei de a doua bisectoare a unghiului axelor de coordonate (fig. II.12).

Fie dreapta $d: ax + by + c = 0$. Dreapta care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0) \in d$ și are vectorul director $\vec{n}(a, b)$ se numește *normala* lui d în punctul M_0 (fig. II.13).

Comentarii. 1) Fie dreapta $d: ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ se află pe dreapta d dacă și numai dacă $ax_0 + by_0 + c = 0$.

2) Considerăm dreapta $d: 2x + 3y + 1 = 0$. Punind $x = 1$ găsim $y = -1$, adică d trece prin punctul de coordonate $(1, -1)$. Analog constatăm că d conține punctul $(-5, 3)$. Rezultă că ecuația lui d este echivalentă cu $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2}$. De aici se obțin ecuațiile parametrice $x = 1 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

3) Pentru fiecare $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ dreptele de ecuații $ax + by + c = 0$ și $t(ax + by + c) = 0$ sînt egale. Într-adevăr, prima are vectorul normal $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$, iar a doua vectorul normal $t\vec{n}$, $t \neq 0$. De asemenea un punct (x_0, y_0) se află pe prima dacă și numai dacă se află pe a doua, condiția comună fiind $ax_0 + by_0 + c = 0$. În concluzie ecuațiile $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ reprezintă aceeași dreaptă dacă și numai dacă au coeficienții corespundenți proporționali.

Pentru $t = 0$ ecuația $t(ax + by + c) = 0$ reprezintă planul p .

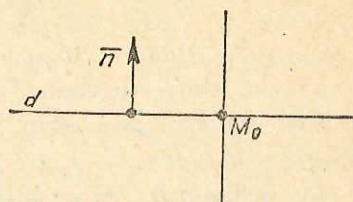


Fig. II.13

4) Fie dreapta $d: ax + by + c = 0$. Pentru trasarea lui d în raport cu reperul cartezian este necesar să determinăm fie două puncte distincte pe d , fie un punct și vectorul normal, fie un punct și vectorul director, fie un punct și panta.

PROBLEME REZOLVATE

1. Știind că $M_0(3, 4)$ este piciorul perpendicularei coborâtă din origine pe dreapta d , să se scrie ecuația dreptei d . Apoi să se determine un versor director al lui d și panta lui d .

Soluție. Dreapta d este determinată de punctul $M_0(3, 4)$ și vectorul normal $\vec{OM} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. De aceea ecuația carteziană implicită a lui d este $3(x - 3) + 4(y - 4) = 0$ adică $3x + 4y - 25 = 0$.

Un vector director al lui d este $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, iar acestuia i se asociază versorul $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{5}(-4\vec{i} + 3\vec{j})$.

Explicitînd $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ găsim panta $m = -\frac{3}{4}$.

2. Să se scrie ecuațiile parametrice ale dreptei d' ce trece prin punctul $M_0(1, 2)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 3x - 2y + 2 = 0$. Să se găsească proiecția lui M_0 pe d și simetricul lui M_0 față de d .

Soluție. Vectorul normal al lui d este $\vec{n} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Acesta trebuie să fie vectorul director al lui d' . Deci $d': x = 1 + 3t$, $y = 2 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

Proiecția lui M_0 pe d este dată de $d' \cap d$, adică este caracterizată prin sistemul

$$3x - 2y + 2 = 0, \quad x = 1 + 3t, \quad y = 2 - 2t.$$

Rezultă $13t + 1 = 0$, adică $t = -\frac{1}{13}$, și deci $(\frac{10}{13}, \frac{24}{13})$ sînt coordonatele punctului căutat. Dacă (a, b) sînt coordonatele simetricului lui M_0 față de d , atunci

$$\frac{1+a}{2} = \frac{10}{13}, \quad \frac{1+b}{2} = \frac{24}{13}.$$

Deci $a = \frac{7}{13}$, $b = \frac{35}{13}$.

3. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 4|$. Apoi să se determine numărul soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} y = |x - 4|, & x \in [-1, 6] \\ y = t, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

în funcție de valorile lui t .

Soluție. Deoarece

$$f(x) = |x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{pentru } x \geq 4 \\ -x + 4 & \text{pentru } x < 4 \end{cases}$$

graficul lui f este reuniunea semidreptelor

$$y = x - 4, \quad x \geq 4; \quad y = -x + 4, \quad x < 4$$

(fig. II.14).

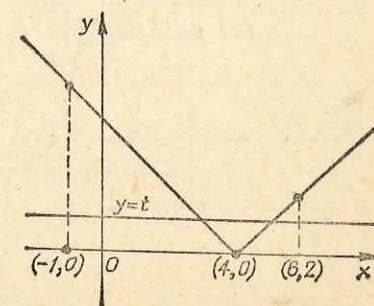


Fig. II.14

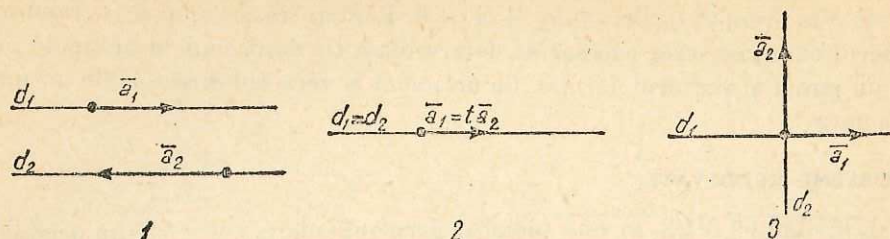


Fig. II.15

Urmărind figura II.14 deducem: pentru $t \in (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$ sistemul nu admite soluții, pentru $t = 0$ se obține soluția $(4, 0)$, pentru $t \in (0, 2]$ sistemul admite două soluții, pentru $t \in (2, 5]$ sistemul admite o soluție.

§ 5. Reuniunea și intersecția a două drepte

Mai întâi ne vom referi la pozițiile relative a două drepte din plan.

Fie d_1 și d_2 două drepte care au respectiv vectorii directori $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$. Dreptele d_1 și d_2 sînt (1) *paralele* dacă și numai dacă n-au nici un punct comun ($\Rightarrow \vec{a}_1$ este coliniar cu $\vec{a}_2$; figura II.15.1), (2) *egale* dacă și numai dacă au un punct comun, iar $\vec{a}_1$ este coliniar cu $\vec{a}_2$ (fig. II.15.2), (3) *secante* dacă și numai dacă $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ sînt necoliniari; dreptele secante sînt *perpendiculare* dacă și numai dacă $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$, adică $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ (fig. II.15.3).

În particular fie două drepte de coeficienți unghiulari m_1 și m_2 . Condiția de paralelism este $m_1 = m_2$, iar condiția de perpendicularitate este $m_1 m_2 = -1$.

Fie $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Dreptele d_1 și d_2 sînt (1) *paralele* dacă și numai dacă vectorii normali $\vec{n}_1(a_1, b_1)$ și $\vec{n}_2(a_2, b_2)$ sînt coliniari (fig. II.16.1), adică $\vec{n}_1 = t\vec{n}_2$ sau $(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$, și $c_1 \neq tc_2$, (2) *egale* dacă și numai dacă $(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$ și $c_1 = tc_2$ (fig. II.16.2), (3) *secante* dacă și numai dacă $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sînt necoliniari; dreptele secante sînt *perpendiculare* dacă și numai dacă $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, adică $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (fig. II.16.3).

Teoremă. Dacă $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci

$$d_1 \cup d_2: (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

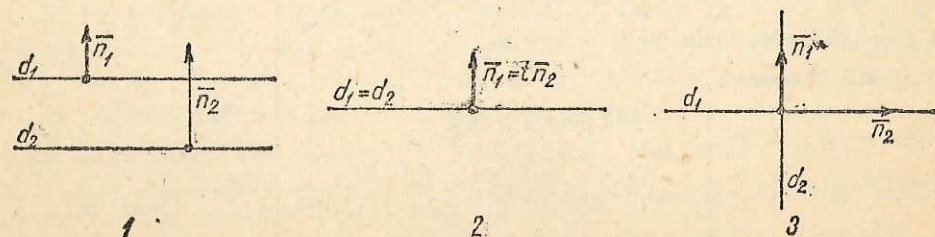


Fig. II.16

Demonstrație. Fie $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0\}$. Trebuie să arătăm că $d_1 \cup d_2 = \Gamma$, adică $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ și $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

Incluziunea $d_1 \cup d_2 \subseteq \Gamma$ decurge din următorul șir de implicații: $(x_0, y_0) \in d_1 \cup d_2 \Rightarrow$ sau $(x_0, y_0) \in d_1$ sau $(x_0, y_0) \in d_2$ sau $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ sau $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \Rightarrow (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \in \Gamma$.

Invers: dacă $(x_0, y_0) \in \Gamma$, atunci $(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0$ și deci cel puțin un factor este zero, să zicem $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$; rezultă $(x_0, y_0) \in d_1 \subseteq d_1 \cup d_2$ și deci $\Gamma \subseteq d_1 \cup d_2$.

Teoremă. Dacă $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci $d_1 \cap d_2: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Mai mult,

$$1) d_1 \cap d_2 = \{M_0\} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

$$2) d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0, c_2b_1 - c_1b_2 = 0,$$

$$3) d_1 \cap d_2 = \emptyset \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0, c_2b_1 - c_1b_2 \neq 0.$$

Demonstrație. Dovedim numai relația 1), restul rămînînd drept temă.

Dacă $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, atunci sistemul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

are soluția unică

$$x_0 = \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y_0 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

și deci $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$. Reciproc ipoteza $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ implică falsitatea relațiilor $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ și $c_2b_1 - c_1b_2 = 0$; $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ și $c_2b_1 - c_1b_2 \neq 0$ deoarece $\{M_0\}$ nu este o dreaptă (de ce?) și nici mulțimea vidă. Deci $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ implică $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră mulțimea de puncte $M(x, y)$ ale căror coordonate verifică ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$. Să se arate că această mulțime este reuniunea a două drepte perpendiculare, care trec prin origine.

Soluție. Fie $\Gamma: 12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în $\mathbb{R}^2$ este echivalentă cu ecuația $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0$ în $\mathbb{R}$, cu parametrul $y \in \mathbb{R}$.

Rezultă $12x^2 - 7xy - 12y^2 = 0 \Leftrightarrow 12 \left(x - \frac{4y}{3} \right) \left(x + \frac{3y}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow (3x - 4y)(4x + 3y) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$ sau $4x + 3y = 0$. Deci $\Gamma = d_1 \cup d_2$ unde $d_1: 3x - 4y = 0$ și $d_2: 4x + 3y = 0$. Deoarece $m_1 = \frac{3}{4}$, $m_2 = -\frac{4}{3}$, condiția de perpendicularitate $m_1 m_2 = -1$ se verifică imediat.

Comentarii

1) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, cu $abc \neq 0$ și $b^2 - 4ac \geq 0$, reprezintă două drepte în plan care trec prin origine și diferite de axele Ox, Oy .

2) O ecuație de forma $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, cu $abc \neq 0$ și $b^2 - 4ac < 0$, reprezintă un punct în plan și anume originea $O(0, 0)$.

3) O ecuație de forma $ax^2 + bxy = 0$, cu $ab \neq 0$, reprezintă două drepte: axa Oy de ecuație $x = 0$ și dreapta de ecuație $ax + by = 0$.

4) O ecuație de forma $bxy + cy^2 = 0$ cu $bc \neq 0$ reprezintă două drepte: axa Ox de ecuație $y = 0$ și dreapta de ecuație $bx + cy = 0$.

2. Să se găsească coordonatele punctului de intersecție al dreptelor:

$$d : (a + 1)x + ay = a,$$

$$d' : (a + 6)x + 2(a + 2)y = 2a + 1, a \in \mathbb{R},$$

utilizând metoda matriceală.

Soluție. Considerind matricele

$$A = \begin{bmatrix} a + 1 & a \\ a + 6 & 2(a + 2) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ 2a + 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{sistemul liniar } \begin{cases} (a + 1)x + ay = a \\ (a + 6)x + 2(a + 2)y = 2a + 1 \end{cases}$$

se scrie astfel $AX = B$. Deoarece

$$\det A = \begin{vmatrix} a + 1 & a \\ a + 6 & 2(a + 2) \end{vmatrix} = a^2 + 4 \neq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

matricea A admite inversă și

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 2(a + 2) & -a \\ -(a + 6) & a + 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultă $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$, adică

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + 4} \begin{bmatrix} 2(a + 2) & -a \\ -(a + 6) & a + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 2a + 1 \end{bmatrix}.$$

Efectuând calculele obținem

$$x = \frac{1}{a^2 + 4} \cdot [2(a + 2)a - a(2a + 1)] = \frac{3a}{a^2 + 4},$$

$$y = \frac{1}{a^2 + 4} [-(a + 6)a + (a + 1)(2a + 1)] = \frac{a^2 - 3a + 1}{a^2 + 4}.$$

3. Fie A și B punctele în care dreapta de ecuație $ax + (2a + 1)y + a^2 = 0$ taie axele de coordonate.

1) Să se scrie ecuația dreptei d_1 ce trece prin A și este paralelă cu prima bisectoare a axelor.

2) Să se scrie ecuația dreptei d_2 care trece prin B și este perpendiculară pe d_1 .

3) Să se determine a astfel încât punctul de intersecție dintre d_1 și d_2 să fie pe dreapta de ecuație $x + 5y = 1$.

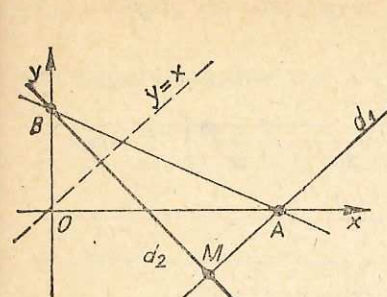


Fig. II.17

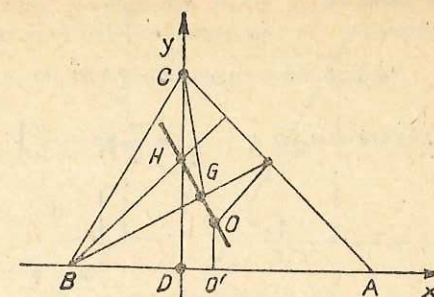


Fig. II.18

Soluție. Pentru $y = 0$, $a \neq 0$, găsim $x = -a$ și deci $A(-a, 0)$. Făcând $x = 0$, $a \neq -\frac{1}{2}$ obținem $y = -\frac{a^2}{2a + 1}$ și astfel $B(0, \frac{-a^2}{2a + 1})$. Dacă $a < -\frac{1}{2}$, atunci putem construi figura II.17.

1) Coeficientul unghiular al lui d_1 este $m_1 = 1$. Astfel d_1 are ecuația $y = x + a$.

2) Coeficientul unghiular al lui d_2 este $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -1$. De aceea d_2 are ecuația $x + y + \frac{a^2}{2a + 1} = 0$.

3) Condiția ca M să fie pe dreapta dată este echivalentă cu condiția de compatibilitate a sistemului

$$\begin{cases} x - y = -a \\ x + y = -\frac{a^2}{2a + 1} \\ x + 5y = 1 \end{cases}$$

adică cu

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ 1 & 1 & -\frac{a^2}{2a + 1} \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând acest determinant găsim $2(2a + 1) + 5(-a^2 - a) + 3a^2 + a = 0$ sau $a^2 = 1$ adică $a = \pm 1$.

4. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că ortocentrul H , centrul de greutate G și centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC sînt coliniare.

Soluție. Se iau drept axe de coordonate latura BA și înălțimea DC . Se notează cu a și b abscisele punctelor A respectiv B și cu c ordonata lui C (fig. II.18).

Înălțimea CD are ecuația $x = 0$. Deoarece coeficientul unghiular al dreptei AC este $-\frac{c}{a}$, se găsește că ecuația înălțimii din B este $ax - by - ab = 0$. Rezultă $H(0, -\frac{ab}{c})$.

Coordonatele mijloacelor segmentelor $[CA]$ și $[AB]$ sînt $(\frac{a}{2}, \frac{c}{2})$ respectiv $(\frac{a + b}{2}, 0)$. De aceea mediana din B are ecuația $cx - (a - 2b)y - bc = 0$, iar mediana din C are ecuația $2cx + (a + b)y - c(a + b) = 0$. Rezultă $G(\frac{a + b}{3}, \frac{c}{3})$. De altfel acest lucru

se putea obține direct, deoarece coordonatele centrului de greutate sînt respectiv medii aritmetice ale coordonatelor vîrfurilor triunghiului.

Mediatoarea segmentului $[AB]$ are ecuația $x = \frac{a+b}{2}$, iar mediatoarea segmentului $[CA]$ are ecuația $y - \frac{c}{2} = \frac{a}{c} \left(x - \frac{a}{2} \right)$. De aceea $O \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c^2+ab}{2c} \right)$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{a+b}{3} & \frac{c}{3} & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{c^2+ab}{2c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

punctele H , G și O sînt coliniare. Acest lucru poate fi dovedit și arătînd că $\overline{HG} = 2\overline{GO}$.

Notă. Conținutul problemei precedente este independent de fixarea unui reper cartezian în plan. De aceea se preferă reperul cartezian care simplifică calculele.

§ 6. Fascicul de drepte

Presupunem că avem două drepte $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ care nu sînt paralele sau egale. Intersecția $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$ este caracterizată prin sistemul liniar

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Reciproc, dacă se dă un punct $M_0(x_0, y_0)$, atunci el poate fi gîndit ca intersecția dreptelor de ecuații $x = x_0$ și $y = y_0$. Este încă evident că prin M_0 trec o infinitate de drepte.

Definiție. Mulțimea tuturor dreptelor din plan care trec printr-un punct dat M_0 se numește fascicul de drepte. Punctul M_0 se numește vîrf fasciculului (fig. II.19).

Teoremă. Dacă punctul M_0 este determinat ca intersecția dreptelor d_1 și d_2 , atunci ecuația unei drepte oarecare din fasciculul de vîrf M_0 este

$$r(a_1x + b_1y + c_1) + s(a_2x + b_2y + c_2) = 0, \quad r^2 + s^2 \neq 0 \quad (r, s) \in \mathbb{R}^2.$$

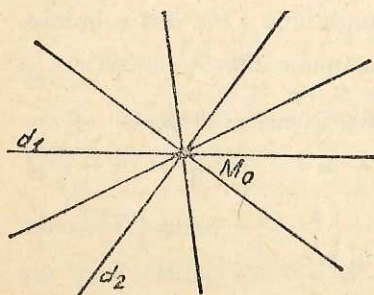


Fig. II.19.

Demonstrație. Deoarece vectorii normali $\vec{n}_1(a_1, b_1)$ și $\vec{n}_2(a_2, b_2)$ sînt prin ipoteză necoliniari, adică formează o bază, orice vector nenul $\vec{n}$ din plan se scrie în forma $\vec{n} = r\vec{n}_1 + s\vec{n}_2$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Ecuația dreptei care trece prin M_0 și are vectorul normal $\vec{n}$ este cea scrisă în teoremă.

Ecuația din teorema precedentă se numește ecuația fasciculului de vîrf M_0 .

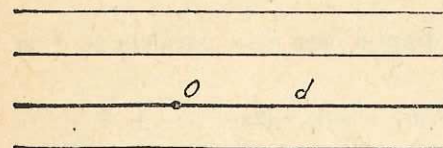


Fig. II. 20

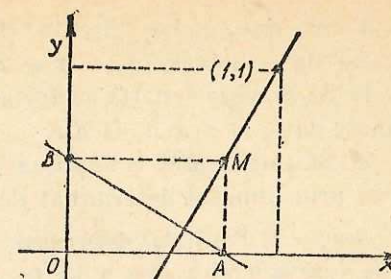


Fig. II. 21

Numerele reale r și s sînt parametri, cel puțin unul fiind nenul. De aceea în aplicații se lucrează fie cu $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $t(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0$, fie cu $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ și $a_1x + b_1y + c_1 + t(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Fie $d: ax + by = 0$ o dreaptă care trece prin origine. Mulțimea tuturor dreptelor paralele sau egale cu d se numește fascicul de drepte paralele. Dreapta d se numește linia de reper a fasciculului (fig. II.20). Evident o dreaptă oarecare din fasciculul de drepte paralele cu linia de reper d are ecuația

$$ax + by + r = 0,$$

unde r este un parametru real. Această ecuație se mai numește și ecuația fasciculului de drepte paralele.

Observație. Reuniunea dreptelor dintr-un fascicul este planul p .

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian se dau punctele $A(r, 0)$, $B(0, s)$ și $M(r, s)$. Să se scrie ecuația carteziană a perpendicularei din M pe AB . Să se arate că dacă A și B sînt variabile astfel încît $r + s = 1$, atunci această perpendiculară trece printr-un punct fix.

Soluție. Fie h dreapta ce trece prin M și este perpendiculară pe AB (fig. II.21). Vectorul director al dreptei AB , adică $-r\vec{i} + s\vec{j}$, este vector normal pentru h . De aceea ecuația carteziană implicită a lui h este $-r(x - r) + s(y - s) = 0$, adică $rx - sy + s^2 - r^2 = 0$.

Pentru r, s variabile, condiția $r + s = 1$ implică $r(x + y - 2) + 1 - y = 0$, $\forall r \in \mathbb{R}$, adică h face parte din fasciculul de drepte al cărui vîrf este soluția sistemului $x + y - 2 = 0$, $1 - y = 0$, adică $(1, 1)$.

2. Se dau dreptele $AB: x - 2y + 3 = 0$, $AC: 2x - y - 3 = 0$, $BC: 3x + 2y + 1 = 0$. Să se scrie ecuația carteziană a înălțimii din A a triunghiului ABC .

Soluție. Dreptele AB și AC determină fasciculul de ecuație $r(x - 2y + 3) + s(2x - y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Aceasta se transcrie sub forma $x(r + 2s) + y(-2r - s) + 3(r - s) = 0$. Selectăm dreapta din fascicul perpendiculară pe BC , adică punem condiția $3(r + 2s) + 2(-2r - s) = 0$. Rezultă $r = 4s$. Aceasta împreună cu ipoteza $s \neq 0$ conduce la ecuația $2x - 3y + 3 = 0$.

3. Se dau patru drepte $d_1: 2x + y - 1 = 0$, $d'_1: x - 2y + 3 = 0$, $d_2: x + 3y - 2 = 0$, $d'_2: -x + 2y + 3 = 0$.

1) Să se scrie ecuația carteziană a dreptei care trece prin punctele determinate de $d_1 \cap d'_1$ și $d_2 \cap d'_2$.

2) Să se găsească ecuația carteziană a dreptei care este paralelă cu d_1 și trece prin punctul determinat de $d_2 \cap d'_2$.

Soluție. 1) Fasciculul determinat de d_1 și d'_1 are ecuația $r_1(2x + y - 1) + s_1(x - 2y + 3) = 0$, $r_1^2 + s_1^2 \neq 0$, iar fasciculul determinat de d_2 și d'_2 are ecuația $r_2(x + 3y - 2) + s_2(-x + 2y + 3) = 0$, $r_2^2 + s_2^2 \neq 0$. Cele două ecuații reprezintă aceeași dreaptă dacă și numai dacă

$$\frac{2r_1 + s_1}{r_2 - s_2} = \frac{r_1 - 2s_1}{3r_2 + 2s_2} = \frac{-r_1 + 3s_1}{-2r_2 + 3s_2}.$$

Utilizând soluțiile acestui sistem rezultă dreapta de ecuație $4x + 7y - 9 = 0$.

2) Fasciculul de drepte paralele cu d_1 are ecuația $2x + y - t = 0$. Se impune condiția

$$\frac{2}{r_2 - s_2} = \frac{1}{3r_2 + 2s_2} = \frac{-t}{-2r_2 + 3s_2}.$$

Rezultă $t = 5$ și deci $2x + y - 5 = 0$.

§ 7. Dreapta orientată

Fie d o dreaptă din plan. Pe dreapta d se pot stabili două și numai două sensuri de parcurs (ordini ale punctelor dreptei) pe care convenim să le notăm cu $(-)$, $(+)$ și pe care le reprezentăm prin săgeți.

Definiție. O dreaptă d împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește **dreaptă orientată**.

Dacă $\vec{a}$ este vectorul director al lui d , atunci este natural să-i atașăm lui d sensul lui $\vec{a}$ și să notăm acest sens cu $(+)$. Acest lucru va fi admis în continuare (fig. II.22).

Fie $d = \{M \mid \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$ o dreaptă orientată prin $\vec{a}$. Ordinea punctelor lui d , indicată de sensul vectorului director $\vec{a}$, este coerentă cu ordinea pe $\mathbb{R}$. Mulțimea $d_1 = \{M \mid \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, t \geq 0\}$ se numește *partea pozitivă* a lui d , iar mulțimea $d_2 = \{M \mid \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, t \leq 0\}$ se numește *partea negativă* a lui d . Partea pozitivă și partea negativă sînt semidrepte ale lui d determinate de punctul M_0 .

Axele de coordonate Ox și Oy sînt exemple de drepte orientate, iar originea le împarte în *semiaxe* pozitive și negative.

Orice dreaptă orientată $d = \{M \mid \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$ poate fi scrisă în forma $d = \{M \mid \overrightarrow{M_0M} = s\vec{e}, s \in \mathbb{R}, \vec{e} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}\}$.

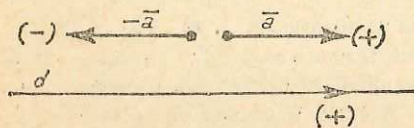


Fig. II. 22

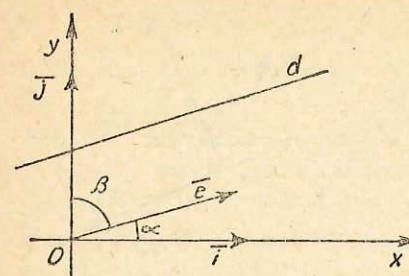


Fig. II. 23

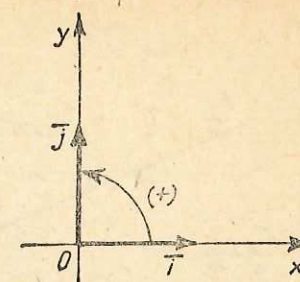


Fig. II. 24

Unghiurile α și β dintre *versorul director* $\vec{e}$ și versorii $\vec{i}$ respectiv $\vec{j}$ se numesc *unghiurile directoare* ale dreptei orientate d (fig. II. 23). Fie u, v coordonatele lui $\vec{a}$. Coordonatele versorului $\vec{e}$,

$$\cos \alpha = \vec{e} \cdot \vec{i} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \cos \beta = \vec{e} \cdot \vec{j} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

se numesc *cosinusurile directoare* ale dreptei orientate d . Ele satisfac relația

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

În cele precedente am arătat ce se înțelege prin orientarea unei drepte privită ca spațiu cu o dimensiune de sine-stătător, adică din punctul de vedere al unui „observator” situat în această dreaptă. Dar în unele probleme este necesar să privim dreapta din punctul de vedere al unui „observator” din planul orientat. Elementul de bază în studiul dreptei în raport cu planul este normala dreptei.

În plan se pot stabili două și numai două sensuri de rotație: sensul trigonometric $(+)$ și sensul mișcării acelor de ceasornic $(-)$. Planul împreună cu un sens de rotație fixat se numește *plan orientat* (fig. II.24).

Teoremă. În planul orientat, alegerea unui sens de parcurs pe o dreaptă este echivalentă cu alegerea unui sens pe normală.

Demonstrație. Prin convenție sensul rotației directe în plan este sensul trigonometric.

Fie dreapta $d: ax + by + c = 0$ orientată cu ajutorul vectorului director $(b, -a)$. Rotind în sens direct cu un unghi de măsură $\pi/2$ (vezi Cap. 3), din vectorul $(b, -a)$ găsim vectorul $\vec{n}(a, b)$ care determină o orientare pe normala dreptei d . Raționamentul reciproc este evident (fig. II.25).

Avînd în vedere teorema precedentă, în planul orientat se admite definiția: o dreaptă d împreună cu o alegere a sensului pe normală se numește **dreaptă orientată**.

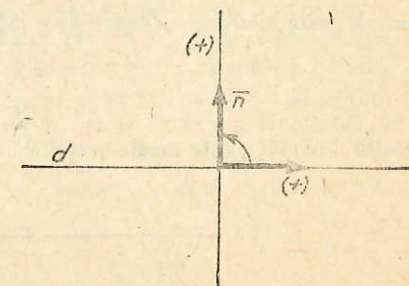


Fig. II. 25

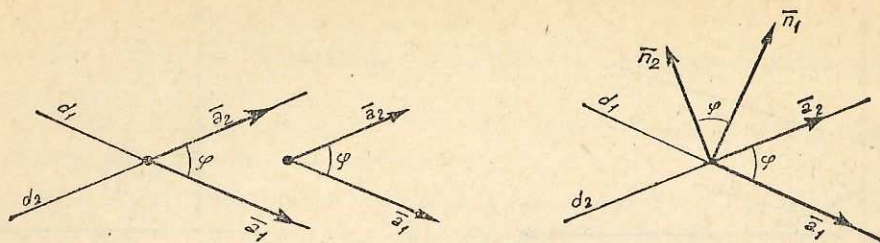


Fig. II. 26

Presupunem că d_1 și d_2 sînt drepte orientate prin vectorii directori $\vec{a}_1(u_1, v_1)$ și $\vec{a}_2(u_2, v_2)$. Prin unghiul dintre dreptele orientate d_1 și d_2 vom înțelege unghiul dintre $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$, adică unghiul definit prin (fig. II.26)

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1\| \|\vec{a}_2\|} = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \sqrt{u_2^2 + v_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Presupunem că d_1 și d_2 sînt drepte orientate prin vectorii normali $\vec{n}_1(a_1, b_1)$ și $\vec{n}_2(a_2, b_2)$. În acest caz unghiul dintre dreptele orientate d_1 și d_2 este unghiul dintre vectorii $\vec{n}_1$ și $\vec{n}_2$, adică (fig. II.26)

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Aplicație. Biraport. Fie $d: x = x_0 + u, y = y_0 + mt, t \in \mathbb{R}$ o dreaptă orientată prin versorul director $\vec{e} = \vec{u} + m\vec{j}$ și M, N două puncte ale acestei drepte. Numărul ρ_{MN} definit prin $\overline{MN} = \rho_{MN}\vec{e}$ se numește *mărimea relativă a segmentului [MN]*.

Considerăm că pe dreapta d au fost fixate punctele distincte $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4)$ corespunzătoare valorilor t_1, t_2, t_3, t_4 ale parametrului (fig. II.27). Numărul

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\rho_{M_1 M_2}}{\rho_{M_2 M_3}} \cdot \frac{\rho_{M_1 M_4}}{\rho_{M_4 M_3}} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_4}$$

se numește *biraport* al cuaternei ordonate (M_1, M_2, M_3, M_4) . Un biraport de valoare -1 se numește *armonic*; în acest caz se spune că perechea (M_1, M_3) divide armonic perechea (M_2, M_4) . Diviziunea armonică este deci caracterizată prin

$$\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} \cdot \frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_4} = -1.$$

Dacă M_1 este luat drept origine pe d , adică $t_1 = 0$, atunci această ecuație se reduce la

$$\frac{2}{t_3} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4}.$$

Cu alte cuvinte t_3 este medie armonică a numerelor t_2 și t_4 .

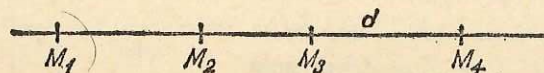


Fig. II. 27

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau dreptele $d_1: x = 1 + 2t, y = 1 - t, t \in \mathbb{R}$ și $d_2: x - y + 1 = 0$.

1) Să se orienteze d_1 și d_2 .

2) Să se determine unghiurile directoare ale dreptelor d_1 și d_2 .

3) Să se găsească unghiul dintre d_1 și d_2 .

Soluție (fig. II. 28). 1) Dreapta d_1 trece prin punctul $A(1, 1)$ și are vectorul director $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Fie B punctul de pe d_1 cu proprietatea $\overline{AB} = \vec{a}$, adică $B(3, 0)$. Sensul pozitiv pe d_1 este sensul de la A la B .

Dreapta d_2 trece prin punctul $C(0, 1)$ și are vectorul normal $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j}$. Vectorul director al lui d_2 este $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j}$. Fie D punctul de pe d_2 cu proprietatea $\overline{CD} = \vec{b}$, adică $D(-1, 0)$. Sensul pozitiv pe d_2 este sensul de la C la D .

2) Fie $\vec{a}_0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{j})$ versorul director care are același sens cu $\vec{a}$. Unghiurile directoare α_1, β_1 ale dreptei d_1 rezultă din $\cos \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta_1 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, adică $\alpha_1 = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}, \beta_1 = \arccos \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Analog găsim că $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4}, \beta_2 = \frac{3\pi}{4}$ sînt unghiurile directoare ale lui d_2 .

3) Unghiul φ dintre d_1 și d_2 se determină din

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{-2 + 1}{\sqrt{5} \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}},$$

adică $\varphi = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} \right)$.

2. Se consideră dreptele $d_m: x = \frac{2}{m} - \frac{y}{m^2}$, unde m este un parametru real nenul. Cîte drepte d_m trec printr-un punct dat al planului? Dacă patru drepte din familia d_m taie pe Ox în puncte care formează o diviziune armonică, ce se poate spune despre punctele corespunzătoare de pe Oy ?

Soluție. Se observă că $d_m: m^2 x - 2m + y = 0$. Se constată ușor că prin fiecare punct al mulțimii $(Ox \cup Oy) - \{0\}$ trece o singură dreaptă d_m . Pentru $x \neq 0$ și $y \neq 0$, ecuația de gradul doi în m are soluțiile reale numai dacă $1 - xy \geq 0$. Rezultă: prin fiecare punct (x, y) caracterizat prin $xy < 1, x \neq 0, y \neq 0$ trec două drepte distincte, prin punctele (x, y) care satisfac relația $xy > 1$ nu trece nici o dreaptă.

Fie dreptele $d_{m_i}, i = 1, 2, 3, 4$, care taie pe Ox în puncte de abscise $x_i, i = 1, 2, 3, 4$, care formează o diviziune armonică, adică

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_4} = -1.$$

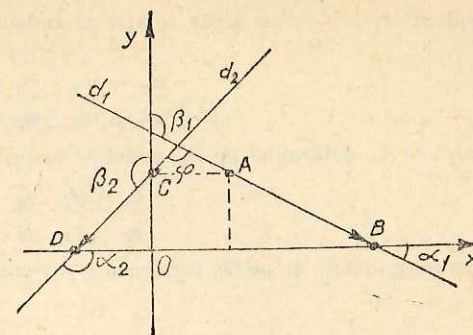


Fig. II. 28

Evident $x_i = \frac{2}{m_i}$. De aceea relația precedentă se transcrie

$$\frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_2} \cdot \frac{m_4 - m_1}{m_3 - m_4} = -1.$$

Dreptele d_m determină pe Oy punctele de ordonate $y_i = 2 \cdot m_i$. De aceea

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} \cdot \frac{y_4 - y_1}{y_3 - y_4} = -1$$

și astfel punctele de pe Oy formează o diviziune armonică.

§ 8. Distanța de la un punct la o dreaptă. Aria unui triunghi

1) Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct din plan și h o dreaptă de ecuație $ax + by + c = 0$. Fie $M_1(x_1, y_1)$ proiecția lui M_0 pe dreapta h (fig. II. 29). Lungimea $\| \overline{M_1 M_0} \|$ se numește *distanța de la punctul M_0 la dreapta h* și se notează cu $d(M_0; h)$. Analitic, $d(M_0; h)$ se poate obține din identitatea

$$\vec{n} \cdot \overline{M_1 M_0} = (\pm 1) \|\vec{n}\| d(M_0; h),$$

factorul ± 1 având semnul produsului scalar din partea stângă. Deci

$$d(M_0; h) = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{M_1 M_0}|}{\|\vec{n}\|}$$

sau

$$d(M_0; h) = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Deoarece $M_1 \in h$, rezultă $c = -ax_1 - by_1$ și deci

$$d(M_0; h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2) Să presupunem acum că avem o dreaptă h determinată de punctele distincte $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ a cărei ecuație o scriem în forma

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $M_1(x_1, y_1)$ este un alt punct din plan și dacă notăm

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

atunci

$$d(M_1; h) = \frac{|\Delta|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}.$$

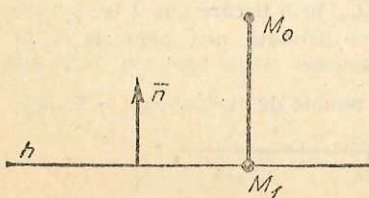


Fig. II. 29

De aceea aria

$$A = \frac{\|\overline{M_2 M_3}\| d(M_1; M_2 M_3)}{2}$$

a triunghiului $M_1 M_2 M_3$ poate fi calculată cu formula

$$A = \frac{1}{2} |\Delta|.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian xOy se dau punctele $A(1, -1)$, $B(3, 2)$. Să se scrie ecuația carteziană implicită a dreptei AB și să se găsească distanța de la origine la dreapta AB .

Soluție. Ecuația, sub formă de rapoarte, a dreptei AB este $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$. Ea se scrie în forma echivalentă $3x - 2y - 5 = 0$. Rezultă

$$d(O; AB) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

2. Se dau punctul $M(3, 3)$ și triunghiul ABC determinat de dreptele $AB: x + 2y - 4 = 0$, $BC: 3x + y - 2 = 0$, $CA: x - 3y - 4 = 0$.

1) Să se calculeze aria triunghiului ABC .

2) Fie P, Q, R proiecțiile punctului M respectiv pe OA, OB și AB . Să se demonstreze că punctele P, Q, R sînt coliniare.

3) Să se scrie ecuația fasciculului de drepte determinat de dreptele AB și PQ . Să se găsească ecuația dreptei din fascicul, care trece prin punctul $N(0, 5)$.

Soluție (fig. II. 30). 1) $\{A\} = AB \cap CA \Rightarrow A(4, 0)$, $\{B\} = AB \cap BC \Rightarrow B(0, 2)$, $\{C\} = BC \cap CA \Rightarrow C(1, -1)$. Ținînd seama de formulă găsim aria $(ABC) = \frac{1}{2} |\Delta| = 5$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

2) Dreapta MR are ecuația carteziană explicită $y - 3 = 2(x - 3)$. De aceea $\{R\} = AB \cap MR \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$, $2x - y - 3 = 0 \Rightarrow R(2, 1)$. Ținînd seama că $P(3, 0)$, $Q(0, 3)$, se verifică condiția de coliniaritate,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

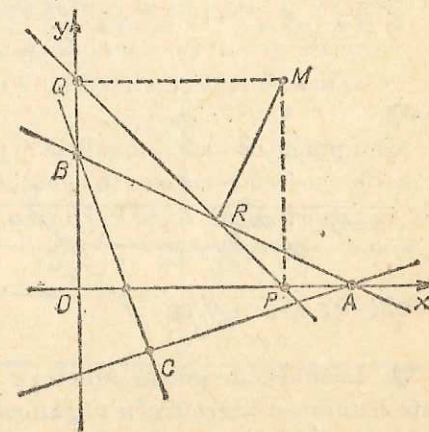


Fig. II. 30

3) Ecuația fascicului determinat de dreptele AB și $PQ: x + y - 3 = 0$ este $r(x + 2y - 4) + s(x + y - 3) = 0, r^2 + s^2 \neq 0$. Dreapta din fascicul care trece prin $N(0,5)$ corespunde valorilor r și s care verifică condiția $3r + s = 0, s \neq 0$. Ecuația acestei drepte este $2x + y - 5 = 0$.

§ 9. Locuri geometrice

O mulțime de puncte din plan, definită prin specificarea unor proprietăți geometrice ale elementelor sale, se numește *loc geometric*.

În esență, problemele de loc geometric sunt probleme de găsim a unor proprietăți echivalente celor prin care este dată o anumită mulțime, sau altfel spus, probleme de egalitate a două mulțimi. Dar rezolvarea unei probleme de tipul (1) „punctele unei mulțimi au proprietatea P dacă și numai dacă au proprietatea Q ” nu este totuna cu rezolvarea unei probleme de tipul (2) „să se găsească locul geometric al punctelor care au proprietatea P ”. În general, în problema (2) proprietatea P este dată astfel încât nu este evident cu ce figură geometrică avem de-a face (ipoteză!), iar proprietatea Q nu este specificată. Ea poate fi aleasă de rezolvitor din mulțimea proprietăților echivalente cu P de așa manieră încât să poată spune cu ce figură geometrică este echivalentă mulțimea dată inițial.

Rezolvarea efectivă a unei probleme de loc geometric constă în următoarele:

1) Verificarea existenței unui punct care posedă proprietatea dată, adică stabilirea faptului că mulțimea dată este vidă sau nu.

2) Se consideră un punct (variabil) care posedă proprietatea dată și se stabilește apartenența acestui punct la o figură geometrică ($\mathcal{F}$).

3) Se verifică dacă orice punct al lui $\mathcal{F}$ convine, adică se analizează dacă este suficient ca un punct să aparțină lui $\mathcal{F}$ pentru a avea proprietatea specificată. De cele mai multe ori reiese că nu putem accepta decât o parte ($\mathcal{F}'$) a lui $\mathcal{F}$.

Figura ($\mathcal{F}'$) este locul căutat deoarece:

- orice punct care posedă proprietatea dată aparține necesar lui $\mathcal{F}'$;
- este suficient ca un punct să aparțină lui $\mathcal{F}'$ pentru a avea proprietatea dată.

Din punct de vedere analitic determinarea unui loc geometric este echivalentă cu găsirea ecuației sau ecuațiilor care precizează locul geometric respectiv în raport cu un reper cartezian.

PROBLEME REZOLVATE

1. Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este reuniunea bisectoarelor unghiurilor acestor drepte. Să se determine ecuațiile celor două bisectoare.

Soluție. Fie dreptele $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Condiția de concurență este $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, iar punctul comun are coordonatele:

$$x = \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Evident acest punct aparține locului geometric căutat. Fie acum $M_0(x_0, y_0)$ un punct egal depărtat de d_1 și d_2 , adică

$$\frac{|a_1x_0 + b_1y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x_0 + b_2y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ținând seama de proprietățile modulelor și de faptul că indicele o poate fi lăsat deoparte, găsim ecuațiile

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

2. Să se găsească locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă.

Soluție. Fie A și B două puncte fixe distincte și k un număr real. Căutăm locul geometric al punctelor M pentru care $d^2(M, A) - d^2(M, B) = k$.

Fie $k = 0$; atunci $d(M, A) = d(M, B)$ și deci M descrie mediatoarea segmentului $[AB]$.

Fie $k \neq 0$ și O mijlocul lui $[AB]$. Fixind reperul cartezian ca în figura II. 31 rezultă $O(0,0), M(x, y), A(-a, 0), B(a, 0), a > 0$ și relația de definiție este echivalentă cu $[(x+a)^2 + y^2] - [(x-a)^2 + y^2] = k$, adică $x = \frac{k}{4a}$. Astfel M aparține dreptei d :

$x = \frac{k}{4a}$, perpendiculară pe AB , care taie pe AB în punctul $C(\frac{k}{4a}, 0)$. Reciproc, orice punct $M \in d$ satisface condiția inițială și deci locul geometric căutat este dreapta d .

3. Se dau dreptele fixe $d: y = 1, d': y = 2$ și dreapta variabilă $d_\alpha: y = \frac{x}{\sin \alpha}, \alpha \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Fie $\{A_\alpha\} = d \cap d_\alpha, \{B_\alpha\} = d' \cap d_\alpha$. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $[A_\alpha B_\alpha]$.

Soluție (fig. II. 32). Deoarece $0 < |\sin \alpha| < 1$, pentru $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pozițiile limită ale dreptei d sunt cele două bisectoare $y = x$ și $y = -x$. Pe lângă aceasta se observă că

$$\{A_\alpha\} = d \cap d_\alpha \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{x}{\sin \alpha} \end{cases}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow A(\sin \alpha, 1), \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

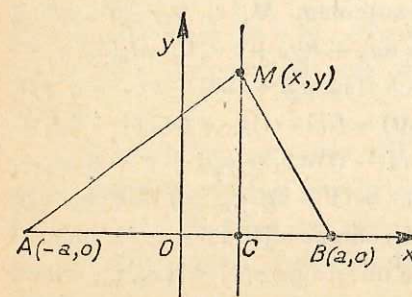


Fig. II. 31

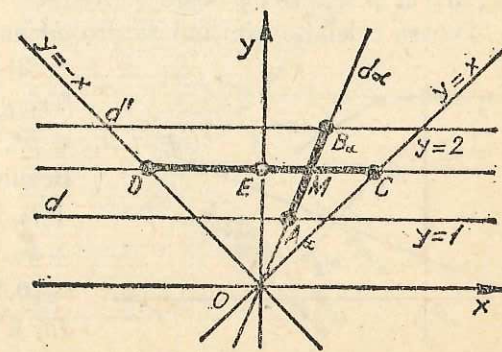


Fig. II. 32

$$\{B_\alpha\} = d' \cap d_\alpha \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{x}{\sin \alpha} \end{cases}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow B(2 \sin \alpha, 2), \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Mijlocul M al segmentului $[A_\alpha B_\alpha]$ are coordonatele

$$x = \frac{3 \sin \alpha}{2}, y = \frac{3}{2}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Rezultă $x \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right]$, $y = \frac{3}{2}$, adică locul geometric al punctului M este $[DC] - \{E\}$, unde $D\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ și $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ sînt punctele de intersecție ale dreptei de ecuație $y = \frac{3}{2}$ cu cele două bisectoare.

§ 10. Semiplane

O dreaptă d din plan are proprietatea că separă planul p în două submulțimi.

Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$. Definim mulțimile

$$p^- = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}, d = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\},$$

$$p^+ = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}.$$

Se observă că

$$p^- \cap p^+ = \emptyset, p^- \cup d \cup p^+ = p.$$

Teoremă. (fig. II.33) 1) Mulțimile p^- , p^+ , $p^- \cup d$, $p^+ \cup d$ sînt convexe.

2) $\forall M_1 \in p^-, \forall M_2 \in p^+$, segmentul care unește pe M_1 cu M_2 intersectează pe d .

Demonstrație. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$. Segmentul $[M_1 M_2]$ care unește pe M_1 cu M_2 are ecuațiile parametrice $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $y = (1-t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$. 1) Presupunem $M_i(x_i, y_i) \in p^-$, $i = 1, 2$, adică $f(x_i, y_i) = ax_i + by_i + c < 0$, $i = 1, 2$. Deoarece $f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) = (1-t)(ax_1 + by_1 + c) + t(ax_2 + by_2 + c) < 0$, $\forall t \in [0, 1]$, rezultă $[M_1 M_2] \subset p^-$. Astfel p^- este convexă.

Pentru celelalte mulțimi se procedează analog.

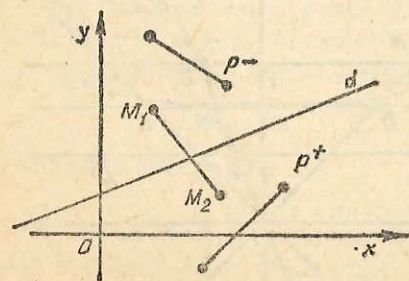


Fig. II. 33

2) Presupunem $M_1(x_1, y_1) \in p^-$, adică $f(x_1, y_1) = ax_1 + by_1 + c < 0$; $M_2(x_2, y_2) \in p^+$, adică $f(x_2, y_2) = ax_2 + by_2 + c > 0$. Rezultă $\varphi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) = (1-t)(ax_1 + by_1 + c) + t(ax_2 + by_2 + c) = (1-t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2)$, $t \in [0, 1]$. Deoarece $\varphi([0, 1])$ este segmentul din $\mathbb{R}$ care unește pe $\varphi(0) = f(x_1, y_1) < 0$ cu $\varphi(1) = f(x_2, y_2) > 0$, există o valoare $t_0 \in [0, 1]$

astfel încît $0 = \varphi(t_0) = a((1-t_0)x_1 + t_0x_2) + b((1-t_0)y_1 + t_0y_2) + c$. Deci $d \cap [M_1 M_2] = \{((1-t_0)x_1 + t_0x_2, (1-t_0)y_1 + t_0y_2)\}$.

Implicit în această demonstrație am admis că un punct separă pe $\mathbb{R}$.

Mulțimile p^- și p^+ se numesc *semiplane deschise*, iar mulțimile $p^- \cup d$, $p^+ \cup d$ se numesc *semiplane închise*. Dreapta d se numește *frontiera* semiplanelor.

Avînd în vedere că f păstrează semn constant pentru punctele unui semiplan, pentru aflarea acestui semn este suficient să alegem un punct particular (x_0, y_0) și să vedem ce semn are numărul $f(x_0, y_0)$.

Deoarece semiplanele sînt mulțimi convexe, orice intersecție de semiplane este o mulțime convexă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se arate că locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor $d_\alpha: x + y = \alpha$, $d'_\alpha: x - y = \alpha + 2$, $\alpha \in [0, \infty)$ este semidreapta $y + 1 = 0$, $x \geq 1$.

Soluție. Dreptele d_α sînt situate în semiplanul închis $x + y \geq 0$, iar dreptele d'_α sînt situate în semiplanul închis $x - y \geq 2$. De aceea locul geometric se va afla în zona nehașurată în figura II. 34.

Eliminînd parametrul α din $x + y = \alpha$, $x - y = \alpha + 2$, $\alpha \in [0, \infty)$ rezultă semidreapta $y + 1 = 0$, $x \geq 1$.

2. Fie ecuația

$$(E) x^2(\operatorname{tg}^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2xy \operatorname{tg} \varphi + y^2 \sin^2 \varphi = 0, \text{ unde } \varphi \neq k\pi; (2l+1)\frac{\pi}{2},$$

$k, l \in \mathbb{Z}$.

1) Se consideră ecuația (E) ca avînd necunoscutele x și y și parametrul φ ; se notează cu α și β unghiurile pe care le fac cu axa Ox dreptele definite prin (E). Să se calculeze $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$. Apoi, presupunînd $\varphi = \frac{\pi}{4}$, să se scrie ecuația comună a bisectoarelor unghiurilor formate de cele două drepte.

2) Considerînd ecuația (E) ca avînd necunoscuta φ și parametrii y și x să se determine regiunea din planul xOy pentru care ea admite soluții.

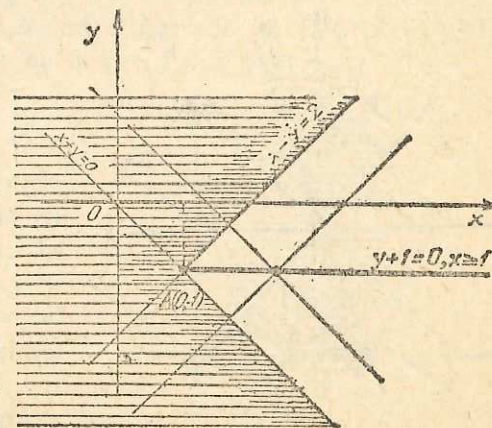


Fig. II. 34

Soluție. 1) Se observă că $x = 0$ implică $y = 0$ și reciproc. Apoi, pentru $x \neq 0$, ecuația (E) se transcrie

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x} \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \operatorname{ctg}^2 \varphi = 0.$$

Rezultă

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} - \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varphi - \cos^4 \varphi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm 1.$$

Astfel $\operatorname{tg} \alpha$ și $\operatorname{tg} \beta$ pot avea valorile $\frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \pm 1$. De aceea $|\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta| = 2$.

Pentru $\varphi = \frac{\pi}{4}$ găsim dreptele $y = 3x$ și $y = x$. Bisectoarele unghiurilor determinate de ele sînt $\frac{y-3x}{\sqrt{10}} = \pm \frac{y-x}{\sqrt{2}}$. Ecuația comună este

$$\left(\frac{y-3x}{\sqrt{10}} - \frac{y-x}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{y-3x}{\sqrt{10}} + \frac{y-x}{\sqrt{2}}\right) = 0 \text{ sau } x^2 + xy - y^2 = 0.$$

2) Pentru $x \neq 0$ se observă că ecuația (E) este echivalentă cu $\frac{y}{x} = \frac{2}{\sin 2\varphi} \pm 1$ sau cu $\sin 2\varphi = \frac{2x}{y \pm x}$. Aceasta are soluții numai dacă $\left|\frac{2x}{y \pm x}\right| \leq 1$. Explicitînd modulele găsim că punctul (x, y) trebuie să se afle în intersecția regiunilor: $x > 0, y + x \leq 0$; $x > 0, y - 3x \geq 0$; $x < 0, y + x \geq 0$; $x < 0, y - 3x \leq 0$; $x > 0, y - x \geq 0$; $x > 0, y + 3x \leq 0$; $x < 0, y + 3x \geq 0$; $x < 0, y - x \leq 0$, adică în porțiunea dublu hașurată din figura II. 35.

3. Să se determine semnul coeficientului unghiular al dreptei d , dată prin ecuația $(a+b+1)x + (2a-b)y - 2a-5 = 0$, ai cărei coeficienți depind de coordonatele unui punct $P(a, b)$, raportat la reperul cartezian OOb .

Soluție. Fie m coeficientul unghiular al dreptei d . Avem $m = -\frac{a+b+1}{2a-b}$, $2a-b \neq 0$. Dreptele $d_1: a+b+1=0$ și $d_2: 2a-b=0$ împart planul în patru regiuni (fig. II.36). Notînd $f_1(a, b) = a+b+1$ și $f_2(a, b) = 2a-b$, semnul lui m este dat în tabelul 2.

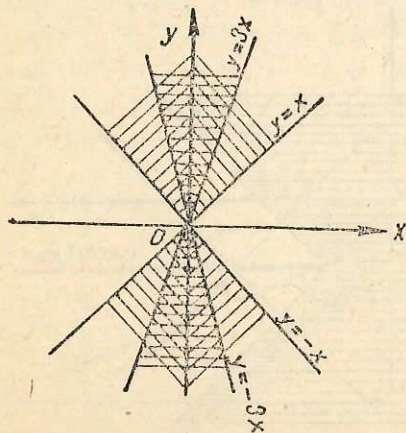


Fig. II. 35

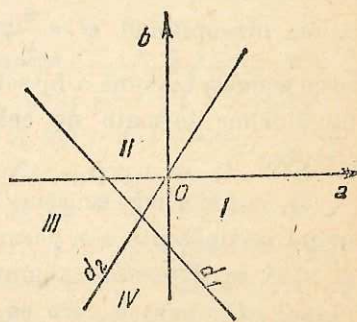


Fig. II. 36

Regiunea	$f_1(a, b)$	$f_2(a, b)$	m
I	+	+	-
II	+	-	+
III	-	-	-
IV	-	+	+

TABELUL 2

§ 11. Probleme de programare liniară în două variabile

Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$.

Teoremă. Dacă funcția f se anulează în trei puncte distincte necoliniare, atunci ea este nulă peste tot.

Demonstrație. Fie $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$. Ipotezele

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

implică $a = b = c = 0$ și deci $f(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Consecință. Dacă f ia valori egale în trei puncte distincte necoliniare, atunci f este o funcție constantă.

Teoremă. Dacă $S \subset \mathbb{R}^2$ este o suprafață poligonală convexă (privită ca intersecție de semiplane), iar $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$ este neconstantă, atunci fiecare dintre numerele $\min_{(x,y) \in S} f(x, y)$ sau $\max_{(x,y) \in S} f(x, y)$ este atins cel puțin într-un vîrf al lui S și cel mult pe o latură a lui S .

Demonstrație. Ecuația $ax + by + c - f = 0$ reprezintă un fascicul de drepte paralele cu linia de reper $\Delta_c: ax + by = 0$. Se observă că distanța de la $O(0, 0)$ la dreapta $\Delta_f: ax + by + c - f = 0$ este

$$d = \frac{|f - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Această relație arată că extremele funcției $f - c$ sînt proporționale cu extremele lui d . Ducînd $OP \perp \Delta_f$, $RQ \perp \Delta_f$ (fig. II. 37) avem $RQ = d$ și deci extremele lui d vor fi atinse cel puțin în unele vîrfuri ale lui S și cel mult pe o latură a lui S .

Generalizare. Dacă $S \subset \mathbb{R}^2$ este o intersecție de semiplane care posedă cel

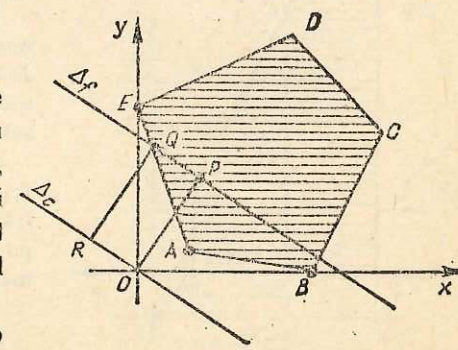


Fig. II. 37

puțin un vîrf, atunci unul dintre numerele $\min_{(x,y) \in S} f(x,y)$ sau $\max_{(x,y) \in S} f(x,y)$, acel care există, este atins cel puțin într-un vîrf al lui S .

Problemele de programare liniară în două variabile sînt probleme de următorul tip: să se determine minimul sau maximul funcției $(x,y) \rightarrow f(x,y) = ax + by + c$ cu restricțiile $x \geq 0, y \geq 0, a_i x + b_i y \geq c_i, i = 1, 2, \dots, m$.

Avînd în vedere teorema precedentă, rezolvarea unui program liniar în două variabile se poate face în felul următor. Se trasează dreptele de ecuații $x = 0, y = 0, a_i x + b_i y = c_i, i = 1, 2, \dots, m$, și ținînd seama de teorema referitoare la separarea planului în regiuni se pune în evidență mulțimea convexă S . Se determină vîrfurile lui S și apoi se compară valorile lui f în aceste puncte. Evident această metodă nu este eficientă decît dacă numărul de restricții este relativ mic.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un atelier produce două tipuri de piese A și B . Tipul A este calitativ superior tipului B . Beneficiul net este de 2 lei pentru tipul A și de 1,5 lei pentru tipul B . Timpul de fabricație pentru tipul A este de două ori mai mare decît timpul de fabricație pentru B . Dacă toate piesele ar fi de tipul B , atelierul ar putea produce 1 000 piese pe zi. Aprovizionarea cu materiale ajunge pentru 800 piese (tipul A și B), iar capacitatea atelierului este cel mult 400 piese de tipul A și 700 piese de tipul B .

Cîte piese de tipul A și cîte de tipul B trebuie fabricate într-o zi pentru ca beneficiul total al atelierului să fie maxim?

Soluție. Fie x și y numărul de piese de tipul A respectiv B . Restricțiile sînt

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 400, & 0 \leq y \leq 700 \\ x + y \leq 800 \\ 2x + y \leq 1000, \end{cases}$$

iar funcția de optimizat este definită prin $f(x,y) = 2x + \frac{3}{2}y$. Construim dreptele de ecuații $x = 400, y = 700, x + y = 800, 2x + y = 1000$ și astfel obținem hexagonul $OABCDE$ unde $O(0,0), A(0,700), B(100,700), C(200,600), D(400,200), E(400,0)$ (fig. II. 38). Punctele din interiorul și de pe laturile acestui hexagon satisfac restricțiile problemei.

Deoarece $f(0,0) = 0, f(0,700) = 1050, f(100,700) = 1250, f(200,600) = 1300, f(400,200) = 1100, f(400,0) = 800$ rezultă că punctul de maxim este $C(200,600)$, iar $\max f(x,y) = 1300$.

2. O secție a unei fabrici produce două tipuri de aparate. Pentru aceasta

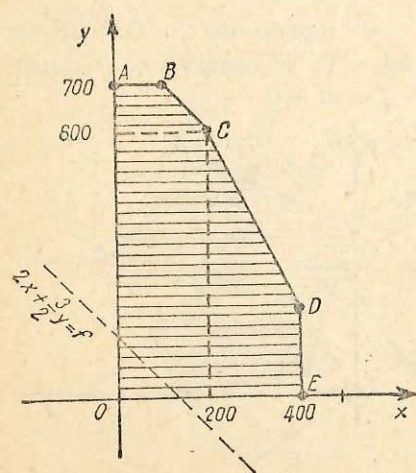


Fig. II. 38

are nevoie de piese furnizate de o altă întreprindere, fiind însă obligată să comande zilnic cel puțin o cantitate de piese din care s-ar putea face 80 de aparate de primul tip sau 60 de aparate de al doilea tip. Capacitatea de montaj este de cel mult 100 de aparate pe zi din ambele tipuri. Zilnic sînt solicitate la vânzare cel puțin 40 de aparate de primul tip și cel puțin 30 de aparate de al doilea tip. Pentru realizarea unui aparat de primul tip se cheltuiesc 2 000 lei, iar pentru realizarea unui aparat de al doilea tip se cheltuiesc 4 000 lei. Să se stabilească planul de producție zilnic care se realizează cu minimum de cheltuieli.

Soluție. Notînd cu x și y numărul de aparate sîntem conduși la următoarele restricții

$$\begin{cases} \frac{ax}{80} + \frac{ay}{60} \geq a, \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 40, y \geq 20, \\ x, y = \text{numere întregi, iar } a \text{ este cantitatea minimă de piese impusă de furnizori.} \end{cases}$$

Funcția obiectiv reprezintă cheltuielile, adică $f(x,y) = 2000x + 4000y$. Lăsînd deoparte condiția x,y = întregi, patrulaterul restricțiilor $ABCD$ are vîrfurile $A(\frac{160}{3}, 20), B(80, 20), C(40, 60), D(40, 30)$. Găsim $f(A) = \frac{560000}{3}, f(B) = 240000, f(C) = 320000, f(D) = 200000$, adică $A(\frac{160}{3}, 20)$ este punctul de minim pentru problema modificată (fig. II. 39).

Se impune să cercetăm punctul $M_0(54,20)$. Se constată că $f(M_0) \leq f(x,y), \forall (x,y)$ din patrulaterul $ABCD, x,y$ = întregi. De aceea $x = 54, y = 20$ și $\min f(x,y) = 188000$ este soluția problemei.

3. Să se găsească maximul funcției $z = 4(1 + \lambda)x + 2y$ pe mulțimea $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 6, 3x + 2y \leq 10$, știind că λ este un parametru real.

Soluție. Se observă că punctele din interiorul și de pe laturile triunghiului din figura II. 40 satisfac restricțiile problemei. Apoi ținem seama că pentru a rezolva un program liniar este suficient să examinăm numai vîrfurile. De aceea calculăm $z_0 = 0, z_A = \frac{40}{3}(1 + \lambda)$ și $z_B = 10$. Comparînd aceste trei numere ajungem la concluzia că

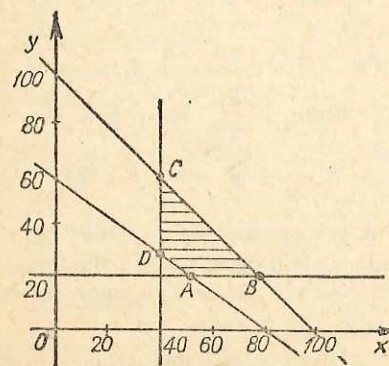


Fig. II. 39

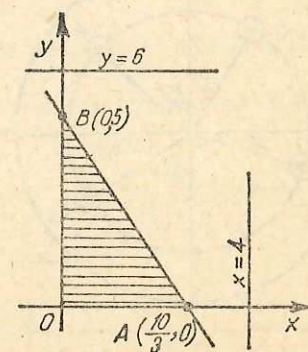


Fig. II. 40

pentru $\lambda \leq -\frac{1}{4}$ avem $\max z = z_B = 10$ și B este punctul de maxim, iar pentru $\lambda > -\frac{1}{4}$ avem $\max z = z_A = \frac{40}{3}(1 + \lambda)$ și A este punctul de maxim.

§ 12. Probleme propuse

1. Într-un reper ortonormat $\{O; i, j\}$, se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(6, -1)$, $C(7, 4)$.

1) Să se găsească coordonatele punctului D , astfel încît $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$.

2) Să se găsească coordonatele punctului E , astfel încît $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$.

R. 1) $D(12, 1)$; 2) $E\left(\frac{19}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2. Pe o mașină de găurit în coordonate avem de prelucrat piesa din figura II. 41. Să se determine coordonatele carteziene și coordonatele polare ale punctelor A, B, C, D în care urmează a se realiza găurirea.

3. În planul p se consideră reperul cartezian xOy . Să se arate că nu există nici un triunghi echilateral cu toate vîrfurile de coordonate numere întregi.

Indicație. Se presupune că $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(c, d)$ sînt vîrfurile, a, b, c, d fiind întregi. Notînd cu r pătratul lungimii laturilor și folosind identitatea $(ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2$ rezultă contradicția $\frac{2(ad - bc)}{r} = \sqrt{3}$, expresia din stînga fiind un număr rațional.

4. Să se scrie ecuația carteziană a dreptei d determinată de punctul $M_0(x_0, y_0)$ și vectorul director $\vec{a}(u, v)$:

1) $M_0(2, 1)$, $\vec{a}(1, 3)$.

2) $M_0(2, 1)$, $\vec{a}(1, -1)$.

5. Să se găsească mulțimea punctelor $M(x, y)$ din plan, ale căror coordonate verifică relația:

$$1) \sin 3y = -\cos 2x,$$

$$2) \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{3} + y \right) = 0,$$

$$3) |x| + |y| = 4.$$

Indicație. 1) $\frac{\pi}{2} - 3y = \pm(\pi - 2x) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{x}{3} + y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Să se găsească ecuațiile laturilor și coordonatele mijloacelor laturilor triunghiului ABC ale cărui vîrfuri sînt punctele $A(5, 0)$, $B(1, 2)$, $C(-3, -2)$.

7. Latura $[AB]$ a unui triunghi ABC este situată pe dreapta $d: 3x + 2y - 16 = 0$.

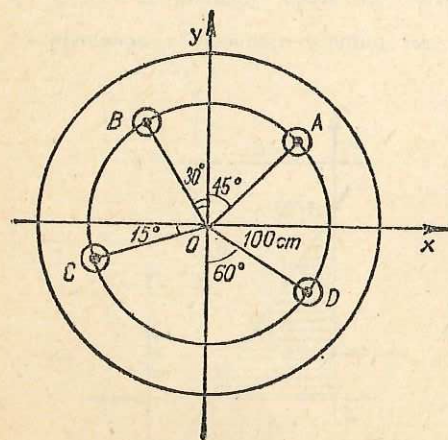


Fig. II. 41

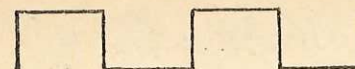


Fig. II. 42



Fig. II. 43

Să se determine coordonatele vîrfurilor triunghiului, știind că abscisele vîrfurilor A și B sînt egale cu 2, respectiv 6, iar centrul de greutate G al triunghiului are coordonatele $(-1, 0)$.

R. $A(2, 5)$, $B(6, 2)$, $C(-11, -7)$.

8. Se dau punctele distincte $M_1(\cos \alpha t, \sin \alpha t)$ și $M_2(\cos \beta t, \sin \beta t)$.

1) Să se calculeze $d(M_1, M_2)$.

2) Să se determine coordonatele mijlocului M al segmentului $[M_1 M_2]$ și să se calculeze $d(O, M)$.

3) Notînd cu M'_1 proiecția lui M_1 pe Ox , să se determine α și β astfel încît dreptele $M'_1 M$ să fie perpendiculare pe OM_1 pentru orice t .

$$R. 1) d(M_1, M_2) = 2 \left| \sin \frac{\beta - \alpha}{2} t \right|, \quad 2) d(O, M) = \left| \cos \frac{\beta - \alpha}{2} t \right|,$$

$$3) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} t - \cos \alpha t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta = 3\alpha.$$

9. Să se scrie ecuația dreptei ce conține punctul $A(4, -2)$ și este paralelă cu dreapta $d: 3x + y - 1 = 0$.

10. Să se traseze graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în următoarele cazuri:

$$1) f(x) = \sqrt{4x^2},$$

$$2) f(x) = 2\sqrt{(x-1)^2},$$

$$3) f(x) = \sqrt{x + |x|},$$

$$4) f(x) = 2 - |x - 2| - x.$$

11. Se consideră crenelul din figura II. 42. Fixînd un reper cartezian adecvat, să se stabilească ecuația carteziană explicită a acestui crenel.

Aceleași probleme pentru dinții de ferăstrău din figura II. 43, pentru scara din figura II. 44 și pentru cremaliera din figura II. 45.

12. Se dau punctele $A(3, 2)$, $B(-5, 4)$, $C(-3, -4)$, $D(2, -3)$. Fie $\{L\} = BA \cap CD$ și $\{M\} = AD \cap BC$.

1) Să se arate că dreapta LM este paralelă cu AC .

2) Să se arate că dreapta BD trece prin mijlocul lui $|LM|$.

Indicație. 1) $L\left(\frac{41}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $M\left(-\frac{1}{3}, -\frac{44}{3}\right)$. Dreptele LM și AC admit vectorul director $\vec{i} + \vec{j}$; 2) $BD: x + y + 1 = 0$.

13. Să se scrie ecuațiile mediatorelor și ecuațiile înălțimilor triunghiului ale cărui vîrfuri sînt $A(4, 6)$, $B(-2, 2)$, $C(2, -4)$.

Să se calculeze: 1) coordonatele centrului și raza cercului circumscris triunghiului ABC , 2) coordonatele ortocentrului triunghiului ABC .

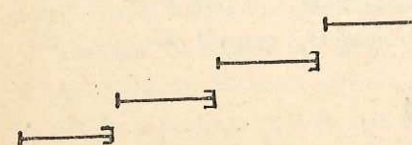


Fig. II. 44

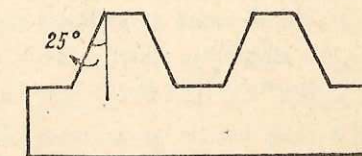


Fig. II. 45

14. Suporturile laturilor $[AB]$ și $[AC]$ ale unui triunghi ABC au respectiv ecuațiile $4x + y - 8 = 0$, $4x + 5y - 24 = 0$ iar vîrfurile B și C sînt situate pe axa Ox .

Să se scrie ecuația medianei corespunzătoare vîrfului A .

$$R. 4x + 3y - 16 = 0.$$

15. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încît punctul de intersecție al dreptelor $d_1: y = 2x + 5$, $d_2: y = mx - 3$ să fie situat pe bisectoarea a doua a unghiului format de axele de coordonate.

$$R. m = -\frac{14}{5}.$$

16. Să se discute în raport cu parametrul $m \in \mathbb{R}$, poziția următoarelor două drepte: $d_1: mx + 2y = 8$, $d_2: x + (m - 1)y = 4$.

17. Se consideră dreapta unitate $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$ și dreapta

$d_m: mx - y - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încît intersecția dintre graficul lui σ și d_m să fie nevidă.

Să se formuleze și să se rezolve o problemă asemănătoare utilizînd funcția modul $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Indicație. Se determină m astfel încît sistemul $y = mx - 1$, $y = \sigma(x)$ să admită soluție.

18. O dreaptă variabilă d , care trece prin punctul $A(0, 5)$ taie dreptele $d_1: x - 2 = 0$ și $d_2: x - 1 = 0$, respectiv în punctele B și C .

Să se arate că paralela dusă prin B la OC trece printr-un punct fix.

Indicație. $d: rx + s(y - 5) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Paralela dusă prin B la OC are ecuația $rx + s(y - 5x + 5) = 0$, $s \neq 0$. Coordonatele punctului fix sînt $(0, -5)$.

19. Să se demonstreze că dreapta variabilă $d_m: (m^2 + 6m + 3)x - (2m^2 + 18m + 2)y - 3m + 2 = 0$ trece printr-un punct fix, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

Indicație. Se ordonează după puterile lui m și se identifică cu zero. Rezultă $A\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

20. O rază de lumină care trece prin punctul de coordonate $(3, 1)$ se reflectă pe dreapta $d: x - y + 2 = 0$ și apoi trece prin punctul $A(1, 1)$. Să se găsească ecuațiile parametrice ale razei incidente și ale celei reflectate.

21. Vîrfurile unui patrulater $ABCD$ sînt $A(4, 3)$, $B(5, -4)$, $C(-1, -3)$, $D(-3, -1)$.

1) Să se calculeze coordonatele punctelor E și F , unde $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = BC \cap AD$.

2) Figura $ABCEFD$ se numește patrulater complet.

Să se scrie ecuațiile diagonalelor AC , BD , EF și să se verifice că mijloacele diagonalelor $[AC]$, $[BD]$, $[EF]$ sînt trei puncte coliniare.

3) Fie $\{M\} = AC \cap EF$, $\{N\} = BD \cap EF$. Să se verifice că punctele E , M , N , F formează o diviziune armonică.

22. Să se determine ecuațiile dreptelor ce trec prin punctul $A(1, 1)$ și sînt echidistante față de punctele $B(-1, 0)$ și $C(-1, -1)$.

Indicație. Ecuația fasciculului cu vîrfuri $A(1, 1)$ este $r(x - 1) + s(y - 1) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Se caută dreptele din acest fascicul care sînt echidistante față de B și C .

23. Raportăm planul p la un reper cartezian și considerăm punctul $M(x, y)$ ale cărui coordonate satisfac relația

$$\frac{4x + 2y + 8}{3x - y + 1} = \frac{5}{2}.$$

1) Să se arate că punctul M aparține unei drepte fixe d .

2) Să se afle minimul expresiei $x^2 + y^2$ cînd $M \in d - \{M_0(-1, -2)\}$.

$$R. 1) d: 7x - 9y - 11 = 0; 2) \frac{121}{130}.$$

24. Să se găsească valoarea minimă a lui $a^2 + b^2$ cînd $a, b \in \mathbb{R}$, iar ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ are cel puțin o rădăcină reală.

Indicație. Pentru x fixat ecuația reprezintă o dreaptă d în planul aOb . Distanța de la origină la punctul de coordonate (a, b) trebuie să fie egală cu distanța de la origină la dreapta d . Deci.

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{x^4 + 1}{\sqrt{(x^3 + x)^2 + (x^2)^2}},$$

încît problema pusă se reduce la aflarea minimului global al funcției definite de pătratul expresiei din dreapta. Rezultă $\min(a^2 + b^2) = \frac{4}{5}$.

25. Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul $M(4, 3)$ și care intersectează semi-axele pozitive Ox , Oy , în două puncte A , B astfel încît triunghiul dreptunghic AOB , să aibă aria egală cu 27.

Indicație. Se folosește ecuația fasciculului cu vîrfuri $M(4, 3)$, adică $r(x - 4) + s(y - 3) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$.

26. Să se explice soluțiile în $\mathbb{R}^2$ pentru:

$$1) |x| + |y| - 2 > 0, 2) 2 < |x - 1| + |y - 2| - 3 < 4$$

$$3) (x - y + 4)(2x - 3y + 6) > 0.$$

Indicație. Se consideră că (x, y) sînt coordonatele unui punct din plan și se utilizează împărțirea planului în regiuni.

27. Pe axa Ox se consideră punctele fixe A , B , C . Prin C se duce o dreaptă variabilă care întîlnește prima bisectoare a axelor în M și axa Oy în N . Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AM și NB .

R. O dreaptă ce trece prin origină.

28. Se consideră reperul cartezian xOy , un punct fix $A(a, 0)$ pe Ox și un punct fix $B(0, a)$ pe Oy astfel încît $a > 0$. Un punct P se mișcă pe segmentul $[OB]$, iar un punct P' se mișcă pe semidreapta By astfel încît $\angle OAP = \angle OP'A = \theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$. Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului APP' .

R. Semidreapta paralelă și de același sens cu Oy de origine $D(a, a)$.

29. O funcție $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ se numește funcție liniar afină. Să se arate că restricția unei funcții liniar affine la un segment $[AB]$ este sau o constantă sau își atinge extremele globale în extremitățile A și B .

Indicație. Dacă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ atunci $[AB]: x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $y = (1 - t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$. Rezultă: $\varphi(t) = f(x, y) = f(x_1, y_1) + t(f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1))$, $t \in [0, 1]$.

30. În cadrul unei C.A.P. sînt destinate 8 ha teren pentru a se cultiva două feluri de plante A și B . Investițiile necesare pe hectar sînt 2 000 lei respectiv 5 000 lei, iar cîștigul net pe hectar este 3 000 lei respectiv 9 000 lei. C.A.P.-ul dispune de o sumă de 25 000 lei.

Pe câte hectare trebuie cultivate fiecare din aceste feluri de plante ca să se obțină un câștig maxim?

R. $x = 5$ ha, $y = 3$ ha, $\max f(x, y) = 33\,000$ lei.

31. O întreprindere de construcții trebuie să realizeze un complex de locuințe însumând 900 garsoniere, 2 100 apartamente cu două camere și 1 400 apartamente cu trei camere. Se preconizează două tipuri de blocuri: primul tip cuprinde 40 de apartamente cu trei camere, 30 de apartamente cu două camere și 10 garsoniere și costă 4 milioane lei, iar al doilea tip este format din 20 de apartamente cu trei camere, 50 de apartamente de două camere și 30 de garsoniere, având costul de 5 milioane lei. Să se stabilească câte blocuri de fiecare fel trebuie construite astfel încât cheltuielile de construcție să fie minime.

R. 20 de blocuri de primul tip și 30 de blocuri de al doilea tip.

Capitolul III

IZOMETRII

§ 1. Transformări geometrice

Fie p un plan. O funcție $\mathcal{F} : p \rightarrow p$ sau o restricție a unei asemenea funcții se numește *transformare geometrică*. Transformarea geometrică $\mathcal{F} : p \rightarrow p$ atașează fiecărui punct $M \in p$ un alt punct $M' \in p$ pe care îl notăm cu $\mathcal{F}(M)$, (fig. III. 1). Mulțimea tuturor punctelor $\mathcal{F}(M)$, $M \in p$, se numește *imaginea* lui $\mathcal{F}$ și se notează cu $\mathcal{F}(p)$. Evident $\mathcal{F}(p) \subseteq p$. Un punct M_0 cu proprietatea $\mathcal{F}(M_0) = M_0$ se numește *punct fix* al funcției $\mathcal{F}$.

Transformarea geometrică $\mathcal{F}$ se numește:

1) *injectivă*, dacă relațiile $\forall M_1, M_2 \in p, \mathcal{F}(M_1) = \mathcal{F}(M_2) \in p$ implică $M_1 = M_2$ (echivalent $\forall M_1, M_2 \in p, M_1 \neq M_2 \Rightarrow \mathcal{F}(M_1) \neq \mathcal{F}(M_2)$);

2) *surjectivă*, dacă $\forall M' \in p, \exists M \in p$ astfel încât $\mathcal{F}(M) = M'$ (echivalent $\mathcal{F}(p) = p$);

3) *bijectivă*, dacă este injectivă și surjectivă. Aceasta înseamnă că fiind dat un punct $M' \in p$ există un punct unic $M \in p$ astfel încât $\mathcal{F}(M) = M'$. Existența este asigurată de faptul că $\mathcal{F}$ este surjectivă și unicitatea decurge din faptul că $\mathcal{F}$ este injectivă.

Dacă $\mathcal{F} : p \rightarrow p$ și $\mathcal{G} : \mathcal{F}(p) \rightarrow p$ sînt două transformări geometrice atunci prin $M \rightarrow (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(M) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(M))$, $\forall M \in p$, definim *transformarea produs* $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : p \rightarrow p$ (fig. III. 2). Produsul transformărilor este o operație asociativă, adică $(\mathcal{Q} \circ \mathcal{F}) \circ \mathcal{H} = \mathcal{Q} \circ (\mathcal{F} \circ \mathcal{H})$.

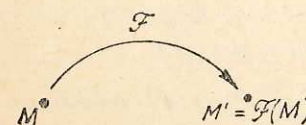


Fig. III. 1

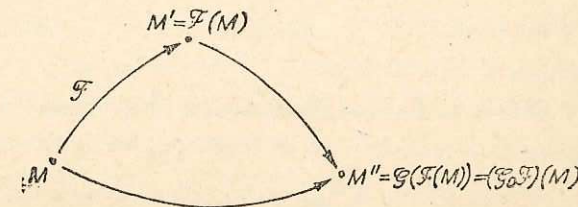


Fig. III. 2

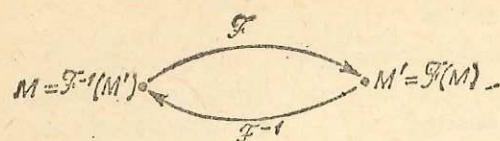


Fig. III. 3

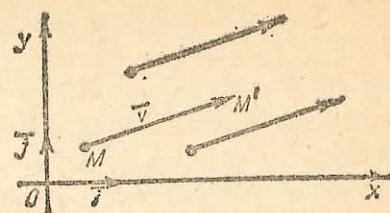


Fig. III. 4

Unei transformări geometrice bijective $\mathcal{F}: p \rightarrow p$ i se poate ataşa transformarea geometrică (unică!) $\mathcal{Q}: p \rightarrow p$ astfel încît $\mathcal{Q}(M') = M \in p$ cu proprietatea $\mathcal{F}(M) = M'$. Transformările geometrice $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{Q}$ satisfac relaţiile $(\mathcal{Q} \circ \mathcal{F})(M) = M, \forall M \in p, (\mathcal{F} \circ \mathcal{Q})(M') = M', \forall M' \in p$. Pe scurt, $\mathcal{Q} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{Q} = 1_p$, unde 1_p este identitatea pe p , adică transformarea geometrică caracterizată prin $1_p(M) = M, \forall M \in p$. Invers, dacă unei transformări geometrice $\mathcal{F}: p \rightarrow p$ i se poate ataşa o transformare geometrică $\mathcal{Q}: p \rightarrow p$ care să satisfacă relaţiile $\mathcal{Q} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{Q} = 1_p$, atunci $\mathcal{F}$ este în mod necesar o bijecţie. Transformarea geometrică $\mathcal{Q}$ se numeşte *inversa* lui $\mathcal{F}$ şi deseori se notează cu $\mathcal{F}^{-1}$ (fig. III. 3).

Dacă $\mathcal{F}: p \rightarrow p$ şi $\mathcal{Q}: p \rightarrow p$ sînt transformări geometrice bijective, atunci $\mathcal{Q} \circ \mathcal{F}$ este tot bijectivă şi $(\mathcal{Q} \circ \mathcal{F})^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{Q}^{-1}$. De asemenea, pentru orice bijecţie $\mathcal{F}: p \rightarrow p$ se satisfac $1_p \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ 1_p = \mathcal{F}$.

§ 2. Translaţii

Fie planul p şi mulţimea vectorilor liberi V . Notăm cu M, M' două puncte din plan şi cu $\bar{v}$ un vector liber fixat.

Definiţie. Transformarea geometrică $\mathcal{T}: p \rightarrow p$ definită prin $M' = \mathcal{T}(M)$, $\overline{MM'} = \bar{v}$ se numeşte *translaţie de vector $\bar{v}$* (fig. III. 4).

Definiţia este corectă deoarece fiecărui punct $M \in p$ i se asociază un punct şi numai unul singur $M' \in p$ determinat de faptul că segmentul orientat $\overline{MM'}$ trebuie să fie reprezentantul vectorului $\bar{v}$. În particular translaţia de vector $\bar{0}$ este identitatea 1_p .

Evident, dacă se dau punctul A şi imaginea sa A' , atunci există o singură translaţie care duce pe A în A' şi anume translaţia de vector $\overline{AA'}$.

Teoremă. 1) Dacă $\mathcal{T}_1$ este translaţia de vector $\bar{v}_1$ şi $\mathcal{T}_2$ este translaţia de vector $\bar{v}_2$, atunci produsul $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translaţia de vector $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$.

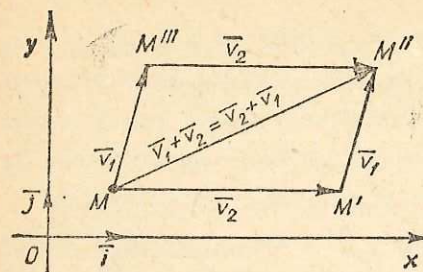


Fig. III. 5

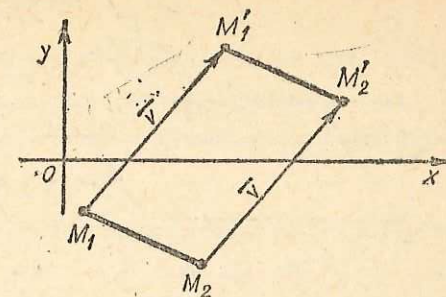


Fig. III. 6

2) Dacă $\mathcal{T}$ este translaţia de vector $\bar{v}$, atunci $\mathcal{T}^{-1}$ există şi este translaţia de vector $-\bar{v}$.

Demonstraţie. 1) Fie $\mathcal{T}_1$ translaţia de vector $\bar{v}_1$, adică $M''' = \mathcal{T}_1(M)$, $\overline{MM'''} = \bar{v}_1$ şi $\mathcal{T}_2$ translaţia de vector $\bar{v}_2$, adică $M'' = \mathcal{T}_2(M''')$, $\overline{M'''M''} = \bar{v}_2$ (fig. III. 5). Produsul $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$ este translaţia de vector $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$, adică $M'' = (\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2)(M)$, $\overline{MM''} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$. Analog $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translaţia de vector $\bar{v}_2 + \bar{v}_1$ şi deci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$.

2) T e m ă

Teorema precedentă conţine elemente suficiente pentru a afirma că mulţimea tuturor translaţiilor planului p este un grup comutativ în raport cu operaţia produs (*grupul translaţiilor*).

Raportăm planul p la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$. Presupunem că punctul M are coordonatele (x, y) , punctul M' are coordonatele (x', y') , iar $\bar{v} = h\bar{i} + k\bar{j}$.

Teoremă. Translaţia $\mathcal{T}$ de vector $\bar{v} = h\bar{i} + k\bar{j}$ este caracterizată prin ecuaţiile

$$\begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Demonstraţie. Relaţia de definiţie $\overline{MM'} = \bar{v}$ este echivalentă cu $(x' - x)\bar{i} + (y' - y)\bar{j} = h\bar{i} + k\bar{j}$. Rezultă $x' - x = h, y' - y = k$, adică $x' = x + h, y' = y + k$.

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra uşor proprietatea unei translaţii de a păstra distanţa dintre puncte (fig. III. 6). Într-adevăr, dacă prin translaţia $\mathcal{T}$ de vector $\bar{v} = h\bar{i} + k\bar{j}$ punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, au imaginile $M'_i(x'_i, y'_i)$, $x'_i = x_i + h, y'_i = y_i + k, i = 1, 2$, atunci

$$\begin{aligned} d(M'_1, M'_2) &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= d(M_1, M_2) \end{aligned}$$

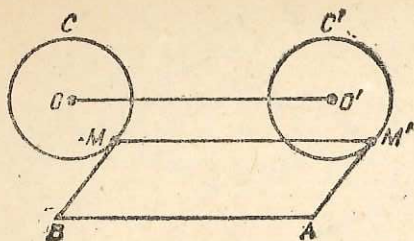


Fig. III. 7

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie segmentul $[AB]$ și cercul C de centru O și rază r . Fiecărui punct M de pe cercul C se atașează punctul M' astfel încât $ABMM'$ să fie un paralelogram. Să se găsească mulțimea punctelor M' .

Soluție. Deoarece $ABMM'$ este un paralelogram rezultă $MM' = BA$ (fig. III. 7). Punctul M' este transformatul lui M prin translația de vector $\overrightarrow{BA}$. De aceea, atunci când M descrie pe C , punctul M' descrie un cerc cu centrul O' , $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BA}$, de rază r .

2. Fie segmentul $[AB]$ și două drepte concurente d și d' . Să se determine punctul M pe d și punctul M' pe d' astfel încât $ABMM'$ să fie un paralelogram.

Soluție. Fie d'' imaginea lui d prin translația de vector $\overrightarrow{BA}$ și $\{M'\} = d' \cap d''$. Deoarece $ABMM'$ este un paralelogram rezultă $MM' = \overrightarrow{AB}$, adică M este imaginea lui M' prin translația de vector $\overrightarrow{BA}$ (fig. III. 8).

3. Se dă triunghiul de vîrfuri $A(3,2)$, $B(1,5)$, $C(-2,-1)$ și translația $\mathcal{T}$ determinată de punctele $O(0,0)$ și $O'(1,2)$. Să se găsească $A' = \mathcal{T}(A)$, $B' = \mathcal{T}(B)$, $C' = \mathcal{T}(C)$, $\mathcal{T}(AB)$, $\mathcal{T}(AC)$, $\mathcal{T}(BC)$ și să se verifice că $\mathcal{T}(AB) = A'B'$, $\mathcal{T}(AC) = A'C'$, $\mathcal{T}(BC) = B'C'$.

Soluție. (fig. III. 9). Translația $\mathcal{T}$ este determinată de vectorul $\overrightarrow{OO'} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Astfel ea are ecuațiile $x' = x + 1$, $y' = y + 2$.

Punind $x = 3$, $y = 2$ găsim $x' = 4$, $y' = 4$ și deci $A'(4, 4)$. Analog $B'(2, 7)$, $C'(-1, 1)$.

Se observă că $AB: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{3}$ și $A'B': \frac{x-4}{-2} = \frac{y-4}{3}$. Pe de altă parte $\mathcal{T}(AB): \frac{(x'-1)-3}{-2} = \frac{(y'-2)-2}{3}$ și deci $\mathcal{T}(AB) = A'B'$. Analog se verifică și celelalte relații.

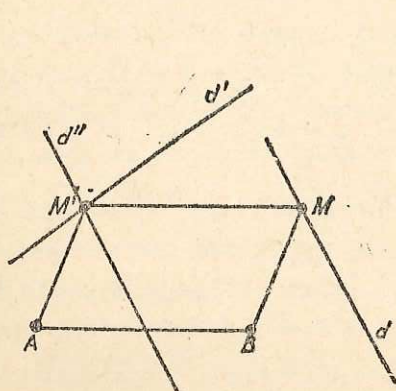


Fig. III. 8

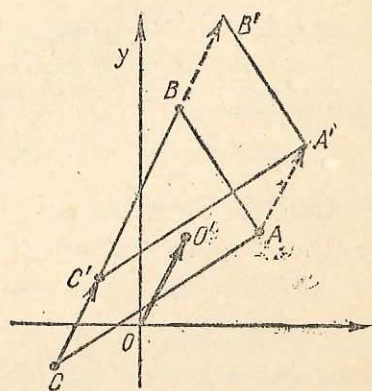


Fig. III. 9

§ 3. Rotații

Fie planul p raportat la reperul cartezian xOy , plan orientat prin fixarea sensului de rotație trigonometric drept sens pozitiv. Sensul mișcării acelor de ceasornic este sensul negativ. Admitem cunoscute noțiunile de unghi orientat și de măsură algebrică a unui asemenea unghi.

Definiție. Fie θ o măsură algebrică de unghi orientat fixat. Transformarea geometrică $\mathcal{R}: p \rightarrow p$ definită prin $\mathcal{R}(O) = O$ și pentru $M \neq O$, $\mathcal{R}(M) = M'$ astfel încât $d(O, M) = d(O, M')$, $\angle MOM' = \theta$ se numește rotație de centru O și unghi θ (fig. III. 10).

Rotația este bine definită deoarece fiecărui punct $M \in p$ i se atașează un punct și numai unul $M' \in p$ determinat de condițiile date în definiție. Originea reperului cartezian este singurul punct cu proprietatea $\mathcal{R}(O) = O$, adică este singurul punct fix.

Presupunem că M are coordonatele (x, y) și M' are coordonatele (x', y') .

Teoremă. Rotația $\mathcal{R}$ de centru $O(0,0)$ și unghi θ este caracterizată prin ecuațiile

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}, \theta = \text{fixat.} \end{cases}$$

Demonstrație. Urmărind figura III.10, cazul $\theta \geq 0$, avem $x' = \cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$. Dar $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$. Deci $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$. Analog, $y' = \sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta$, adică $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$.

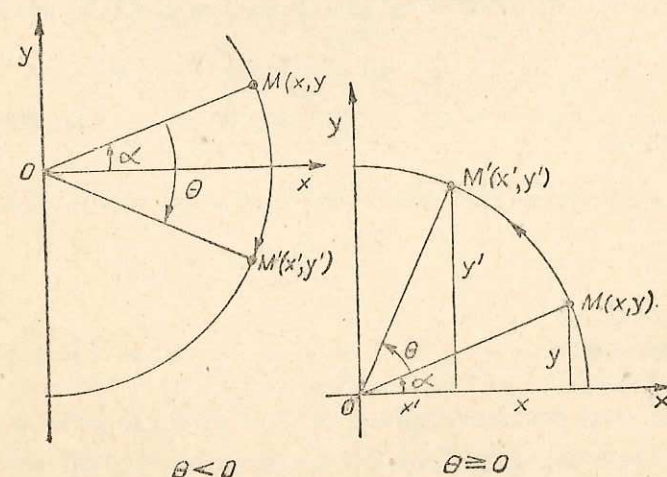


Fig. III. 10

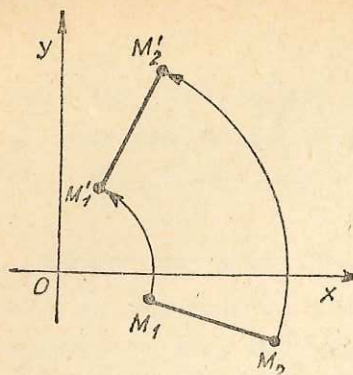


Fig. III. 11

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}, \theta = \text{fixat.} \end{cases}$$

Presupunind $M'(x', y')$ dat și rezolvind sistemul precedent în raport cu (x, y) găsim soluția unică

$$\begin{cases} x = x' \cos(-\theta) - y' \sin(-\theta), \\ y = x' \sin(-\theta) + y' \cos(-\theta). \end{cases}$$

Acste ecuații caracterizează o rotație $\mathcal{S}$ de centru $O(0,0)$ și unghi $-\theta$ cu proprietatea $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = 1_p$. De aceea $\mathcal{R}$ este bijectivă și $\mathcal{S} = \mathcal{R}^{-1}$.

Definiția și teoremele precedente arată că mulțimea tuturor rotațiilor de centru O ale planului p este un grup comutativ în raport cu operația produs (grupul rotațiilor).

Să arătăm că rotațiile au proprietatea de a păstra distanța dintre puncte (fig. III. 11). Într-adevăr, dacă prin rotația $\mathcal{R}$ de centru O și unghi θ punctele $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, au imaginile $M'_i(x'_i, y'_i)$, $x'_i = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta$, $y'_i = x_i \sin \theta + y_i \cos \theta$, $i = 1, 2$, atunci

$$\begin{aligned} d(M'_1, M'_2) &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = \\ &= \sqrt{[(x_2 - x_1) \cos \theta - (y_2 - y_1) \sin \theta]^2 + [(x_2 - x_1) \sin \theta + (y_2 - y_1) \cos \theta]^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= d(M_1, M_2). \end{aligned}$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului ABC , în exterior, se construiesc triunghiurile ABD și ACE astfel încît $\angle EAC = \angle DAB = 90^\circ$ și $\angle BDA = \angle CEA$. Să se arate că mediana din A a triunghiului ABC este înălțimea în triunghiul DAE .

Teoremă. 1) Dacă $\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{R}_2$ sînt rotații de centru O și unghiuri θ_1 respectiv θ_2 , atunci $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ este rotația de centru O și unghi $\theta_1 + \theta_2$.

2) Dacă $\mathcal{R}$ este rotația de centru O și unghi θ , atunci $\mathcal{R}^{-1}$ există și este rotația de centru O și unghi $-\theta$.

Demonstrație. 1) **Te m ă.**

2) Rotația $\mathcal{R}$ de centru $O(0, 0)$ și unghi θ este caracterizată prin sistemul de ecuații

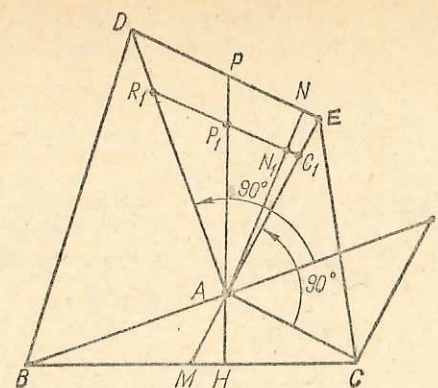


Fig. III. 12

Soluție (fig. III. 12). Fie $AH \perp BC$, $[MB] = [MC]$, $AH \cap DE = \{P\}$, $AM \cap DE = \{N\}$. Prolungim pe $[BA]$ cu un segment $[AR] = [BA]$; atunci AM este linie mijlocie în triunghiul BRC , adică $AM \parallel RC$ și $d(A, M) = \frac{1}{2} d(R, C)$.

Efectuăm o rotație de 90° , cu centrul în A , a triunghiului ARC ; AR devine AR_1 , AC devine AC_1 și RC devine R_1C_1 . Dar $ABD \sim ACE$;

$$\text{deci } \frac{d(A, C)}{d(A, B)} = \frac{d(A, E)}{d(A, D)} \text{ sau } \frac{d(A, C_1)}{d(A, R_1)} = \frac{d(A, E)}{d(A, D)}.$$

Rezultă $R_1C_1 \parallel DE$ și cum $R_1C_1 \perp RC$, $AM \parallel RC$, găsim $AM \perp DE$.

2. 1) Se dă triunghiul echilateral de vîrfuri $A(1, 2)$, $B(3, -1)$,

$$C\left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}\right).$$

Să se determine imaginea sa prin rotația $\mathcal{R}$ de centru O și unghi $\frac{\pi}{3}$.

2) Se dă pătratul de vîrfuri $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(-1, 2)$. Să se determine imaginea sa prin rotația $\mathcal{R}$ de centru A și unghi $-\frac{\pi}{4}$.

Soluție. 1) Rotația de centru O și unghi $\pi/3$ este caracterizată prin

$$x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Punctul $x = 1$, $y = 2$, găsim $x' = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$, $y' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$. Astfel imaginea lui A prin

$\mathcal{R}$ este punctul $A'\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$. Analog,

$$B'\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right), C'((\sqrt{3} - 1)/2, (5 + 3\sqrt{3})/2).$$

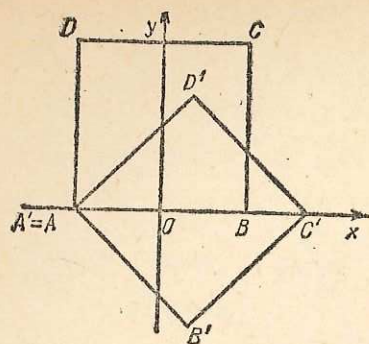


Fig. III. 13

2) (fig. III. 13). Rotația $\mathfrak{A}$ de centru $A(-1, 0)$ și unghi $-\pi/4$ este caracterizată prin (de ce?)

$$\begin{cases} x' + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

Evident lui $A(-1, 0)$ îi corespunde punctul $A'(-1, 0)$. Punctului $B(1, 0)$ îi corespunde

$$B'(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2}).$$

Analog,

$$C'(2\sqrt{2} - 1, 0), D'(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2}).$$

§ 4. Izometrii

Fie planul p raportat la reperul cartezian xOy . Rotația de centru O și unghi θ este descrisă de sistemul liniar

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

De aceea rotației $\mathcal{R}$ i se poate asocia matricea

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Matricea R are proprietatea ${}^tRR = I$, unde I este matricea unitate de ordinul doi. Astfel R este ceea ce se cheamă o *matrice ortogonală* de ordinul doi.

Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o *matrice ortogonală* cu elemente reale, adică o matrice care satisface relația ${}^tAA = I$. Ținând seama că determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinantilor și că determinantul unei matrice este egal cu determinantul transpusei, deducem $\det({}^tAA) = \det I \Rightarrow \Rightarrow (\det {}^tA)(\det A) = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$. Astfel matricea ortogonală A este nesingulară, adică admite inversa A^{-1} . Dacă înmulțim relația ${}^tAA = I$ la dreapta cu A^{-1} rezultă ${}^tA = A^{-1}$. Din această egalitate, prin înmulțire la stînga cu A , rezultă $A{}^tA = I$.

Inversa unei matrice ortogonale este o matrice ortogonală. Într-adevăr, ${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA)A^{-1} = AA^{-1} = I$. Analog se arată că dacă A și B sînt matrice ortogonale (de ordinul doi), atunci și matricea produs AB este ortogonală.

Teoremă. 1) Orice matrice ortogonală de ordinul doi cu determinantul $\neq -1$ se poate scrie în forma

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

2) Orice matrice ortogonală de ordinul doi cu determinantul -1 se poate scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

Demonstrație. 1) Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o matrice ortogonală de ordinul doi.

Problema se reduce la a rezolva sistemul

$$a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 1, ad - bc = 1.$$

Se observă că dacă punem $a = \cos \theta, c = \sin \theta, \theta \in \mathbb{R}$, atunci prima ecuație este identic satisfăcută. Analog, ecuația a treia admite familia de soluții $b = \cos \varphi, d = \sin \varphi, \varphi \in \mathbb{R}$. Se impune ca acestea să verifice ecuația a doua și ecuația a patra, adică

$$\cos(\theta - \varphi) = 0, \sin(\theta - \varphi) = -1.$$

Rezultă $\varphi = \theta - \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}$ și deci $b = -\sin \theta, d = \cos \theta$.

2) **Te m ă.**

Observațiile precedente sugerează introducerea transformărilor geometrice determinate analitic de o matrice ortogonală, transformări care conțin rotațiile de centru O ca un caz particular.

Definiție. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o matrice ortogonală.

Transformarea geometrică care asociază punctului $M(x, y)$ punctul $M'(x', y')$ definit prin

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

se numește **transformare ortogonală**.

Avînd în vedere observațiile făcute pentru matricele ortogonale de ordinul doi rezultă:

1) orice transformare ortogonală admite o inversă care este tot transformare ortogonală,

2) produsul a două transformări ortogonale este o transformare ortogonală,
 3) dacă $\det A = +1$, atunci transformarea ortogonală corespunzătoare este o rotație de centru O ,

4) dacă $\det A = -1$, atunci transformarea ortogonală corespunzătoare este o rotație de centru O și o simetrie de axă Ox sau Oy .

Aceste observații arată printre altele că mulțimea tuturor transformărilor ortogonale ale planului p este un grup în raport cu operația produs (grupul transformărilor ortogonale).

Ca și în cazul rotației un calcul analitic simplu arată că o transformare ortogonală păstrează distanța dintre puncte.

Pornind de la modelul transformărilor ortogonale și al translațiilor introducem transformările geometrice care poartă numele de *izometrii*.

Definiție. Fie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ o matrice ortogonală și (h, k) o pereche de numere date. Transformarea geometrică care asociază punctului $M(x, y)$ punctul $M'(x', y')$ definit prin

$$\begin{cases} x' = ax + by + h, \\ y' = cx + dy + k \end{cases}$$

se numește *izometrie*.

Alternativ izometria este produsul dintre o transformare ortogonală de matrice A și o translație de vector $h\vec{i} + k\vec{j}$. În cazul $\det A = +1$ izometria se numește *deplasare* (rototranslație), iar în cazul $\det A = -1$ izometria se numește *antideplasare* (rotație, simetrie și translație).

Două repere carteziane determină unic o izometrie. Mai precis fiind date două repere carteziane $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, $\vec{OA} \in \vec{i}$, $\vec{OB} \in \vec{j}$ și $\{O'; \vec{i}', \vec{j}'\}$, $\vec{O'A'} \in \vec{i}'$, $\vec{O'B'} \in \vec{j}'$ există o singură izometrie $\mathcal{J} : p \rightarrow p$ astfel încât $\mathcal{J}(O) = O'$, $\mathcal{J}(A) = A'$, $\mathcal{J}(B) = B'$. Această afirmație se probează destul de ușor dacă ținem seama de expresiile canonice ale matricelor ortogonale de ordinul doi.

De asemenea se constată că orice izometrie este bijectivă, inversa fiind tot o izometrie, iar produsul a două izometrii este tot o izometrie. Astfel, izometriile formează grup în raport cu operația produs (grupul izometriilor).

Teoremă. 1) Izometriile păstrează distanța dintre puncte.

2) Izometriile păstrează dreptele.

Demonstrație. 1) Orice izometrie $\mathcal{J}$ se scrie în forma $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ unde $\mathcal{F}$ este o translație și $\mathcal{G}$ o transformare ortogonală. Rezultă $d(\mathcal{J}(M), \mathcal{J}(N)) = d(\mathcal{F}(\mathcal{G}(M)), \mathcal{F}(\mathcal{G}(N))) = d(\mathcal{G}(M), \mathcal{G}(N)) = d(M, N)$, $\forall M, N \in p$ (fig. III. 14).

Notă. Se poate arăta că orice transformare geometrică a lui p care păstrează distanța dintre puncte este o izometrie.

2) Fie dreapta $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și izometria de ecuații $x' = ax + by + h$, $y' = cx + dy + k$. Pentru simplificarea raționamentelor presupunem $ad - bc = 1$. Deoarece

$$x = \begin{vmatrix} x' - h & b \\ y' - k & d \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a & x' - h \\ c & y' - k \end{vmatrix}$$

imaginea $\mathcal{J}(d_1)$ are ecuația

$$a_1 \begin{vmatrix} x' - h & b \\ y' - k & d \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a & x' - h \\ c & y' - k \end{vmatrix} + c_1 = 0.$$

Aceasta este o ecuație de gradul întâi în x' și y' pentru care $(a_1d - b_1c)^2 + (ab_1 - ba_1)^2 = a_1^2(b^2 + d^2) + b_1^2(a^2 + c^2) - 2a_1b_1(ab + cd) = a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, adică coeficienții lui x' , y' nu se anulează simultan. Astfel teorema este justificată.

Izometriile păstrează distanța și dreptele. Deci ele păstrează toate noțiunile definite cu ajutorul distanței și dreptelor.

Consecință. Izometriile păstrează relația „între”, segmentele, semidreptele, unghiurile, triunghiurile și congruența acestor entități.

Definiție. Două submulțimi, X, Y de puncte din plan se numesc congruente dacă există o izometrie $\mathcal{J} : p \rightarrow p$ astfel încât $\mathcal{J}(X) = Y$ (fig. III.15, a — translație, b — rotație, c — simetrie).

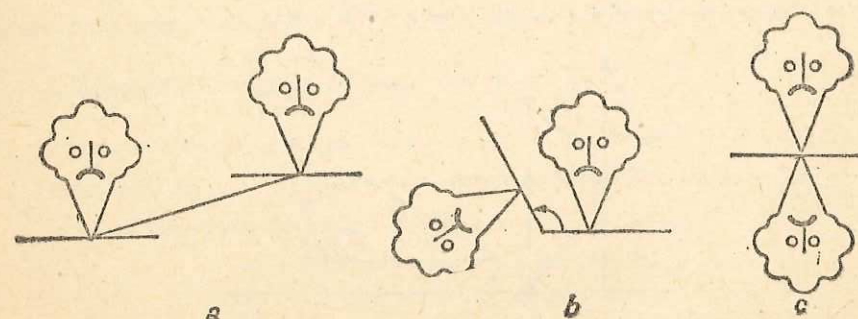


Fig. III. 15

Congruența este o relație de echivalență pe mulțimea submulțimilor (figurilor) planului p . Submulțimile (figurile) din aceeași clasă de echivalență poartă aceeași denumire.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau punctele

$$A\left(\frac{a^2-1}{a^2-2a+1}, \frac{a^4+2a^3+a^2}{a^4-a^2}\right), B\left(1, \frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a}\right), C\left(-1, \frac{a-1}{3a-1}\right),$$

$$D\left(\frac{a+1}{a-1}, \frac{a+1}{a-1}\right), E(1, 1), F\left(-1, \frac{a}{3a-1} + \frac{1}{1-3a}\right),$$

unde a este un parametru real. Să se determine condițiile de existență simultană a triunghiurilor ABC , DEF și să se verifice că în aceste condiții $ABC = DEF$.

Soluție. Existența expresiilor raționale impune $a \neq 1$, $a \neq 0$, $a \neq \frac{1}{3}$. În aceste condiții se observă că $A = D$, $B = E$ și $C = F$, având respectiv coordonatele $\left(\frac{a+1}{a-1}, \frac{a+1}{a-1}\right)$, $(1, 1)$, $\left(-1, \frac{a-1}{3a-1}\right)$. Impunem și condiția ca A, B, C să nu fie coliniare

$$\begin{vmatrix} \frac{a+1}{a-1} & \frac{a+1}{a-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{a-1}{3a-1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Rezultă $a \neq \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$.

2. Să se verifice că triunghiurile MNL și $M'N'L'$ de vîrfuri $M(7, 1)$, $N(7, 4)$, $L(3, 1)$, $M'(-2/5, 16/5)$, $N'(2, 5)$, $L'(2, 0)$ sînt congruente și să se determine izometria $\mathcal{G}$ cu proprietatea $\mathcal{G}(MNL) = M'N'L'$.

Soluție (fig. III. 16). Triunghiurile dreptunghice MNL și $M'N'L'$ sînt congruente deoarece au laturile congruente (de lungimi respectiv egale). Urmărind orientarea indicată de săgeți deducem că $M'N'L'$ se obține din MNL printr-o antideplasare, adică o izometrie de tipul

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta + h, \\ y' = x \sin \theta - y \cos \theta + k. \end{cases}$$

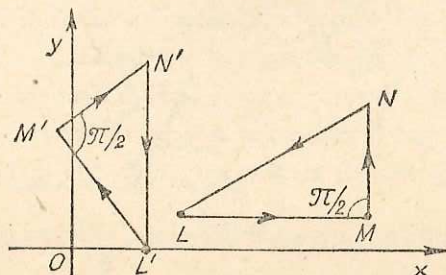


Fig. III. 16

coeficienții $\cos \theta$, $\sin \theta$, h și k sînt determinați de sistemul

$$\begin{cases} -\frac{2}{5} = 7 \cos \theta + \sin \theta + h, \\ \frac{16}{5} = 7 \sin \theta - \cos \theta + k, \\ 2 = 7 \cos \theta + 4 \sin \theta + h, \\ 5 = 7 \sin \theta - 4 \cos \theta + k, \\ 2 = 3 \cos \theta + \sin \theta + h, \\ 0 = 3 \sin \theta - \cos \theta + k. \end{cases}$$

Rezultă $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $h = 3$, $k = -3$.

§ 5. Probleme propuse

1. Triunghiul $A'B'C'$ este obținut din triunghiul ABC printr-o translație. Să se arate că medianele din puncte corespondente ale celor două triunghiuri sînt paralele sau coliniare.

Indicație. Imaginea unei drepte d printr-o translație este o dreaptă paralelă sau egală cu d .

2. Fie cercurile C_1, C_2 și segmentul $[AB]$. Să se construiască un segment paralel și congruent cu $[AB]$ ale cărui extremități să fie respectiv pe cercurile C_1 și C_2 . Discuție.

Indicație. Se utilizează translația $\mathcal{T}$ de vector $\overline{AB}$.

3. În planul raportat la reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-1, 2)$.

1) Să se determine ecuațiile translației $\mathcal{T}$ de vector $\overline{OA}$.

2) Care este imaginea dreptei $d: x + y + 1 = 0$ prin $\mathcal{T}$.

3) Să se găsească dreapta h cu proprietatea $\mathcal{T}(h): 2x' - 3y' + 1 = 0$.

4. Fie h, k, l trei drepte paralele. Să se construiască un triunghi echilateral ABC ale cărui vîrfuri să fie situate pe cele trei drepte.

Indicație. Se fixează punctul A pe una din drepte și se utilizează rotația de centru A și unghi 60° sau -60° . Rezultă două soluții.

5. Să se înscrie un pătrat într-un paralelogram.

Indicație. Dacă există un pătrat înscris într-un paralelogram, atunci centrul O al paralelogramului coincide cu centrul pătratului. Se utilizează rotația de centru O și unghi $\frac{\pi}{2}$.

6. Se consideră rotația $\mathcal{R}$ de centru O și unghi $\frac{\pi}{3}$.

1) Care este imaginea dreptei $d: x - y + 1 = 0$ prin $\mathcal{R}$?

2) Să se determine o dreaptă h cu proprietatea $\mathcal{R}(h): x - 4y + 1 = 0$.

7. Să se determine punctele fixe ale izometriei de ecuații

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta + 1, \\ y' = x \sin \theta - y \cos \theta - 1 \end{cases}$$

Indicație. Se pune $x' = x$, $y' = y$ și se rezolvă sistemul liniar, obținut.

8. Fie $\mathcal{T} = \mathcal{T} \circ \mathcal{A}$, unde $\mathcal{T}$ este translația de vector $\vec{v} = i - j$, iar $\mathcal{A}$ este rotația de matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Se dă $A(3, 2)$. Să se găsească $\mathcal{T}(A)$, $\mathcal{T}^{-1}(A)$, $(\mathcal{A} \circ \mathcal{T})(A)$.

Indicație. $\mathcal{T} \circ \mathcal{A}$ are ecuațiile: $x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 1$, $y' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 1$, iar

$\mathcal{A} \circ \mathcal{T}$ are ecuațiile: $x'' = \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{y-1}{\sqrt{2}}$, $y'' = \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{y-1}{\sqrt{2}}$.

9. Axele de coordonate Ox și Oy se rotesc cu unghiul $\frac{\pi}{3}$ și noul reper $x'Oy'$ se consideră invers orientat față de xOy . Știind că un punct A are coordonatele $(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ în reperul $x'Oy'$, să se găsească coordonatele lui A față de reperul xOy .

Indicație. Rotația de unghi θ , a reperului cartezian xOy , este caracterizată prin $x = x'$, $\cos \theta = y' \sin \theta$, $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$ unde $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Problema impune rotația reperului urmată de o simetrie în raport cu Oy' sau în raport cu Ox' . Obținem

$$\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2} - \sqrt{3} \right) \text{ sau } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3, \sqrt{3} + \frac{3}{2} \right).$$

Capitolul IV

CONICE

§ 1. Cercul

Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ reperul cartezian în plan și $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ două puncte. Reamintim expresia distanței

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat și r un număr real strict pozitiv fixat. *Cercul* C de centru M_0 și rază r este mulțimea punctelor $M(x, y)$ cu proprietatea $d(M_0, M) = r$ (fig. IV. 1).

Teoremă. Punctul $M(x, y)$ aparține cercului C de centru $M_0(x_0, y_0)$ și rază r dacă și numai dacă

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Demonstrație. $M \in C \Leftrightarrow d(M_0, M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Astfel $C = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$ sau mai scurt $C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Ecuația $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită a cercului* C de centru (x_0, y_0) și rază r . Această ecuație este echivalentă cu două ecuații parametrice în $\mathbb{R}^2$ (fig. IV. 2),

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t, t \in [0, 2\pi), t = \text{parametru}, \end{cases}$$

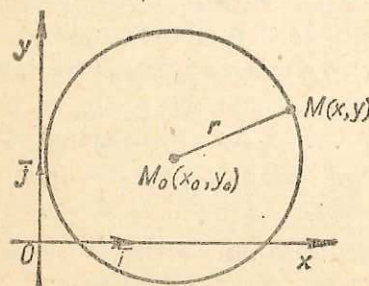


Fig. IV. 1

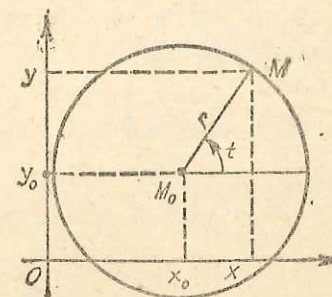


Fig. IV. 2

sau cu o ecuație

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + r(\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}), t \in [0, 2\pi)$$

în V numită *ecuația vectorială* a cercului.

Se observă că $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ este un polinom de gradul doi în x și y , termenul de gradul doi fiind $x^2 + y^2$. Aceasta sugerează să cercetăm mulțimea

$$\Gamma: x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

Deoarece ecuația lui Γ se transcrie

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

rezultă:

1) dacă $a^2 + b^2 - c > 0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în $x_0 = -a$, $y_0 = -b$ și de rază $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$;

2) dacă $a^2 + b^2 - c = 0$, atunci $\Gamma = \{(-a, -b)\}$;

3) dacă $a^2 + b^2 - c < 0$, atunci $\Gamma = \emptyset$.

Ecuația

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, a^2 + b^2 - c > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

se numește *ecuația carteziană generală a cercului*. Evident această ecuație este echivalentă cu

$$d(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0, d \neq 0, a_1^2 + b_1^2 - dc_1 > 0.$$

Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$, unde (x_0, y_0) este un punct fixat, iar $r > 0$ este tot fixat. Definim mulțimile (fig. IV. 3) $\text{int}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $C = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\text{ext}(C) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$. Evident $\text{int}(C) \cap \text{ext}(C) = \emptyset$, $\text{int}(C) \cup C \cup \text{ext}(C) = p$.

Deci un cerc C din plan are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte: *interiorul* lui C notat $\text{int}(C)$ și *exteriorul* lui C notat $\text{ext}(C)$.

Teoremă. 1) Mulțimile $\text{int}(C)$ și $\text{int}(C) \cup C$ sînt convexe.

2) $\forall M_1 \in \text{int}(C)$, $\forall M_2 \in \text{ext}(C)$, segmentul $[M_1M_2]$ taie pe C .

Demonstrație. Fără a scădea generalitatea putem presupune $x_0 = y_0 = 0$. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$, două puncte din plan. Segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin ecuațiile parametrice $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $y = (1 - t)y_1 + ty_2$, $t \in [0, 1]$.

Dacă $M_1, M_2 \in \text{int}(C)$, adică $f(x_i, y_i) = x_i^2 + y_i^2 - r^2 < 0$, $i = 1, 2$, atunci $f(x, y) = f((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) = ((1 - t)x_1 + tx_2)^2 + ((1 - t)y_1 + ty_2)^2 - r^2 = (1 - t)^2x_1^2 + 2(1 - t)tx_1x_2 + t^2x_2^2 + (1 - t)^2y_1^2 + 2(1 - t)ty_1y_2 + t^2y_2^2 - r^2 \leq (1 - t)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) + t(x_2^2 + y_2^2 - r^2) = (1 - t)f(x_1, y_1) + tf(x_2, y_2) < 0, \forall t \in [0, 1]$.

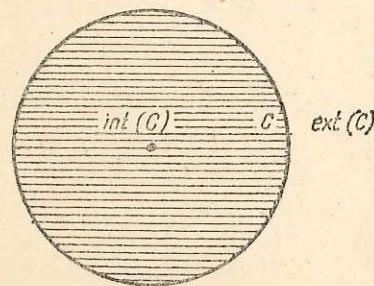


Fig. IV. 3

* t^2 se majorează cu t , coeficientul său fiind pozitiv.

Cu alte cuvinte $[M_1M_2] \subset \text{int}(C)$.

2) Fie $M_1 \in \text{int}(C)$, adică $f(x_1, y_1) < 0$ și $M_2 \in \text{ext}(C)$, adică $f(x_2, y_2) > 0$. Rezultă funcția continuă $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f((1 - t)x_1 + tx_2, (1 - t)y_1 + ty_2) = ((1 - t)x_1 + tx_2)^2 + ((1 - t)y_1 + ty_2)^2 - r^2$, cu proprietățile $\varphi(0) = f(x_1, y_1) < 0$ și $\varphi(1) = f(x_2, y_2) > 0$. De aceea există o valoare $t_0 \in [0, 1]$ astfel încît $0 = \varphi(t_0) = ((1 - t_0)x_1 + t_0x_2)^2 + ((1 - t_0)y_1 + t_0y_2)^2 - r^2$ și deci $M_0((1 - t_0)x_1 + t_0x_2, (1 - t_0)y_1 + t_0y_2) \in C$.

Fie cercul $C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ și $M_1(x_1, y_1) \in C$. Dreapta determinată de punctul M_1 și de vectorul normal $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j}$ este tangentă (fig. IV.4) la cerc în punctul M_1 . Ecuația carteziană implicită a acestei drepte este

$$(x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) = 0$$

sau echivalent

$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$$

(dedublata ecuației cercului în punctul $M_1(x_1, y_1)$). Dreapta determinată de punctul M_1 și de vectorul director $\overline{M_0M_1}$ este *normala* (fig. IV.4) la cerc în punctul M_1 . Ecuația normalei este

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0}.$$

Observație. Prin *dedublări* înțelegem substituiri $x^2 \rightarrow xx_1$, $y^2 \rightarrow yy_1$, $xy \rightarrow \frac{1}{2}(xy_1 + x_1y)$, $x \rightarrow \frac{1}{2}(x + x_1)$, $y \rightarrow \frac{1}{2}(y + y_1)$. Prin *dedublata ecuației de gradul doi* $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ în punctul $M_1(x_1, y_1)$ înțelegem ecuația de gradul întâi $a_{11}x_1x + a_{12}(y_1x + x_1y) + a_{22}y_1y + a_{10}(x + x_1) + a_{20}(y + y_1) + a_{00} = 0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se găsească ecuația carteziană a cercului cu centru în $M_0(1, 1)$ și tangent dreptei $d: 3x + 4y + 8 = 0$. Apoi să se scrie ecuațiile parametrice și ecuația vectorială ale aceluiași cerc.

Soluție. Notăm cu C cercul a cărui ecuație se caută. Raza r a acestui cerc este distanța de la M_0 la dreapta d . Deci,

$$r = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3. \text{ Astfel } C: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 3^2.$$

Ecuația carteziană găsită este echivalentă cu ecuațiile parametrice $x = 1 + 3 \cos t$, $y = 1 + 3 \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, din care se obține ecuația vectorială $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + 3(\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j})$, $t \in [0, 2\pi)$.

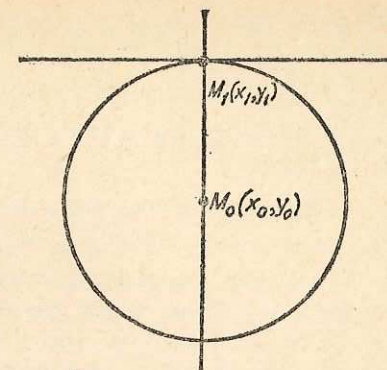


Fig. IV. 4

2. 1) Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ reprezintă un cerc C , punându-se în evidență centrul $M_0(x_0, y_0)$ și raza r .

2) Să se scrie ecuația carteziană a tangentei la C în punctul $A(2, 0)$.

3) Să se găsească ecuațiile carteziane ale tangentelor duse prin $D(8, 7)$ la cercul C .

Soluție. 1) Ecuația dată se transcrie $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$ și deci ea reprezintă un cerc cu centrul în $M_0(3, 2)$ și de rază $r = \sqrt{5}$.

2) Punctul A aparține lui C , adică coordonatele sale verifică ecuația lui C . Ecuația carteziană a tangentei la C în punctul $A(2, 0)$ se poate obține utilizând dedublata ecuației lui C , $(x_1 - 3) \cdot (x - 3) + (y_1 - 2)(y - 2) = 5$. Rezultă $-(x - 3) - 2(y - 2) = 5$ sau $x + 2y - 2 = 0$.

3) Fasciculul de drepte cu vârful $D(8, 7)$ are ecuația $r(x - 8) + s(y - 7) = 0$, $r^2 + s^2 \neq 0$. Selectăm din acest fascicul dreptele care se găsesc la distanța $r = \sqrt{5}$ față de centrul $M_0(3, 2)$. Pentru aceasta se impune condiția

$$\sqrt{5} = \frac{|r(3 - 8) + s(2 - 7)|}{\sqrt{r^2 + s^2}},$$

care este echivalentă cu $r^2 + s^2 = 5(r + s)^2$. Rezultă $r = -\frac{1}{2}s$, $r = -2s$ și deci $x - 2y + 6 = 0$ respectiv $2x - y - 9 = 0$ sînt ecuațiile căutate.

3. Să se arate că cercul $C: x^2 + y^2 = 1$ nu este graficul nici unei funcții, dar este reuniunea graficelor a două funcții.

Soluție. Se știe că graficul unei funcții este interesecat de o dreaptă paralelă cu Oy cel mult într-un punct. Se observă însă că axa Oy intersectează cercul C în două puncte de coordonate $(0, -1)$, $(0, +1)$. De aceea C nu este graficul nici unei funcții.

Semicercul superior $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ este graficul funcției $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, iar semicercul inferior $x^2 + y^2 = 1$, $y < 0$ este graficul funcției $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Cercul C este reuniunea acestor două grafice.

4. Pe un cerc C de diametru dat $[AB]$, de lungime $4a$, $a > 0$ și centru O , se consideră un punct mobil M .

1) Să se scrie ecuațiile cercurilor circumscrise triunghiurilor AOM și BOM .

2) Să se arate că produsul distanțelor de la centrele P și Q ale acestor cercuri la dreapta AB este constant și că dreptele AP și BQ sînt perpendiculare.

3) Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor AP și BQ .

Soluție. Fixăm mai întâi reperul cartezian ca în figura IV. 5, considerînd dreapta AB ca Ox și mediatoarea segmentului AB ca Oy . Rezultă $A(2a, 0)$, $B(-2a, 0)$ și $C: x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$. Fie $M(\alpha, \beta)$; $M \in C \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 4a^2 = 0$ (1). Cercul circumscris triunghiului AOM are centrul P situat pe mediatoarea segmentului $[OA]$. Fie $P(a, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; atunci raza este $r = \sqrt{a^2 + \lambda^2}$, iar ecuația este $x^2 + y^2 - 2ax - 2\lambda y = 0$ cu condiția $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha - 2\lambda\beta = 0$ (2).

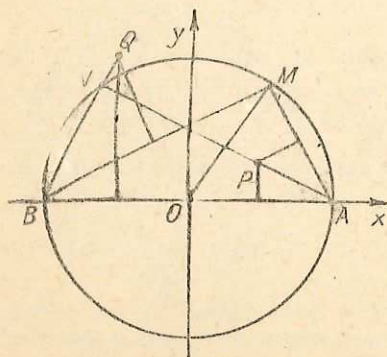


Fig. IV. 5.

Analog găsim ecuația cercului circumscris triunghiului BOM , cu centrul $Q(-a, \mu)$ $\mu \in \mathbb{R}$ și anume $x^2 + y^2 + 2ax - 2\mu y = 0$ cu condiția $\alpha^2 + \beta^2 + 2a\alpha - 2\mu\beta = 0$ (3).

2) Din relațiile (1), (2), (3) deducem

$$d(P, P') = \left| \frac{a(2a - \alpha)}{\beta} \right|, \quad d(Q, Q') = \left| \frac{a(2a + \alpha)}{\beta} \right|, \quad \beta \neq 0$$

$$d(P, P') \cdot d(Q, Q') = \frac{a^2 \beta^2}{\beta^2} = a^2 = \text{const.}$$

Panta dreptei AP este $m_1 = -\frac{\lambda}{a}$, iar a dreptei BQ este $m_2 = \frac{\mu}{a}$. Deoarece $m_1 m_2 = -\frac{\lambda \mu}{a^2} = -\frac{a^2}{a^2} = -1$, dreptele AP și BQ sînt perpendiculare.

Observație. Produsul $\lambda \mu$ este pozitiv, oricare ar fi poziția punctului M pe cercul C .

3) Fie $\{L\} = AP \cap BQ$. Locul geometric descris de punctul L este chiar cercul $C: x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$.

5. Să se găsească locul geometric descris de punctul de intersecție al dreptelor $d: x \cos \alpha + y = 1$, $d': x - y \cos \alpha = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluție. Mai întâi subliniem faptul că existența lui α , echivalentă cu $|\cos \alpha| \leq 1$, impune $|1 - y| \leq |x|$, $|x - 1| \leq |y|$. Punctele din plan care satisfac acestor condiții aparțin regiunii nehașurate din figura IV.6. Evident locul geometric căutat aparține acestei regiuni.

Vom elimina parametrul α între ecuațiile lui d și d' printr-un procedeu care ține seama de faptul că aceste drepte nu trec prin origine:

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y = 1 \\ x - y \cos \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \cos \alpha + y^2 = y \\ x^2 - xy \cos \alpha = x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = x + y.$$

Rezultă că locul geometric căutat este descris de relațiile $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, $|1 - y| \leq |x|$, $|x - 1| \leq |y|$, adică el este semicercul $\widehat{AMB}$ (fig. IV. 6)

din cercul cu centrul în $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ și de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Să se rezolve inecuația

$$\sqrt{3} \cos \alpha + 3 \sin \alpha - \sqrt{3} > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Notînd $\cos \alpha = x$ și $\sin \alpha = y$, inecuația dată în $\mathbb{R}$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} > 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

în $\mathbb{R}^2$.

Ecuația $\sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} = 0$ reprezintă o dreaptă d , iar ecuația $x^2 + y^2 - 1 = 0$ un

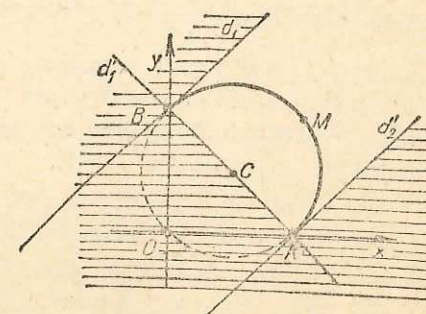


Fig. IV. 6.

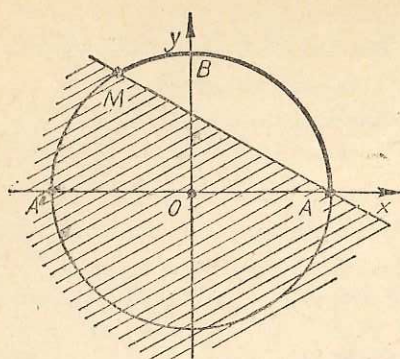


Fig. IV. 7

Mulțimea soluțiilor sistemului este arcul deschis $\widehat{ABM}$, intersecția dintre p^+ și C . Pe de altă parte avem

$$A(1, 0) \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De aceea mulțimea soluțiilor inecuației din enunțul problemei este reuniunea intervalelor

$$\left(2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

§ 2. Elipsa

Fie c un număr real pozitiv și F' , F două puncte fixate din plan astfel încât $d(F', F) = 2c$ (fig. IV.8).

Definiție. Fie $a > c$. Mulțimea E a punctelor M cu proprietatea $d(M, F') + d(M, F) = 2a$

se numește elipsă.

Dacă $c = 0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a . Punctele F' și F se numesc *focarele elipsei*, dreapta $F'F$ se numește *axa focală*, distanța $d(F', F) = 2c$ se numește *distanța focală*, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc *raze focale* ale punctului M .

Elipsa nu este o mulțime vidă deoarece cercul cu centrul în F și de rază a taie mediatoarea segmentului $[F'F]$ în două puncte B' și B care aparțin lui E ; de exemplu, $d(B, F) + d(B, F') = 2d(B, F) = 2a$.

Dreapta $F'F$ și mediatoarea $B'B$ a segmentului $[F'F]$ sînt *axe de simetrie* pentru E . Fie $F'F \cap B'B = \{O\}$. Punctul O este *centru de simetrie*. Fixăm

cerc C (fig. IV. 7). Calculăm coordonatele punctelor A și M , unde $\{A, M\} = d \cup C$. Rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

obținem soluțiile $(1, 0)$ și $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Fie $A(1, 0)$

și $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Inecuația $\sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} > 0$ este verificată de punctele din semi-planul $p^+ = \{N(x, y) \mid \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3} > 0\}$, (nehașurat în figură).

reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{OF}}{\|OF\|}$,

$\vec{j} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\|OB\|}$ ca în figura IV.8. Rezultă

$$F'(-c, 0), F(c, 0),$$

$$B'(0, -\sqrt{a^2 - c^2}), B(0, \sqrt{a^2 - c^2}).$$

Teoremă. Punctul $M(x, y)$ aparține elipsei E dacă și numai dacă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

Demonstrație. Pentru orice punct $M(x, y)$ din plan notăm $d(M, F') = \rho'$, $d(M, F) = \rho$. Avem

$$\begin{cases} \rho'^2 = (x + c)^2 + y^2 \\ \rho^2 = (x - c)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx.$$

Deci

$$M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx \\ \rho' + \rho = 2a \\ \rho', \rho \in [a - c, a + c] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = a + \frac{cx}{a} \\ \rho = a - \frac{cx}{a} \end{cases}, \quad x \in [-a, a].$$

Astfel

$$M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 \\ (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Notînd $b^2 = a^2 - c^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel $E = \left\{ M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ sau mai scurt

$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ecuația $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a elipsei. Ea este echivalentă cu ecuațiile parametrice în $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi), \quad t = \text{parametru}, \end{cases}$$

sau cu o ecuație

$$\vec{r} = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

în V numită *ecuația vectorială* a elipsei.

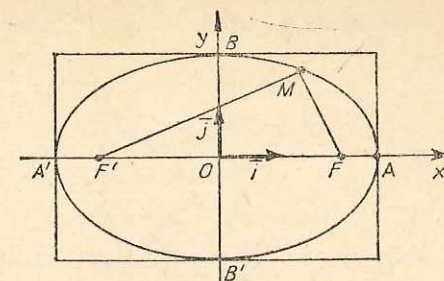


Fig. IV. 8

Considerăm elipsa E de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}, x \in [-a, a].$$

Ecuația $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \geq 0$, iar ecuația $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ reprezintă porțiunea din elipsă cuprinsă în semiplanul $y \leq 0$. Acestea se numesc ecuații *carteziene explicite*.

Axele de coordonate taie elipsa în punctele $A'(-a, 0)$, $A(a, 0)$, $B'(0, -b)$, $B(0, b)$ care se numesc *virfurile elipsei*. Segmentele $[A'A]$, $[B'B]$ sau distanțele $d(A', A) = 2a$, $d(B', B) = 2b$ se numesc respectiv *axa mare* și *axa mică* a elipsei. Jumătățile a și b se numesc *semiaxe*.

Dacă notăm cu E_1 și E_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \rightarrow \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, x \rightarrow -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

definite respectiv pe $(-a, a)$, atunci se observă că

$$E = E_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup E_2$$

și deci elipsa are alura din figura IV. 8.

Luăm $M_0(x_0, y_0) \in E_1$. Tangenta în M_0 la E_1 are ecuația $y - y_0 = y_0(x - x_0)$, $x_0 \in (-a, a)$, $y_0 > 0$, unde $y_0 = -\frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$, adică $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$, $x_0 \in (-a, a)$, $y_0 > 0$. Analog, dacă $M_0(x_0, y_0) \in E_2$,

pentru tangenta la E_2 în M_0 găsim ecuația $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$, $x_0 \in (-a, a)$, $y_0 < 0$. Pe de altă parte, dreapta de ecuație $x = -a$ este tangentă la E în virful $(-a, 0)$, iar dreapta de ecuație $x = a$ este tangentă la E în virful $(a, 0)$. Ecuațiile

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0), y_0 \neq 0; x = -a; x = a$$

sînt cazuri particulare ale ecuației

$$(1) \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

(*dedublata ecuației elipsei în punctul $M_0(x_0, y_0)$*). În concluzie, elipsa E admite în fiecare punct al său $M_0(x_0, y_0)$ o tangentă de ecuație (1). Dreapta care trece

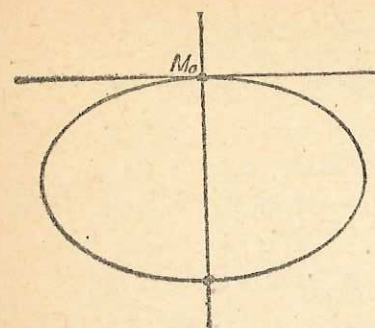


Fig. IV. 9

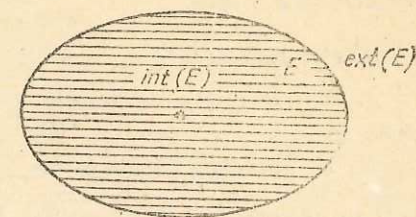


Fig. IV. 10

prin M_0 și este perpendiculară pe tangentă se numește *normala elipsei* în punctul M_0 (fig. IV. 9).

Te m.ă. Să se verifice că tangenta și normala la elipsă în punctul M_0 sînt bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele $F'M_0$ și FM_0 .

O elipsă are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte (fig. IV.10): interiorul lui E notat $\text{int}(E)$ și exteriorul lui E notat $\text{ext}(E)$. Utilizînd funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, avem

$\text{int}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $E = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$,
 $\text{ext}(E) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $\text{int}(E) \cap \text{ext}(E) = \emptyset$, $\text{int}(E) \cup E \cup \text{ext}(E) = \mathbb{R}^2$. Mai mult, mulțimile $\text{int}(E)$ și $\text{int}(E) \cup E$ sînt convexe și conțin centrul O și focarele F' , F .

Construcția elipsei prin puncte (fig. IV. 11). Presupunem că se dau axa mare $[A'A]$ de lungime $2a$ și axa mică $[B'B]$ de lungime $2b$.

1) Fixăm un punct O al planului drept mijlocul segmentelor perpendiculare $[A'A]$ și $[B'B]$.

2) Se ia în compas distanța a și cu centrul în B se descrie un arc de cerc care taie pe $[A'A]$ în focarele F' și F .

3) Se consideră un număr de puncte 1, 2, 3, ... pe axa mare.

4) Se ia în compas distanța de la A' la 1, apoi cu centrul în F' se trasează arce de cerc deasupra și dedesubtul axei mari.

5) Se ia în compas distanța de la A la 1; apoi cu centrul în F se trasează arce de cerc care intersectează arcele construite la 4). Astfel se obțin două puncte ale elipsei de pe jumătatea din dreapta.

6) Se repetă pașii 4), și 5) schimbînd pe F' cu F și astfel se obțin două puncte ale elipsei situate pe jumătatea din stînga.

7) Se repetă pașii 4), 5), 6) folosind distanțele ce la A' la 2, de la A la 2, ... pînă cînd se precizează un număr suficient de puncte pentru a construi elipsa.

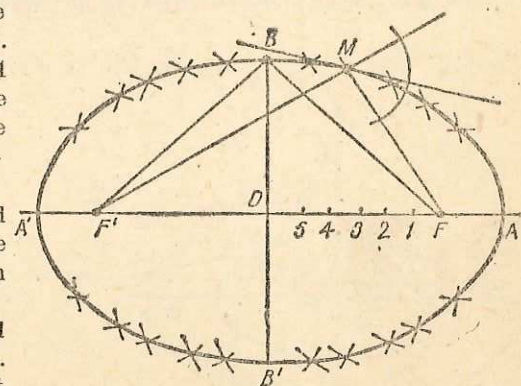


Fig. IV. 11

Punctul M a fost construit folosind distanțele de la A' la 4 și de la A la 4.

Desigur trebuie să ținem seama de faptul că elipsa nu este „ascuțită” în vecinătatea vîrfurilor iar tangenta în punctul M al elipsei este bisectoarea „exterioară” a unghiurilor dreptelor MF' și MF .

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră punctele variabile $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$, astfel încît $d(A, B) = 6$.

Să se găsească locul geometric al punctului M care împarte segmentul $\overrightarrow{AB}$ în raportul $\frac{1}{2}$, punîndu-se în evidență ecuația carteziană implicită, ecuațiile parametrice și ecuația vectorială.

Soluție (fig. IV. 12). Fie $M(x, y)$ și $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MB}$. Rezultă $x = \frac{2\alpha}{3}$, $y = \frac{\beta}{3}$ și $\alpha^2 + \beta^2 = 36$.

Eliminînd parametrii α, β între aceste trei relații, obținem elipsa $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ de semiaxe $a = 4$, $b = 2$.

Ecuațiile parametrice ale lui E sînt $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, iar ecuația vectorială a lui E este $\vec{r} = 4 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}$, $t \in [0, 2\pi)$.

2. Se consideră triunghiurile de tipul $M_1 M_2 M_3$ înscrise în elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, astfel încît centrele lor de greutate să coincidă cu centrul elipsei.

Să se demonstreze că normalele la elipsă, duse prin vîrfurile triunghiului, sînt concurente.

Soluție (fig. IV. 13). Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$; $M_i \in E \Leftrightarrow \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - 1 = 0$.

Centrul de greutate $G(x_G, y_G)$ are coordonatele $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, iar $G = O$, implică $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Ecuațiile tangentelor la elipsa E , în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt $\frac{x_i x}{a^2} + \frac{y_i y}{b^2} - 1 = 0$, $i = 1, 2, 3$.

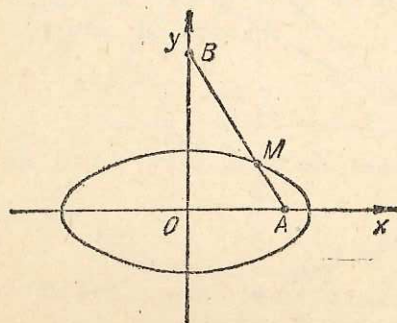


Fig. IV. 12

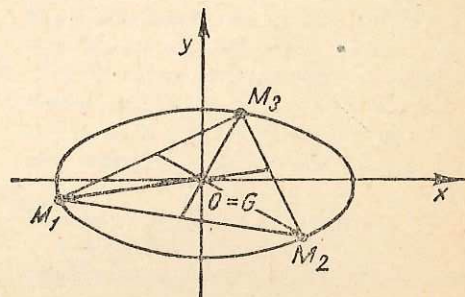


Fig. IV. 13

Ecuațiile normalelor în punctele $M_i(x_i, y_i)$ sînt

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y + (b^2 - a^2) x_1 y_1 = 0.$$

$$a^2 y_2 x - b^2 x_2 y + (b^2 - a^2) x_2 y_2 = 0.$$

$$a^2 y_3 x - b^2 x_3 y + (b^2 - a^2) x_3 y_3 = 0.$$

Aceste trei ecuații formează un sistem cu două necunoscute x, y , care este compatibil determinat deoarece avem

$$\begin{vmatrix} a^2 y_1 & -b^2 x_1 \\ a^2 y_2 & -b^2 x_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a^2 y_1 - b^2 x_1 & (b^2 - a^2) x_1 y_1 \\ a^2 y_2 - b^2 x_2 & (b^2 - a^2) x_2 y_2 \\ a^2 y_3 - b^2 x_3 & (b^2 - a^2) x_3 y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2 b^2 (b^2 - a^2) \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & x_1 y_1 \\ y_2 & x_2 & x_2 y_2 \\ y_3 & x_3 & x_3 y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că cele trei normale sînt concurente.

Teme. 1) Utilizînd ecuațiile parametrice ale elipsei E să se verifice existența triunghiurilor de tipul $M_1 M_2 M_3$. 2) Tangentele la E duse prin M_1, M_2, M_3 nu sînt concurente. De ce?

3. Să se arate că:

1) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și perimetrul date, triunghiul isoscel are aria maximă;

2) dintre toate triunghiurile avînd lungimea bazei și aria date, triunghiul isoscel are cel mai mic perimetru.

Soluție (fig. IV. 14). 1) Considerăm punctele fixe A, B și un sistem cartezian de axe ca în figură. Triunghiul ABM are perimetrul constant dacă și numai dacă M aparține elipsei de focare A și B . Este evident că triunghiul cu cea mai mare înălțime are cea mai mare arie; aceasta are loc pentru $M = C$, adică în cazul cînd ABC este un triunghi isoscel.

2) Se fixează baza $[AB]$ și lungimea înălțimii $d(O, C)$, unde $O(0, 0)$, $C(0, v)$, $C'(0, -v)$. Orice punct $N(x, y)$ din plan cu proprietățile $|y| = v$; $N \neq C$, $N \neq C'$ aparține exteriorului elipsei de focare A, B și deci perimetrul triunghiului ABN este mai mare decît perimetrul triunghiului ABC .

4. Considerăm planul complex. Fiecărui punct M , de afix $w = u + iv \neq 0$ i se asociază punctul P de afix $z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$.

1) Să se exprime coordonatele x și y ale punctului P în funcție de modulul ρ și argumentul α ale lui w .

2) Să se arate că dacă M descrie cercul $u^2 + v^2 = r^2$, $r \neq 1$, atunci punctul P descrie o elipsă E .

Să se calculeze distanța focală a elipsei.

Soluție. 1) Dacă ρ este modulul, iar α argumentul numărului complex $w = u + iv$, atunci $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, cu $i^2 = -1$, iar $\frac{1}{w} = \frac{1}{\rho}(\cos \alpha - i \sin \alpha)$, $\rho \in (0, \infty)$,

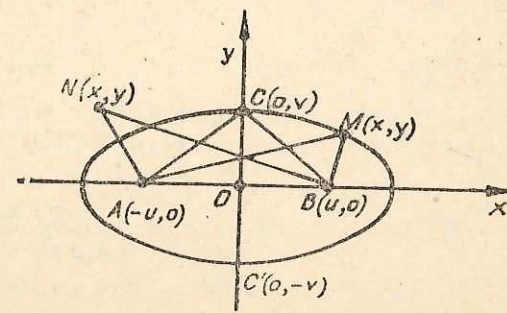


Fig. IV. 14

Rezultă

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) \Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{2} \left[\rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) + \frac{1}{\rho} (\cos \alpha - i \sin \alpha) \right] \text{ sau } x = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \alpha, \quad y = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \alpha.$$

2) Pentru a demonstra că punctul P descrie o elipsă, dacă punctul M descrie cercul $u^2 + v^2 = r^2$, $r \neq 1$, vom elimina parametrul α între relațiile care dau pe x și y :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha \\ y = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4r^2 x^2}{(r^2 + 1)^2} = \cos^2 \alpha \\ \frac{4r^2 y^2}{(r^2 - 1)^2} = \sin^2 \alpha \end{cases} \Rightarrow E: \frac{x^2}{\left(\frac{r^2 + 1}{2r} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r^2 - 1}{2r} \right)^2} = 1.$$

Rezultă $a = \frac{r^2 + 1}{2r}$, $b = \frac{|r^2 - 1|}{2r}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\left(\frac{r^2 + 1}{2r} \right)^2 - \left(\frac{r^2 - 1}{2r} \right)^2} = 1$, adică distanța focală este 2.

Temă. Ce descrie punctul P dacă $r = 1$?

§ 3. Hiperbola

Fie c un număr real strict pozitiv și F', F două puncte fixate din plan astfel încât $d(F', F) = 2c$.

Definiție. Fie $a \in (0, c)$. Mulțimea H a punctelor M cu proprietatea

$$|d(M, F') - d(M, F)| = 2a$$

se numește hiperbolă.

Punctele F' și F se numesc *focarele hiperbolei*, dreapta $F'F$ se numește *axa focală*, distanța $d(F', F) = 2c$ se numește *distanța focală*, iar segmentele $[MF']$, $[MF]$ se numesc *razele focale* ale punctului M .

Temă. Să se arate că hiperbola nu este mulțimea vidă.

Dreapta $F'F$ și mediatoarea segmentului $F'F$ sint axe de simetrie pentru H . Punctul lor comun O este *centru de simetrie*. Fixînd reperul cartezian ca în figura IV. 15 rezultă $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$.

Teoremă. Punctul $M(x, y)$ aparține hiperbolei H dacă și numai dacă

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

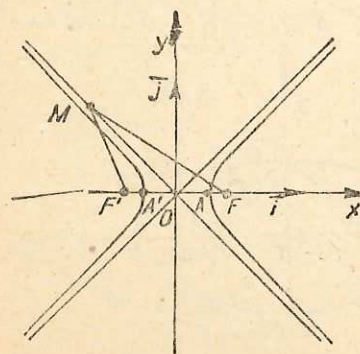


Fig. IV. 15

Demonstrație. Pentru orice punct $M(x, y)$ din plan notăm $d(M, F') = \rho'$ și $d(M, F) = \rho$. Avem

$$\begin{cases} \rho'^2 = (x + c)^2 + y^2, \\ \rho^2 = (x - c)^2 + y^2, \end{cases} \Rightarrow (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx.$$

Punem $H = H' \cup H''$, unde $H' = \{M \in p \mid \rho - \rho' = 2a\}$, $H'' = \{M \in p \mid \rho' - \rho = 2a\}$.

Rezultă

$$\begin{aligned} M \in H' &\Leftrightarrow \begin{cases} (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx \\ \rho' - \rho = -2a, \\ \rho' \in [c - a, \infty), \rho \in [c + a, \infty), \rho' < \rho \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = -a - \frac{cx}{a} \\ \rho = a - \frac{cx}{a} \end{cases}, \quad x \in (-\infty, -a] \\ M \in H'' &\Leftrightarrow \begin{cases} (\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx \\ \rho' - \rho = 2a \\ \rho' \in [a + c, \infty), \rho \in [c - a, \infty) \\ \rho' > \rho \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho' = a + \frac{cx}{a} \\ \rho = -a + \frac{cx}{a} \end{cases}, \quad x \in [a, \infty). \end{aligned}$$

Deci

$$M \in H = H' \cup H'' \Rightarrow \begin{cases} (x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 \\ (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Notînd $b^2 = c^2 - a^2$, ultima ecuație se transcrie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Astfel, $H = \left\{ M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ sau mai scurt $H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ecuația $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită* a hiperbolei. Axa Ox taie hiperbola H în punctele $(-a, 0)$, $(a, 0)$ numite *vîrfurile hiperbolei*. De aceea axa Ox se numește *axa transversă* a hiperbolei. Axa Oy nu intersectează pe H (axă netransversă). Folosind funcția *cosinus hiperbolic*, $\text{ch}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{cht} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ și funcția *sinus hiperbolic*, $\text{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{sht} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, care satisfac identitatea $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ ajungem la ur-

mătoarele concluzii: ramura $H' : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x \leq -a$, are ecuațiile parametrice $x = a \cosh t, y = b \sinh t, t \in \mathbb{R}$ echivalente cu ecuația vectorială $\vec{r} = -a \cosh t \vec{i} + b \sinh t \vec{j}, t \in \mathbb{R}$; ramura $H'' : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq a$ are ecuațiile parametrice $x = a \cosh t, y = b \sinh t, t \in \mathbb{R}$ echivalente cu ecuația vectorială $\vec{r} = a \cosh t \vec{i} + b \sinh t \vec{j}, t \in \mathbb{R}$.

Fie hiperbola H de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \end{cases}, x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$$

Ecuația $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbolă cuprinsă în semiplanul $y \geq 0$, iar ecuația $y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ reprezintă porțiunea din hiperbolă cuprinsă în semiplanul $y \leq 0$. Acestea se numesc ecuații *carteziane explicite*.

Dacă notăm cu H_1 și H_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \rightarrow \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, x \rightarrow -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

definite respectiv pe $(-\infty, -a) \cup (a, \infty)$, atunci se observă că

$$H = H_1 \cup \{(-a, 0), (a, 0)\} \cup H_2.$$

Dreptele de pante $\pm \frac{b}{a}$ care trec prin origine sînt drepte care nu taie hiperbola. Acestea se numesc *asimptotele hiperbolei* H . Ecuația reuniunii asimptotelor este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Fie $M_0(x_0, y_0) \in H$. Ca și la elipsă se dovedește (temă!) că hiperbola H are în fiecare punct M_0 o *tangentă* de ecuație

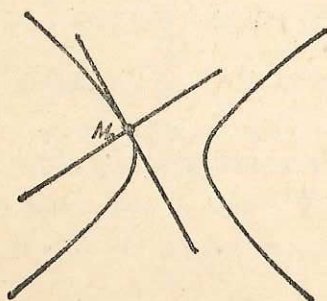


Fig. IV. 16

$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$
(dedublata ecuației hiperbolei în punctul $M_0(x_0, y_0)$). Perpendiculara pe tangentă în punctul M_0 se numește *normala hiperbolei* în punctul M_0 (fig. IV. 16).

Discuția precedentă arată că hiperbola H are alura din figura IV. 15.

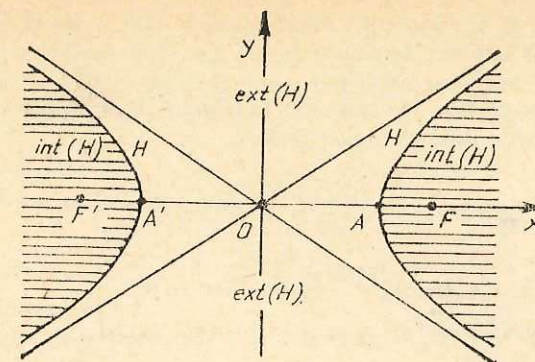


Fig. IV. 17

Temă. Să se arate că tangentă și normala la hiperbolă în punctul M_0 sînt bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele $F'M_0$ și FM_0 .

O hiperbolă are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte (fig. IV. 17): *interiorul* lui H notat $\text{int}(H)$ și *exteriorul* lui H notat $\text{ext}(H)$. Utilizînd funcția $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ avem $\text{int}(H) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$, $H = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\text{ext}(H) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $\text{int}(H) \cap \text{ext}(H) = \emptyset$, $\text{int}(H) \cup H \cup \text{ext}(H) = p$, $\text{int}(H) = \text{int}(H') \cup \text{int}(H'')$, $\text{int}(H') \cap \text{int}(H'') = \emptyset$. Mulțimea $\text{ext}(H)$ conține centrul O . Mulțimea $\text{int}(H)$ conține focarele F' și F .

Construcția hiperbolei prin puncte (fig. IV. 18). Presupunem că se dau focarele F', F și numărul $2a = |d(M, F') - d(M, F)|$ cuprins între zero și distanța focală $d(F', F) = 2c$.

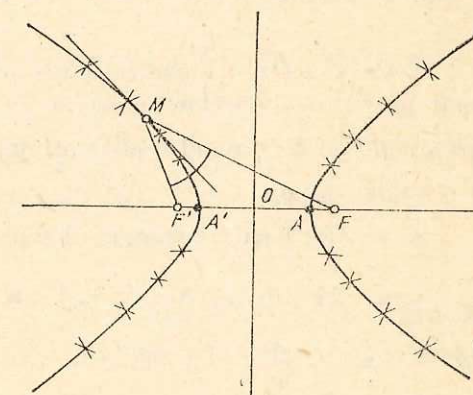
1) Fie O mijlocul segmentului $[F'F]$ și $[A'A]$ segmentul de lungime $2a$ cu mijlocul în O . Evident A', A sînt puncte ale hiperbolei.

2) Se construiește o semidreaptă $[DC]$, unde $[DC]$ este un segment congruent cu $[A'A]$. Pe această semidreaptă se fixează punctele 1, 2, 3,...

3) Se ia în compas distanța de la D la 1 și cu vârful compasului în F se trasează două arce de cerc deasupra și dedesubtul axei focale.

4) Se ia în compas distanța de la C la 1 și cu vârful compasului în F' se trasează arce de cerc care intersectează arcele construite la 3). Intersecțiile acestor arce dau două puncte ale hiperbolei pe ramura din stînga.

5) Se repetă pașii 3) și 4) schimbînd F cu F' și astfel se obțin două puncte ale hiperbolei pe ramura din dreapta.



$d(D, C) = d(A', A)$
Fig. IV. 18

6) Se repetă pașii 3), 4), 5) folosind distanțele de la D la 2, de la C la 2, ... până când se precizează un număr suficient de puncte pentru a putea trasa hiperbola.

Pentru desenarea efectivă se poate ține seama și de faptul că hiperbola nu este „ascuțită” în vecinătatea vîrfurilor, iar tangenta în punctul M al hiperbolei este bisectoarea „interioară” a unghiurilor dreptelor MF' și MF .

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dă hiperbola $H: 2x^2 - 5y^2 - 10 = 0$.

1) Să se determine vîrfurile și asimptotele lui H .

2) Să se scrie ecuațiile parametrice respectiv vectoriale ale ramurilor lui H .

3) Să se găsească ecuația tangentei și ecuația normalei în punctul de coordonate $(\sqrt{10}, \sqrt{2})$.

Soluție. 1) Scriem ecuația lui H sub forma $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} - 1 = 0$. Rezultă $a^2 = 5$, $b^2 = 2$ și deci $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$. Vîrfurile lui H sînt $A'(-\sqrt{5}, 0)$, $A(\sqrt{5}, 0)$. Relația $c^2 = a^2 + b^2$ dă $c^2 = 7$ și deci focarele sînt $F'(-\sqrt{7}, 0)$, $F(\sqrt{7}, 0)$.

Reuniunea asimptotelor lui H are ecuația $2x^2 - 5y^2 = 0$. Explicit cele două asimptote au respectiv ecuațiile $y = \sqrt{\frac{2}{5}}x$, $y = -\sqrt{\frac{2}{5}}x$.

2) Ramura din semiplanul $x \geq \sqrt{5}$ are ecuațiile parametrice $x = \sqrt{5} \operatorname{ch} t$, $y = \sqrt{2} \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$ și ecuația vectorială $\vec{r} = \sqrt{5} \operatorname{ch} t \vec{i} + \sqrt{2} \operatorname{sh} t \vec{j}$.

3) Ecuația carteziană a tangentei se obține prin dedublare: $2\sqrt{10}x - 5\sqrt{2}y - 10 = 0$. Rezultă ecuația normalei: $y - \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}(x - \sqrt{10})$.

2. Pe axa Ox a reperului cartezian xOy se iau punctele M și N astfel încît produsul absciselor lor să fie constanta a^2 . Prin M și N se duc două drepte MP și NP , avînd coeficienții unghiulari egali respectiv cu $\frac{b}{a}$ și $-\frac{b}{a}$, $a, b \in (0, +\infty)$.

Să se afle locul geometric al punctului P .

Soluție. Fie $M(\alpha, 0)$, $N(\beta, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta = a^2$ (1). Rezultă $MP: y = \frac{b}{a}(x - \alpha)$ (2); $NP: y = -\frac{b}{a}(x - \beta)$ (3).

Pentru a scrie ecuația carteziană a locului geometric descris de punctul P , vom elimina parametrii α și β , între relațiile (1), (2), (3).

Ecuațiile (2) și (3) se mai pot scrie astfel $y - \frac{b}{a}x = -\frac{b}{a}\alpha$, $y + \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\beta$. Înmulțind aceste două ecuații membru cu membru și ținînd cont de relația (1), obținem ecuația unei hiperbole

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

3. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ și $C(0, -1)$. O dreaptă variabilă d ce trece prin origine taie pe AB în P și pe AC în Q .

Se cer:

1) coordonatele mijlocului M al segmentului PQ ,

2) locul geometric al lui M cînd dreapta d se rotește în jurul lui Q ,

3) să se determine dreapta d astfel încît $d(O, A) = d(M, A)$.

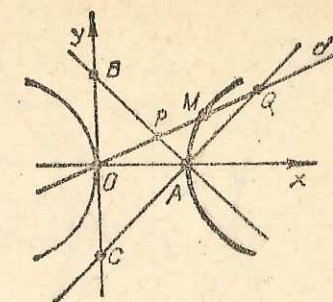


Fig. IV. 19

Soluție (fig. IV. 19). Avem $AB: x + y - 1 = 0$, $AC: x - y - 1 = 0$, $d: ax + by = 0$. Astfel pentru $a - b \neq 0$ găsim $P\left(\frac{-b}{a-b}, \frac{a}{a-b}\right)$ și $Q\left(\frac{b}{a+b}, \frac{-a}{a+b}\right)$ pentru $a \neq b$. Coordonatele lui M sînt

$$x = -\frac{b}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{ab}{a^2 - b^2}.$$

2) Presupunem că a și b sînt variabili. Prin eliminarea lui a și b , între relațiile precedente, găsim ecuația carteziană a locului geometric descris de M și anume $x^2 - y^2 - x = 0$. Această ecuație se poate transcrie în forma

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0.$$

Astfel ea reprezintă o hiperbolă cu centrul în punctul $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, cu vîrfurile $A(1, 0)$, $O(0, 0)$ și cu asimptotele de ecuații $2x - 2y - 1 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.

3) Din $d(O, A) = d(M, A)$ rezultă $\left(\frac{b^2}{a^2 - b^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{ab}{a^2 - b^2}\right)^2 = 1$ sau $b^4 - 3a^2b^2 = 0$. Valoarea $b = 0$ nu convine problemei. Rămîne $b^2 = 3a^2$ adică $b = \pm a\sqrt{3}$. Astfel obținem două drepte care fac cu Ox respectiv unghiurile $\frac{\pi}{6}$ și $\frac{5\pi}{6}$.

4. Se consideră dreptele $d_m: (m^2 + 1)x + 2my + 1 - m^2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

1) Există trei drepte distincte d_{m_1} , d_{m_2} , d_{m_3} care trec printr-un punct dat al planului?

2) Cîte drepte d_m trec printr-un punct dat al planului?

Soluție. 1) Fie

$$\begin{cases} (m_1^2 + 1)x + 2m_1y + 1 - m_1^2 = 0, \\ (m_2^2 + 1)x + 2m_2y + 1 - m_2^2 = 0, \\ (m_3^2 + 1)x + 2m_3y + 1 - m_3^2 = 0 \end{cases}$$

sistemul format cu ecuațiile celor trei drepte distincte d_{m_1} , d_{m_2} , d_{m_3} .

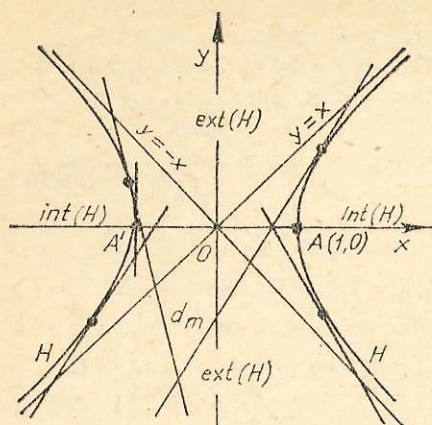


Fig. IV. 20

trece o singură dreaptă d_m , iar prin punctul de coordonate $(1, 0)$ nu trece nici o dreaptă d_m .

Fie $x \neq 1$. Ecuația de gradul doi în m are soluții reale numai dacă $x^2 - y^2 - 1 \leq 0$. Dar ecuația $x^2 - y^2 - 1 = 0$ reprezintă o hiperbolă H . Astfel prin fiecare punct al lui H diferit de punctul de coordonate $(1, 0)$ trece o singură dreaptă d_m , prin fiecare punct al regiunii $\text{ext}(H) = \{(1, y), y \neq 0\}$ trec două drepte distincte, iar prin fiecare punct al regiunii $\text{int}(H)$ nu trece nici o dreaptă.

Evident a doua întrebare o conține pe prima.

Comentariu (fig. IV. 20). 1) Dreptele d_m , $m = \pm 1$, sînt asimptotele hiperbolei H .

2) Fie $M_0(x_0, y_0) \in H$, adică $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$, și $xx_0 - yy_0 - 1 = 0$ ecuația tangentei la H în punctul M_0 . Deoarece $x_0^2 - y_0^2 - 1 = 0$ dacă și numai dacă $\frac{x_0}{m^2 + 1} = \frac{-y_0}{2m} = \frac{-1}{1 - m^2}$, $\forall m \neq \pm 1$ rezultă că toate dreptele d_m , $m \neq \pm 1$ sînt tangente la H .

5. Raportăm planul la reperul cartezian xOy și considerăm dreptele h : $x + y = 0$, k : $x - y = 0$. Să se găsească distanțele de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la dreptele h și k . În ipoteza $x_0^2 - y_0^2 = 1$, să se calculeze limitele acestor distanțe pentru $x_0 \rightarrow \pm\infty$.

Soluție Se obține $d(M_0; h) = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}}$, $d(M_0; k) = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}$.

Relația $x_0^2 - y_0^2 = 1$ se transcrie $y_0 = \pm \sqrt{x_0^2 - 1}$. Rezultă

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \frac{|x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}|}{\sqrt{2}} = \infty,$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} d(M_0; k) = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \frac{|x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1}|}{\sqrt{2}} = \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{2|x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}|} = 0,$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} d(M_0; h) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \frac{|x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}|}{\sqrt{2}} = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2}|x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1}|} = 0,$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} d(M_0; k) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \frac{|x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1}|}{\sqrt{2}} = \infty.$$

Analog se calculează și $\lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} d(M_0; k)$.

Deoarece

$$\begin{vmatrix} m_1^2 + 1 & 2m_1 & 1 - m_1^2 \\ m_2^2 + 1 & 2m_2 & 1 - m_2^2 \\ m_3^2 + 1 & 2m_3 & 1 - m_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} m_1^2 & m_1 & 1 \\ m_2^2 & m_2 & 1 \\ m_3^2 & m_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3) \neq 0$$

(determinant Vandermonde), nu există trei drepte distincte concurente.

2) Se observă că $d_m: m^2(x-1) + 2my + x + 1 = 0$. Fie $x = 1$; atunci ecuația în m este de gradul unu, $my + 1 = 0$. De aceea prin fiecare punct de coordonate $(1, y)$, $y \neq 0$

§ 4. Parabola

Fie h o dreaptă din plan și F un punct care nu aparține lui h .

Definiție. Mulțimea P a punctelor M cu proprietatea

$$d(M; h) = d(M, F)$$

se numește parabolă.

Punctul F se numește *focarul parabolei*, iar dreapta h se numește *directoarea parabolei*. Parabola nu este vidă: fie $B \in h$, un punct fixat, fie k perpendiculara în B pe h și l mediatoarea segmentului $[BF]$; notind $\{M\} = k \cap l$ rezultă $M \in P$.

Fie A proiecția lui F pe h . Dreapta AF este *axă de simetrie* pentru parabola P . Numărul $p = d(A, F) > 0$ se numește *parametrul parabolei*. Notind cu O mijlocul segmentului $[AF]$ și alegind reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ ca în figura 21 avem

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right), h: x = -\frac{p}{2}, A\left(-\frac{p}{2}, 0\right).$$

Teoremă. Punctul $M(x, y)$ aparține parabolei P dacă și numai dacă

$$y^2 = 2px.$$

Demonstrație. $M \in P \Leftrightarrow d(M; h) = d(M, F) \Leftrightarrow d^2(M; h) = d^2(M, F) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Deci $P = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = 2px\}$ sau $P: y^2 = 2px$. Ecuația $y^2 = 2px$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se numește *ecuația carteziană implicită a parabolei*. Aceasta este echivalentă cu *ecuațiile parametrice*

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

sau cu ecuația vectorială

$$\vec{r} = \frac{t^2}{2p} \vec{i} + t \vec{j}, t \in \mathbb{R}.$$

Axa Ox taie parabola în punctul $O(0, 0)$ numit *virful parabolei*. De aceea Ox se numește *axă transversă*. Axa Oy este *netransversă*.

Fie parabola P de ecuație

$$y^2 = 2px, x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2px} \\ \text{sau} \\ y = -\sqrt{2px} \end{cases}, x \geq 0.$$

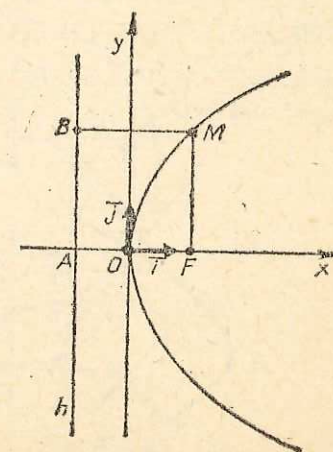


Fig. IV. 21

Ecuatia $y = \sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în primul cadran, $x \geq 0, y \geq 0$, iar ecuația $y = -\sqrt{2px}$ reprezintă porțiunea din parabolă cuprinsă în cadranul patru, $x \geq 0, y \leq 0$. Acestea se numesc *ecuații carteziane explicite*.

Dacă notăm cu P_1 și P_2 graficele funcțiilor derivabile

$$x \rightarrow \sqrt{2px}, \quad x \rightarrow -\sqrt{2px}$$

definite respectiv pe $(0, \infty)$, atunci se observă că

$$P = P_1 \cup \{(0, 0)\} \cup P_2$$

și deci parabola are alura din figura IV. 21.

Fie $M_0(x_0, y_0) \in P$. Împrumutînd procedeul de la elipsă se poate arăta (temă!) că parabola P are în fiecare punct M_0 o tangentă de ecuație

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

(dedublata ecuației parabolei în punctul $M_0(x_0, y_0)$). Dreapta care trece prin M_0 și este perpendiculară pe tangentă se numește *normala parabolei* în punctul M_0 (fig. IV. 22).

Temă. Fie $M_0(x_0, y_0) \in P$, fie B proiecția lui M pe directoarea h și F focarul lui P . Să se verifice următoarele proprietăți:

- 1) Tangenta la P în M_0 este mediatoarea segmentului $[BF]$.
- 2) Tangenta la P în M_0 este bisectoarea unghiului $(\widehat{M_0F}, \widehat{M_0B})$.
- 3) Proiecția ortogonală a focarului pe tangentă în M_0 aparține tangentei în vîrf.
- 4) Simetricul focarului în raport cu tangentă în M_0 aparține directoarei.

Parabola P împarte planul în două submulțimi disjuncte (fig. IV. 23): interiorul lui P notat $\text{int}(P)$ și exteriorul lui P notat $\text{ext}(P)$. Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcției $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = y^2 - 2px$. Anume $\text{int}(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) < 0\}$, $P = \{M(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$, $\text{ext}(P) = \{M(x, y) \mid f(x, y) > 0\}$.

$$\text{int}(P) \cap \text{ext}(P) = \emptyset, \quad \text{int}(P) \cup P \cup \text{ext}(P) = p.$$

Mulțimile $\text{int}(P)$ și $\text{int}(P) \cup P$ sînt convexe și conțin focarul F . Directoarea parabolei este conținută în $\text{ext}(P)$.

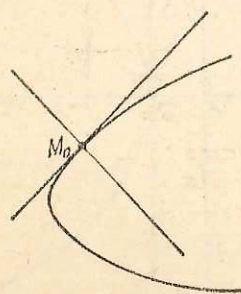


Fig. IV. 22

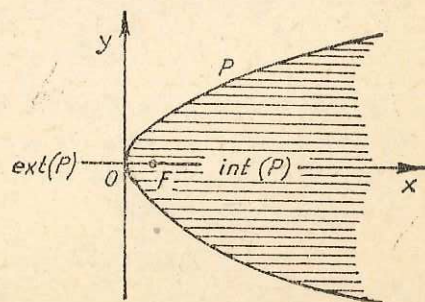


Fig. IV. 23

Construcția parabolei prin puncte (fig. IV. 24). Presupunem că se dau focarul F și directoarea h .

- 1) Se localizează focarul F și directoarea h .
- 2) Se desenează dreptele 1, 2, 3, ... paralele cu directoarea.
- 3) Se ia în compas distanța de la directoarea h la dreapta 1. Cu vîrfurile compasului în focar, se trasează două arce de cerc care intersectează dreapta 1. Astfel se obțin două puncte ale parabolei.
- 4) Se repetă pasul 3) pentru dreptele 2, 3, ...
- 5) După determinarea unui număr suficient de puncte, se desenează parabola ținîndu-se seama că vîrfurile O este la jumătatea distanței dintre h și F , iar tangentă în fiecare punct M de pe parabolă este bisectoarea unghiului $\widehat{FMB}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Într-un reper cartezian xOy se dau punctul $A(1, 0)$ și dreapta $d: x + 1 = 0$.

- 1) Să se găsească ecuația cercurilor C care trec prin A și cu centrele pe dreapta d .
- 2) Un cerc C taie dreapta d în punctele P și Q . Tangentele la C în P și Q întîlnesc tangentă la C în A respectiv în punctele M și N . Să se găsească locul geometric al punctelor M și N .

Soluție (fig. IV. 25). Fie $R(-1, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, centrul cercului variabil C . Raza acestui cerc este $d(R, A) = \sqrt{4 + \lambda^2}$. Rezultă $C_\lambda: (x + 1)^2 + (y - \lambda)^2 = 4 + \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Raza minimă a cercurilor C_λ este 2 și se obține pentru $\lambda = 0$.

2) Se observă că $d(M, A) = d(M, P)$, $d(N, A) = d(N, Q)$, $MP \perp d$, $NQ \perp d$. Deci $d(M, A) = d(M, d)$, $d(N, A) = d(N, d)$, adică M și N aparțin parabolei de focar A și directoare d . Se observă însă că vîrfurile parabolei nu convine problemei.

Notă. Rezolvarea pur analitică a acestei probleme cere prea multe calcule și precauții.

2. Prin focarul F al unei parabole $P: y^2 = 2px$ se duc două drepte variabile perpendiculare, care intersectează directoarea parabolei în punctele M_1 și M_2 . Paralele duse prin M_1 și M_2 la axa parabolei taie curbă P în punctele N_1 și N_2 . Să se arate că punctele N_1, N_2 și F sînt coliniare.

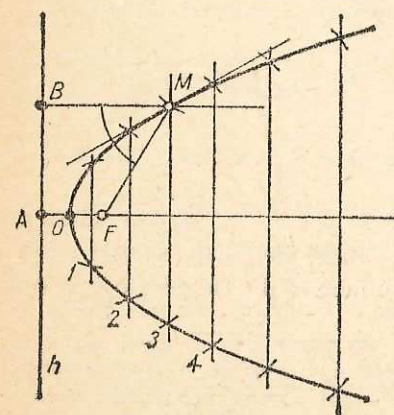


Fig. IV. 24

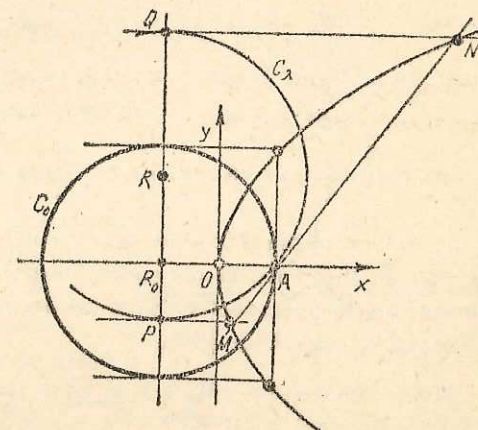


Fig. IV. 25

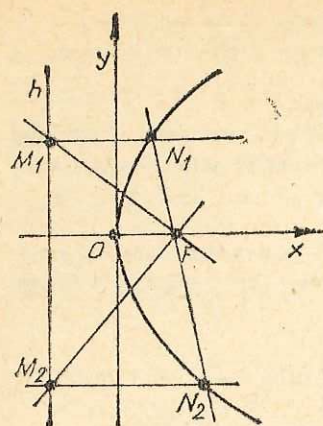


Fig. IV. 26

Soluție (fig. IV. 26). Focarul parabolei $P: y^2 = 2px$ este punctul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, iar directoarei h îi corespunde ecuația $x = -\frac{p}{2}$. Fie dreptele perpendiculare $d: y =$

$= m\left(x - \frac{p}{2}\right)$, $d': y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, cu $m \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\{M_1\} = d \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = m\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1\left(-\frac{p}{2}, -pm\right).$$

$$\{M_2\} = d' \cap h \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow M_2\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{m}\right).$$

Paralelele duse prin M_1 și M_2 la axa parabolei au respectiv ecuațiile $y = -pm$ și $y = \frac{p}{m}$. Coordonatele punctelor N_1 și N_2 sînt soluțiile următoarelor sisteme de ecuații

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = -pm \end{cases} \text{ și } \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \frac{p}{m} \end{cases}.$$

Rezolvînd aceste sisteme, obținem

$$N_1\left(\frac{pm^2}{2}, -pm\right), N_2\left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right).$$

Coordonatele punctelor N_1 , N_2 și F verifică condiția de coliniaritate a trei puncte, adică

$$\begin{vmatrix} \frac{pm^2}{2} & -pm & 1 \\ \frac{p}{2m^2} & \frac{p}{m} & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2}{2} \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2}{2} \cdot 0 = 0.$$

3. Fie parabola $P: y^2 = 4ax$ cu directoarea $h: x = -a$. Se consideră o pereche de tangente la parabolă, perpendiculare între ele, și se notează cu M punctul lor de intersecție. Să se arate că dacă punctele de tangență descriu parabola, atunci $h = \{M\}$.

Soluție. Incluziunea $\{M\} \subseteq h$ se arată fără dificultate: tangentele la P în punctele $(at^2, 2at)$, $(as^2, 2as)$ au ecuațiile $yt = x + at^2$, $ys = x + as^2$, sînt perpendiculare numai dacă $st = -1$, și deci se intersectează într-un punct de abscisă $x = ast = -a$.

Pentru $h \subseteq \{M\}$ trebuie să arătăm că dacă $N \in h$ atunci (1) există exact două tangente la parabolă ce trec prin N și (2) ele sînt perpendiculare: punctul $N(-a, r)$ se află pe o tangentă $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încît $at^2 - rt - a = 0$; deoarece $a \neq 0$ și $r^2 + 4a^2 > 0$ există două astfel de numere (deci (1) este dovedită) al căror produs este -1 (deci (2) este dovedită).

Relațiile $\{M\} \subseteq h$, $h \subseteq \{M\}$ sînt echivalente cu $M = h$.

Notă. Problema precedentă putea fi formulată astfel: să se găsească locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente la parabola P , perpendiculare între ele. Am preferat însă enunțul inițial pentru a pune încă o dată în evidență faptul că determinarea locurilor geometrice impune dovedirea a două incluziuni.

4. Să se arate că trei tangente distincte la parabola $P: y^2 = 2px$ determină un triunghi al cărui ortocentru aparține directoarei parabolei.

Soluție. Fie parabola $P: y^2 = 2px$ și trei puncte diferite $T_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, situate pe parabola P , deci $y_i^2 = 2px_i$, $i = 1, 2, 3$.

Ecuațiile celor trei tangente sînt

$$d_1: 2px - 2y_1y + y_1^2 = 0,$$

$$d_2: 2px - 2y_2y + y_2^2 = 0,$$

$$d_3: 2px - 2y_3y + y_3^2 = 0.$$

Ecuația înălțimii triunghiului, corespunzătoare laturii d_1 este

$$2py_1x + 2p^2y - p^2(y_2 + y_3) - y_1y_2y_3 = 0.$$

Intersectînd această înălțime cu directoarea $h: x = -\frac{p}{2}$, obținem punctul M , de coordonate

$$x = -\frac{p}{2}, y = \frac{y_1y_2y_3 + p^2(y_1 + y_2 + y_3)}{2p^2}.$$

Ordonata y a punctului M , fiind o expresie simetrică în y_1, y_2, y_3 , rezultă că ortocentru triunghiului $M_1M_2M_3$ este situat pe directoarea h .

5. Se dă familia de funcții $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$, unde a este un parametru real. Să se determine mulțimea tuturor punctelor critice ale funcțiilor f_a . Să se stabilească tipul punctelor critice.

Soluție. Deoarece $\frac{df_a}{dx}(x) = x^2 + a$, mulțimea căutată este parabola $P: x^2 + a = 0$

din planul xOa (fig. IV. 27). Pe de altă parte observăm că

$\frac{d^2f_a}{dx^2}(x) = 2x$. De aceea punctele de abscise $x = -$

$-\sqrt{-a} < 0$ sînt puncte de maxim, punctul $x = 0$

este un punct de inflexiune, iar punctele de abscise

$x = \sqrt{-a} > 0$ sînt puncte de minim. Varia-

tele pentru graficele funcțiilor f_a sînt date în

figura IV. 28.

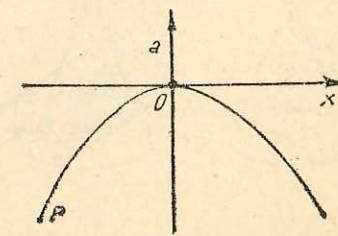


Fig. IV. 27

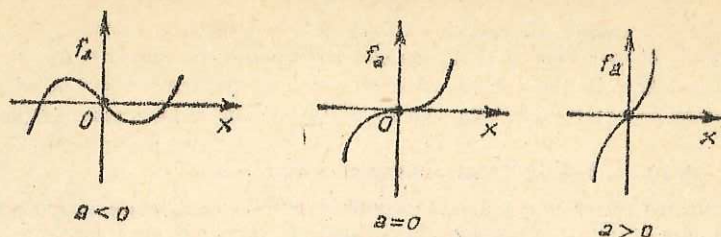


Fig. IV. 28

§ 5. Conice

Curbele de intersecție dintre un con de rotație de axă h și generatoarea g cu un plan p sînt de următoarele tipuri (fig. IV. 29):

- 1) cerc sau punct, dacă $p \perp h$;
- 2) elipsă sau punct, dacă $(p, h) > (g, h)$;
- 3) parabolă sau pereche de drepte confundate, dacă $(p, h) = (g, h)$;
- 4) hiperbolă sau pereche de drepte, dacă $0^\circ \leq (p, h) < (g, h)$.

Toate aceste curbe poartă numele de *conice* și sînt caracterizate prin ecuații de gradul doi în x și y , unde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De aceea apare natural să se pună problema generală a cercetării mulțimilor de puncte, din plan, ale căror coordonate constituie soluțiile unei ecuații de gradul doi în $\mathbb{R}^2$.

Fie funcția polinomială

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00},$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Definiție. Mulțimea

$$\Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$$

se numește curbă algebrică de ordinul al doilea sau conică. Pe scurt se notează $\Gamma: g(x, y) = 0$.

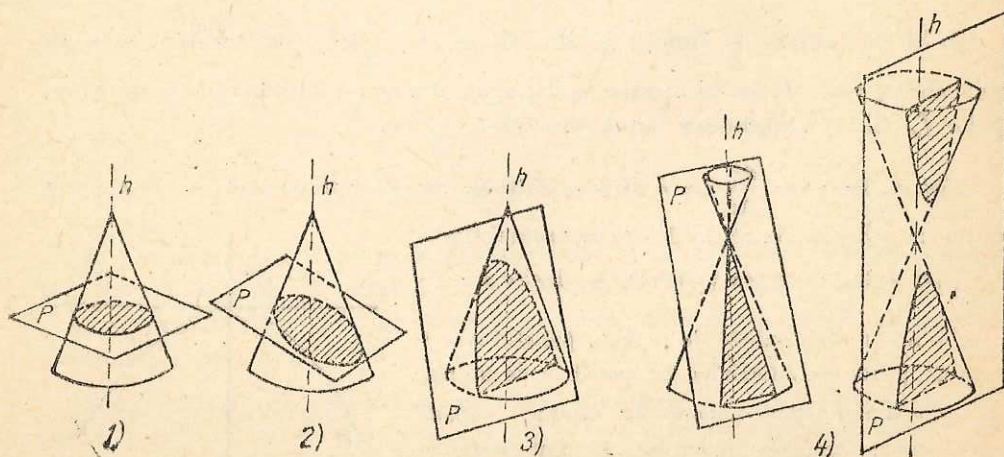


Fig. IV. 29

Teoremă. Mulțimea Γ este congruentă cu una dintre mulțimile din figura IV. 30.

Demonstrație. Subliniem că enunțul teoremei este echivalent cu fiecare dintre afirmațiile următoare:

1) Γ este fie un cerc (fig. IV.30.1), o elipsă (fig. IV. 30.2), o hiperbolă (fig. IV. 30.3), o parabolă (fig. IV. 30.4), o reuniune de drepte (fig. IV. 30.5, 6, 7), o mulțime care conține un singur punct (fig. IV. 30.8), fie mulțimea vidă (fig. IV. 30.9).

2) orice ecuație de tipul $g(x, y) = 0$ poate fi redusă la una dintre ecuațiile canonice scrise în figura IV. 30.

Cazul cînd Γ reprezintă un cerc ($a_{12} = 0, a_{11} = a_{22} \neq 0$) este cunoscut din §1. De altfel cercul poate fi privit ca o elipsă particulară. De aceea acest caz este lăsat deoparte.

Notăm

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$$

a) Presupunem $a_{12} = 0$. Dacă $\delta \neq 0$, atunci ecuația $g(x, y) = 0$ este echivalentă cu

$$a_{11} \left(x + \frac{a_{10}}{a_{11}} \right)^2 + a_{22} \left(y + \frac{a_{20}}{a_{22}} \right)^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

și translația

$$\mathcal{S}: x' = x + \frac{a_{10}}{a_{11}}, y' = y + \frac{a_{20}}{a_{22}}$$

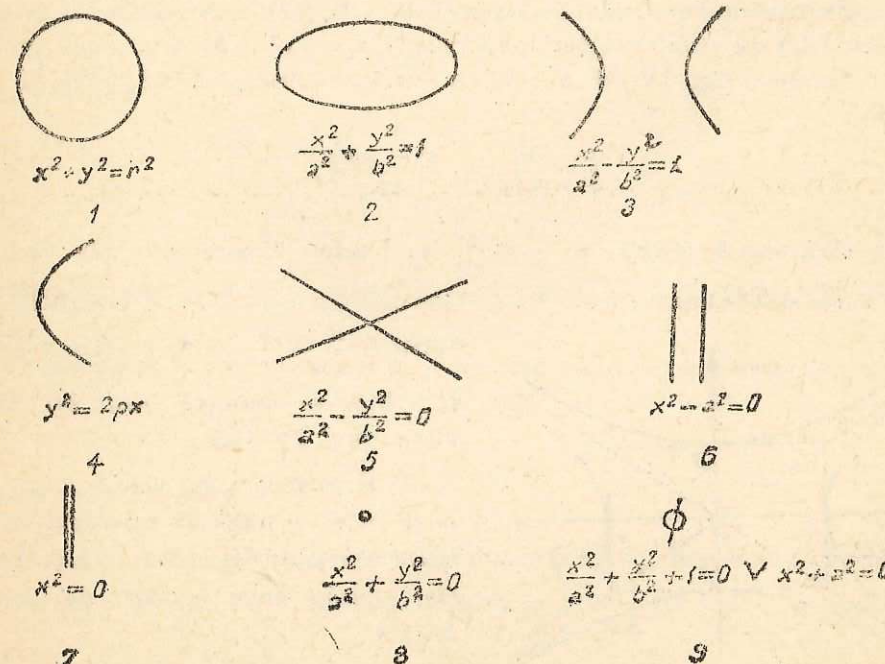


Fig. IV. 30

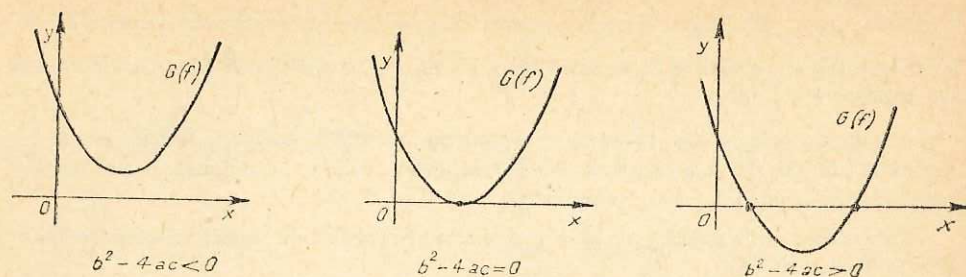


Fig. IV. 31

justifică teorema. Dacă $\delta = 0$, de exemplu $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, atunci ecuația $g(x, y) = 0$ este echivalentă cu

$$a_{22} \left(y + \frac{2a_{20}}{a_{22}} \right)^2 + 2a_{10}x + a_{00} - \frac{4a_{20}^2}{a_{22}} = 0$$

și teorema devine evidentă.

b) Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci unghiul θ determinat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12}$, $\cos 2\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, determină o rotație în plan

$$\mathbb{A} : \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

astfel încât în ecuația $g'(x', y') = (g \circ \mathbb{A})(x', y') = 0$ coeficientul produsului $x'y'$ se anulează. Într-adevăr, coeficientul respectiv este $2a_{12} = (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta$. Astfel cazul $a_{12} \neq 0$ se reduce la cazul $a_{12} = 0$.

Cazuri particulare

1) Fie trinomul de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Graficul $G(f)$ are ecuația carteziană explicită $y = ax^2 + bx + c$. Acest grafic este o parabolă (fig. IV. 31, $a > 0$) cu axa transversă paralelă cu Oy și cu vârful

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right).$$

2) Mulțimea de ecuație $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este o hiperbolă cu Oy ca axă transversă și Ox ca axă netransversă având aceleași asimptote cu hiperbola de

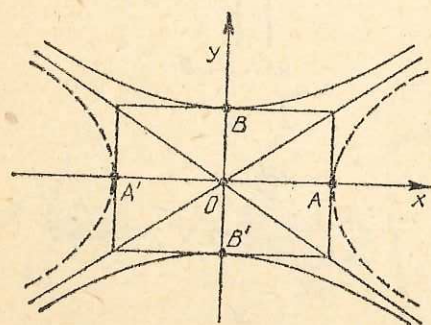


Fig. IV. 32

ecuație $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Aceste două hiperbole se numesc *conjugate* una alteia (fig. IV. 32).

3) Hiperbola de ecuație $x^2 - y^2 = a^2$ se numește *hiperbolă echilaterală*. Asimptotele acestei hiperbole sînt bisectoarele axelor de coordonate,

$$y = -x \text{ și } y = x.$$

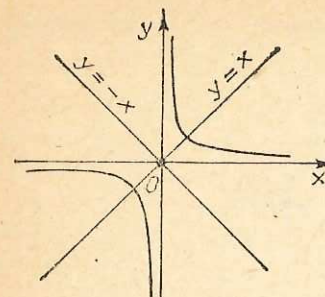


Fig. IV. 33

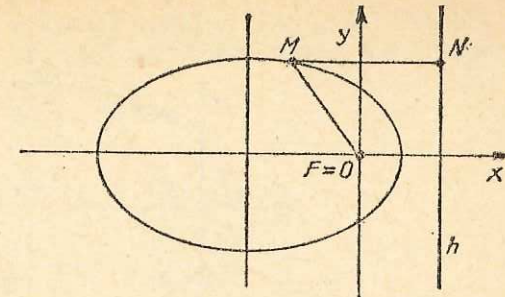


Fig. IV. 34

Fie conica $\Gamma: xy = m^2$. Rotația $\mathcal{R}: x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ pune în evidență că Γ este o hiperbolă echilaterală de ecuație canonică $x'^2 - y'^2 = 2m^2$. Asimptotele lui Γ sînt axele de coordonate Ox și Oy , iar axele de simetrie sînt bisectoarele axelor de coordonate (fig. IV. 33).

Definiția comună a elipsei, hiperbolei și parabolei. Fie F un punct fix numit *focar*, h o dreaptă fixă care nu trece prin F , numită *directoare*, și $e \in (0, \infty)$ un număr numit *excentricitate*. Locul geometric al punctelor M cu proprietatea

$$\frac{d(M, F)}{d(M, h)} = e$$

este o elipsă în cazul $e \in (0, 1)$, o parabolă pentru $e = 1$ sau o hiperbolă în cazul $e \in (1, \infty)$.

Să explicităm cazul $e \in (0, 1)$. Pentru simplificarea calculelor fixăm reperul cartezian, astfel încît Ox să fie perpendiculară pe h și $F = O$ (fig. IV. 34). Deci $F(0, 0)$, $h: x = \alpha > 0$. Dacă M are coordonatele (x, y) , atunci relația precedentă este echivalentă cu ecuația

$$x^2 + y^2 = e^2(x - \alpha)^2,$$

sau altfel scris

$$\left(x + \frac{r^2}{\alpha} \right)^2 + \frac{y^2}{r} - 1 = 0, \quad r = \frac{\alpha^2 e^2}{1 - e^2}.$$

Aceasta împreună cu translația definită prin $x' = x + \frac{r}{\alpha}$, $y' = y$ pun în evidență că în cazul $e \in (0, 1)$ locul geometric este o elipsă.

Cazul parabolei a fost prezentat în §4, iar cazul $e \in (1, \infty)$ se tratează după modelul precedent.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție a parabolilor de ecuații $y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m$, $y = x^2 - \frac{3}{2}px + p^2 + p$, dacă $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = 1$.

Soluție. Pentru găsirea ecuației carteziene a locului geometric trebuie să eliminăm parametrii m și p între următoarele ecuații

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{3}{2}mx + m^2 + m, \\ y = x^2 - \frac{3}{2}px + p^2 + p, \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{mp} = 1. \end{cases}$$

Scăzând primele două egalități, obținem

$$\left(\frac{3}{2}x - m - p - 1\right)(p - m) = 0.$$

Dacă $p = m$, atunci din ultima ecuație deducem $m^2 - 2m - 1 = 0$ sau $m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; locul geometric căutat este reuniunea parabolilor de ecuații $y = x^2 - \frac{3}{2}m_{1,2}x + m_{1,2}^2 + m_{1,2}$.

Dacă $\frac{3}{2}x = m + p + 1$, atunci $y = x^2 - mp$. Transcriind ultima ecuație în forma $m + p + 1 = mp$ și eliminând pe $m + p + 1$ și mp , găsim ecuația $\frac{3}{2}x = x^2 - y$, care reprezintă o parabolă cu axa $x = \frac{3}{4}$, și tangenta în vîrf $y = -\frac{9}{16}$.

2. Să se traseze graficele următoarelor funcții

1) $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \sqrt{x+1}$,

2) $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)}$,

3) $f_3: D_3 \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

Soluție.

$$D_1 = [-1, +\infty), y = f_1(x)$$

este ecuația graficului. Echivalența

$$y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow y^2 = x+1, x \in [-1, +\infty),$$

$$y \in [0, +\infty),$$

arată că graficul lui f_1 este arcul de parabolă din figura IV. 35.

2) $D_2 = [-1, 5], y = f_2(x)$ ecuația graficului.

Echivalența

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)} \Leftrightarrow$$

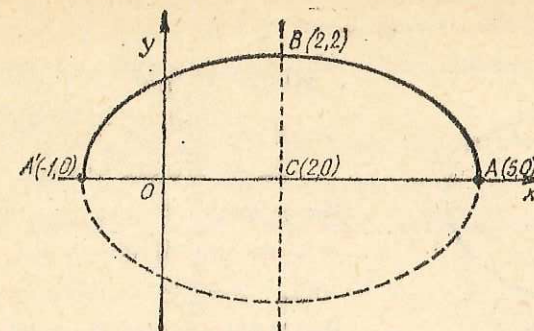


Fig. IV. 36

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{9}[9 - (x-2)^2], x \in [-1, 5],$$

$$y \in [0, 2] \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

$x \in [-1, 5], y \in [0, 2]$ arată că graficul lui f_2 este arcul de eclipsă din figura IV. 36.

3) $D_3 = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty), y = f_3(x)$ ecuația graficului. Echivalența $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 3} \Leftrightarrow y^2 =$

$$= \frac{9}{16}[(x-1)^2 - 4], x \in (-\infty, -1] \cup$$

$$[3, +\infty), y \in [0, +\infty) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} -$$

$$-\frac{y^2}{4} = 1, x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty),$$

$y \in [0, +\infty)$ pune în evidență că graficul lui f_3 este o parte dintr-o hiperbolă (fig. IV. 37).

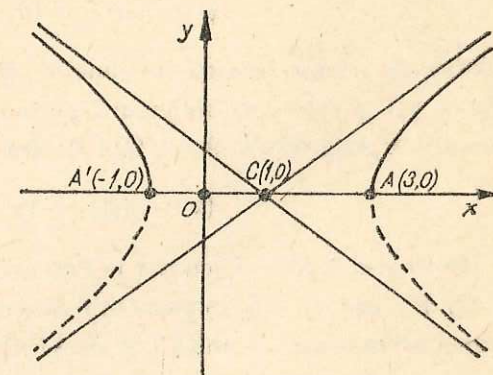


Fig. IV. 37

§ 6. Intersecția dintre o dreaptă și o conică

Fie dreapta $d: x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbb{R}$ și conica $\Gamma: g(x, y) = 0$.

Teoremă. Intersecția

$d \cap \Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbb{R}, g(x, y) = 0\}$ este caracterizată de rădăcinile în $\mathbb{R}$ ale ecuației

$$t^2\varphi(u, v) + t(ug_{x_0} + vg_{y_0}) + g(x_0, y_0) = 0,$$

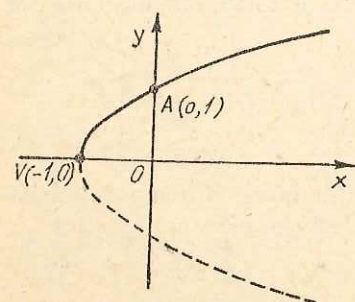


Fig. IV. 35

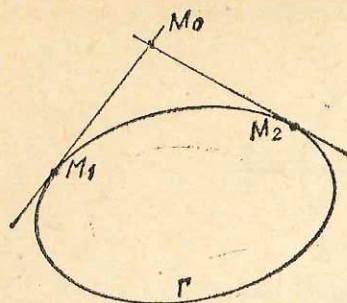


Fig. IV. 38

unde

$$\varphi(u, v) = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2,$$

$$g_{x_0} = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}),$$

$$g_{y_0} = 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}).$$

Demonstrație. 1) Fie $\varphi(u, v) \neq 0$. Ecuația în t este de gradul doi și are discriminantul $q = (ug_{x_0} + vg_{y_0})^2 - 4\varphi(u, v)g(x_0, y_0)$. Dacă $q > 0$, atunci ecuația în t are două rădăcini reale distincte t_1, t_2 și deci $d \cap \Gamma = \{M_1, M_2\}$.

Dacă $q = 0$, atunci ecuația în t are două rădăcini reale egale $t_1 = t_2$. În acest caz $d \cap \Gamma = \{M_1\}$, iar dreapta d se numește *tangentă* la Γ în punctul M_1 . Evident, din orice punct $M_0(x_0, y_0)$ se pot duce cel mult două tangente la Γ (fig. IV. 38). În particular, cînd $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$, adică $g(x_0, y_0) = 0$, și g_{x_0}, g_{y_0} nu se anulează simultan, observăm că tangenta la Γ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ are ecuația (fig. IV. 4, 9, 16, 22)

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = 0,$$

(dedublata ecuației conice în punctul $M_0(x_0, y_0)$). Dreapta care trece prin $M_0(x_0, y_0)$, și este perpendiculară pe tangentă, se numește *normală* lui Γ în punctul M_0 (fig. IV. 4, 9, 16, 22). Ea are ecuația

$$(x - x_0)g_{y_0} - (y - y_0)g_{x_0} = 0.$$

Dacă $q < 0$, atunci ecuația în t nu are soluții și deci $d \cap \Gamma = \emptyset$.

2) Fie $\varphi(u, v) = 0$. Ecuația în t este de gradul întâi. Dacă $ug_{x_0} + vg_{y_0} \neq 0$, atunci avem o soluție unică t_1 și deci $d \cap \Gamma = \{M_1\}$. Dacă $ug_{x_0} + vg_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) \neq 0$, atunci ecuația în t este o imposibilitate și deci $d \cap \Gamma = \emptyset$. Dacă $ug_{x_0} + vg_{y_0} = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$, ecuația este identic satisfăcută și deci

$$d \subseteq \Gamma, \text{ de unde } d \cap \Gamma = d.$$

Fie Γ o conică oarecare. O direcție $\bar{a}(u, v)$ se numește *direcție asimptotică* pentru Γ dacă

$$\varphi(u, v) = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 = 0,$$

în $\mathbb{R}^2$. Evident, o dreaptă care are o asemenea direcție aparține lui Γ sau taie pe Γ într-un singur punct sau nu taie pe Γ .

Fie $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Dacă $\delta < 0$ (conice de *gen hiperbolic*), atunci ecuația $\varphi(u, v) = 0$ dă două direcții asimptotice. Dacă $\delta > 0$ (conice de *gen eliptic*),

atunci ecuația $\varphi(u, v) = 0$ nu are soluții nebanale, adică nu există direcții asimptotice. Dacă $\delta = 0$ (conice de *gen parabolic*), atunci ecuația $\varphi(u, v) = 0$ dă o direcție asimptotică dublă.

O dreaptă $d: x = x_0 + ut, y = y_0 + vt, t \in \mathbb{R}$ se numește *asimptotă* conicei Γ , dacă direcția ei (u, v) este o direcție asimptotică și $d \cap \Gamma = \emptyset$. Se observă că o asimptotă a conicei Γ este caracterizată prin ecuația

$$ug_{x_0} + vg_{y_0} = 0,$$

unde (u, v) este o direcție asimptotică și $g_{x_0} = 0, g_{y_0} = 0$ nu implică $g(x_0, y_0) = 0$.

În concluzie, hiperbola admite două asimptote care trec prin centrul conicei, elipsa nu admite direcții asimptotice și nici asimptote, iar parabola admite o direcție asimptotică, dar nu admite asimptotă (ecuația $ug_{x_0} + vg_{y_0} = 0$ este o imposibilitate).

Observație. Pentru graficele funcțiilor reale, noțiunea generală de asimptotă este dată în manualul de Analiză matematică.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau punctul $O(0,0)$, dreapta $d: x + y - 1 = 0$ și conica

$$\Gamma: x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0.$$

Se cer:

- 1) tangentele din O la Γ ,
- 2) ecuația reuniunii $d \cup \Gamma$,
- 3) elementele mulțimii $d \cap \Gamma$,
- 4) asimptotele lui Γ ,
- 5) ecuația tangentei și ecuația normalei la Γ în $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Soluție. 1) Se observă că axa Oy nu este tangentă la Γ . Orice altă dreaptă care trece prin origine are ecuația $y = mx$. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} y = mx, \\ x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $(1 + 2m)x^2 + 2(1 + 2m)x - 2 = 0$ și evident $1 + 2m \neq 0$. Punînd condiția ca această ecuație să aibă rădăcină dublă găsim $(1 + 2m)^2 - 2(1 + 2m) = 0$, adică $m = \frac{1}{2}$. Astfel din $O(0, 0)$ se poate duce o singură tangentă la Γ și anume dreapta de

$$\text{ecuație } y = \frac{1}{2}x.$$

2) Reuniunea $d \cup \Gamma$ are ecuația

$$(x + y - 1)(x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2) = 0.$$

3) Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + 2x + 4y - 2 = 0, \end{cases}$$

găsim soluțiile $(2, 1 - \sqrt{2})$, $(-2, 1 + \sqrt{2})$. Acestea constituie coordonatele punctelor din $d \cap \Gamma$.

4) Direcțiile (u, v) ale celor două asimptote sînt date de ecuația $u^2 + 2uv = 0$. Rezultă $u = 0$ și $u + 2v = 0$. Astfel găsim direcțiile $(0, v)$ și $(-2, 1)$. Deci

$$0 \cdot (x + y + 1) + v(x + 2) = 0, \quad v \neq 0,$$

respectiv,

$$-2(x + y + 1) + 1 \cdot (x + 2) = 0.$$

Aceasta înseamnă că asimptotele lui Γ au, respectiv, ecuațiile $x + 2 = 0$ și $x + 2y = 0$; deci Γ este o hiperbolă.

5) Prin dedublare găsim ecuația tangentei,

$$x \cdot 0 + \left(0 \cdot y + \frac{1}{2}x\right) + (x + 0) + 2\left(y + \frac{1}{2}\right) - 2 = 0,$$

adică $3x + 4y - 2 = 0$. Panta acestei drepte este $-\frac{3}{4}$, iar panta normalei este $\frac{4}{3}$.

De aceea normala în B la Γ are ecuația $y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}x$.

2. Fie E o elipsă raportată la axe, A, A' virfurile sale de pe Ox , iar B, B' cele de pe Oy și P un punct oarecare al elipsei.

1) Să se arate că dreapta determinată de punctele de intersecție ale cercurilor circumscrise triunghiurilor PAA' și PBB' este tangentă în P la E .

2) Fie P_1, P_2 simetricile lui P față de centrele celor două cercuri. Să se arate că dreapta P_1P_2 trece printr-un punct fix.

3) Să se găsească locul geometric al simetricului punctului P față de centrul cercului circumscris triunghiului PAA' , cînd $P \in E$.

Soluție. 1) Cercurile care trec prin două puncte au centrele pe mediatoarea segmentului care unește aceste puncte.

Ecuația canonică a elipsei este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. De aceea P are coordonatele $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi)$.

Deoarece $A'(-a, 0), A(a, 0)$ sînt simetrice față de Oy , rezultă că cercurile care trec prin A' și A au ecuații de forma $x^2 + (y - v)^2 = a^2 + v^2$, adică $x^2 + y^2 - 2vy = a^2$. Un asemenea cerc trece prin P numai dacă $a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t - 2vb \sin t = a^2$, adică

$$2v = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin t.$$

Analog, cercul care trece prin punctele $P, B'(0, -b), B(0, b)$ are ecuația $x^2 + y^2 - 2ux = b^2$, cu condiția $a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t - 2ua \cos t = b^2$, adică $2u = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos t$.

Ecuația dreptei ce trece prin punctele de intersecție ale celor două cercuri se obține scăzînd, membru cu membru, ecuațiile cercurilor; găsim $2ux + 2vy = a^2 - b^2$ cu condițiile $2u = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos t, 2v = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin t$. Înlocuind pe $2u$ și $2v$, simplificînd cu $a^2 - b^2$, deducem $\frac{x \cos t}{a} + \frac{y \sin t}{b} = 1$, iar aceasta este ecuația tangentei la E în P , obținută prin dedublare.

2) Cercul PAA' are centrul $O_1(0, v = \frac{b^2 - a^2}{2b} \sin t)$, iar cercul PBB' are centrul

$$O_2(u = \frac{a^2 - b^2}{2a} \cos t, 0).$$

De aceea simetricile lui $P(a \cos t, b \sin t)$ față de O_1 și O_2 sînt, respectiv,

$$P_1\left(-a \cos t, -\frac{a^2}{b} \sin t\right), P_2\left(-\frac{b^2}{a} \cos t, -b \sin t\right).$$

Dreapta P_1P_2 are ecuația

$$\frac{x + a \cos t}{\frac{\cos t}{a}} = \frac{y + \frac{a^2}{b} \sin t}{\frac{\sin t}{b}},$$

adică $ax \sin t - by \cos t = 0$. Aceasta trece prin origine.

3) Locul geometric al punctului $P_1\left(-a \cos t, -\frac{a^2}{b} \sin t\right)$ are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = -a \cos t \\ y = -\frac{a^2}{b} \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

sau ecuația carteziană implicită

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y^2}{a^4} = 1.$$

Aceasta este însă o elipsă.

§ 7. Intersecția a două conice

Fie conicele $\Gamma_1: g(x, y) = 0$ și $\Gamma_2: h(x, y) = 0$. Intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ este caracterizată prin sistemul

$$\begin{cases} g(x, y) = 0, \\ h(x, y) = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Deoarece fiecare dintre ecuațiile acestui sistem are gradul doi, intersecția $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține cel mult patru puncte.

Presupunem că Γ_1 este cercul de ecuație (1) $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$, iar Γ_2 este cercul de ecuație (2) $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$. Coordonatele punctelor comune trebuie să verifice ambele ecuații, deci și ecuația obținută prin scăderea lor,

$$(3) \quad 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0.$$

Această ecuație reprezintă o dreaptă perpendiculară pe dreapta care unește centrele celor două cercuri și se numește *axa radicală* a celor două cercuri. Sistemul format din ecuațiile (1) și (2) este echivalent cu sistemul format de ecuațiile (1) și (3) sau cu cel format de ecuațiile (2) și (3).

PROBLEME REZOLVATE

1. Se dau hiperbolele $\Gamma_1: x^2 + 2xy - y^2 = 1$, $\Gamma_2: -x^2 + 2xy + y^2 = 1$. Să se determine $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Soluție. Problema se reduce la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = 1, \\ -x^2 + 2xy + y^2 = 1, \end{cases}$$

în $\mathbb{R}^2$. Scăzând cele două ecuații rezultă $x^2 - y^2 = 0$. Astfel sistemul inițial este echivalent cu

$$\begin{cases} (x - y)(x + y) = 0, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

Din $x = y$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ deducem soluțiile $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, iar $x + y = 0$ și $x^2 + 2xy - y^2 = 1$ nu au soluții comune. În concluzie, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ conține punctele de coordonate $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ și $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. Se cer punctele comune ale cercurilor $C_1: x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ și $C_2: x^2 + y^2 + y - 2 = 0$.

Soluție. Sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

este echivalent cu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0, \\ 3x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

Rezultă $A(0, -2)$, $B\left(-\frac{9}{10}, \frac{7}{10}\right)$.

3. Se consideră ecuația matriceală

$$A^2 + A = aI, \quad a \in \mathbb{R}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

Să se rezolve ecuația în cazul când toate soluțiile sînt reale.

Soluție. Ecuația devine

$$\begin{bmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \text{ sau } \begin{cases} x^2 - y^2 + x - a = 0 \\ y(2x + 1) = 0. \end{cases}$$

(i) Sistemul $x = -\frac{1}{2}$, $y^2 = -a - \frac{1}{4}$ admite soluții reale dacă $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$.

(ii) Sistemul $y = 0$, $x^2 + x - a = 0$, admite soluții reale dacă $a \in \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$.

Observăm că ambele sisteme admit soluții reale numai pentru $a = -\frac{1}{4}$; în acest caz însă ambele sisteme se reduc la $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$ și deci

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Notă. Ecuația $x^2 - y^2 + x - a = 0$ reprezintă o familie de hiperbole, iar ecuația $y(2x + 1) = 0$ o reuniune de două drepte.

§ 8. Aplicații în fizică și în tehnică

Elipsa de inerție. Fie un plan raportat la reperul cartezian xOy și sistemul de puncte materiale $M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$ avînd respectiv masele $m_1, \dots, m_n$. Momentul de inerție al sistemului de puncte față de o axă de rotație h se definește prin expresia

$I_h = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$, unde d_i este distanța de la punctul M_i la axa h . Fără să afectăm generalitatea problemei putem presupune că axa de rotație este $h_0: x \cos \theta + y \sin \theta = 0$, unde θ este fixat. Rezultă $d_i = d(M_i; h_0) = |x_i \cos \theta + y_i \sin \theta|$ și deci

$$(1) I_{h_0} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i \cos \theta + y_i \sin \theta)^2 = I_y \cos^2 \theta + I_{xy} \sin 2\theta + I_x \sin^2 \theta, \text{ unde}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \text{ sînt respectiv momentele față de axele } Oy, Ox, \text{ iar}$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \text{ este momentul centrifugal.}$$

Pentru $\theta \in [0, 2\pi)$ variabil se obțin toate axele de rotație posibile ce trec prin origine (fascicul de drepte). Notînd $\rho = \frac{1}{\sqrt{I_{h_0}}}$, $a = I_y$, $b = I_{xy}$, $c = I_x$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, relația (1) se transcrie

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1.$$

Deoarece $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ (de ce?), această ecuație reprezintă o elipsă E . În concluzie, oricare ar fi repartitia maselor $m_1, \dots, m_n$, momentele de inerție ale sistemului de puncte $\{M_1, \dots, M_n\}$ în raport cu axele de rotație ce trec prin origine sînt caracterizate de elipsa E , numită *elipsa de inerție a sistemului de puncte* $\{M_1, \dots, M_n\}$ față de punctul O (fig. IV. 39). Elipsa de inerție joacă un rol important în mecanică și în rezistența materialelor.

Legea Boyle-Mariotte. Experimente din fizică au dovedit că într-un regim izoterm produsul dintre presiunea p și volumul V , ale aceleiași mase de gaz, rămîne constant.

Dacă $\{p, V\}$ sînt interpretate ca fiind coordonatele unui punct dintr-un plan raportat la reperul cartezian pOV , atunci ecuația $pV = \text{const}$, $p > 0$, $V > 0$ reprezintă o ramură a unei hiperbole echilatre (fig. IV. 40). În fizică această ramură se numește *izotermă*.

Energia potențială. Cîmpul gravitațional newtonian (cîmp de atracție) și cîmpul electrostatic coulombian (cîmp de atracție sau de respingere) au proprietatea că energia potențială U a unui punct material (de masă m în cazul cîmpului gravitațional sau de sarcină electrică q în cazul cîmpului coulombian) aflat în astfel de cîmpuri este invers proporțională cu distanța r de la origine la punctul material. Considerînd că (r, U) sînt coor-

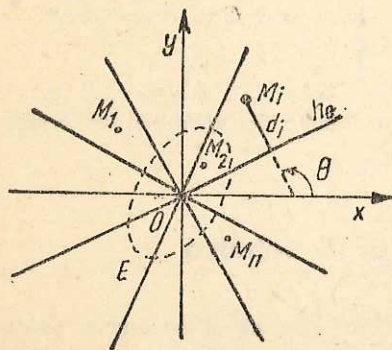


Fig. IV. 39

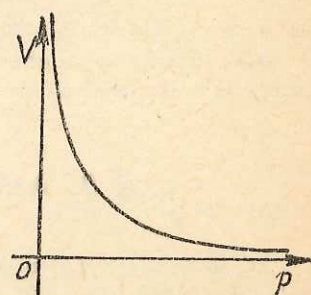


Fig. IV. 40

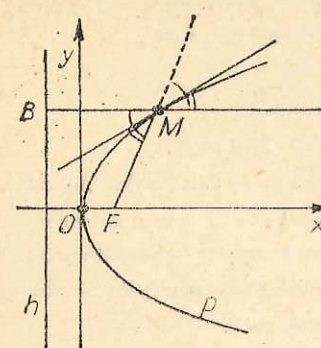


Fig. IV. 41

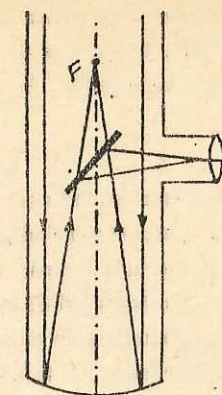


Fig. IV. 42

datele unui punct dintr-un plan raportat la reperul cartezian rOU , ecuația $rU = \text{const}$ reprezintă o ramură a unei hiperbole echilatre situată în cadranul I dacă $U > 0$ sau în cadranul IV dacă $U < 0$, pentru cîmpul electrostatic sau numai în cadranul IV pentru cîmpul gravitațional.

Oglinzi parabolice. Fie parabola P cu directoarea h și focarul F . Tangenta la P într-un punct $M \in P$ este bisectoarea unghiului FMB , unde B este proiecția lui M pe directoarea h (fig. IV. 41). Pe această proprietate a parabolei se bazează construcția și funcționarea telescopului reflector, captatorului de radiație solară, proiecteurului, farului etc. Mai precis, toate acestea folosesc oglinzi parabolice, adică oglinzi a căror suprafață este un paraboloid de rotație (suprafață obținută prin rotirea unei parabole în jurul axei de simetrie).

În cazul telescopului reflector (fig. IV. 42), razele de lumină ce pornesc de la un punct oarecare al unui corp ceresc, situat în direcția axei oglinzii, sînt concentrate de oglindă în focarul acesteia, iar razele ce nu sînt paralele cu axa oglinzii, dar nici prea înclinate față de axă, se concentrează în puncte din apropierea focarului. Astfel, în planul focal al oglinzii, apare imaginea răsturnată a corpului ceresc. Situația este similară în cazul instalațiilor energetice solare care folosesc efectul termic al radiațiilor solare concentrate în „puncte” cu ajutorul unor oglinzi parabolice.

În cazul proiecteurului (fig. IV. 43), sursa de lumină puternică se așază în focarul oglinzii parabolice. Fasciculul de raze cu vîrf în focar este reflectat de oglindă și transformat într-un fascicul de raze paralele cu axa oglinzii. Cazul farurilor este analog.

Menționăm că pe lângă oglinzile parabolice o mare aplicabilitate o au și oglinzile sferice, elipsoidale și hiperbolice.

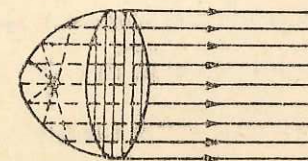


Fig. IV. 43

Traectorii într-un câmp central. În câmpul gravitațional newtonian, ca și în câmpul electrostatic coulombian, traiectoria descrisă de un punct material este o conică cu focarul în origine. În coordonatele polare (r, θ) ecuația acestei conice este

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

unde p este un parametru, iar e este excentricitatea conice.

Dacă $e \in (0, 1)$ atunci punctul material se mișcă pe o elipsă și deci mișcarea este finită. Pentru $e = 1$, traiectoria este o parabolă, iar pentru $e \in (1, \infty)$ traiectoria este o hiperbolă. Această teorie fizică este legată de probleme concrete: mișcarea planetelor în jurul soarelui și legile lui Kepler, lansarea de pe suprafața pământului a sateliților artificiali și a rachetelor, mișcarea electronilor în câmpul electrostatic al nucleelor etc.

§ 9. Probleme propuse

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu vîrfurile $A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(b, 0)$, $a, b > 0$.
 - 1) Să se scrie ecuația cercului Γ circumscris triunghiului AOB .
 - 2) Să se arate că tangenta în origine la cercul Γ este perpendiculară pe AC .
 - 3) Notînd cu M un punct mobil pe cercul Γ , se cere locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABM .

R. 1) $x^2 + y^2 + bx - ay = 0$. 2) Ecuația tangentei în origine la cercul Γ este $bx - ay = 0$, iar a dreptei AC este $ax + by - ab = 0$. 3) $x^2 + y^2 + bx - ay + \frac{2}{9}(a^2 + b^2) = 0$.

2. Se consideră dreapta $d: 3x - 4y + 4 = 0$.
 - 1) Să se scrie ecuația bisectoarei b , a unghiului ascuțit format de dreapta d cu axa Oy .
 - 2) Să se scrie ecuația cercului C , ce trece prin origine, tangent în origine dreptei $y = mx$, $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ și care mai trece prin punctul de intersecție dintre bisectoarea b cu axa Ox .
 - 3) Presupunînd m variabil, să se găsească locul geometric descris de centrul cercului C .

R. 1) $b: 2x - y + 1 = 0$; 2) $C: x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2m}y = 0$, $m \neq 0$; 3) $x = -\frac{1}{4}$.

3. Într-un reper cartezian se dau dreptele

$$d: 2tx - (t+1)y = 3t - 1,$$

$$d': (3t+1)x + (t-1)y = 6t - 2, t \in \mathbb{R}.$$

- 1) Să se arate că dreapta d trece printr-un punct fix A și că dreapta d' trece printr-un punct fix B .
- 2) Să se calculeze unghiul orientat al dreptelor d, d' .
- 3) Să se arate că punctul M , comun dreptelor d și d' , aparține unui cerc fix.

R. 1) $A(2, 1)$, $B(1, 3)$. 2) $\widehat{(d, d')} = \frac{\pi}{4}$. 3) $C: x^2 + y^2 - x - 3y = 0$.

4. Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ se numește *clopot Gauss* (fig. IV. 44). Să se găsească intersecția dintre clopotul Gauss și cercul cu centrul în origine și de rază unu. Să se arate că cele două curbe au aceeași tangentă în punctul de contact de pe axa Oy .

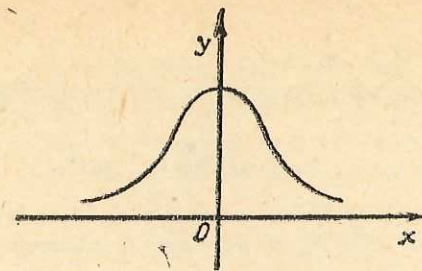


Fig. IV. 44

Indicație. Se rezolvă sistemul $y = e^{-x^2}$, $x^2 + y^2 = 1$. Tangenta la graficul unei funcții derivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, în punctul $(x_0, f(x_0))$, are ecuația $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

5. Fie elipsa $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MPF' , unde M este un punct mobil pe elipsă, iar F și F' cele două focare.

$$\mathbf{R.} E_1: \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2} = 0.$$

6. Se dă un cerc C , cu diametrul $[AB]$, de lungime $2r$, $r \in (0, \infty)$. Fie Γ un cerc, cu centrul variabil $M \in C$ și tangent în N la $[AB]$. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție dintre dreapta MN cu coarda comună a cercurilor C și Γ .

$$\mathbf{R.} E: \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} - 1 = 0.$$

7. Se dă elipsa $E: x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.

- 1) Să se scrie ecuația tangentei la E în punctul $T\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- 2) Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa E , paralele cu normala la E ce trece prin T .

- 3) Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din $P(3, -1)$ la elipsa E .

- Indicație.* 1) Prin dedublare. 2) Se utilizează ecuația fasciculului de drepte paralele.
- 3) Se folosește sistemul

$$\begin{cases} r(x-3) + s(y+1) = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, & r^2 + s^2 \neq 0. \end{cases}$$

8. Se dă elipsa $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ și dreapta $d_n: y = x + n$, $n \in \mathbb{R}$, care inter-

sectează elipsa în punctele P și Q .

- 1) Să se scrie ecuația cercului C de diametru $[PQ]$.

- 2) Fie $\{S, T\} \subset C \cap E$. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor PQ și ST cînd n este variabil.

$$\mathbf{Indicație.} 1) C: \left(x + \frac{n}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4n}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}(5 - n^2), n \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

- 2) $ST: y + x - \frac{5n}{3} = 0$, $n \in \left[-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right]$ și deci locul geometric este segmentul

$$y = 4x, x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right].$$

9. Se dă hiperbola

$$H: x^2 - 2y^2 - 2 = 0.$$

- 1) Să se găsească ecuația tangentei la H în punctul $M_0(2, 1)$.
- 2) Există tangente la H paralele cu normala la H în M_0 ?
- 3) Să se scrie ecuațiile tangentelor la H duse din $A(0, 1)$.

10. Se consideră hiperbola H și un punct P în planul acesteia. Prin P se duc paralele la asimptotele hiperbolei H . Fie M, N punctele de intersecție ale acestor paralele cu hiperbola.

- 1) Care este locul geometric al punctelor P care au proprietatea că dreapta MN trece prin centrul O al hiperbolei H ?
- 2) Care este locul geometric al punctelor P pentru care dreapta MN este paralelă cu una din axele hiperbolei?

R. 1) hiperbola conjugată lui H , 2) axa Ox , respectiv axa Oy .

11. Fie hiperbola echilateră $H: x^2 - y^2 = a^2$ cu vîrfurile A, B și o dreaptă variabilă paralelă cu axa Ox care taie pe H în C și D . Notăm $\{M\} = CB \cap AD$. Să se determine locul geometric al punctului M .

R. Segmentul $x = 0, y \in (-a, a)$.

12. Fie x și y coordonatele unui punct M în raport cu un reper cartezian. Să se explicitizeze și să se reprezinte mulțimea

$$\Gamma: \frac{x|x|}{4} + \frac{y|y|}{9} = 1.$$

13. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\left|\frac{x^2}{4} - 1\right|}$.

14. În planul raportat la un reper cartezian se consideră parabola $P: 2y = x^2$. Fie M un punct pe parabolă. Să se determine, în funcție de abscisa m a lui M :

- 1) coordonatele punctului T unde tangenta în M la P taie axa Ox , aria triunghiului OTM și coordonatele centrului de greutate G al aceluiași triunghi.
- 2) locul geometric al punctului G cînd M descrie parabola dată.

Să se arate că înălțimea triunghiului OTM corespunzătoare vîrfului T trece printr-un punct fix:

R. 1) $T\left(\frac{m}{2}, 0\right)$, aria $(OTM) = \frac{m^3}{8}$, $G\left(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{6}\right)$. 2) Parabola:

$$x = \frac{m}{2}, y = \frac{m^2}{6}, m \in \mathbb{R}. \text{ Punctul fix } A(0, 1).$$

15. Să se determine regiunile din planul xOy , unde trebuie să se găsească punctul $M(x, y)$, astfel ca ecuația $16t^2 + 4(x-5)t + y - 3x + 5 = 0$ în $t \in \mathbb{R}$, să aibă:

- 1) O rădăcină cuprinsă între 0 și 1.
- 2) Ambele rădăcini cuprinse între 0 și 1.

Indicație. Ecuația are rădăcini reale dacă $x^2 + 2x - 4y + 5 \geq 0$. Apartenența la $[0, 1]$ adăugă 1) $(y - 3x + 5)(x + y + 1) \leq 0$ respectiv 2) $y - 3x + 5 \geq 0, x + y + 1 \geq 0, 0 \leq \frac{5-x}{8} \leq 1$.

16. Să se figureze mulțimea punctelor M ale căror coordonate satisfac sistemul $x^2 + y^2 = 1, 2y^2 + x - 1 > 0$.

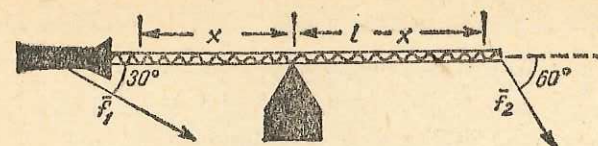


Fig. IV. 45

17. Pentru a pili vîrfurile unui corp ascuțit prins într-o menhină (fig. IV. 45) se apasă pila la cele două capete cu forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care fac cu direcția pilei unghiuri de 30° și respectiv 60° . Cunoscînd lungimea pilei $l = 25$ cm, $\|\vec{F}_1\| = 80$ N și neglijînd greutatea proprie a pilei, să se determine felul în care trebuie să varieze mărimea forței $\vec{F}_2$ astfel încît pila să-și păstreze orizontalitatea în timpul lucrului.

Indicație. Se impune egalitatea momentelor forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ față de punctul de contact al pilei cu corpul de pilit. Rezultă

$$\|\vec{F}_2\| = 46,24 \frac{x}{25 - x}, \quad x \in [a, b] \subset (0, l).$$

Graficul este un arc de hiperbolă.

18. Fie elipsa (hiperbola sau parabola) Γ , fie punctul $M \in \Gamma$ și o dreaptă d care nu trece prin M . Fie MN (fig. IV. 46) o dreaptă care taie pe d în L (dacă $M = N$, dreapta MN este tangenta la Γ în punctul M). Să se arate că există un punct $A \in \Gamma$ cu proprietatea că funcția $f: \Gamma - \{A\} \rightarrow d, f(N) = L$ este bijectivă (injectivă).

Indicație. A este punctul pentru care $MA \parallel d$.

19. Să se discute poziția cercurilor

$$C_1: x^2 + y^2 = 1 - \alpha^2,$$

$$C_2: (x - 2)^2 + y^2 = 1 - \alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Indicație. Se vor considera cazurile: 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha \in (-1, 1)$; 3) $\alpha \in \{-1, +1\}$; 4) $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

20. Se dă egalitatea $(y - x)t^2 - 2yt + x + y + 1 = 0$, unde $t \in \mathbb{R}$, iar (x, y) sînt coordonatele unui punct din plan. Considerînd pe t drept necunoscută, să se determine semnul rădăcinilor acestei ecuații.

21. Printre perechile (x, y) de numere reale care satisfac inegalitățile $y - x \leq 1, y + x \leq 1, y \geq x^2 - 1$ să se determine acelea pentru care y este maxim sau minim.

R. $(0, 1), (0, -1)$.

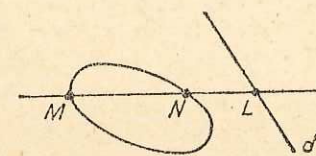


Fig. IV. 46

22. Să se rezolve în $\mathbf{R}^2$ sistemele de ecuații

$$1) \begin{cases} (x+y-1)(x^2+y^2-6x)=0, \\ (x+y-1)(x^2+y^2-8x)=0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3xy-2(x+y)=28, \\ 2xy-3(x-y)=14; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=70, \\ 6x^2+xy-y^2=50; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y^2=ax, \\ y+x^2=by \end{cases}$$

și să se interpreteze geometric rezultatele găsite.

CUPRINS

<i>Capitolul I. Calcul vectorial</i>	3
§ 1. Vectori liberi	3
§ 2. Adunarea vectorilor	8
§ 3. Înmulțirea vectorilor cu numere reale	12
§ 4. Dependență liniară	16
§ 5. Proiecție ortogonală	21
§ 6. Produs scalar	24
§ 7. Probleme propuse	28
 <i>Capitolul II. Dreapta</i>	32
§ 1. Reper cartezian	32
§ 2. Dreapta determinată de un punct și de un vector director	35
§ 3. Dreapta determinată de două puncte distincte	37
§ 4. Ecuația carteziană generală a unei drepte	40
§ 5. Reuniunea și intersecția a două drepte	44
§ 6. Fascicul de drepte	48
§ 7. Dreapta orientată	50
§ 8. Distanța de la un punct la o dreaptă. Aria unui triunghi	54
§ 9. Locuri geometrice	56
§ 10. Semiplane	58
§ 11. Probleme de programare liniară în două variabile	61
§ 12. Probleme propuse	64
 <i>Capitolul III. Izometrii</i>	69
§ 1. Transformări geometrice	69
§ 2. Translații	70
§ 3. Rotații	73
§ 4. Izometrii	76
§ 5. Probleme propuse	81

§ 1. Cercul	83
§ 2. Elipsa	88
§ 3. Hiperbola	94
§ 4. Parabola	101
§ 5. Conice	106
§ 6. Intersecția dintre o dreaptă și o conică	111
§ 7. Intersecția a două conice	116
§ 8. Aplicații în fizică și în tehnică	117
§ 9. Probleme propuse	120

Nr. colilor de tipar : 8
Bun de tipar : 22.XII.1984



Com. nr. 40 541/31 200
Combinatul poligrafic
„CASA ȘCÎNTEII“
București — R.S.R.