LEI 7,40

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI, 1967

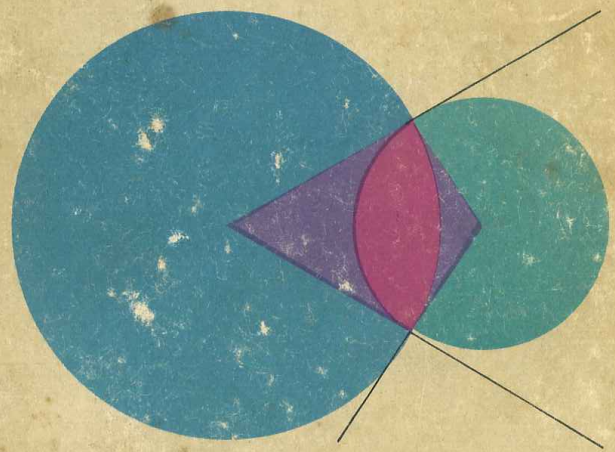
XI

GEOMETRIE ANALITICĂ

GH. D. SIMIONESCU

GEOMETRIE ANALITICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A XI-A LICEU – SECȚIA REALĂ
ȘI ANUL III LICEE DE SPECIALITATE

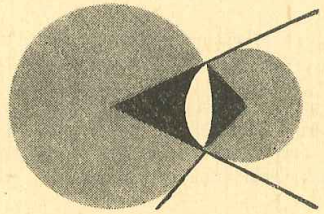


Sabău Ștefan

GH. D. SIMIONESCU
conf. univ.

GEOMETRIE ANALITICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A XI-a LICEU – SECȚIA REALĂ
ȘI ANUL III. LICEE DE SPECIALITATE



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI, 1967

Aprobat de
Ministerul Învățământului
Nr. 30 070/1967

Referenți:

Prof. univ. *E. Murgulescu*
Prof. *M. Badea*
Prof. *I. Ilie*

PREFAȚĂ

1. *Geometria pură (sintetică) dispune de prea puține metode generale pentru rezolvarea problemelor. Acesta a fost motivul pentru care s-au căutat mereu metode cu caracter general care să poată fi aplicate oricărei probleme de geometrie. O astfel de metodă este aceea a coordonatelor, introdusă în știință de către* Descartes*, *prin care problemele de geometrie sînt reduse la probleme de algebră. În acest fel a luat naștere o nouă ramură de matematici,* Geometria analitică *(1637), a cărei importanță capitală a fost aceea de a pune ordine în clasificarea curbelor după gradul ecuației care le reprezintă.*

Astfel dreapta *este reprezentată în plan de o ecuație de gradul I în două variabile și reciproc orice ecuație de gradul I în două variabile reprezintă o dreaptă; conicele sînt reprezentate prin ecuații de gradul al II-lea și reciproc orice ecuație de gradul al II-lea reprezintă o conică reală, imaginară sau degenerată.*

Metodele geometriei analitice se pot aplica oricărei probleme de geometrie, dar aceasta nu înseamnă că orice problemă de geometrie se rezolvă simplu pe cale analitică. Există probleme a căror rezolvare analitică duce la calcule lungi și plictisitoare și care se rezolvă simplu pe cale elementară.

2. *Dacă geometria analitică este creația secolului al XVII-lea,* calculul vectorial *este creația secolului al XIX-lea. El a apărut o dată cu lucrările lui* Hamilton *(1843) și* Grassmann *(1844), dar felul greoi în care au fost scrise aceste lucrări nu a prilejuit o răspîndire a acestei noi ramuri de matematici. Mai tîrziu însă lucrările lui* Maxwell *(1831—1879),* Gibbs *(1881),* Heaviside *(1894) înfățișează calculul vectorial sub formă definitivă, cu notații comode și metode convenabile și ușurează răspîndirea lui.*

---

* René Descartes (1596—1650) matematician, fizician și filozof francez. Opera principală: *Discours de la méthode* (1637).

Multe probleme de geometrie se tratează simplu cu ajutorul calculului vectorial, dar, ca și în cazul geometriei analitice, nu orice problemă. In special este de subliniat faptul că relațiile vectoriale sînt valabile și în plan și în spațiu și de aici se pot găsi uneori generalizări interesante, în spațiu, a unor probleme de geometrie plană.

3. *Calculul vectorial poate servi și la prezentarea geometriei analitice sub altă formă decît cea tradițională. O astfel de prezentare se face și în acest manual, cu precizarea că elementele de calcul vectorial (algebra vectorială) sînt reduse la strictul necesar și numai la vectori în același plan, atît cît este necesar pentru geometria analitică de clasa a XI-a.*

Pe lîngă avantajele evidente pe care le au și geometria analitică și calculul vectorial, trebuie să spunem că există și unele inconveniente. Cel mai important ni se pare a fi faptul că atît geometria analitică cît și calculul vectorial ne duc la rezultatele unor probleme, datorită unor calcule specifice fiecăreia din ele, dar de fapt rămîn ascunse proprietățile geometrice *care duc la acele rezultate.*

Autorul

INTRODUCERE

MĂRIMI SCALARE, MĂRIMI VECTORIALE. SCALARI, VECTORI

1. Noțiunea de mărime este familiară oricărui elev, din clasele anterioare, fie de la lecțiile de matematici, fie de la cele de fizică.

Cînd se vorbește de măsurarea unei mărimi se știe că se presupune că s-a ales o unitate de măsură, aceasta fiind o mărime de același fel cu cea care se măsoară.

Este bine însă să precizăm că posibilitatea de a măsura o mărime cere, din punct de vedere matematic, unele condiții, și anume:

— Trebuie să știm ce se înțelege prin *mărimi egale* și *neegale* și prin mărimea *sumei* a două mărimi.

— Trebuie să admitem că orice mărime *se poate împărți într-un număr de părți egale* și că este satisfăcută *axioma lui Arhimede*, anume că fiind date două mărimi, există un multiplu al celei mai mici, care depășește pe cea mai mare.

2. În viața de toate zilele, în știință și în tehnică se întîlnesc mărimi care sînt perfect caracterizate printr-un singur număr: *rezultatul măsurătorii.*

Astfel dacă cineva ne informează că a cumpărat 2 kg de făină sau că a lucrat timp de 3 ore, nu mai este nevoie de altă lămurire asupra mărimilor respective*.

Astfel de mărimi ca timpul, temperatura, volumul, suprafața, densitatea, energia etc. care sînt perfect caracterizate printr-un număr (pozitiv sau negativ), se numesc *mărimi scalare.*

Numărul care arată măsura mărimii respective îl vom numi *scalar.*

Numerele abstracte intră și ele în categoria de scalari.

3. Există însă mărimi pentru a căror caracterizare nu mai este deajuns să cunoaștem măsura lor, ci trebuie să știm *direcția* și *sensul* în care

* Aceasta nu înseamnă că mărimile respective nu pot fi privite și din alte puncte de vedere, de exemplu al calității etc.

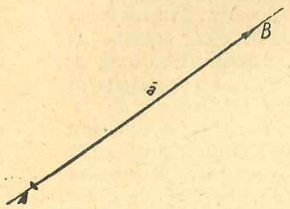


Fig. 1.

ele acționează. Astfel dacă asupra unui corp acționează o forță, trebuie să știm în ce direcție și în ce sens acționează forța, pentru ca să știm cum se va deplasa corpul.

Alte mărimi pentru a căror caracterizare trebuie să cunoaștem, pe lîngă măsura lor, direcția și sensul, sînt: translațiile, vitezele, accelerațiile etc. Toate acestea se numesc *mărimi vectoriale* și sînt caracterizate prin trei elemente: unul *aritmetic*, numărul care arată măsura lui cu unitatea aleasă și pe care îl vom numi *intensitatea* sau *modulul* mărimii vectoriale și două elemente geometrice, *direcția* și *sensul*.

Pentru reprezentarea unor astfel de mărimi s-a ales *segmentul orientat*. Lungimea segmentului, la o scară aleasă, reprezintă măsura (intensitatea, modulul) mărimii vectoriale, dreapta pe care este așezat segmentul (dreapta-suport) reprezintă direcția pe care acționează mărimea vectorială, iar sensul este indicat printr-o săgeată așezată la extremitatea segmentului (fig. 1).

Un astfel de segment care are indicat sensul printr-o săgeată, se numește *vector*. Ca orice segment orientat, vectorul are o origine și o extremitate.

Notațiile folosite pentru vectori diferă însă de la un autor la altul. Cele mai obișnuite sînt următoarele:

1) Dacă vectorul este dat prin două puncte (originea și extremitatea sa), atunci se notează (fig. 1)

$$\overline{AB} \text{ sau } \overrightarrow{AB}.$$

Prima notație are dezavantajul că mulți notează în acest fel segmentele (chiar neorientate), pentru a le deosebi de dreapta AB.

2) Dacă vectorul este dat printr-o singură literă, atunci se scrie

$$\bar{a} \text{ sau } \vec{a} \text{ și, mai rar, } \mathbf{a} \text{ (literă grasă).}$$

Lungimea segmentului reprezintă — la scara aleasă — *mărimea, intensitatea* sau *modulul vectorului* și se notează $|\overline{AB}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ sau $|\bar{a}|$, $|\vec{a}|$ sau simplu a.

În acest manual vom folosi următoarele notații:

— Dacă vectorul este dat prin originea sa (A, M etc.) și extremitatea (B, N etc.) vom scrie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, adică vom pune săgeata deasupra.

— Dacă vectorul se dă printr-o singură literă, atunci vom nota $\bar{a}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ etc., iar modulul îl vom nota cu aceeași literă, *fără bară*, deci a, u, v, afară de cazul cînd va fi nevoie să se atragă atenția în mod special asupra modulului și atunci se va folosi $|\bar{a}|$, $|\bar{u}|$ etc.

4. *Clasificarea vectorilor*. Reprezentarea vectorilor prin segmente orientate a fost luată din mecanică, unde forțele erau de mult reprezentate prin vectori. Chiar numele de *vector* arată acest lucru, deoarece vine de la verbul latin *veho-vehere*=a purta, a trage, a mîna, deci se referă la acțiunea unei forțe.

Matematicile au luat însă din toate ramurile de știință mărimile vectoriale și printr-un proces de abstractizare au creat calculul vectorial, de care apoi se servește fiecare domeniu de știință sau tehnică, acolo unde are nevoie.

Observîndu-se cu atenție diferitele mărimi vectoriale, s-a ajuns la următoarea clasificare a vectorilor:

— *Vectori legați*, care au originea într-un punct anumit, fix sau mobil, punctul de aplicație al vectorului. Astfel forțele care acționează asupra unui punct fix A, au punctul de aplicație în A, viteza unui punct mobil M este reprezentată printr-un vector cu punctul de aplicație în M, mobil.

— *Vectori alunecători*, care se pot deplasa de-a lungul unei drepte, acțiunea lor rămînînd aceeași. Punctul lor de aplicație (originea vectorului) poate fi oriunde pe dreapta-suport. Ca exemplu se poate da forța care acționează asupra unui *solid nedeformabil*, al cărei efect (mișcarea) este același oriunde ar fi punctul de aplicație pe linia de acțiune a forței.

— *Vectori liberi* care pot avea originea în orice punct al spațiului, dar păstrează mărimea (modulul), direcția și sensul.

Ca exemplu vom da vectorul care definește o translație.

Fie $\bar{v}$ acest vector. Toate punctele M_i ale unei figuri F ajung în M' și formează o nouă figură F', astfel că toți vectorii $\overrightarrow{M_iM_i'}$ sînt egali între ei și egali cu vectorul $\bar{v}$, dar au originea în diferitele puncte M_i, unde $M_i \in F$.

* * *

5. Partea din calculul vectorial care se ocupă cu operațiile asupra vectorilor se numește algebra vectorială. Algebra vectorială are în vedere în primul rînd operațiile asupra vectorilor liberi. Pentru celelalte categorii de vectori proprietățile și operațiile se deduc din cele ale vectorilor liberi, ținînd seama de condițiile suplimentare impuse.

În acest manual vom începe prin a studia vectorii situați pe o dreaptă și numai după aceea vom trece la vectori în plan.

CAPITOLUL I

VECTORI PE O DREAPTĂ

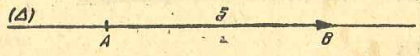


Fig. 2.

1. *Vectori pe o dreaptă.* Din mulțimea vectorilor situați pe o dreaptă (Δ), unul oarecare poate fi dat fie prin originea sa A și extremitatea B, deci $\overrightarrow{AB}$, fie printr-o singură literă $\bar{a}$ (fig. 2).

Dacă originea A este fixă, atunci avem de-a face cu un *vector legat;* dacă originea A poate fi oriunde pe dreaptă, dar mărimea și sensul sînt date, atunci avem un *vector alunecător.* Alte posibilități nu mai sînt. Prin urmare pe o dreaptă nu putem avea decît vectori *legați* și vectori *alunecători.*

Modulul vectorului (mărimea, intensitatea vectorului) ne dă măsura mărimii vectoriale pe care o reprezintă, la scara aleasă. Așa cum am mai spus, vom nota modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ cu $|\overrightarrow{AB}|$, iar dacă vectorul este dat sub forma $\bar{a}$, atunci modulul se va nota cu $|\bar{a}|$ sau mai simplu a.

Doi vectori sînt egali $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, dacă au același modul și același sens indiferent unde ar fi situați pe dreaptă. Dacă vectorii sînt legați, trebuie să aibă și aceeași origine.

Vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BA}$ au evident același modul, dar ei acționează în sensuri contrare, de aceea îi vom numi vectori opuși. Rezultă că $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$, dar $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$.

2. *Vectori pe o axă.* Dacă pe dreapta (Δ) alegem un *sens pozitiv* (indicat printr-o săgeată), *o origine* (O) și o *unitate de măsură*, dreapta (Δ) devine o axă: axa Ox. Un vector oarecare poate avea același sens cu sensul pozitiv al axei sau sens contrar. Vom conveni să numim *coordonata* unui vector, modulul vectorului cu semnul (+) sau (—) după cum vectorul are sensul axei sau sensul contrar. Prin urmare dacă notăm cu X această coordonată, atunci

$$X=\pm|\overrightarrow{AB}|. \qquad (1)$$

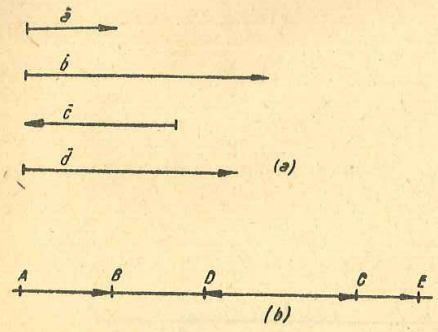


Fig. 3.

Coordonata unui vector este independentă de punctul de aplicație al vectorului, prin urmare ea *caracterizează un vector alunecător.*

3. *Adunarea vectorilor.* Vectorii situați pe o dreaptă fiind segmente orientate, adunarea lor se face la fel cu adunarea segmentelor orientate. Fie de pildă de adunat vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, dați în figura 3, *a* și presupuși pe o aceeași dreaptă (Δ). Se așază vectorul $\bar{a}=\overrightarrow{AB}$ pe dreapta (Δ), apoi în continuare vectorul $\bar{b}=\overrightarrow{BC}$, de același sens; vectorul $\bar{c}=\overrightarrow{CD}$ este de sens contrar, iar $\bar{d}=\overrightarrow{DE}$ de același sens cu $\bar{a}$. Suma celor patru vectori este vectorul $\overrightarrow{AE}$ (fig. 3, *b*) care are originea în A (a primului vector) și extremitatea E a ultimului vector.

În mod asemănător se face suma unui număr oarecare de vectori. Rezultă următoarea regulă generală:

Pentru a aduna mai mulți vectori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ situați pe aceeași dreaptă (Δ) se ia un punct arbitrar A_0 și se așază vectorul $\overrightarrow{A_0A_1}=\bar{a}_1$, apoi al doilea vector se așază cu originea în extremitatea primului vector, deci $\overrightarrow{A_1A_2}=\bar{a}_2$ etc., fiecare vector cu sensul său, pînă se așază ultimul vector $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\bar{a}_n$. Suma vectorilor dați este vectorul $\overrightarrow{A_0A_n}$ care are ca origine, originea primului vector și ca extremitate, extremitatea ultimului vector.

Dacă notăm cu $\bar{s}$ vectorul sumă, atunci se scrie

$$\bar{s}=\bar{a}_1+\bar{a}_2+\ldots+\bar{a}_n=\overrightarrow{A_0A_n}. \tag{2}$$

Vectorul sumă se mai numește și *vector rezultant.*

După cum se vede, adunarea vectorilor pe o dreaptă este o adunare algebrică, deci păstrează proprietățile sumei algebrice, în particular: *a*) este comutativă, *b*) este asociativă.

Sensul vectorului sumă se deduce astfel: se face suma modulelor vectorilor de un sens și suma modulelor vectorilor de sens contrar; vectorul sumă are sensul vectorilor care au suma modulelor mai mare.

Dacă suma vectorilor de un sens este egală cu suma vectorilor de sens contrar, vectorul rezultant (sumă) este *nul. Vectorul nul* nu are sensul precizat.

În cazul cînd mai mulți vectori legați *au același punct de aplicație,* adunarea se face ca la vectorii alunecători, dar rezultanta are originea în punctul comun de aplicație al vectorilor componenți.

4. *Adunarea vectorilor cînd se cunosc coordonatele lor.* Fiind vorba de coordonatele vectorilor, dreapta pe care se găsesc ei este organizată ca axă: axa Ox.

Pentru a scurta scrierea vom folosi notația $\bar{a}\,(X)$ sau $\overrightarrow{AB}\,(X)$ arătînd prin aceasta că vectorul $\bar{a}$ sau $\overrightarrow{AB}$ are coordonata X.

Fie deci vectorii $\bar{a}_1\,(X_1)$, $\bar{a}_2\,(X_2), \ldots, \bar{a}_n\,(X_n)$. Din felul în care s-a făcut operația geometrică de adunare rezultă că se adună mărimile vectorilor, ținînd seama de sensul lor. Însă coordonatele vectorilor sînt tocmai aceste mărimi, pozitive sau negative, după cum au sensul pozitiv al axei sau sensul negativ. Prin urmare vectorul sumă $\bar{s}\,(X)$ va avea drept coordonată suma coordonatelor vectorilor dați, adică

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n=\sum_{i=1}^{n}X_i. \tag{3}$$

Exemplu. *Să se facă suma vectorilor $\bar{a}$ (5), $\bar{b}$(—3), $\bar{c}$ (—6).* Suma vectorilor este vectorul $\bar{s}$ (X), care are $X=5+(-3)+(-6)=-4$, deci orientat în sensul negativ al axei, avînd mărimea de 4 unități.

5. *Relația dintre modulul sumei și suma modulelor.* Din felul în care se face adunarea vectorilor pe o dreaptă rezultă că modulul (mărimea) vectorului sumă poate fi egală cu suma modulelor vectorilor componenți, numai în cazul cînd aceștia au același sens. Dacă însă unii vectori au un sens și alții sens contrar, atunci totdeauna vectorul sumă are modulul mai mic decît suma modulelor vectorilor componenți. Se scrie acest lucru sub forma

$$|\bar{s}|\leqslant|\bar{a}_1|+|\bar{a}_2|+\ldots+|\bar{a}_n| \tag{4}$$

sau

$$|\bar{a}_1+\bar{a}_2+\ldots+\bar{a}_n|\leqslant|\bar{a}_1|+|\bar{a}_2|+\ldots+|\bar{a}_n|. \tag{4'}$$

6. *Scăderea vectorilor.* Prin definiție a scădea un vector din altul înseamnă:

a) *a găsi un al treilea vector, care adunat cu vectorul scăzător să ne dea vectorul descăzut,* sau

b) *a găsi un al treilea vector care este suma dintre vectorul descăzut și vectorul scăzător luat cu semn (sens) contrar.*

Prin urmare operația de scădere $\bar{a}-\bar{b}=\bar{c}$ poate fi privită în două feluri:

a) $\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}$ sau b) $\bar{a}+(-\bar{b})=\bar{c}$.

Să facem efectiv scăderea în două cazuri.

Cazul I $|\bar{a}|>|\bar{b}|$.

I_a. $|\bar{a}|>|\bar{b}|$. În figura 4 avem astfel de vectori. Luăm pe dreapta (Δ) vectorii $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ și $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$. Se observă imediat că $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$, adică $\bar{a}=\bar{b}+\overrightarrow{BA}$, prin urmare vectorul diferență este $\overrightarrow{BA}$. Dacă cei doi vectori se iau cu aceeași origine O, atunci relația la care se ajunge este

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}. \tag{5}$$

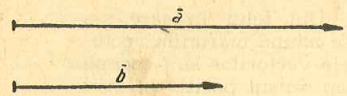


Fig. 4.

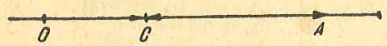


Fig. 5.

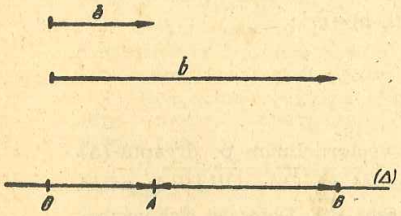


Fig. 6.

I$_b$. Dacă ne referim la al doilea fel de a face scăderea, atunci luăm (fig. 5) vectorii $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ și $\overrightarrow{AC}=-\bar{b}$ și îi adunăm; vectorul rezultant este $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$, dar este foarte clar că $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ din figura 4, numai că are originea în O, în loc de B.

Cazul II $|\bar{a}|<|\bar{b}|$.

Un astfel de exemplu avem în figura 6. Dacă luăm pe dreapta (Δ) $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ și $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$, se observă imediat că $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$, deci ajungem tot la relația (5)

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Al doilea fel de a face scăderea în acest exemplu, îl lăsăm pe seama elevilor. Desigur mai există și alte cazuri, de exemplu vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt de sensuri contrare etc., dar nu este nevoie să le considerăm pe toate, deoarece scăderea se reduce la o adunare și formula (5) este valabilă în toate cazurile.

Regula care rezultă din (5) este următoarea:

Dacă aducem cei doi vectori care se scad să aibă originea comună, atunci vectorul diferență are originea în extremitatea vectorului scăzător și extremitatea în extremitatea vectorului descăzut.

Relația (5) scrisă invers

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB} \qquad (6)$$

are o interpretare interesantă, foarte des folosită, anume: *orice vector poate fi socotit ca diferența a doi vectori care au o origine comună (oarecare), descăzutul avînd extremitatea în extremitatea vectorului dat (A) și scăzătorul avînd extremitatea în originea vectorului dat (B).*

Deoarece originea comună a celor doi vectori poate fi oarecare, descompunerea unui vector într-o diferență de vectori se poate face într-o infinitate de feluri:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\ldots \qquad (6')$$

7. *Înmulțirea unui vector cu un număr real.* Dacă adunăm n vectori egali, $\bar{a}$ fiind unul dintre ei, este evident că obținem un vector $\bar{b}$ de același sens cu $\bar{a}$, iar $|\bar{b}|=n|\bar{a}|$.

Se scrie astfel

$$\bar{b}=n\,\bar{a}. \qquad (7)$$

Reciproc, o egalitate de forma (7) arată că vectorul $\bar{b}$ este de același sens cu $\bar{a}$, dar are modulul de n ori mai mare, adică

$$|\bar{b}|=n|\bar{a}| \text{ sau } b=na. \qquad (7')$$

O egalitate de forma

$$\bar{b}_1=-n\bar{a} \qquad (8)$$

arată că vectorul $\bar{b}_1$ este opusul lui $\bar{b}=n\bar{a}$, deci $|\bar{b}_1|=n|\bar{a}|$, dar are sens contrar lui $\bar{b}$, deci și lui $\bar{a}$.

Să presupunem acum că vectorul $\bar{b}$ este de q ori mai mic decît vectorul $\bar{a}$. Atunci $\bar{a}$ este de q ori mai mare decît $\bar{b}$ și după cum cei doi vectori au aceeași orientare sau orientare contrară, se poate scrie

$$\bar{a}=\pm q\,\bar{b}, \qquad (9)$$

de unde rezultă

$$\bar{b}=\pm\frac{1}{q}\,\bar{a}. \qquad (9')$$

Relația între module este evident $b=\frac{1}{q}a$, care arată că vectorul $\bar{b}$ este de q ori mai mic decît $\bar{a}$.

Acum este ușor de înțeles semnificația relației

$$\bar{b}=\pm\frac{p}{q}\,\bar{a} \ (p,\ q\in N, \text{ mulțimea numerelor naturale}), \qquad (10)$$

anume: $\bar{b}$ este vectorul cu aceeași orientare $\bar{a}$, dacă se ia semnul (+) sau de orientare contrară, dacă se ia semnul (—) și are ca mărime de p ori vectorul $\frac{1}{q}\,\bar{a}=\frac{\bar{a}}{q}$. Relația între module este evident

$$|\bar{b}|=\frac{p}{q}|\bar{a}| \text{ sau } b=\frac{p}{q}a.$$

Cu această pregătire putem spune ce înțeles are relația

$$\bar{b}=m\bar{a} \text{ unde } m\in Q \text{ (mulțimea numerelor raționale).} \qquad (11)$$

Să precizăm

1) Dacă $m>0$ vectorul $\bar{b}$ are același sens cu $\bar{a}$.
2) Dacă $m<0$ vectorul $\bar{b}$ este de sens contrar cu $\bar{a}$.

3) Între modulele celor doi vectori există relația

$$|\bar{b}| = |m| \cdot |\bar{a}| \text{ sau } b = |m|a.$$

Din cele expuse pînă aici se desprinde următorul rezultat:

Produsul dintre un **număr rațional** *m și un* **vector** *$\bar{a}$ reprezintă un alt vector $\bar{b}$, pe aceeași axă, al cărui modul este $b = |m| \cdot a$ și care are același sens sau sens contrar cu $\bar{a}$, după cum m este pozitiv sau negativ.*

Dacă $m = 0$, $\bar{b}$ este vectorul nul, cu sensul nedefinit.

Să vedem acum ce reprezintă produsul $\alpha\bar{a}$, unde α este un număr irațional și $\bar{a}$ un vector.

Pentru aceasta să reamintim din analiză că orice număr irațional α poate fi definit cu ajutorul mulțimii $\{Q\}$ a numerelor raționale, în anumite moduri. De exemplu α poate fi definit ca limită a unui șir de numere raționale (exemplu clasic: definirea lui $\sqrt{2}$).

Este evident însă că se poate stabili o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor m raționale, $m \in \{Q\}$, și mulțimea vectorilor $m\bar{a}$. Atunci limitei α a șirului de numere raționale îi va corespunde limita $\alpha\bar{a}$ a șirului de vectori corespunzători șirului de numere.

Putem scrie deci

$$\bar{b} = \alpha\bar{a}, \tag{12}$$

unde $\bar{b}$ este un vector de același sens sau de sens contrar cu $\bar{a}$, după cum semnul lui α este (+) sau (—) și care are ca modul

$$\bar{b} = |\alpha| \cdot |\bar{a}| \text{ sau } b = |\alpha| \cdot a. \tag{12'}$$

Rezultă că mărimea vectorului $\bar{b}$ este incomensurabilă cu mărimea vectorului $\bar{a}$.

Strîngînd la un loc rezultatele de pînă acum și reamintind că orice număr real k este un scalar, ajungem la următoarea concluzie:

Produsul dintre un vector $\bar{a}$ și un scalar k este un alt vector $\bar{b} = k\bar{a}$ care are sensul lui $\bar{a}$, pentru $k > 0$, are sens contrar cu $\bar{a}$ pentru $k < 0$ și are ca modul $b = |k| \cdot a$.

Proprietățile următoare sînt evidente, în baza studiului făcut mai înainte:

1) $m\bar{a} = \bar{a}m$ (m real), înmulțirea unui vector cu un scalar este comutativă;
2) $m(n\bar{a}) = n(m\bar{a}) = mn\bar{a}$ înmulțirea este asociativă;
3) $(m+n)\bar{a} = m\bar{a} + n\bar{a}$ înmulțirea este distributivă față de adunarea scalarilor;
4) $m(\bar{a} + \bar{b}) = m\bar{a} + m\bar{b}$, înmulțirea este distributivă față de adunarea vectorilor.

8. Împărțirea unui vector cu un scalar k se reduce la înmulțirea vectorului cu $\frac{1}{k}$, adică $\frac{\bar{a}}{k} = \frac{1}{k}\bar{a}$.

9. *Versorul (vectorul unitar).* Fiind dat un vector $\bar{a}$, dacă se ia vectorul $\bar{a}_0$, de modul *1*, de același sens cu $\bar{a}$, acesta se numește *versorul* sau *vectorul unitar* al lui $\bar{a}$. Este clar că vectorul $\bar{a}$ este de a ori mai mare decît $\bar{a}_0$, deci se poate scrie, potrivit relației (11) sau (12)

$$\bar{a} = a\bar{a}_0 \text{ sau } \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}_0 \tag{13}$$

din unde rezultă expresia versorului

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{a} \text{ sau } \bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}. \tag{13'}$$

Dacă pentru mai mulți vectori, situați pe aceeași dreaptă, se adoptă aceeași unitate de măsură, atunci toți acești vectori se pot exprima cu versorul corespunzător unui vector, dar trebuie avut grijă ca vectorii de sens contrar să aibă exprimarea corespunzătoare, de exemplu dacă $\bar{a}_1$ este un astfel de vector, să se scrie $\bar{a}_1 = -a_1\bar{a}_0$.

10. *Versorul pe o axă.* În cazul unei axe, unitatea de măsură este fixată, deci toți vectorii de pe acea axă vor fi măsurați, în modul, cu aceeași unitate. Vectorul unitar (versorul) se alege cu același sens ca și axa Ox și se notează $\overrightarrow{OU} = \bar{i}$, astfel că $|\overrightarrow{OU}| = |\bar{i}| = 1$ (fig. 7).

Orice vector $\bar{a}$ de pe axa Ox se poate exprima cu ajutorul versorului $\bar{i}$, și anume

$\bar{a} = a\bar{i}$ dacă $\bar{a}$ are sensul axei Ox și

$\bar{a} = -a\bar{i}$ dacă $\bar{a}$ are sens negativ pe axa Ox.

Dar modulul a al vectorului $\bar{a}$, luat cu semnul corespunzător orientării vectorului este coordonata sa X. Prin urmare se poate scrie

$$\bar{a} = X\bar{i}. \tag{14}$$

Dacă pe axă considerăm mai mulți vectori $\bar{a}_1(X_1)$, $\bar{a}_2(X_2), \ldots, \bar{a}_n(X_n)$, atunci

$$\bar{a}_1 = X_1\bar{i},\ \bar{a}_2 = X_2\bar{i}, \ldots, \bar{a}_n = X_n\bar{i}.$$

Potrivit celor spuse la însumarea vectorilor (§ 4) situați pe o axă, vectorul sumă $\bar{s}$ va avea ca expresie

$$\bar{s} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\bar{i} \text{ sau}$$

$$\bar{s} = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\bar{i}. \tag{15}$$

Vectorul sumă (sau vectorul rezultant) se obține deci înmulțind versorul $\bar{i}$ cu suma coordonatelor vectorilor.

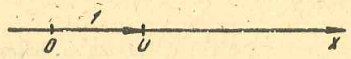


Fig. 7.

GEOMETRIA PE O DREAPTĂ

11. Dacă ne ocupăm numai de elementele geometrice aşezate pe aceeaşi dreaptă (puncte şi segmente), se zice că facem geometrie pe o dreaptă. Pentru fixarea poziţiei diferitelor puncte vom alege ca sistem de referinţă o axă care are ca suport chiar dreapta dată, deci fixăm originea, sensul şi unitatea de măsură.

Poziţia unui punct oarecare A de pe axa Ox este în mod unic determinată de vectorul $\overrightarrow{OA}=\bar{r}$ (fig. 8), care pentru acest motiv se numeşte *vectorul de poziţie* al punctului A. Vectorul de poziţie al oricărui punct de pe axă are originea în O originea axei şi extremitatea în punctul respectiv. Rezultă imediat că vectorii de poziţie sînt *vectori legaţi*.

Dacă se consideră mai multe puncte A, B, C, atunci vectorii de poziţie $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ se pot nota fie cu $\bar{r}_a$, $\bar{r}_b$, $\bar{r}_c$, fie cu $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, fie cu litere diferite $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ etc. Adunarea şi scăderea vectorilor de poziţie se face ca la vectorii liberi, iar vectorul rezultant are originea tot în O (§ 3).

Vom nota mai scurt $A(\bar{r})$ înţelegînd prin aceasta că punctul A are ca vector de poziţie pe $\bar{r}$.

Fie $A(\bar{r}_1)$ şi $B(\bar{r}_2)$ două puncte pe axa Ox. Relaţia vectorială $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ se scrie sub forma (§ 6)

$$\overrightarrow{AB}=\bar{r}_2-\bar{r}_1 \tag{16}$$

oricare ar fi poziţiile punctelor A, B pe axă. Relaţia (16) o vom numi relaţia lui *Chasles*.

12. *Teorema lui Chasles**. Fiind date n puncte pe o dreaptă A_1, $A_2, \ldots, A_n$, există relaţia

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=0. \tag{17}$$

Pentru demonstraţie să scriem fiecare vector exprimat cu vectorii de poziţie $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{A_1A_2}=\bar{r}_2-\bar{r}_1\\
&\overrightarrow{A_2A_3}=\bar{r}_3-\bar{r}_2\\
&\overrightarrow{A_3A_4}=\bar{r}_4-\bar{r}_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\bar{r}_n-\bar{r}_{n-1}\\
&\overrightarrow{A_nA_1}=\bar{r}_1-\bar{r}_n
\end{aligned}$$

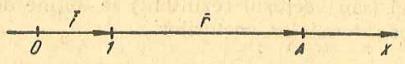


Fig. 8.

* Chasles Michel (citeşte Şal), geometru francez (1793—1880) care a introdus în mod sistematic principiul semnelor în geometria sintetică.

Dacă se adună aceste egalităţi se obţine relaţia (17), deoarece în partea a doua toţi termenii se reduc.

În particular pentru trei puncte A, B, C relaţia se scrie

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0. \tag{17'}$$

Observare. De fapt vectorii pe o dreaptă sînt segmente orientate pe acea dreaptă, astfel că (17) reprezintă relaţia între segmentele orientate corespunzătoare.

13. *Abscisa unui punct de pe axă.* Coordonata vectorului de poziţie a unui punct A, adică mărimea vectorului $\overrightarrow{OA}=\bar{r}$, luată cu semnul ei (§ 2) se numeşte abscisa punctului A şi se notează cu x, a, b etc. Prin urmare abscisa unui punct A este măsura distanţei $\overline{OA}$, cu semnul (+) sau (—), după cum punctul A se află pe semiaxa pozitivă sau pe semiaxa negativă. Notaţia $A(x)$ înseamnă: punctul A de abscisă x.

Dacă $\bar{i}$ este versorul pe axa Ox, atunci vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului A se scrie sub forma

$$\bar{r}=\bar{i}x. \tag{18}$$

Suma vectorilor de poziţie a punctelor A_1, $A_2, \ldots, A_n$ este

$$\bar{s}=\bar{r}_1+\bar{r}_2+\ldots+\bar{r}_n=\bar{i}x_1+\bar{i}x_2+\ldots+\bar{i}x_n=\bar{i}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right). \tag{19}$$

14. *Coordonata unui vector dat prin originea şi extremitatea sa.* Fie vectorul $\overrightarrow{AB}(X)$, dat prin punctele $A(x_1)$ şi $B(x_2)$. Avem pe de o parte $\overrightarrow{AB}=\bar{i}X$, iar pe de altă parte

$$\overrightarrow{AB}=\bar{r}_2-\bar{r}_1=\bar{i}x_2-\bar{i}x_1=\bar{i}(x_2-x_1). \tag{20}$$

Din compararea celor două expresii ale lui $\overrightarrow{AB}$ rezultă

$$X=x_2-x_1 \text{ sau } \overline{AB}=x_2-x_1. \tag{21}$$

Coordonata unui vector arată mărimea şi sensul vectorului faţă de axă, deci x_2-x_1 va arăta de asemenea mărimea şi sensul segmentului $\overline{AB}$ faţă de axă, după cum $x_2-x_1>0$ (sens pozitiv) sau $x_2-x_1<0$ (sens negativ).

15. *Distanţa între două puncte pe axă.* Fie $A(x_1)$, $B(x_2)$ cele două puncte. Din (21) rezultă imediat distanţa $\overline{AB}$, care se va lua în valoare absolută, deci

$$\overline{AB}=|X|=|x_2-x_1|. \tag{22}$$

Observări. 1) Să subliniem încă o dată că diferenţa x_2-x_1 luată în valoare absolută dă distanţa $\overline{AB}$, dar dacă se ia cu semn cu tot, atunci dă mărimea şi orientarea segmentului $\overline{AB}$.

2) Distanţa d între punctele $A(x_1)$ şi $B(x_2)$ se poate scrie şi sub forma

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2} \tag{22'}$$

radicalul fiind aritmetic.

Exemple. *Să se afle distanțele dintre perechile de puncte:*

1) $A(3)$, $B(-2)$; 2) $C(-4)$, $D(2)$; 3) $D(-5)$, $E(-8)$.

Avem

1) $\overline{AB}=|-2-3|=5$; 2) $\overline{CD}=|2-(-4)|=6$; $\overline{DE}=|-8-(-5)|=3$.

16. *Abscisa punctului care împarte un segment într-un raport dat.* Considerăm segmentul $\overline{AB}$ definit de punctele $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$ și punctul $M(\bar{r})$ care împarte segmentul dat în raportul

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k. \tag{23}$$

Socotind segmentele orientate, rezultă:

a) dacă $M\in\overline{AB}$ atunci $k<0$, deoarece $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ au sensuri diferite;

b) dacă M este exterior segmentului $\overline{AB}$, atunci $k>0$, segmentele $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ având aceeași orientare;

c) dacă $M\equiv A$, atunci $k=0$;

d) dacă $M\to B$, atunci $k\to\infty$.

Din (23) se deduce $\overline{MA}=k\,\overline{MB}$ sau scrisă vectorial

$$\overrightarrow{MA}=k\,\overrightarrow{MB} \tag{24}$$

Introducînd vectorii de poziție se obține $\bar{r}_1-\bar{r}=k(\bar{r}_2-\bar{r})$ din care se deduce

$$\bar{r}=\frac{\bar{r}_1-k\bar{r}_2}{1-k}, \tag{25}$$

relație care dă vectorul de poziție al punctului M în funcție de vectorii de poziție ai punctelor A, B, precum și de raportul k.

Dacă exprimăm vectorii cu ajutorul absciselor punctelor $A(x_1)$, $B(x_2)$, $M(x)$ atunci (25) devine

$$\bar{i}x=\bar{i}\,\frac{x_1-kx_2}{1-k}$$

care ne dă relația dintre abscise, anume

$$x=\frac{x_1-kx_2}{1-k}. \tag{26}$$

Aceasta este formula care dă abscisa punctului M, care împarte segmentul $\overline{AB}$ în raportul k.

În particular mijlocul unui segment împarte segmentul în raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-1$, deci $k=-1$. Abscisa *mijlocului* segmentului este

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}. \tag{27}$$

Se știe din geometria elementară că există două puncte care împart un segment în același raport: unul interior, altul exterior segmentului. Dacă se consideră segmentele orientate, atunci cele două rapoarte sînt de

semne contrare, iar cele două puncte M, N se numesc conjugate armonic față de A și B. Din cele spuse aici rezultă că abscisa punctului N, conjugatul lui M față de A și B se deduce din (26) înlocuind pe k prin $(-k)$, deci

$$x'=\frac{x_1+kx_2}{1+k}. \tag{28}$$

Conjugatul armonic al mijlocului unui segment se obține din (26) făcînd $k\to1$, deci $x\to\infty$ sau $x=\infty$, adică este punctul de la infinit al dreptei pe care este situat segmentul.

17. *Diviziune armonică.* Dacă punctele C, D sînt conjugate armonic față de A, B se știe că reciproc A, B sînt conjugate armonic față de C, D. Configurația de puncte A, B, C, D se numește *diviziune armonică*.

Relația care leagă între ele abscisele a patru puncte care formează o diviziune armonică $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x')$, $D(x'')$ se găsește ușor, deoarece trebuie să avem

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \quad\text{sau}\quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}+\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=0.$$

Scriind segmentele orientate cu ajutorul absciselor punctelor (§ 14), relația geometrică devine

$$\frac{x_1-x'}{x_2-x'}+\frac{x_1-x''}{x_2-x''}=0$$

care se poate pune sub forma

$$2(x_1x_2+x'x'')-(x_1+x_2)(x'+x'')=0. \tag{29}$$

Simetria acestei relații arată că punctele A și B sînt la rîndul lor conjugate față de C și D, căci dacă schimbăm rolurile celor două perechi de puncte, adică înlocuim pe x_1, x_2 cu x', x'' și pe x', x'' cu x_1, x_2 relația (29) nu se schimbă.

Cazuri particulare. 1) Dacă alegem originea în punctul D, atunci $x''=0$ și relația (29) se scrie sub forma

$$\frac{2}{x'}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}. \tag{30}$$

Abscisa x' care verifică relația (30) se numește *media armonică* a absciselor x_1, x_2.

2) Dacă alegem originea în mijlocul segmentului $\overline{CD}$, atunci $x'+x''=0$, deci $x''=-x'$ și relația (26) devine

$$x_1x_2-x'^2=0 \quad\text{sau}\quad x'=\sqrt{x_1x_2}, \tag{31}$$

adică abscisa x' este *media geometrică* (proporțională) a celorlalte două.

Aplicații. *1. Să se determine punctul M pe axa Ox, astfel ca fiind date punctele A, B, C să avem relația vectorială*

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0.$$

Scriind vectorii cu vectorii de poziţie avem

$$(\bar{r}_1-\bar{r})+(\bar{r}_2-\bar{r})+(\bar{r}_3-\bar{r})=0 \text{ care dă}$$

$$\bar{r}=\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{3},$$

deci vectorul de poziţie al punctului M este media aritmetică a vectorilor de poziţie ai punctelor A, B, C.

Se deduce imediat că relaţia dintre abscise este

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

adică abscisa lui M este media absciselor lui A, B, C. Generalizarea pentru n puncte este imediată

$$x=\frac{\Sigma x_k}{n}.$$

2. Se dau vectorii $\bar{a}(-3)$, $\bar{b}(5)$, $\bar{c}(-6)$. Să se determine vectorii $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$.

$\bar{s}=(-3+5-6)\bar{i}=-4\bar{i}$, deci $\bar{s}(-4)$,

$\bar{d}=(-3+5+6)\bar{i}=8\bar{i}$, deci $\bar{d}(8)$.

3. Se dau pe o axă punctele $A(a)$ şi $B(b)$, apoi se împarte segmentul $\overline{AB}$ în trei părţi egale. Să se afle abscisele punctelor de diviziune.

Fie, de la A către B, M şi N punctele de diviziune cu abscisele m şi n. Avem

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=-\frac{2}{1};$$

Atunci

$$m=\frac{a+\frac{1}{2}b}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2a+b}{3}; \qquad n=\frac{a+2b}{1+2}=\frac{a+2b}{3}.$$

4. Se dau pe o axă punctele $A(-2)$, $B(6)$ şi se cere să se determine abscisele extremităţilor segmentului $\overline{CD}=8$, ştiind că dacă M, N sînt respectiv mijloacele segmentelor $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$, avem $\overline{MN}=12$.

Notăm cu m şi n abscisele lui M şi N. Avem $m=\frac{-2+6}{2}=2$, apoi $\overline{MN}=n-m=12$, de unde $n=14$. Mai departe $\overline{CN}=4$ şi $\overline{ND}=4$, deci $n-c=4$ şi $d-n=4$, care dau $c=n-4=10$, $d=n+4=18$. Capetele segmentului sînt $C(10)$ şi $D(18)$.

5. Fiind date punctele A, B, C pe o axă, să se determine abscisa unui punct M astfel ca să avem relaţia

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=0.$$

Există totdeauna soluţii?

Notăm cu a, b, c abscisele punctelor A, B, C şi cu x abscisa lui M. Scriind direct coordonatele vectorilor cu ajutorul absciselor [relaţia (21)] ajungem la ecuaţia

$$(a-x)(b-x)+(b-x)(c-x)+(c-x)(a-x)=0 \text{ sau}$$

$$3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0.$$

Se obţin două valori pentru x, deci două puncte M şi M'. Pentru a vedea dacă avem totdeauna soluţii, calculăm realizantul

$$R=4[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]=2(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

care se poate pune sub forma

$$R=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]>0,$$

deoarece este o sumă de pătrate. Ecuaţia are totdeauna rădăcini reale şi problema admite totdeauna soluţii. Avem $R=0$ numai dacă $a=b=c$, caz neinteresant.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Se dau punctele $A(-4)$, $B(2)$ şi $M\left(-\frac{5}{2}\right)$. Se cere reprezentarea punctelor pe axă şi valoarea raportului $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

$\left[k=-\frac{1}{3}\right]$

2. Fiind date trei puncte A, B, C pe o dreaptă, să se determine un al patrulea punct M astfel încît să avem:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=0$$

$$[A(x_1),\ B(x_2),\ C(x_3),\ M(x);\ x=\frac{\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3}{\alpha+\beta+\gamma},$$

x este media ponderată a numerelor x_1, x_2, x_3.]

3. Fiind date n puncte A_1, A_2, ..., A_n pe o dreaptă, să se determine un punct M diferit de celelalte, astfel ca să avem

$$\overrightarrow{MA}_1+\overrightarrow{MA}_2+\ldots+\overrightarrow{MA}_n=0.$$

$\left[x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.\right]$

4. Se dau pe o dreaptă trei puncte A, B, C, de abscise, respectiv a, b, c. Să se determine abscisa x a unui al patrulea punct D, astfel ca să existe relaţia

$$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}+4\overrightarrow{DA}=0.$$

Generalizare.

[$x=3a-b-c$.]

5. Între patru puncte coliniare A, B, C, D există relaţia

$$\overline{AB}\ \overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$$

segmentele fiind orientate.

6. Între patru puncte coliniare A, B, C, D există relația

$$\overline{DA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{DB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{DC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}=0$$

segmentele fiind orientate.

7. Fiind date pe o axă punctele A, B, C de abscise a, b, c, să se determine abscisa x a punctului M, astfel ca să avem

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=3\cdot\overline{OM}^2.$$

Generalizare.

$$\left[x=\frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)};\ \text{în general } x=\frac{\Sigma x_1^2}{2\Sigma x_1}.\right]$$

8. Pe o dreaptă orientată se consideră punctele A, B, C de abscise, respectiv a, b, c și se cere să se determine poziția punctului M, de abscisă x, care verifică relația

$$\overline{MC}^2+4\overline{MA}\ \overline{MB}=0.$$

$$\left[x=\frac{2a+2b+c\pm2\sqrt{a^2+b^2-c^2-3ab+ac+bc}}{5}.\right.$$

Să se arate că dacă avem o singură soluție, punctul B împarte segmentul AC în *medie și extremă rație.*]

9. Se dau pe o axă punctele $A(3)$ și $B(9)$. Să se găsească abscisele punctelor M și N care împart segmentul $\overline{AB}$ în rapoartele

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-2;\quad \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=\frac{2}{3}$$

[$M(7)\in\overline{AB}$; $N(-9)$ exterior segmentului.]

10. Pe un segment $\overline{AB}$ se consideră punctul M care îl împarte în raportul $k=-\frac{1}{4}$ și punctul N care îl împarte în raportul $k'=-3$. Să se exprime segmentul $\overline{MN}$ cu ajutorul segmentului $\overline{AB}$.

$$\left[\overline{MN}=\frac{11}{20}\overline{AB}.\right]$$

11. Aceeași problemă ca mai sus, k și k' fiind oarecare. Să se arate că avem

$$\overline{MN}=\frac{k-k'}{(1-k)(1-k')}\overline{AB}.$$

12. Două forțe paralele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ de același sens au ca puncte de aplicație $A(x_1)$ și $B(x_2)$. Care este punctul de aplicație al rezultantei lor? Dar dacă forțele sînt de sens contrar?

$$\left[x=\frac{x_1F_1+x_2F_2}{F_1+F_2}.\right.$$ Se știe că pentru punctul de aplicație M avem $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{F_2}{F_1}$, deci $k=-\frac{F_2}{F_1}$ care se introduce în (26)].

13. În punctul $A(2)$ se pune o greutate de 240 N și în punctul $B(15)$ o greutate de 150 N. De unde poate fi suspendată axa Ox, ca să rămînă în echilibru? (Axa Ox se presupune fără greutate).

$$\left[x=\frac{240\cdot2+150\cdot15}{390}=7.\right]$$

14. Trei forțe paralele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, de același sens, au punctele de aplicație $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, $A_3(x_3)$. Care este punctul de aplicație al rezultantei lor? Generalizare în cazul a n forțe.

$$\left[x=\frac{x_1F_1+x_2F_2+x_3F_3}{F_1+F_2+F_3};\ \text{în general } x=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}.\right]$$

15. O grindă lungă de 4 m este așezată cu extremitățile sale pe două reazeme A și B. Greutatea grinzii este de 160 N. Știind că reazemul din A nu poate ține mai mult de 740 N, care este distanța minimă față de A a punctului M în care se poate atîrna o greutate de 1 500 N?

[$AM\geqslant 2{,}24$ m. Se alege originea în A, deci $A(0)$ și $B(4$ m).

$$x=\frac{F_1x_1+F_2x_2}{F_1+F_2}=\frac{F_2\cdot4}{1\,500}\quad\text{sau}\quad x=4\ \frac{(1\,500-F_1)}{1\,500}=4-\frac{8}{3}F_1.$$

Reazemul din A se încarcă cu 80 N din greutatea grinzii, deci mai poate ține 660 N din cele 1 500; $F_1\leqslant 660$ N.]

16. Se dau punctele $A(3)$, $B(9)$ și $M(5)$. Să se găsească punctul N conjugatul armonic al lui M față de A și B.

[Se folosește relația (29); $x=-3$.]

17. Aceeași problemă pentru punctele $A(-6)$, $B(3)$, $M(0)$.

[$x=12$.]

18. Fie $\overline{AB}$ un segment, C, D punctele care împart segmentul respectiv în rapoartele $-k$ și k, M mijlocul segmentului $\overline{CD}$. Să se calculeze raportul în care M împarte segmentul $\overline{AB}$.

$$\left[\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k^2,\ \text{deci } M \text{ este exterior segmentului } \overline{AB}.\right]$$

19. Se dau punctele $A(-1)$, $B(5)$. Să se determine punctele M și N conjugate armonic față de A și B astfel ca $\overline{MN}=8$.

[Se formează un sistem de ecuații. Găsim două soluții:

a) $M(-7)$, $N(1)$ și b) $M(3)$, $N(11)$.]

20. a) M și M' fiind două puncte conjugate armonic față de A și B, să se calculeze vectorul $\overrightarrow{MM'}$ în funcție de vectorul $\overrightarrow{AB}$ și de raportul k în care este împărțit segmentul $\overline{AB}$.

b) M fiind presupus interior segmentului $\overline{AB}$ $(a<b)$, să se deducă sensul vectorului $\overrightarrow{MM'}$ față de $\overrightarrow{AB}$, după valorile lui k în raport cu unitatea.

[Se poate folosi problema 11. $\overrightarrow{MM'}=\frac{2k}{1-k^2}\overrightarrow{AB}$. Pentru $k<-1$ sens contrar cu AB].

21. Se dau două perechi de puncte A, B și C, D pe aceeași axă. Să se determine punctul M pentru care avem relația

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}.$$

Care este condiția ca M să fie la distanță finită?

Să se dea și soluția geometrică și să se verifice condiția de existență a lui M la distanță finită.

[Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ și $M(x)$. Se găsește o singură soluție $x=\frac{ab-cd}{(a+b)-(c+d)}$, cu condiția $a+b\neq c+d$ sau $\frac{a+b}{2}\neq\frac{c+d}{2}$ adică cele două segmente să nu aibă același mijloc.

Geometric. Se duc prin A, B și C, D cîte un cerc arbitrar. M are aceeași putere față de ele, deci este la intersecția axei Ox cu axa radicală a celor două cercuri. Condiția este ca axa radicală să nu fie paralelă cu Ox, adică mijloacele lui $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ să nu coincidă.]

CAPITOLUL II

VECTORI ÎN PLAN

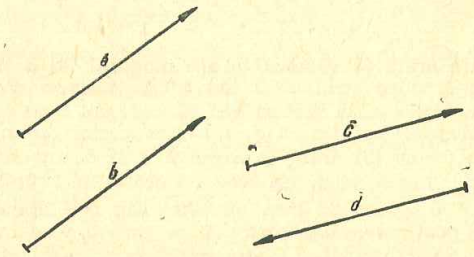


Fig. 9. Fig. 10.

1. În primul capitol s-a văzut că vectorii situați pe o dreaptă nu pot fi decît vectori alunecători sau vectori legați. În plan însă putem avea și vectori liberi, adică vectori care au același modul, aceeași direcție, același sens, dar punctul lor de aplicație (originea) poate fi orice punct al planului (v. „Introducere" § 4). În tot ce urmează se va face studiul *vectorilor liberi*, deoarece atunci cînd este vorba de vectori alunecători sau legați este de ajuns să impunem condițiile suplimentare respective; cu alte cuvinte, chestiunea se reduce la un caz particular al vectorilor liberi.

2. *Vectori egali.* Prin definiție doi vectori se zic *egali*, dacă au *același modul*, *aceeași direcție* și *același sens*, indiferent unde sînt așezați în plan* (fig. 9). Se arată în scris acest lucru astfel

$$\bar{a}=\bar{b}. \tag{1}$$

Definiția este justificată prin faptul că vectorii fiind *liberi*, ei pot fi aduși să aibă aceeași origine și în acest caz sînt evident egali. Doi vectori care au același *modul* și aceeași *direcție*, dar sînt de *sens contrar*, îi vom numi *vectori opuși* (fig. 10) și vom scrie

$$\bar{c}=-\bar{d} \text{ sau } \bar{c}+\bar{d}=0. \tag{2}$$

Să precizăm că atunci cînd spunem că doi vectori au aceeași direcție, aceasta înseamnă că ei pot fi situați pe două drepte paralele sau pe aceeași dreaptă.

3. *Vectori coliniari.* Doi vectori situați pe aceeași dreaptă sau pe drepte paralele — deci de aceeași direcție — se numesc *coliniari*, indiferent dacă au același sens sau nu.

* Mai general vectorii egali se definesc, în spațiu, cu aceleași condiții, indiferent de așezarea lor în spațiu.

Deoarece vectorii coliniari pot fi aduși pe aceeași dreaptă, adunarea și scăderea lor se face la fel cu a vectorilor de pe o dreaptă (cap. I).

Să ne oprim puțin asupra produsului dintre un vector și un scalar. Fie $\bar{a}$ un vector dat și $\bar{b}$ un vector coliniar cu $\bar{a}$, astfel că $b=|k|\cdot a$. Dacă aducem vectorii pe aceeași dreaptă atunci avem relația vectorială

$$\bar{b}=k\,\bar{a} \tag{3}$$

care arată că vectorul $\bar{b}$ are modulul $|k|\cdot a$ și sensul același sau contrar cu $\bar{a}$, după cum $k>0$ sau $k<0$. Reciproc o relație de forma (3) arată *egalitatea* a doi vectori $\bar{b}$ și $k\bar{a}$, care pot fi pe aceeași dreaptă sau pe drepte paralele. Rezultă că $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt vectori coliniari. Prin urmare o relație de forma (3) arată că vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt coliniari. Scalarul k poate fi orice număr real, așa cum s-a arătat în capitolul I, § 6.

4. *Versorul unei direcții.* Din cele spuse mai înainte se deduce că se poate alege un vector $\bar{a}$, pe care îl vom numi *vector fundamental*, cu ajutorul căruia se poate exprima oricare altul din mulțimea vectorilor coliniari cu $\bar{a}$, așa cum arată relația (3).

În particular se poate alege vectorul α, de modul 1 cu ajutorul căruia se poate exprima orice alt vector care are direcția lui $\bar{\alpha}$. Acesta este *vectorul unitar* sau *versorul* care definește direcția în plan și sensul pozitiv pe această direcție. Un vector oarecare $\bar{u}$, care are direcția definită de versorul $\bar{\alpha}$, se va scrie

$$\bar{u}=\pm u\,\bar{\alpha} \tag{4}$$

după cum $\bar{u}$ este de același sens sau de sens contrar cu $\bar{\alpha}$.

5. *Vectori oarecare. Adunarea vectorilor.* Dacă doi vectori liberi nu sînt coliniari, vom spune că sînt vectori oarecare în plan. În acest caz ei au direcții diferite, dar îi putem aduce totdeauna cu originea în același punct.

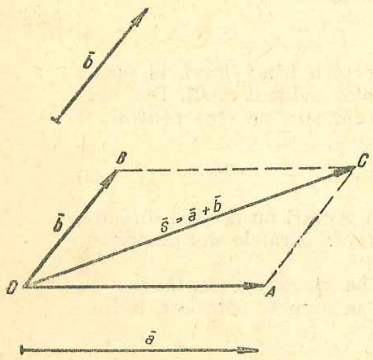


Fig. 11.

Suma a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se construiește astfel (fig. 11): printr-un punct oarecare O al planului se duc vectorii $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ și $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$, apoi se construiește paralelogramul $OACB$; *vectorul* $\overrightarrow{OC}$ (diagonala paralelogramului) este, *prin definiție*, suma celor doi vectori sau rezultanta celor doi vectori. Se scrie acest lucru astfel:

$$\bar{s}=\overrightarrow{OC}=\bar{a}+\bar{b}. \tag{5}$$

Suma vectorială se mai numește uneori și sumă geometrică și are la bază observarea faptelor reale. Astfel se știe că două forțe se compun după regula paralelogramului, două viteze, două accelerații se compun după aceeași regulă etc.

Să se observe însă că se obține același vector $\overrightarrow{OC}$ dacă luăm vectorul $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$, iar în A punem vectorul $\overrightarrow{AC}=\bar{b}$. Prin urmare în loc să construim paralelogramul $OACB$, putem construi numai triunghiul OAC; aceasta se numește regula triunghiului pentru obținerea *sumei a doi vectori.*

Modulul vectorului sumă se deduce din triunghiul OAC $|\overrightarrow{OC}|^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{OAC}$ însă $\sphericalangle OAC=180°-\sphericalangle AOB$, deci $|\overrightarrow{OC}|^2=s^2=a^2+b^2+2ab\cos\widehat{AOB}=a^2+b^2+2ab\cos(\bar{a},\bar{b})$. (6)

Cazul vectorilor coliniari se deduce din cele de mai sus ca o particularizare: dacă $\sphericalangle AOB=0$ vectorii au același sens, dacă $\sphericalangle AOB=180°$ vectorii au sensuri contrare.

Suma mai multor vectori în același plan. Să considerăm patru vectori $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ și să găsim suma lor. Vom folosi regula triunghiului. Alegem un punct oarecare O și luăm $\overrightarrow{OA_1}=\bar{a}_1$, apoi $\overrightarrow{A_1A_2}=\bar{a}_2$. Suma celor doi vectori este (fig. 12).

$$\bar{a}_1+\bar{a}_2=\overrightarrow{OA_2}=\bar{s}_1.$$

În continuare avem

$$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3=\bar{s}_1+\bar{a}_3=\overrightarrow{OA_3}=\bar{s}_2$$

și în sfîrșit

$$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4=\bar{s}_2+\bar{a}_4=\overrightarrow{OA_4}=\bar{s}. \tag{7}$$

De aici rezultă următoarea regulă: *dintr-un punct oarecare O al planului se ia vectorul $\overrightarrow{OA_1}=\bar{a}_1$, cu originea în A_1 se ia al doilea vector $\overrightarrow{A_1A_2}=\bar{a}_2$ etc. pînă se ajunge la vectorul $\overrightarrow{A_3A_4}=\bar{a}_4$ și se formează astfel conturul poligonal $OA_1A_2A_3A_4$; vectorul $\overrightarrow{OA_4}$, care închide acest contur și are originea în O, este suma celor patru vectori.*

Extinderea la cazul a n vectori este evidentă.

Consecință. *Dacă linia poligonală se închide*, adică formează un poligon, *suma vectorilor este nulă.*

Proprietăți. a) Suma vectorială este *comutativă*. Este destul să se arate acest lucru pentru doi termeni, ceea ce se pune în evidență imediat cu paralelogramul $OACB$ (v. fig. 11). În adevăr

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\bar{a}+\bar{b}\ \text{ și }\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\bar{b}+\bar{a}$$

de unde rezultă

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}. \tag{8}$$

b) Suma vectorială este *asociativă*. În adevăr se poate urmări pe figura 12 că

$$\bar{s}=\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4=\bar{a}_1+(\bar{a}_2+\bar{a}_3)+\bar{a}_4=\bar{a}_1+\overrightarrow{A_1A_3}+\bar{a}_4. \tag{9}$$

Rezultă că ordinea în care se face adunarea vectorilor nu interesează: rezultanta este aceeași.

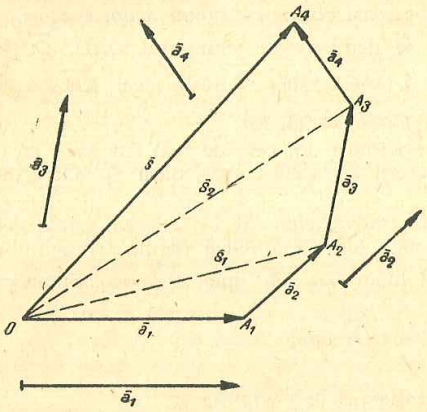


Fig. 12.

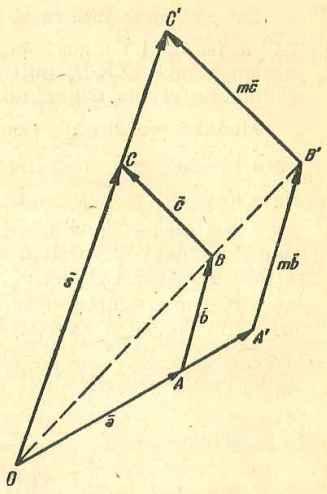


Fig. 13.

c) *Înmulțirea cu un scalar este distributivă față de adunarea vectorilor*, adică

$$m(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})=m\bar{a}+m\bar{b}+m\bar{c}.$$

Pentru a arăta acest lucru construim vectorul sumă $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ (fig. 13), apoi luăm $\overrightarrow{OA'}=m\bar{a}$, $\overrightarrow{A'B'}=m\bar{b}$ și $\overrightarrow{B'C'}=m\bar{c}$.

Să observăm însă că vectorul $m\bar{b}$ este coliniar cu $\bar{b}$, deci $A'B' \| AB$ și triunghiul $OA'B'$ este asemenea cu triunghiul OAB ($\sphericalangle A=\sphericalangle A'$ și laturile care formează aceste unghiuri, proporționale), de unde rezultă că $\sphericalangle AOB=\sphericalangle A'OB'$, deci O, B, B' sînt coliniare și $\overrightarrow{OB'}=m\overrightarrow{OB}$. La fel se arată că triunghiurile OBC, $OB'C'$ sînt asemenea de unde se deduce: a) punctele O, C, C' sînt în linie dreaptă, b) $\overrightarrow{OC'}=m\overrightarrow{OC}=m\bar{s}$.

Prin urmare dacă adunăm vectorii $m\bar{a}$, $m\bar{b}$, $m\bar{c}$ se formează un contur poligonal $OA'B'C'$ asemenea cu conturul $OABC$, cu raportul de asemănare $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=m$. Vectorul sumă este $\overrightarrow{OC'}=m\bar{s}$, adică $m\bar{s}=m\bar{a}+m\bar{b}+m\bar{c}$, sau înlocuind pe $\bar{s}$,

$$m(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})=m\bar{a}+m\bar{b}+m\bar{c}. \qquad \text{c.c.t.d.}$$

6. *Relația dintre modulul sumei și suma modulelor.* Deoarece orice latură a unui poligon este mai mică decît suma celorlalte, se poate scrie (v. fig. 12)

$$OA_4<OA_1+A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4.$$

Dacă ținem seama că lungimea fiecărui segment este modulul vectorului respectiv și dacă includem și cazul vectorilor coliniari *de același sens* cînd în loc de neegalitate avem egalitate, putem scrie

$$|\overrightarrow{OA_4}|\leqslant|\overrightarrow{OA_1}|+|\overrightarrow{A_1A_2}|+|\overrightarrow{A_2A_3}|+|\overrightarrow{A_3A_4}|$$

sau

$$|\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\bar{a}_4|\leqslant|\bar{a}_1|+|\bar{a}_2|+|\bar{a}_3|+|\bar{a}_4|. \qquad (10)$$

Pentru cazul general a n vectori, același raționament.

7. *Diferența a doi vectori.* Vom folosi cele două feluri de a defini diferența a doi vectori:

a) *A scădea doi vectori înseamnă a găsi un al treilea vector, care adunat cu vectorul scăzător să ne dea vectorul descăzut.*

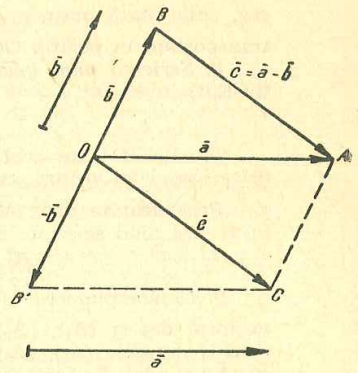


Fig. 14.

b) *A scădea doi vectori înseamnă a aduna primul vector cu opusul celui de-al doilea.*

Vom folosi aceeași figură 14 pentru a arăta cele două moduri de a efectua scăderea. Fie dați vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ și vrem să găsim diferența $\bar{a}-\bar{b}=\bar{c}$.

Potrivit definiției (a) trebuie să avem

$$\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}.$$

Alegem un punct O ca origine și construim vectorii $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$, $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$. Este foarte clar că

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA} \text{ sau } \bar{a}=\bar{b}+\overrightarrow{BA}$$

de unde se deduce

$$\bar{a}-\bar{b}=\bar{c}=\overrightarrow{BA}$$

sau

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}. \qquad (11)$$

De aici regula: *diferența a doi vectori cu originea comună, $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$, $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$ este un al treilea vector care are ca origine extremitatea vectorului scăzător și ca extremitate, extremitatea vectorului descăzut.*

Dacă plecăm de la definiția (b) a scăderii atunci se face suma lui $\bar{a}$ cu opusul lui $\bar{b}$, deci

$$\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OC}. \qquad (12)$$

Se vede imediat că $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}$ din cauza paralelogramului $OCAB$.

Observare. Dacă vectorii sînt legați atît suma cît și diferența trebuie să fie vectori cu originea în *originea comună* O. Deci în acest

caz, chiar dacă obținem ca diferență vectorul $\overrightarrow{BA}$ (fig. 14) trebuie să-l transportăm în poziția $\overrightarrow{OC}$, cu originea în O.

8. *Scrierea unui vector ca diferență de doi vectori.* Să scriem relația (11′) inversată

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}. \tag{13}$$

Punctul O este arbitrar, deci orice vector se poate descompune în diferența a doi vectori, care au aceeași origine arbitrară.

Prin urmare dacă $\overrightarrow{MN}$ este un vector în plan și A, B etc. puncte în același plan se poate scrie

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\dots \tag{13′}$$

9. *Descompunerea unui vector după două direcții neparalele.* Fie $\bar{u}$ vectorul dat și (Δ_1), (Δ_2) direcțiile date. Luăm vectorul $\overrightarrow{OU}=\bar{u}$, ducem prin O dreptele (Δ_1), (Δ_2) cu direcțiile date, apoi prin U ducem paralele cu (Δ_1) și (Δ_2). Se formează paralelogramul OU_1UU_2 și se observă imediat că $\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OU_1}+\overrightarrow{OU_2}$ sau $\bar{u}=\bar{u}_1+\bar{u}_2$ (fig. 15).

În acest fel vectorul $\bar{u}$ a fost descompus după cele două direcții diferite date. Descompunerea este *unică*, fiindcă prin U se poate duce cîte o singură paralelă la (Δ_1) și (Δ_2) și rezultă un singur paralelogram. $\overrightarrow{OU_1}$ și $\overrightarrow{OU_2}$ sau $\bar{u}_1$ și $\bar{u}_2$ se numesc componentele lui $\bar{u}$ după cele două direcții.

Notă. Se poate demonstra că descompunerea unui vector după mai mult de două direcții este nedeterminată, adică se poate face într-o infinitate de feluri.

10. *Descompunerea unui vector după doi vectori, în plan, necoliniari.* Problema se pune acum astfel: să descompunem vectorul dat $\bar{u}$, după direcțiile a doi vectori dați $\bar{a}$, $\bar{b}$ *și să exprimăm componentele lui* $\bar{u}$ *cu vectorii* $\bar{a}$ *și* $\bar{b}$.

Fie $\overrightarrow{OU}=\bar{u}$ și $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$, $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$.

Se descompune vectorul $\bar{u}$ după direcțiile OA și OB (fig. 16) și se obțin componentele $\overrightarrow{OU_1}=\bar{u}_1$ și $\overrightarrow{OU_2}=\bar{u}_2$. Dar $\bar{u}_1$ este coliniar cu $\bar{a}$, deci se poate scrie sub forma $\bar{u}_1=m\bar{a}$, m fiind un scalar anume $m=\frac{u_1}{a}$; la fel se poate scrie $\bar{u}_2=n\bar{b}$, unde $n=\frac{u_2}{b}$.

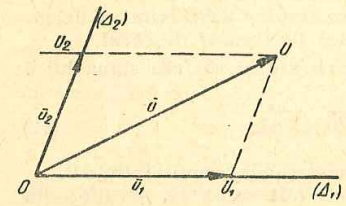


Fig. 15.

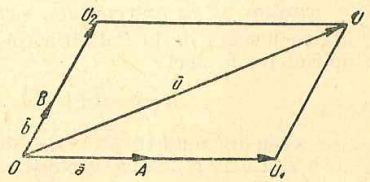


Fig. 16.

Înlocuind aceste expresii în $\bar{u}=\bar{u}_1+\bar{u}_2$ se obține

$$\bar{u}=m\bar{a}+n\bar{b}. \tag{14}$$

Această relație arată că orice vector conținut într-un plan se poate exprima cu ajutorul a doi vectori oarecare din același plan, cu condiția ca aceștia să nu fie coliniari. O relație de forma (14) în care vectorii se găsesc la puterea I se numește o relație de *dependență liniară*.

Pe scurt proprietatea de mai sus se enunță astfel: *orice vector dintr-un plan este liniar dependent de doi vectori oarecare, necoliniari, din acel plan.*

Relația (14) se poate pune și sub altă formă. În adevăr scalarii m și n nu sînt în general numere întregi, deci dacă scriem $m=-\frac{\alpha}{\gamma}$, $n=-\frac{\beta}{\gamma}$ atunci (14) devine

$$\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{u}=0. \tag{14′}$$

Sub această formă se vede că oricare din cei trei vectori este în dependență liniară față de ceilalți doi.

Să demonstrăm acum că descompunerea (14) este *unică*, față de vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ necoliniari.

a) Între doi vectori necoliniari $\bar{a}$, $\bar{b}$ nu putem avea o relație de forma $\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}=0$, căci atunci ar rezulta $\bar{b}=-\frac{\lambda}{\mu}\bar{a}=k\bar{a}$, adică $\bar{b}$ ar fi coliniar cu $\bar{a}$, ceea ce contrazice ipoteza.

b) Să presupunem acum că ar exista două descompuneri

$$\bar{u}=m\bar{a}+n\bar{b} \quad \text{și} \quad \bar{u}=m'\bar{a}+n'\bar{b}.$$

Ar rezulta $m\bar{a}+n\bar{b}=m'\bar{a}+n'\bar{b}$ sau

$$(m-m')\bar{a}+(n-n')\bar{b}=0. \tag{15}$$

Pot fi luate în considerare următoarele situații

1) $m\neq m'$, $n\neq n'$, în care caz, conform celor spuse la (a) vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt coliniari și aceasta este contrar ipotezei.

2) $m=m'$, $n\neq n'$. Rezultă $(n-n')\bar{b}=0$, de unde $\bar{b}=0$ iarăși contrar ipotezei, căci $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt vectori veritabili, cu direcții date.

3) $m\neq m'$, $n=n'$, în care caz $\bar{a}=0$, imposibil.

Rămîne singura posibilitate $m=m'$ și $n=n'$ care arată că descompunerea este *unică*.

Se deduce de aici că fiind dat *un grup de trei vectori necoliniari*, oricare dintre ei se poate exprima liniar în funcție de ceilalți doi.

De asemenea dacă se aleg doi vectori necoliniari $\bar{a}$ și $\bar{b}$ ca vectori de bază, orice vector din plan se poate exprima liniar în funcție de $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Vectorii aleși $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numesc *vectori fundamentali* și se spune că ei formează o *bază* în plan, cu ajutorul căreia se exprimă orice alt vector.

11. *Proiecția unui vector pe o axă* se obține la fel ca proiecția oricărui segment, adică proiectînd pe axă extremitățile vectorului. Proiecția

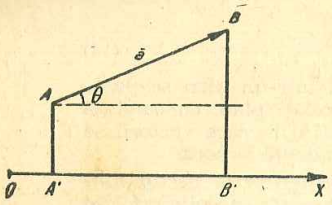


Fig. 17.

unui vector pe o axă este un vector. Această proiecție este componenta vectorului după axă (fig. 17).

Mărimea proiecției vectorului $\overrightarrow{AB}$ este segmentul $\overline{A'B'}$, luat cu semnul (+) dacă are aceeași orientare cu axa Ox și cu semnul (—) în caz contrar.

Dacă notăm cu θ unghiul făcut de vectorul $\overrightarrow{AB}=\bar{a}$ cu sensul pozitiv al axei Ox și amintim că proiecția unui segment pe o axă este egală cu segmentul însuși înmulțit cu cosinusul unghiului format de vector cu axa, atunci rezultă

$$\overline{A'B'}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=a\cos\theta. \qquad (16)$$

Acest lucru se scrie în mod obișnuit sub forma

$$(\mathrm{pr}.\bar{a})_{Ox}=a\cos\theta. \qquad (16')$$

Dacă $\theta<90^\circ$ atunci proiecția $\overline{A'B'}$ are semnul (+), deoarece are sensul axei Ox, dacă $90^\circ<\theta<270^\circ$, $\overline{A'B'}$ are semnul (—), dacă $270^\circ<\theta<360^\circ$, $\overline{A'B'}$ are semnul (+), iar dacă $\theta=90^\circ$ sau 270°, $\overline{A'B'}=0$.

12. Descompunerea unui vector după două axe perpendiculare. Descompunerea se face la fel ca în cazul a două direcții oarecare cu singura deosebire că cele două componente $\overrightarrow{AC}=\bar{a}_1$ și $\overrightarrow{AD}=\bar{a}_2$ sînt laturile unui dreptunghi. În același timp însă segmentele $\overline{AC}=\overline{A_1B_1}=a_x$, $\overline{AD}=\overline{A_2B_2}=a_y$ sînt și proiecțiile vectorului $\overrightarrow{AB}$, respectiv pe axele perpendiculare Ox, Oy (fig. 18).

Rezultă că

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} \quad \text{sau} \quad \bar{a}=\bar{a}_1+\bar{a}_2 \qquad (17)$$

și

$$a_x=(\mathrm{pr}\cdot\bar{a})_{Ox}=a\cos\theta;\quad a_y=(\mathrm{pr}\cdot\bar{a})_{Oy}=a\sin\theta \qquad (18)$$

proiecțiile fiind socotite *scalari*.

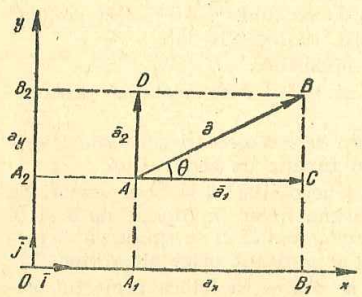


Fig. 18.

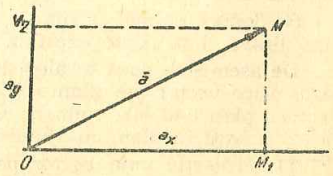


Fig. 19.

Este foarte clar că dacă vectorul $\bar{a}$ este dat, proiecțiile sale a_x, a_y pe cele două axe perpendiculare sînt determinate ca mărime și semn (pozițiile lor pe axe nu interesează fiindcă este vorba de vectori liberi).

Reciproc dacă proiecțiile a_x, a_y pe cele două axe sînt cunoscute, vectorul este *perfect determinat*. În adevăr dacă măsurăm din origine pe a_x și a_y cu semnele lor (în figura 19 ambele pozitive) și ducem prin M_1 și M_2 paralele la axe, rezultă un singur punct M, care este extremitatea vectorului $\overrightarrow{OM}=\bar{a}$ determinat în mod unic. Desigur fiind vorba de vectori liberi, $\bar{a}$ poate fi considerat oriunde în plan, paralel cu el însuși. Se observă imediat că dacă $a_x>0$, $a_y>0$ punctul M este în primul cadran, dacă $a_x<0$, $a_y>0$, M este în al doilea cadran etc.

Pentru motivul că proiecțiile a_x, a_y determină vectorul $\bar{a}$ ele se numesc *coordonatele vectorului* și se arată acest lucru scriind $\bar{a}\,(a_x, a_y)$. Se citește: vectorul $\bar{a}$ de coordonate a_x, a_y.

Se pune acum întrebarea: care este legătura între componentele $\bar{a}_1=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1B_1}$, $\bar{a}_2=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_2B_2}$ și coordonatele $a_x=\overline{AC}=\overline{A_1B_1}$, $a_y=\overline{AD}=\overline{A_2B_2}$? Se observă imediat (fig. 18) că scalarii a_x, a_y sînt modulele vectorilor $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, luate cu semnul (+) sau (—) după cum segmentele corespunzătoare au sensul pozitiv sau negativ al axei, deci $a_x=\pm|\bar{a}_1|$, $a_y=\pm|\bar{a}_2|$. Aceasta arată că a_x este coordonata vectorului $\overrightarrow{A_1B_1}$ pe Ox și a_y este coordonata lui $\overrightarrow{A_2B_2}$ pe Oy.

Atunci, dacă se aleg *vectorii unitari* (versorii) $\bar{i}$ pe Ox și $\bar{j}$ pe Oy ($|\bar{i}|=|\bar{j}|=1$), se poate scrie $\bar{a}_1=a_x\bar{i}$, $\bar{a}_2=a_y\bar{j}$ (fig. 18) și relația devine

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}. \qquad (19)$$

Vectorii fundamentali sînt aici versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ și se spune că ei formează o *bază ortonormată*.

Aceasta este exprimarea unui vector cu ajutorul coordonatelor sale și a versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$ pe axele perpendiculare Ox, Oy. Este bine să mai subliniem o dată că *coordonatele vectorului* $\bar{a}$ sînt proiecțiile sale a_x, a_y, iar *componentele vectorului* sînt $a_x\bar{i}$, $a_y\bar{j}$, primele fiind scalari, deci supuse operațiilor *algebrice*, celelalte vectori, deci supuse operațiilor *vectoriale* (geometrice).

13. *Condiția ca un vector să fie nul* este *ca ambele sale coordonate să fie nule*, deci *proiecțiile pe cele două axe să fie nule*.

În adevăr dacă vectorul este nul, este evident că și proiecțiile sale pe cele două axe vor fi nule. Reciproc dacă proiecțiile a_x, a_y sînt nule, în baza relației (19), vectorul $\bar{a}$ este și el nul. Prin urmare condiția este necesară și suficientă.

Observare. Un vector care nu este nul, poate avea una din coordonate nulă, dacă este perpendicular pe axa corespunzătoare.

Exemplu. *Să se figureze și să se scrie cu ajutorul versorilor, vectorii* $\bar{a}(2, -3)$, $\bar{b}(-3, -4)$.

Vectorii sînt construiți în figura 20. Exprimarea cu ajutorul versorilor este

$$\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j};\qquad \bar{b}=-3\bar{i}-4\bar{j}.$$

TRANSA III

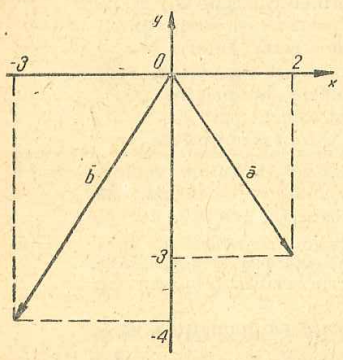


Fig. 20.

N o t a ţ i i. Coordonatele unui vector $\bar{a}$ le vom nota a_x, a_y sau a_1, a_2 sau X, Y; pentru vectorul $\bar{u}$ vom folosi coordonatele u_x, u_y sau u_1, u_2 sau X, Y etc. Cînd avem mai mulţi vectori este preferabil să folosim notaţii cu indici, de exemplu $\bar{a}_1(X_1, Y_1)$, $\bar{a}_2(X_2, Y_2)$ etc.

14. *Coordonatele sumei mai multor vectori.* Să considerăm vectorii $\bar{a}_1(X_1, Y_1)$, $\bar{a}_2(X_2, Y_2), \ldots,$ $\bar{a}_n(X_n, Y_n)$, prin urmare

$$\bar{a}_1 = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j};\quad \bar{a}_2 = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}, \ldots, \bar{a}_n = X_n\vec{i} + Y_n\vec{j}.$$

Suma vectorilor este tot un vector $\bar{s}$, care se scrie

$$\bar{s} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n = (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j}) + (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}) + \ldots + (X_n\vec{i} + Y_n\vec{j}). \tag{20}$$

Însă suma vectorială este comutativă, deci putem grupa toţi vectorii de pe o axă şi toţi vectorii de pe cealaltă axă:

$$s = (X_1\vec{i} + X_2\vec{i} + \ldots + X_n\vec{i}) + (Y_1\vec{j} + Y_2\vec{j} + \ldots + Y_n\vec{j}).$$

Ţinînd seama acum de cele spuse la adunarea vectorilor pe o axă (I, § 4 şi § 10) putem scrie

$$\bar{s} = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\vec{i} + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)\vec{j}. \tag{21}$$

Dacă notăm cu s_x, s_y coordonatele lui $\bar{s}$, atunci $\bar{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j}$ şi comparînd cu (21) rezultă

$$s_x = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ s_y = \sum_{k=1}^{n} Y_k \tag{22}$$

relaţii care se formulează astfel: *coordonatele vectorului sumă a mai multor vectori sînt sumele, pe fiecare axă, a coordonatelor vectorilor componenţi.*

În particular dacă suma vectorilor este nulă, atunci proiecţiile vectorului sumă sînt evident nule pe ambele axe, deci

$$s_x = \sum_{k=1}^{n} X_k = 0,\quad s_y = \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0. \tag{23}$$

Reciproc, dacă relaţiile (23) sînt îndeplinite, atunci vectorul sumă $\bar{s}$ este nul. În adevăr

$$s_x = |\bar{s}| \cos\theta = 0,\ s_y = |\bar{s}| \sin\theta = 0 \tag{24}$$

însă nu există nici un unghi θ pentru care să avem simultan $\cos\theta = 0$ şi $\sin\theta = 0$, deci singura posibilitate de a satisface relaţiile (24) este $|\bar{s}| = 0$, adică $\bar{s} = 0$.

15. *Coordonatele diferenţei a doi vectori.* Fie $\bar{a}(a_x, a_y)$ şi $\bar{b}(b_x, b_y)$ doi vectori daţi. Ne propunem să găsim coordonatele vectorului $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$. Pentru aceasta vom scrie vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ cu ajutorul componentelor

$$\bar{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j},\quad \bar{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$$

şi vom aminti că vectorul diferenţă se poate scrie ca sumă

$$\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b}),$$

şi problema s-a redus la a găsi coordonatele unei sume de vectori:

$$\bar{c} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + (-b_x\vec{i} - b_y\vec{j}) = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j}.$$

Prin urmare coordonatele vectorului diferenţă $\bar{c}$ sînt

$$c_x = a_x - b_x;\quad c_y = a_y - b_y \tag{25}$$

adică: *coordonatele vectorului diferenţă a doi vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ sînt diferenţele, pe fiecare axă, a coordonatelor celor doi vectori.*

Pentru ca diferenţa a doi vectori să fie nulă ($\bar{a} - \bar{b} = 0$) trebuie ca cei doi vectori să fie egali, căci altfel $\bar{a} + (-\bar{b}) \neq 0$. Aceasta înseamnă că dacă $\bar{a} - \bar{b} = 0$, rezultă $\bar{a} = \bar{b}$ şi reciproc.

Însă pentru ca vectorul diferenţă $\bar{c}$ să fie nul trebuie ca $c_x = 0$ şi $c_y = 0$, adică $a_x - b_x = 0$ şi $a_y - b_y = 0$. De aici se deduce că

$$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \begin{matrix} a_x = b_x \\ a_y = b_y \end{matrix} \tag{26}$$

şi reciproc.

Deci *condiţia necesară şi suficientă pentru ca doi vectori să fie egali este ca coordonatele lor de pe aceeaşi axă să fie egale.*

16. *Coordonatele produsului dintre un număr real (scalar) şi un vector.* Am arătat că produsul dintre un scalar k şi un vector $\bar{a}$ este un alt vector $\bar{b} = k\bar{a}$, coliniar cu $\bar{a}$ astfel ca între module există relaţia $b = |k| \cdot a$ sau $|k| = \dfrac{b}{a}$. De altă parte coordonatele unui vector faţă de cele două axe sînt proiecţiile vectorului pe axe, deci dacă $\theta = \sphericalangle(Ox, \bar{a}) = \sphericalangle(Ox, \bar{b})$:

$b_x = (\mathrm{pr} \cdot k\bar{a})_{Ox} = (ka)\cos\theta = k(a\cos\theta) = ka_x$
$b_y = (\mathrm{pr}\ k\bar{a})_{Oy} = (ka)\sin\theta = k(a\sin\theta) = ka_y.$

Aşadar, proiecţiile vectorului $k\bar{a}$ pe axele perpendiculare, deci *coordonatele vectorului $k\bar{a}$, sînt $k\,a_x$, $k\,a_y$, coordonatele vectorului $\bar{a}$ înmulţite cu scalarul k.*

17. *Condiţia ca doi vectori să fie coliniari.* Dacă $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sînt cei doi vectori coliniari înseamnă că între ei există o relaţie de forma $\bar{b} = k\,\bar{a}$. Pentru ca aceşti doi vectori să fie egali, condiţia necesară şi suficientă este ca, pe fiecare axă, coordonatele lor să fie egale, deci

$$b_x = k\,a_x,\quad b_y = k\,a_y; \tag{27}$$

scriind sub forma $\dfrac{b_x}{a_x} = k$, $\dfrac{b_y}{a_y} = k$ se deduce

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y}. \tag{28}$$

Aceasta arată că dacă vectorii sînt coliniari, coordonatele lor sînt proporționale. Reciproc, dacă coordonatele sînt proporționale, atunci valoarea comună a rapoartelor din (28) se notează cu k și rezultă relațiile (27) care arată că vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt coliniari. De aici se desprinde concluzia:

Condiția necesară și suficientă ca doi vectori să fie coliniari este ca coordonatele lor să fie proporționale.

18. Aplicații. *1. Se dau vectorii* $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ *și* $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$. *Să se arate că dacă M este mijlocul segmentului* AB, *atunci* $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})$.

(fig. 21).

Avem
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\\ \overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}\end{aligned}\right\}\ \text{prin adunare se obține}$$
$$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}.$$

Însă $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=0$ ca fiind vectori opuși, deci
$$2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\bar{a}+\bar{b} \text{ sau } \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b}).$$

Observare. Am dat această soluție ca să se vadă cum uneori calculul vectorial ascunde proprietățile geometrice în baza cărora rezultatul este adevărat. De exemplu aici $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ reprezintă diagonala paralelogramului construit cu vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, iar $\overrightarrow{OM}$ este jumătatea acestei diagonale, deci $\frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})$. Aceasta a doua soluție ține seama de proprietățile paralelogramului.

2. Să se demonstreze pe cale vectorială că segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi, este paralel cu a treia latură și are ca mărime jumătatea ei.

Scriem vectorul $\overrightarrow{DE}$ ca diferență de vectori (§ 8):
$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \qquad \text{(fig. 22).}$$

Însă E este mijlocul lui AC, deci potrivit exemplului precedent $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$. Înlocuind rezultă
$$DE=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$
care arată: 1) că vectorii $\overrightarrow{DE}$ și $\overrightarrow{BC}$ sînt coliniari, deci $\overline{DE}\|\overline{BC}$; 2) că între module avem $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$.

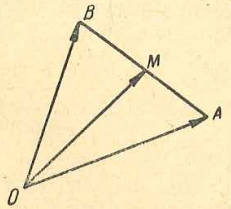


Fig. 21.

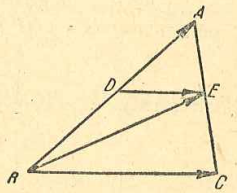


Fig. 22.

3. Să se demonstreze că dacă G este centrul de greutate al unui triunghi ABC, atunci $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$.

Fie M mijlocul laturii BC. Avem $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}$, deci $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}=0$, deoarece $\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ sau $2\overrightarrow{GM}=-\overrightarrow{GA}$ (se știe că G este pe fiecare mediană la $\frac{2}{3}$ de vîrful triunghiului).

4. Se dau vectorii coliniari $\bar{a}=-2\bar{i}+5\bar{j}$; $\bar{b}=4\bar{i}+\ldots$ *A doua componentă a lui* $\bar{b}$ *a fost nedescifrabilă. Să se găsească.*

Vectorii fiind coliniari, coordonatele lor sînt proporționale, deci $\frac{-2}{4}=\frac{5}{b_y}$, de unde $b_y=-10$. Vectorul este $\bar{b}=4\bar{i}-10\bar{j}$.

PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

19. *Produsul scalar a doi vectori.* Am văzut că adunarea vectorilor are la bază fapte experimentale (compunerea forțelor, a vitezelor etc.). Să considerăm acum o forță $\overrightarrow{F}$, constantă ca intensitate și direcție, care acționează asupra unui mobil M ce se deplasează pe o dreaptă (Δ). Dacă notăm cu θ unghiul pe care îl face direcția forței $\overrightarrow{F}$ cu dreapta (Δ), lucrul mecanic efectuat de forța $\overrightarrow{F}$ pentru a deplasa mobilul din M în M' (fig. 23) este dat de
$$\mathcal{L}=F\cdot\overline{MM'}\cos\theta$$
și reprezintă o mărime scalară.

Pentru o scriere mai concentrată se consideră pe lîngă vectorul $\overrightarrow{F}$ și vectorul $\overrightarrow{MM'}$ și se pune lucrul mecanic sub forma
$$\mathcal{L}=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{MM'} \qquad (29)$$
produsul din partea a doua a egalității avînd semnificația din expresia lucrului mecanic dată mai înainte, adică $\overline{F}\cdot\overline{MM'}\cos\theta$. Deoarece reprezintă un scalar, acest produs a primit numele de produs scalar. Această operație s-a extins și la alte categorii de vectori, astfel că a intrat în calculul vectorial, așa cum vom arăta în cele ce urmează.

Definiție. *Se numește produs scalar a doi vectori, numărul care rezultă din înmulțirea modulelor celor doi vectori și a cosinusului unghiului format de ei.*

Dacă notăm cu $\bar{a}$ și $\bar{b}$ cei doi vectori produsul lor scalar se scrie cu sau fără punct între factori, adică $\bar{a}\cdot\bar{b}$ sau $\bar{a}\bar{b}$. Potrivit definiției avem
$$\bar{a}\bar{b}=ab\cos(\bar{a},\bar{b}), \qquad (30)$$
înțelegînd prin $(\bar{a},\bar{b})$ unghiul făcut de vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$.

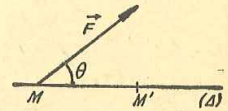


Fig. 23.

20. *Proprietăţile produsului scalar.* 1) *Produsul scalar este comutativ,* adică $\bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{a}$.

În adevăr $\bar{a}\bar{b}=ab\cos(\bar{a},\bar{b})$, iar $\bar{b}\bar{a}=ba\cos(\bar{b},\bar{a})$ însă a, b fiind scalari $ab=ba$, iar $\cos(\bar{a},\bar{b})=\cos(\bar{b},\bar{a})$, deoarece $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})=-\sphericalangle(\bar{b},\bar{a})$ şi se ştie că $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; prin urmare $\bar{a}\bar{b}$ şi $\bar{b}\bar{a}$ au aceeaşi valoare.

2) *La înmulţirea unui produs scalar cu un factor numeric, factorul numeric poate fi alăturat unuia din cei doi vectori,* adică

$$m(\bar{a}\bar{b})=(m\bar{a})\bar{b}=\bar{a}(m\bar{b}).$$

Considerăm întîi $m>0$. În acest caz $|m\bar{a}|=ma$, deci

$$m(\bar{a}\bar{b})=m\,ab\cos(\bar{a},\bar{b}) \text{ şi } (m\bar{a})\bar{b}=(ma)b\cos(m\bar{a},\bar{b}).$$

Dar vectorul $m\bar{a}$ este coliniar cu $\bar{a}$, deci $\sphericalangle(m\bar{a},\bar{b})=\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})$, de unde rezultă $(m\bar{a})\bar{b}=m\,ab\cos(\bar{a},\bar{b})$, prin urmare $m(\bar{a}\bar{b})=(m\bar{a})\bar{b}$. La fel se arată că $m(\bar{a}\bar{b})=\bar{a}(m\bar{b})$.

Considerăm acum $m<0$. Putem presupune unghiul vectorilor ascuţit (fig. 24), deoarece raţionamentul este asemănător şi în cazul cînd unghiul depăşeşte un unghi drept.

Avem $m(\bar{a},\bar{b})=m\,ab\cos(\bar{a},\bar{b})$ care din cauza factorului m este negativ. Apoi $(m\bar{a})\bar{b}=|m\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos(m\bar{a},\bar{b})=|m|\,ab\cos(\bar{b},m\bar{a})$. Însă dacă $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})=\alpha$, $\sphericalangle(\bar{b},m\bar{a})=\pi-\alpha$ şi $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$. Prin urmare $(m\bar{a})\bar{b}=|m|\,ab\,[-\cos(\bar{a},\bar{b})]=-|m|\,ab\cos(\bar{a},\bar{b})$. Deoarece $m<0$, avem $-|m|=m$, astfel că $(m\bar{a})\bar{b}=m\,ab\cos(\bar{a},\bar{b})$ şi deci $(m\bar{a})\bar{b}=m(\bar{a}\bar{b})$.

Egalitatea $m(\bar{a}\bar{b})=\bar{a}(m\bar{b})$ o vor dovedi elevii ca exerciţiu.

3) *Produsul scalar este nul:* a) *dacă unul din vectori este nul;* b) *dacă cei doi vectori sînt perpendiculari.* În adevăr din $\bar{a}\bar{b}=ab\cos(\bar{a},\bar{b})$ se vede că $\bar{a}\bar{b}=0$ dacă $a=0$, $b=0$ sau $\cos(\bar{a},\bar{b})=0$, adică $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})=\frac{\pi}{2}$.

De aici se deduce că dacă produsul scalar este nul, *fără ca vreunul din vectori să fie nul,* atunci vectorii sînt perpendiculari.

4) *Produsul scalar al unui vector prin el însuşi este egal cu pătratul modulului acelui vector.*

În adevăr unghiul făcut de un vector cu el însuşi este 0 şi $\cos 0=1$. Rezultă $\bar{a}\bar{a}=a\cdot a=a^2$, relaţie care se scrie sub forma

$$\bar{a}^2=a^2 \tag{31}$$

şi se enunţă sub forma simplă: *pătratul unui vector este egal cu pătratul modulului său.*

5) *Interpretarea geometrică a produsului scalar.* Am văzut la § 18 că produsul scalar reprezintă lucrul mecanic al unui mobil care se deplasează rectiliniu de la M la M' sub influenţa unei forţe $\vec{F}$ de modul constant şi direcţie fixă. Aceasta este interpretarea mecanică. Să vedem care este interpretarea geometrică.

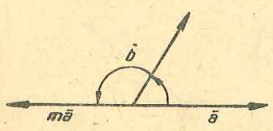


Fig. 24.

Pentru aceasta vom scrie

$$\bar{a}\bar{b}=ab\cos(\bar{a},\bar{b})=a[b\cos(\bar{a},\bar{b})]=a(\text{pr.}\bar{b})_{\bar{a}} \tag{32}$$

care arată că produsul scalar este egal cu produsul dintre modulul vectorului $\bar{a}$ şi proiecţia lui $\bar{b}$ pe direcţia lui $\bar{a}$. Dar tot aşa se poate scrie

$$\bar{a}\bar{b}=a\cos(b,\bar{a})=b(\text{pr.}\bar{a})_{\bar{b}} \tag{32'}$$

deci produsul dintre modulul lui $\bar{b}$, prin proiecţia vectorului $\bar{a}$, pe direcţia lui $\bar{b}$. Strîngînd la un loc aceste rezultate vom da enunţul general:

Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unuia din ei şi proiecţia celuilalt pe direcţia acestuia.

Aceasta este interpretarea geometrică a produsului scalar.

6) *Produsul scalar este distributiv faţă de adunarea vectorială.* Trebuie să dovedim că $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$. Se ştie că proiecţia unei sume de vectori pe o axă este egală cu suma proiecţiilor pe acea axă, prin urmare

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=a[\text{pr.}(\bar{b}+\bar{c})_{\bar{a}}]=a[(\text{pr.}\bar{b})_{\bar{a}}+(\text{pr.}\bar{c})_{\bar{a}}].$$

Am ajuns la o înmulţire de scalari, deci algebrică şi putem scrie

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=a(\text{pr.}\bar{b})_{\bar{a}}+a(\text{pr.}\bar{c})_{\bar{a}}=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}, \text{ adică}$$

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}. \tag{33}$$

Ordinea factorilor atît în prima parte cît şi în a doua parte a egalităţii este indiferentă.

7) *Produsul scalar a două sume vectoriale, neefectuate.* Este de ajuns să arătăm cum se face produsul $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{c}+\bar{d})$, căci regula rămîne aceeaşi dacă sumele au mai mulţi termeni. Să notăm vectorul sumă a parantezei a doua cu $\bar{s}$, deci $\bar{c}+\bar{d}=\bar{s}$. Atunci produsul se scrie $(\bar{a}+\bar{b})\bar{s}=\bar{a}\bar{s}+\bar{b}\bar{s}$. Înlocuind pe $\bar{s}$ şi efectuînd produsele [vezi (33)], avem

$$(\bar{a}+\bar{b})(\bar{c}+\bar{d})=\bar{a}(\bar{c}+\bar{d})+\bar{b}(\bar{c}+\bar{d})=\bar{a}\bar{c}+\bar{a}\bar{d}+\bar{b}\bar{c}+\bar{b}\bar{d}.$$

După cum se vede operaţia este absolut analogă cu înmulţirea sumelor algebrice, adică a polinoamelor.

21. *Produsul scalar dintre un vector şi un versor* reprezintă proiecţia vectorului pe direcţia versorului. În adevăr fie $\bar{a}$ vectorul, $\bar{u}_0$ versorul şi $\alpha=\sphericalangle(\bar{u}_0,\bar{a})$. Atunci $|\bar{u}_0|=1$ şi

$$\bar{a}\bar{u}_0=a\cdot 1\cdot\cos\alpha=a\cos\alpha \tag{34}$$

care este proiecţia lui $\bar{a}$ pe direcţia lui $\bar{u}_0$.

22. *Expresia produsului scalar a doi vectori daţi prin coordonatele lor.* Dacă ne alegem ca vectori fundamentali versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ pe axele ortogonale Ox, Oy (baza ortonormată) atunci potrivit proprietăţilor produsului scalar avem

$$\bar{i}^2=|\bar{i}|^2=1,\ \bar{j}^2=|\bar{j}|^2=1,\ \bar{i}\bar{j}=\bar{j}\bar{i}=0. \tag{35}$$

Considerăm acum vectorii $\bar{a}(a_x, a_y)$, $\bar{b}(b_x, b_y)$, adică

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j};\ \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}$$

şi efectuăm produsul lor scalar, ţinînd seama de (35):

$$\bar{a}\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j})(b_x\bar{i}+b_y\bar{j})=a_xb_x+a_yb_y,$$

deoarece termenii în $\bar{i}\bar{j}$ sînt nuli. Așadar

$$\bar{a}\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y, \tag{36}$$

ceea ce enunță: *produsul scalar a doi vectori este suma produselor coordonatelor (proiecțiilor) de același fel pe cele două axe.*

Exemplu. *Produsul scalar al vectorilor* $\bar{a}(-2,5)$, $\bar{b}(1,2)$ este $\bar{a}\bar{b}=-2\cdot1+5\cdot2=8$.

23. *Modulul unui vector.* Dacă cei doi vectori sînt egali $\bar{a}=\bar{b}$, atunci $a_x=b_x$, $a_y=b_y$ și $\bar{a}^2=a^2=a_x^2+a_y^2$, de unde rezultă *modulul*

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}. \tag{37}$$

24. *Unghiul a doi vectori* se poate calcula din expresia produsului scalar $\bar{a}\bar{b}=ab\cos\varphi$, unde $\varphi=\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})$. Rezultă

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\bar{b}}{ab} \quad \text{sau} \quad \cos\varphi=\frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}. \tag{38}$$

Dacă exprimăm vectorii în funcție de coordonatele lor, atunci

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}. \tag{39}$$

Exemplu. *Să se afle unghiul vectorilor*

$$\bar{a}\left[\frac{5}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),\ \frac{5}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right] \text{ și } \bar{b}(\sqrt{6}+\sqrt{2}\sqrt{6},-\sqrt{2}).$$

Avem $a_xb_x+a_yb_y=\frac{5}{4}(6-2)+\frac{5}{4}(6-2)=10$. Apoi

$$a=\sqrt{\frac{25}{16}\left(8-2\sqrt{12}+8+2\sqrt{12}\right)}=5;\ \bar{b}=\sqrt{8+2\sqrt{12}+8-2\sqrt{12}}=4,$$

deci $\cos\varphi=\frac{10}{5\cdot4}=\frac{1}{2}$, de unde $\varphi=60^\circ$.

25. *Condiția ca doi vectori să fie perpendiculari* se deduce fie din (36), deoarece produsul scalar trebuie să fie nul, deci

$$a_xb_x+a_yb_y=0, \tag{40}$$

fie din (39), unde dacă $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi=0$, deci numărătorul fracției trebuie să fie nul, ceea ce duce tot la relația (40).

Exemplu. *Vectorii* $\bar{a}(-3,4)$, $\bar{b}(8,6)$ sînt *perpendiculari, deoarece*

$$a_xb_x+a_yb_y=-3\cdot8+4\cdot6=0.$$

26. Aplicații. *1. Proiecția unui vector pe o dreaptă oarecare.* Fie vectorul $\bar{a}$ și dreapta dată (Δ). Alegem pe (Δ) versorul $\bar{u}_0$ care definește direcția și sensul pe dreaptă. Produsul scalar ne dă proiecția lui $\bar{a}$ pe (Δ) (§ 8), adică

$$\bar{a}\,\bar{u}_0=a\cdot1\cdot\cos\varphi=(\text{pr. }\bar{a})_\Delta, \text{ unde } \varphi=\sphericalangle(\Delta,\bar{a}).$$

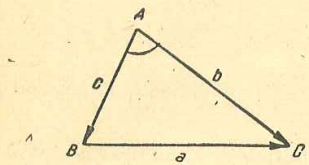


Fig. 25.

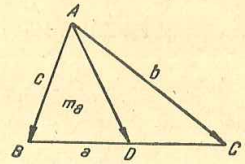


Fig. 26.

Să considerăm acum un sistem de axe perpendiculare Ox, Oy. Dacă dreapta (Δ) face cu Ox unghiul α, atunci proiecțiile versorului $\bar{u}_0$ pe axe sînt $(u_0)_x=1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$; $(u_0)_y=\sin\alpha$ și $\bar{u}_0=\bar{i}\cos\alpha+\bar{j}\sin\alpha$. Exprimînd și pe $\bar{a}$ prin coordonate $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}$, rezultă

$\bar{a}\,\bar{u}_0=(\text{pr. }\bar{a})_\Delta=a_x\cos\alpha+a_y\sin\alpha$, expresie care reprezintă proiecția vectorului $\bar{a}$ pe dreapta (Δ).

2. Teorema cosinusului dedusă vectorial. Considerăm triunghiul ABC și scriem vectorul $\overrightarrow{BC}$ ca diferență de vectori: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. Este evident că $|\overrightarrow{BC}|=a$, $|\overrightarrow{AC}|=b$, $|\overrightarrow{AB}|=c$, unde a, b, c sînt laturile triunghiului dat (fig. 25). Ridicînd la pătrat egalitatea de mai sus și ținînd seama de (31) avem

$$\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}^2.$$

Însă $\overrightarrow{BC}^2=|\overrightarrow{BC}|^2=a^2$ etc., iar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=b\cdot c\cos A$, astfel că relația devine

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \text{ (teorema cosinusului).}$$

3. Calculul medianei pe cale vectorială. Notăm cu D mijlocul laturii $\overline{BC}$ (fig. 26). Se știe (§ 18, aplicația 1) că $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. Dacă notăm mai scurt $\overrightarrow{BC}=\bar{a}$, $\overrightarrow{AC}=\bar{b}$, $\overrightarrow{AB}=\bar{c}$ și $\overrightarrow{AD}=\bar{m}_a$, atunci relația de mai sus se scrie $2\bar{m}_a=\bar{b}+\bar{c}$, la care adăugăm $\bar{a}=\bar{b}-\bar{c}$. Ridicînd ambele egalități vectoriale la pătrat avem

$$4m_a^2=b^2+c^2+2\bar{b}\cdot\bar{c}$$

$$a^2=b^2+c^2-2\bar{b}\cdot\bar{c}$$

Prin adunare cele două produse scalare se reduc și se obține

$$4m_a^2+a^2=2(b^2+c^2)$$

de unde se scoate

$$m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4},$$

expresia medianei.

Am ales cîteva exemple ca să se vadă că produsul scalar poate folosi în geometrie fie la demonstrarea unor teoreme, fie la calculul unor lungimi.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

22. Să se descompună un vector $\bar{a}$ în două componente, cunoscînd direcția uneia și modulul celeilalte. Discuție.

[Fie $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$. Se duce prin O o dreaptă (Δ) avînd direcția dată și un cerc cu raza cît modulul cunoscut, apoi prin A se duce paralela la (Δ). Două soluții, una sau nici una.]

23. Se dă triunghiul ABC și un punct oarecare O în planul său. Să se demonstreze că dacă G este centrul de greutate al triunghiului, atunci

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\,\overrightarrow{OG}.$$

[Se scrie $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}$ etc. și se adună.]

24. Se dă patrulaterul $ABCD$ și se notează cu E și F mijloacele laturilor AB și CD. Să se demonstreze că

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

[Se exprimă $\overrightarrow{EF}$ cu ajutorul vectorilor $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BF}$, apoi $\overrightarrow{AF}$ cu ajutorul vectorilor $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ etc.]

25. Să se figureze vectorii $\bar{a}(3, 5)$, $\bar{b}(6, -10)$ și să se spună ce legătură există între ei.

[$\bar{b}$ este simetricul, față de Ox, al lui $2\bar{a}$.]

26. Se dau vectorii $\bar{a}(1, 5)$, $\bar{b}(-4, 2)$, $\bar{c}(3, -1)$.
Ce particularitate prezintă vectorul $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$?

27. Fiind dați vectorii $\overrightarrow{AB}=\bar{a}$ și $\overrightarrow{AC}=\bar{b}$ în ce caz avem $(\bar{a}+\bar{b})^2=(\bar{a}-\bar{b})^2$ și ce reprezintă fiecare din cele două părți ale egalității?

[Rezultă $4\bar{a}\bar{b}=0$, deci $\bar{a}\perp\bar{b}$. Fiecare termen se reduce la pătratul diagonalei dreptunghiului cu laturile $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.]

28. Se dă vectorul $\overrightarrow{AB}$, punctul fix O și două puncte M, N, toate în același plan. a) *Ce semnificație are relația $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ON}$?* b) *Dacă se trece totul în prima parte, ce interpretare are relația obținută?*

[a) $\overline{OM}$ și $\overline{ON}$ au aceeași proiecție pe AB. b) $MN\perp AB$.]

29. Se dă un triunghi ABC și un punct O oarecare în planul său. Să se demonstreze că există relația vectorială

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

[Se exprimă vectorul $\overrightarrow{BC}$ ca diferență $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ etc.]

30. Să se demonstreze că înălțimile unui triunghi sînt concurente.

[Fie AA', BB' două înălțimi și $H\equiv AA'\cap BB'$. În relația din problema precedentă se ia $O\equiv H$ și se ajunge la $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, care se va interpreta.]

31. Dacă D, E, F sînt mijloacele laturilor BC, CA, AB, ale triunghiului ABC, să se arate că oricare ar fi punctul O avem relația vectorială

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

[Se folosesc relațiile $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$, etc., se face produsul și se însumează.]

32. Se dă patrulaterul $ABCD$ în care laturile opuse $\overrightarrow{AB}=a$ și $\overrightarrow{CD}=c$ sînt situate pe dreptele AB, CD perpendiculare.
Fie E, F respectiv mijloacele laturilor $\overline{AD}$, $\overline{BC}$. Să se demonstreze că

$$\overline{EF}^2=\frac{1}{4}(a^2+c^2).$$

Să se dea și o soluție geometrică.

[Se ține seama de problema 24, $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$ și se va ridica la pătrat. Pentru soluția geometrică se unește mijlocul diagonalei $\overline{3D}$, cu E și F.]

CAPITOLUL III

COORDONATE ÎN PLAN

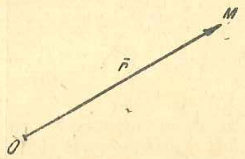


Fig. 27.

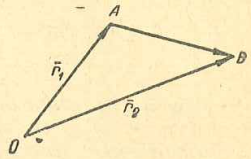


Fig. 28.

1. *Poziția punctului în plan.* Să ne alegem ca *sistem de reper un punct fix* O al planului. Poziția unui punct oarecare M. din plan este perfect determinată prin vectorul $\overrightarrow{OM}=\bar{r}$ (fig. 27), numit din această cauză *vectorul de poziție* al punctului M. Avînd originea fixă, este evident că vectorul de poziție este un vector legat.

De asemenea poate fi determinată poziția unui vector $\overrightarrow{AB}$ în plan, dacă se cunosc vectorii de poziție $\bar{r}_1$ și $\bar{r}_2$ respectiv al originii A și al extremității B a vectorului $\overrightarrow{AB}$ (fig. 28). Mai mult, $\overrightarrow{AB}$ se poate exprima cu ajutorul vectorilor de poziție, anume

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\bar{r}_2-\bar{r}_1 \qquad (1)$$

care arată că relația lui Chasles (I, 16) pentru vectorii de pe o dreaptă, se menține și în plan. Este adevărat că din punct de vedere practic determinarea unui punct prin vectorul de poziție $\bar{r}$ nu este comodă, deoarece trebuie cunoscute direcția, sensul și modulul vectorului. În schimb multe proprietăți ale figurilor geometrice se pot demonstra simplu cu ajutorul vectorilor de poziție.

2. *Sistem de axe dreptunghiulare.* Am văzut că pentru fixarea poziției unui punct prin vectorul de poziție, sistemul de reper se reduce la un punct O. Să ducem acum prin punctul O două axe perpendiculare Ox, Oy orientate așa fel ca sensul de rotire de la Ox către Oy să fie cel trigonometric. Vom vedea că putem alege axele dreptunghiulare ca sistem de reper pentru determinarea punctelor în plan. Un astfel de sistem de reper (sau de referință) se numește sistem dreptunghiular cartezian*.

* De la numele lui Descartes, care în limba latină semna Cartesius. Menționăm că sistemul de axe poate fi și oblic, în care caz axele fac între ele un unghi oarecare θ.

Coordonatele vectorului de poziție al punctului M le vom numi *coordonatele punctului* M și le vom nota

$\overline{OM_1}=x=$abscisa punctului M

$\overline{OM_2}=y=$ordonata punctului M.

Tot ce s-a spus la *coordonatele unui vector* rămîne evident valabil și în cazul vectorului de poziție, cu sublinierea că de data aceasta coordonatele (proiecțiile) se măsoară *de la originea axelor* O, care este și originea vectorului de poziție.

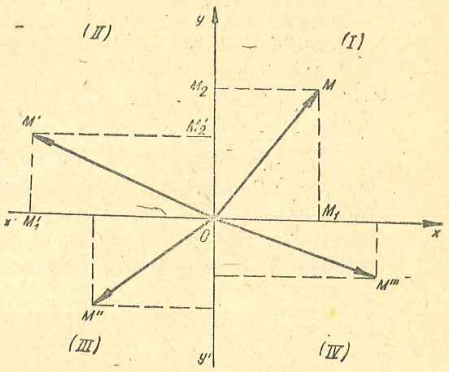


Fig. 29.

Coordonatele unui punct se pot nota cu diferite litere, de exemplu, (a, b) sau (a_1, b_1) sau (x_0, y_0) etc. în care totdeauna prima este abscisa și a doua ordonata. Se arată în scris că M are coordonatele x, y astfel: $M(x, y)$.

Cele două axe Ox, Oy împart planul în *patru regiuni* pe care le vom numi cadrane și le vom numerota în sens trigonometric I, II, III, IV (fig. 29).

După aceste lămuriri să facem următoarele precizări importante.

I. Dacă punctul M este dat în planul axelor xOy, coordonatele sale sînt determinate în mod unic. În adevăr, proiecțiile vectorului $\overrightarrow{OM}$ pe axe sînt determinate în mărime și semn, și anume:

— pentru un punct M din cadranul I ambele coordonate sînt pozitive;

— pentru un punct M' din cadranul al II-lea, abscisa $\overline{OM'_1}=x'$ este negativă și ordonata $\overline{OM'_2}=y'$ este pozitivă;

— pentru un punct M'' din cadranul al III-lea ambele coordonate sînt negative;

— pentru un punct M''' din cadranul al IV-lea abscisa este pozitivă și ordonata negativă.

— un punct pe axa Ox are *ordonata nulă*, iar un punct pe Oy, *abscisa nulă*.

II. *Reciproc* dacă se dau coordonatele. punctul M din plan este determinat în mod unic. În adevăr să presupunem că măsurînd abscisa și ordonata, ambele pozitive, găsim $\overline{OM_1}=x$, $\overline{OM_2}=y$; paralela prin M_1 la Oy și paralela prin M_2 la Ox se taie într-un *singur punct* M, în cadranul I.

După cum abscisa și ordonata sînt pozitive sau negative, punctul se poate găsi în unul din cele patru cadrane. Trebuie să observăm că această unicitate n-ar mai exista dacă coordonatele nu ar fi luate cu semnele respective. În asemenea caz, abscisa s-ar putea lua fie la dreapta, fie la stînga originii, iar ordonata fie în sus, fie în josul originii și ar rezulta patru puncte în loc de unul singur.

Exemple. 1) *Originea are coordonatele* $x=0$, $y=0$, deci $O(0,0)$.

2) *Punctul* $A(3, 0)$ *se află pe axa Ox, astfel că* $\overline{OA}=3$.

3) *Punctul* $B(0, -2)$ *se află pe Oy, la* $\overline{OB}=-2$.

4) *Punctul* $M(5, 5)$ *se află pe bisectoarea primului cadran.*

5) *Punctele* $A(a, b)$, $A(-a, b)$ *sînt simetrice față de axa Oy.*

3. *Scrierea vectorului dat prin coordonatele extremităților sale.* Se dau punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ și se cere să se scrie vectorul $\overrightarrow{AB}$. Dacă $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ sînt vectorii de poziție ai punctelor A și B, atunci relația lui Chasles (1) este $\overrightarrow{AB}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$. Fie acum X, Y coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$. Referindu-ne la coordonatele diferenței ai doi vectori (II, 15) putem scrie

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1.$$

Însă $\overrightarrow{AB}=X\bar{i}+Y\bar{j}$ prin urmare

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}. \tag{2}$$

Aceasta este expresia unui vector în funcție de coordonatele extremităților lui.

Exemplu. *Se dă* $A(3, -2)$, $B(-5, 4)$.

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este $\overrightarrow{AB}=(-5-3)\bar{i}+[4-(-2)]\bar{j}=-8\bar{i}+6\bar{j}$.

Vectorul $\overrightarrow{BA}$ se scrie $\overrightarrow{BA}=[3-(-5)]\bar{i}+(-2-4)\bar{j}=8\bar{i}-6\bar{j}$.

Se verifică imediat că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$.

4. *Distanța între două puncte* $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ este modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ (sau $\overrightarrow{BA}$) și ținînd seama de expresia modulului (II, § 22) avem

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{3}$$

În particular, distanța de la origine la un punct $M(x, y)$ se obține din (3)

$$\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{3'}$$

Exemplu. *Distanța între punctele* $A(0, 3)$, $B(-2, 7)$ este $\overline{AB}=\sqrt{(-2-0)^2+(7-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ *unități liniare.*

5. *Punctul care împarte un segment orientat într-un raport dat.* Presupunem segmentul dat prin extremitățile sale $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ și pe dreapta AB un punct $M(x, y)$ care împarte segmentul $\overline{AB}$ în raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$. Cînd $M\in\overline{AB}$, $k<0$, deoarece segmentele $\overline{MA}$ și $\overline{MB}$ au sensuri diferite; cînd M este exterior segmentului $\overline{AB}$, $k>0$, deoarece $\overline{MA}$ și $\overline{MB}$ au același sens. Problema care se pune este să determinăm coordonatele punctului M, cunoscînd pe A, B și raportul k. Rezolvarea problemei se poate face pe cale pur analitică sau pe cale vectorială. În cele ce urmează vom folosi metoda vectorială din care vom deduce și formulele analitice.

Fie deci $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$, $M(\bar{r})$ și

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k \tag{4}$$

de unde $\overline{MA}=k\,\overline{MB}$ (fig. 30).

Segmentele fiind orientate pe dreapta AB, relația sub forma a doua este de fapt relație între vectori

$$MA=k\,MB. \tag{4'}$$

Cu ajutorul vectorilor de poziție aceasta devine $\bar{r}_1-\bar{r}=k(\bar{r}_2-r)$ sau $\bar{r}_1-k\,\bar{r}_2=(1-k)\bar{r}$, de unde

$$\bar{r}=\frac{\bar{r}_1-k\,\bar{r}_2}{1-k}. \tag{5}$$

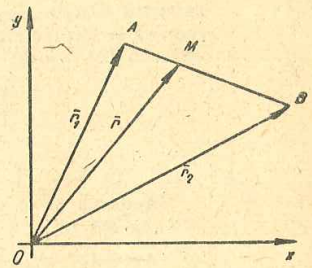


Fig. 30.

În particular dacă M este mijlocul segmentului $\overline{AB}$, $k=-1$ și vectorul de poziție al mijlocului segmentului este

$$\bar{r}=\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2}{2}. \tag{6}$$

Această relație nu este de fapt decît aplicația 1) de la cap. II, § 18.

Trecerea la relațiile analitice se face simplu, scriind vectorii de poziție în funcție de coordonatele punctelor:

$$r_1=x_1\bar{i}+y_1\bar{j},\ \bar{r}_2=x_2\bar{i}+y_2\bar{j},\ \bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}.$$

Rezultă

$$x\bar{i}+y\bar{j}=\frac{x_1-kx_2}{1-k}\bar{i}+\frac{y_1-ky_2}{1-k}\bar{j},$$

care dă imediat

$$x=\frac{x_1-kx_2}{1-k},\quad y=\frac{y_1-ky_2}{1-k}, \tag{7}$$

deoarece descompunerea după vectorii fundamentali este unică (vezi cap. II, § 10).

În particular mijlocul segmentului AB are coordonatele

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{7'}$$

Coordonatele conjugatului armonic N al punctului M se deduc din (7), înlocuind pe k prin $(-k)$, deci

$$x'=\frac{x_1+kx_2}{1+k},\quad y'=\frac{y_1+ky_2}{1+k}. \tag{8}$$

6. Să considerăm acum pe o dreaptă oarecare patru puncte A, B, C, D care formează o diviziune armonică, și anume să precizăm că $C(x_3, y_3)$ și $D(x_4, y_4)$ sînt conjugate armonic față de $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$. Se știe că

raportul a două segmente se păstrează în proiecție, deci o diviziune armonică se proiectează atît pe Ox cît și pe Oy tot ca o diviziune armonică. Aceasta înseamnă că relația (I, 29) se păstrează pe fiecare axă, adică

$$\begin{cases} 2(x_1x_2+x_3x_4)-(x_1+x_2)(x_3+x_4)=0 \\ 2(y_1y_2+y_3y_4)-(y_1+y_2)(y_3+y_4)=0. \end{cases} \quad (9)$$

Aplicații. 1) *Să se arate că punctul $C(-2, -4)$ este egal depărtat de punctele $A(3, 3)$ și $B(5, 1)$.*

Avem $\overline{CA}=\sqrt{(3+2)^2+(3+4)^2}=\sqrt{74}$; $\overline{CB}=\sqrt{(5+2)^2+(1+4)^2}=\sqrt{74}$ deci $\overline{CA}=\overline{CB}$.

2) *Ce condiție trebuie să satisfacă coordonatele x, y ale punctului M pentru ca acesta să fie la egală distanță de $A(3, -2)$ și $B(4, 2)$?*

Pentru a nu mai avea radicali scriem că $\overline{MA}^2=\overline{MB}^2$, adică

$$(x-3)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+(y-2)^2 \text{ care ne dă}$$

$$2x+8y=7.$$

Am obținut o singură ecuație cu două necunoscute, adică o ecuație nedeterminată. Aceasta corespunde faptului geometric că există o infinitate de puncte M egal depărtate de A și B (mediatoarea segmentului AB).

3) *Segmentul $\overline{AB}=5$ cm are punctul $A(2, -1)$ și abscisa punctului B, $x=6$ cm. Să se determine poziția segmentului.*

Dacă y este ordonata lui B avem

$$\overline{AB}^2=(6-2)^2+(y+1)^2, \text{ dar } \overline{AB}^2=25, \text{ deci}$$

$16+(y+1)^2=25$, de unde $y+1=\pm 3$. Se obțin două valori $y_1=2$, $y_2=-4$, deci $B_1(6, 2)$ și $B_2(6, -4)$, prin urmare segmentul poate avea două poziții.

4) *Centrul de greutate al unui triunghi.* Se știe (II, § 18, aplicația 3) că dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$. Să notăm $A(\bar{r}_1)$, $B(\bar{r}_2)$, $C(\bar{r}_3)$, $G(\bar{r})$. Atunci $\overrightarrow{GA}=\bar{r}_1-\bar{r}$ (fig. 31) și la fel $\overrightarrow{GB}=\bar{r}_2-\bar{r}$, $GC=\bar{r}_3-\bar{r}$.

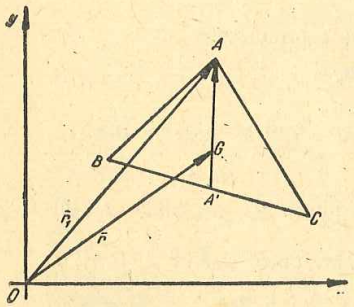


Fig. 31.

Adunînd avem

$$\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3-3\bar{r}=0,$$

deci

$$\bar{r}=\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{3}. \quad (10)$$

Scriind relația cu ajutorul coordonatelor avem

$$x\bar{i}+y\bar{j}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\bar{i}+\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\bar{j}$$

de unde

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}. \quad (11)$$

Problema se poate trata și pe cale pur analitică. În adevăr mijlocul A' al segmentului are coordonatele $x'=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y'=\frac{y_1+y_2}{2}$. Se știe apoi că $\frac{\overline{GA}}{\overline{GA'}}=-2$, prin urmare coordonatele lui G sînt

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \text{ și la fel } y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

33. Să se exprime vectorul de poziție a centrului unui paralelogram, în funcție de vectorii de poziție ale celor patru vîrfuri.

$$\left[\bar{r}=\frac{1}{4}(\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3+\bar{r}_4).\right]$$

34. Ce condiție trebuie să îndeplinească un patrulater pentru ca suma vectorilor de poziție a două vîrfuri opuse să fie egală cu suma vectorilor de poziție a celorlalte două vîrfuri?

[M și N mijloacele diagonalelor; trebuie ca $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$, deci $M\equiv N$ Patrulaterul trebuie să fie paralelogram.]

35. Se dau două puncte A, B într-un plan și punctul de reper O. Să se determine poziția punctului C știind că vectorii de poziție $\bar{r}_a$, $\bar{r}_b$, $\bar{r}_c$ ai punctelor A, B, C satisfac relația

$$\bar{r}_c=\bar{r}_a+2\bar{r}_b.$$

[Se scrie $\bar{r}_c-\bar{r}_a=2\bar{r}_b$ sau $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{OB}$, deci vectorul $\overrightarrow{AC}$ este coliniar cu $\overrightarrow{OB}$ și de două ori mai mare, adică $\overline{AC}\|\overline{OB}$ și $\overline{AC}=2\overline{OB}$. Punctul C este determinat.]

36. Se dă punctul $A(a, b)$. Se cere:

a) Să se determine coordonatele punctelor simetrice lui A față de axele de coordonate și față de origine.

b) Să se determine coordonatele punctelor simetrice lui A față de cele două bisectoare ale axelor de coordonate.

37. Să se calculeze distanțele dintre perechile de puncte: a) $A(3, 2)$, $B(6, 6)$; b) $A(3, 2)$, $B'(0, -2)$; c) $C(-1, 0)$, $D(-5, 4)$; d) $E(-1, -4)$, $F(-3, -8)$; e) $G(0, -5)$, $H(12, 0)$.

[$\overline{AB}=\overline{AB'}=5$; $\overline{CD}=4\sqrt{2}$; $\overline{EF}=2\sqrt{5}$; $\overline{GH}=13$.]

38. Să se calculeze lungimile segmentelor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ unde $A(3, 6)$, $B(8, 2)$ și $C(3, 2)$, $D(8, 6)$. Să se explice geometric rezultatul.

[$\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{41}$. Sînt diagonalele unui dreptunghi.]

39. Să se arate că triunghiul format de punctele $A(2, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(6, 0)$ este isoscel, cu baza BC.

[$\overline{AB}=\overline{AC}=5$.]

40. Să se arate că triunghiul format de punctele $A(2+\sqrt{3}, 1)$, $B(\sqrt{3}, -1)$, $C(-1, -\sqrt{3})$ este isoscel.

41. Să se arate că triunghiul format de punctele $A\left(1+\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$ este dreptunghic. Unde este unghiul drept?

[*Metoda I.* Se calculează lungimile laturilor și se arată că este verificată relația lui Pitagora. *Metoda a II-a.* Se scriu vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ și se cercetează care au produsul scalar nul.]

42. Să se demonstreze că triunghiul cu vîrfurile $A(1, 2)$, $B(3, -1)$, $C\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ este echilateral.

43. Să se găsească un punct egal depărtat de punctele $A(0, 1)$, $B(1, -1)$, $C(2, 0)$.

$\left[x=\frac{5}{6}, y=\frac{1}{6}.\right]$

44. Să se găsească un punct la egală depărtare de punctele $A(2, -2)$, $B(0, 4)$ și de asemenea la egală depărtare de punctele $C(1, -4)$, $D(-2, -3)$ (fără ca aceste distanțe să fie egale cu cele precedente).

[$M(2, 4)$.]

45. Să se afle distanța între punctele $A(x, y)$ și $B\left[\frac{2(x+ay)}{1+a^2}, \frac{2a(x+ay)}{1+a^2}\right]$.

[$\overline{AB}=\sqrt{x^2+y^2}$, deci $\overline{AB}=\overline{OA}$.]

46. Se dau punctele $A(-2, 3)$, $B(2, 6)$ și sub axa Ox, o paralelă la distanța de două unități. Să se găsească pe această paralelă un punct C și altul D astfel ca:

a) triunghiul ABC să fie dreptunghic în A;

b) triunghiul ABD să fie dreptunghic în B.

[C și D au ordonata (-2), deci $C(\alpha, -2)$, $D(\beta, -2)$. Se poate folosi teorema lui Pitagora sau se pot scrie vectorii și se pune condiția ca produsul scalar să fie nul. $C\left(\frac{7}{4}, -2\right)$, $D(8, -2)$.]

47. Se dau punctele $A(-3, 3)$, $B(3, 7)$ și o paralelă la Ox situată la două unități deasupra ei. Să se determine pe această paralelă punctul C, astfel ca triunghiul ABC să fie dreptunghic în C.

[Două soluții $C_1(2, 2)$; $C_2(-2, 2)$.]

48. Se dau punctele $A(-1, -3)$ și $B(2, -1)$. Să se afle coordonatele simetricului lui A față de B.

[Se folosesc coordonatele mijlocului unui segment. $x=5$, $y=1$.]

49. Se dau punctele $A(-2, 4)$, $B(5, 1)$ și o paralelă la Oy, la distanța $\frac{1}{2}$, care întîlnește segmentul $\overline{AB}$ în punctul M. Se cere:

a) raportul în care M împarte segmentul $\overline{AB}$;

b) ordonata punctului M.

$\left[\text{Se găsește întîi } k=-\frac{5}{9}, \text{ apoi } y=\frac{41}{14}.\right]$

50. Punctele $A(1, 1)$, $B(2, -3)$, $C(6, 0)$ fiind date, să se afle coordonatele punctului D, al patrulea vîrf al paralelogramului $ABCD$, în care $\overline{AC}$ este o diagonală.

[Se află simetricul lui B față de mijlocul lui $\overline{AC}$. $x=5$, $y=4$.]

51. Se dă triunghiul format de punctele $A(4, 5)$, $B(0, 3)$, $C(2, -3)$. Să se calculeze lungimile medianelor m_a, m_b, m_c ale triunghiului și să se verifice că

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2).$$

52. Să se afle coordonatele punctului M care se află pe segmentul determinat de punctele $A(3, -2)$, $B(7, 3)$, la două cincimi din $\overline{AB}$, socotite de la A către B.

$\left[\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{2}{3}, k=-\frac{2}{3}\cdot M\left(\frac{23}{5}, 0\right).\right]$

53. Se dau punctele $A(2, 1)$, $B(5, 7)$, $C(4, 2)$. Se împarte $\overline{AB}$ în patru părți egale și se notează cu D punctul cel mai apropiat de A. Să se afle lungimea $\overline{CD}$.

$\left[\overline{CD}=\frac{\sqrt{29}}{4}.\right]$

54. Se dau punctele $A(1, 4)$ și $B(7, 1)$. Să se determine punctul M de pe dreapta AB astfel ca $\overline{OM}=\overline{OA}$.

[Un punct pe AB are $x=\frac{1-7k}{1-k}$, $y=\frac{4-k}{1-k}$. Condiția ca $\overline{OM}=\overline{OA}$ ne dă $11k^2+4k=0$, de unde soluțiile $M\equiv A$ (evident) și $M\left(\frac{13}{5}, \frac{16}{5}\right)$.]

55. Se dă triunghiul cu vîrfurile $A(7, 0)$, $B(4, 4)$, $C(-1, -8)$. Să se afle coordonatele piciorului bisectoarei BB' a triunghiului.

[Se ține seama de raportul în care bisectoarea împarte latura opusă. $B'\left(\frac{43}{9}-\frac{20}{9}\right)$.]

56. Se dau punctele $A(5, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-3, 2)$, $D(-1, -2)$. Se iau apoi punctele M și N astfel ca ele să împartă în același raport k segmentele orientate $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$. Să se arate: a) că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; b) că oricare ar fi raportul k, mijlocul segmentului $\overline{MN}$ este fix. Să se explice geometric proprietatea de la (b).

[a) Se exprimă vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DC}$ cu ajutorul versorilor. b) Se găsește $x=1$, $y=\frac{3}{2}$: Dreapta MN trece prin centrul paralelogramului $ABCD$.]

57. Să se arate că figura formată de punctele $A\left(a\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, $B\left(\frac{a-b}{2}, b\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(a\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$, $D\left(\frac{a+b}{2}, b\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ este romb; a, b sînt două numere reale oarecare.

[Mijloacele diagonalelor coincid și diagonalele sînt perpendiculare $(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0)$. *Astfel:* laturile sînt două cîte două paralele (vectorii respectivi egali) și toate sînt egale. Mai trebuie arătat că figura nu este pătrat, deci $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ nu sînt perpendiculare.]

58. Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului care unește mijloacele diagonalelor unui patrulater.

[Media aritmetică a coordonatelor vîrfurilor.]

59. Se dau punctele $A(3, 0)$ și $B(-1, 4\sqrt{3})$. Să se determine pe segmentul $\overline{AB}$ un punct M astfel ca distanța de la origine la M să fie medie proporțională între segmentele $\overline{AM}$ și $\overline{MB}$.

[Se determină întîi raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$, apoi coordonatele. Două soluții: $M\left(\frac{3}{4}, \frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$ și $M'\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Se mai găsește $k=1$ (inacceptabilă) și $k=\frac{9}{49}$ care dă un punct exterior lui $\overline{AB}$.]

CAPITOLUL IV

DREAPTA, DIFERITE FORME ALE ECUAȚIEI EI

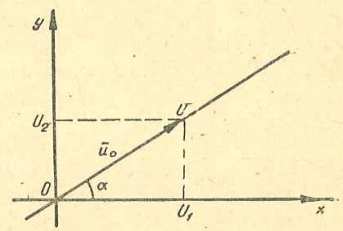


Fig. 32.

1. *Versorul unei direcții.* Mulțimea dreptelor din plan, care sînt paralele între ele, au aceeași direcție, aceasta fiind dată de oricare dintre ele.

În mod practic direcția poate fi dată *prin versorul* $\overrightarrow{OU}=\bar{u}_0$, cu $|\bar{u}_0|=1$, sau, dacă se ia sistemul de referință cartezian xOy, *prin unghiul* α *pe care una din drepte* (de exemplu cea care trece prin origine) *îl face cu axa* Ox (fig. 32).

Versorul, ca orice vector, poate fi descompus după axe și are ca proiecții $\overline{OU_1}=1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$ și $\overline{OU_2}=1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$. De aici rezultă

$$\overrightarrow{OU}=\bar{u}_0=\bar{i}\cos\alpha+\bar{j}\sin\alpha, \qquad (1)$$

care arată legătura între versorul de direcție și unghiul α al direcției cu axa Ox. Se observă imediat că $u_0=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$.

2. *Coeficientul unghiular.* Dacă din punct de vedere geometric direcția se poate da prin unghiul α pe care aceasta îl face cu axa Ox, din punctul de vedere al geometriei analitice, pentru nevoile de calcul, direcția se dă prin una din funcțiile trigonometrice ale unghiului α. Cea mai des folosită este $\operatorname{tg}\alpha$, care se notează de obicei cu m și se numește *coeficientul unghiular* sau *panta* dreptei.

Pentru fixarea poziției unei drepte nu este suficient să cunoaștem direcția ei (coeficientul unghiular), ci mai trebuie un punct al dreptei. Cu aceste două elemente poziția dreptei este determinată.

3. *Ecuația dreptei cînd se cunoaște coeficientul unghiular și punctul unde taie axa* Oy (fig. 33).

Considerăm dreapta (Δ) care are coeficientul unghiular $m=\operatorname{tg}\alpha$ și taie axa Oy în $M_0(0, n)$. Ordonata n a lui M_0 se numește *ordonata la*

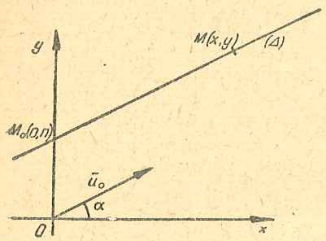


Fig. 33.

origine, deoarece este ordonata corespunzătoare originii pe axa Ox.

Fie $M(x, y)$ un punct care se poate mișca oricum pe dreapta (Δ); acesta se numește *punct curent* al dreptei (de la latinescul *curro-currere* = a alerga). Este clar că între coordonatele x, y ale punctului M trebuie să existe o relație de legătură, căci altfel M ar putea fi oriunde în plan, deci și în exteriorul dreptei (Δ). Ne propunem să găsim tocmai această relație.

Pentru aceasta ducem versorul $\bar{u}_0$ al direcției dreptei (Δ) și acum vectorii $\overrightarrow{M_0M}$ și $\bar{u}_0$ sînt coliniari, deci coordonatele (proiecțiile) lor sînt proporționale. Cunoscînd coordonatele lui $M_0(0, n)$ și ale lui $M(x, y)$ se scrie imediat vectorul $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = x\,\vec{i} + (y-n)\vec{j}, \tag{2}$$

iar $\bar{u}_0$ este dat de (1). Scriind că proiecțiile sînt proporționale avem

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y-n}{\sin\alpha} \quad \text{sau} \quad y-n = x\ \operatorname{tg}\alpha.$$

Așa cum am spus se notează $\operatorname{tg}\alpha = m$ și relația căutată este

$$\boxed{y = mx + n} \tag{3}$$

care se numește *ecuația dreptei* cînd se dă *coeficientul unghiular și ordonata la origine*. Îi vom zice mai scurt *ecuația explicită a dreptei*.

Cazuri particulare. 1) Dacă $n=0$ din figura 33 se vede că dreapta trece prin origine, iar (3) se reduce la

$$y = mx \tag{4}$$

prin urmare (4) reprezintă ecuația unei drepte care trece prin origine și are coeficientul unghiular m. Dacă $m=1$ ($\operatorname{tg}\alpha = 1$, deci $\alpha = 45°$) se obține bisectoarea care trece prin cadranele I și III,

$$y = x \tag{5}$$

care se numește *prima bisectoare* a axelor de coordonate. Dacă $m=-1$ ($\operatorname{tg}\alpha = -1$, deci $\alpha = 135°$) se obține bisectoarea care trece prin cadranele II și IV

$$y = -x \tag{5'}$$

care se numește *a doua bisectoare* a axelor.

2) Dacă $m=0$, atunci $\alpha = 0$ și se obține o paralelă la Ox. Ecuația (3) se reduce la

$$y = n \tag{6}$$

și aceasta reprezintă, în consecință, o paralelă la Ox. Pentru $n>0$ paralela este deasupra originii, pentru $n<0$ este sub origine. Pentru $n=0$ se obține chiar axa Ox, deci ecuația axei Ox este $y=0$.

Observări. 1) Dacă presupunem m constant și n, variabil (3) reprezintă mulțimea dreptelor paralele, de direcție dată m. Dacă schimbăm și pe m atunci obținem orice dreaptă, paralelă cu orice direcție, adică orice dreaptă din plan. De aceea spunem că (3) reprezintă ecuația unei drepte oarecare.

2) Există totuși o direcție pentru care (3) nu ne dă dreptele respective: aceasta corespunde lui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, care dă $m = \operatorname{tg}\alpha = \infty$.

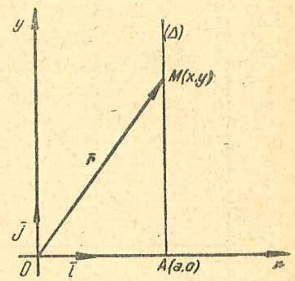


Fig. 34.

4. *Ecuația unei drepte paralele cu Oy.* Considerăm dreapta (Δ) paralelă cu Oy, la distanța $\overline{OA} = a$ de aceasta și un punct $M(x, y)$ situat pe (Δ). Condiția necesară și suficientă pentru ca $M \in (\Delta)$ este ca M să se proiecteze în A pe Ox (fig. 34) sau (pr. $\overrightarrow{OM}$) $Ox = \overline{OA} = a$. Însă $\overrightarrow{OM} = \bar{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, iar proiecția unui vector pe o axă este dată de produsul scalar dintre acel vector și versorul axei (II, § 21), deci condiția ca $M \in (\Delta)$ devine (pr. $\overrightarrow{OM}$) $Ox = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} = a$. Ținînd seama că $\vec{i}^2 = 1$ și $\vec{i}\vec{j} = 0$, se obține $(x\,\vec{i} + y\,\vec{j})\vec{i} = a$ sau

$$x = a. \tag{7}$$

Aceasta este ecuația unei paralele la Oy. Pentru $a>0$ paralela este la dreapta originii și pentru $a<0$ la stînga originii. Pentru $a=0$ se obține axa Oy, deci ecuația axei Oy este

$$x = 0.$$

Geometric este evident că oricare ar fi $M \in (\Delta)$ abscisa lui este $x=a$, indiferent care este ordonata y. Prin urmare $x=a$ caracterizează toate punctele dreptei (Δ): de aceea zicem că este ecuația dreptei.

Cu aceasta am împlinit și ceea ce nu ne dădea ecuația (3); cazul dreptelor paralele la Oy.

Exemple. a) *Ecuația dreptei care trece prin origine și face cu Ox unghiul* $\alpha = 30°$ *este* $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, *deoarece* $m = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) *Ecuația* $y = -\sqrt{3}\,x$ *reprezintă o dreaptă care trece prin origine și face cu Ox unghiul* $\alpha = 120°$, *deoarece* $\operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$.

c) *Dreapta paralelă cu prima bisectoare, care trece prin punctul* (0, 4), *are ecuația* $y = x + 4$, *căci* $m=1$, $n=4$.

5. *Ecuația generală a dreptei.* Să considerăm o dreaptă oarecare (Δ) a cărei poziție este determinată (fig. 35).

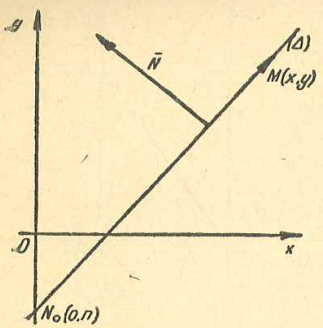


Fig. 35.

a) prin punctul $N_0(0, n)$ unde taie axa Oy;
b) prin direcția perpendiculară pe vectorul liber $\overline{\mathcal{N}}$ (A, B) deci

$$\overline{\mathcal{N}} = A\vec{i} + B\vec{j}. \tag{8}$$

Dacă $M(x, y)$ este un punct curent al dreptei (Δ) atunci este clar că vectorii $\overline{\mathcal{N}}$ și $\overrightarrow{N_0M}$ sînt perpendiculari, deci produsul lor scalar este nul. Vectorul $\overrightarrow{N_0M}$ se scrie [vezi și (2)]

$$\overrightarrow{N_0M} = x\vec{i} + (y - n)\vec{j} \tag{9}$$

astfel că produsul scalar al vectorilor (8) și (9) este

$$\overline{\mathcal{N}} \cdot \overrightarrow{N_0M} = Ax + B(y - n) = Ax + By - Bn = 0. \tag{10}$$

Termenul liber $(-Bn)$ este o constantă pe care o vom nota cu C și produsul scalar nul devine

$$Ax + By + C = 0. \tag{11}$$

Aceasta este relația dintre coordonatele (x, y) ale punctului curent M pentru ca el să se afle pe dreapta (Δ). Zicem că (11) este ecuația dreptei (Δ).

Deoarece condiția (10) este necesară și suficientă pentru ca $N_0M \perp \overline{\mathcal{N}}$ rezultă că relația (11) este necesară și suficientă pentru ca M să se afle pe dreapta (Δ), adică:

a) dacă $M \in (\Delta)$, relația (11) este verificată; b) dacă (11) este adevărată, atunci $M \in (\Delta)$.

Iată deci o altă formă a ecuației unei drepte, pe care o vom numi *ecuația generală* a unei drepte.

Observări. 1) Din notația făcută $-Bn = C$, rezultă $n = -\frac{C}{B}$; 2) Vectorul $\overline{\mathcal{N}}$ (A, B) perpendicular pe (Δ) se numește vector *normal* dreptei (Δ).

6. *Trecerea de la ecuația explicită (3) la ecuația generală (4) și reciproc.*

I. Dacă m și n nu sînt fracționari, atunci este de ajuns să trecem pe y în partea a doua și obținem ecuația dreptei sub forma generală

$$mx - y + n = 0.$$

Dacă m și n sînt fracționari, atunci se elimină numitorii, se trece totul într-o singură parte și se obține forma

$$Ax + By + C = 0.$$

Exemple. 1) *Ecuația* $y = \sqrt{3}\,x - 5$ *se scrie sub forma generală* $\sqrt{3}x - y - 5 = 0$.

2) *Ecuația* $y = \frac{3}{2} - x - \frac{4}{3}$ *se scrie sub forma generală* $9x + 6y + 8 = 0$.

II. De la forma $Ax + By + C = 0$ se trece la forma explicită rezolvînd ecuația în raport cu y $(B \neq 0)$, adică

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \quad \text{de unde rezultă}$$

$$m = -\frac{A}{B}; \quad n = -\frac{C}{B}. \tag{12}$$

Aceste relații sînt importante fiindcă ne dau *coeficientul unghiular* și *ordonata la origine*, atunci cînd avem ecuația dreptei sub forma generală.

Exemple. 1) *Ecuația* $3x + 4y - 16 = 0$ *se scrie sub forma* $y = -\frac{3}{4}x + 4$, *deci coeficientul unghiular este* $m = -\frac{3}{4}$ *și ordonata la origine* $n = 4$. *Dreapta paralelă care trece prin origine este* $y = -\frac{3}{4}x$.

2) $x - 2y + 5 = 0$. *Se scrie* $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, *deci coeficientul unghiular* $m = \frac{1}{2}$ *și ordonata la origine* $n = \frac{5}{2}$.

7. *Ecuațiile dreptelor particulare deduse din (11).*

a) Presupunem întîi $A = 0$, în ecuația generală (11). Rămîne $By + C = 0$ sau $y = -\frac{C}{B} = \text{const.}$ care reprezintă o paralelă la Ox.

b) Fie acum $B = 0$. Rămîne $Ax + C = 0$ sau $x = -\frac{C}{A} = \text{const.}$, adică o paralelă la Oy.

c) Dacă $C = 0$, ecuația rămasă este $Ax + By = 0$ sau $y = -\frac{A}{B}x = mx$, ecuația unei drepte care trece prin origine.

Să considerăm acum cîte doi coeficienți nuli.

d) $A = C = 0$. Rămîne $By = 0$, deci $y = 0$, adică axa Ox.

e) $B = C = 0$. Rămîne $Ax = 0$, deci $x = 0$, adică axa Oy.

f) $A = B = 0$, imposibil fiindcă rămîne $C = 0$, însă $C \neq 0$ prin ipoteză.

După cum se vede dacă ecuația dreptei sub forma (3) nu conține dreptele paralele cu Oy, ecuația (11) conține toate dreptele planului, inclusiv toate dreptele particulare. Pentru acest motiv (11) se numește *ecuația generală* a dreptei.

Din cele spuse mai înainte se desprinde următoarea *concluzie importantă: orice ecuație de gradul I în două variabile x și y, raportată la sistemul cartezian dreptunghiular xOy reprezintă o dreaptă și reciproc o dreaptă oarecare din plan este reprezentată printr-o ecuație de gradul I în două variabile (eventual poate lipsi una din variabile).*

Prin urmare dreapta în plan este caracterizată printr-o ecuație de gradul I. Pentru acest motiv o ecuație de gradul I se numește *ecuație liniară*.

8. **Consecințe.** a) *Condiția ca două drepte să fie paralele este ca să aibă aceeași înclinare a față de axa Ox*, deci să aibă același coeficient unghiular.

Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile $y=mx+n$ și $y=m'x+n'$, condiția de paralelism este

$$m=m'. \tag{13}$$

Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile $Ax+By+C=0$ și $A'x+B'y+C'=0$, atunci $m=-\frac{A}{B}$ $m'=-\frac{A'}{B'}$ și condiția devine $-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}$ sau

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'} \tag{13'}$$

(coeficienții lui x și y proporționali).

De fapt condiția (13′) se poate obține și altfel. Fie $\overline{\mathcal{N}}=A\vec{i}+B\vec{j}$ vectorul normal primei drepte și $\overline{\mathcal{N}}'=A'\vec{i}+B'\vec{j}$ vectorul normal celei de-a doua drepte. Pentru ca dreptele să fie paralele trebuie ca vectorii $\overline{\mathcal{N}}$ și $\overline{\mathcal{N}}'$ să fie coliniari, deci să aibă coordonatele proporționale, adică relația (13′).

b) *Pentru ca două drepte să coincidă, pe lîngă faptul că sînt paralele trebuie să aibă și un punct comun*. Punctul comun îl luăm pe axa *Oy*, deci ordonatele la origine trebuie să fie egale: $n=n'$. Atunci pentru ca două drepte date prin forma explicită să coincidă trebuie ca

$$m=m'; \quad n=n'. \tag{14}$$

Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile lor generale, atunci pe lîngă (13′) trebuie să avem $n=n'$, adică $-\frac{C}{B}=-\frac{C'}{B'}$ sau $\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$. Dar $\frac{B}{B'}$ se găsește și în relația (13′) deci

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'} \tag{14'}$$

(toți coeficienții proporționali).

Recapitulînd: (13) sau (13′) reprezintă condiția de paralelism; (14) sau (14′) reprezintă condițiile de coincidență (suprapunere) a două drepte.

Observare importantă. Ecuațiile care diferă numai prin termenul liber

$$Ax+By+C=0; \quad Ax+By+C'=0 \tag{15}$$

reprezintă două drepte paralele.

Exemple. a) $3x-5y+2=0$ și $6x-10y+7=0$ *reprezintă drepte paralele, deoarece* $\frac{6}{3}=\frac{-10}{-5}$ *fără a fi egale și cu* $\frac{7}{2}$.

b) $2x+6y-5=0$; $4x+12y-10=0$ *sînt două drepte confundate, căci au toți coeficienții proporționali.*

9. *Ecuația dreptei prin tăieturi.* Se numesc tăieturi punctele unde o dreaptă taie axele de coordonate. Coordonatele acestor puncte sînt *coordonatele la origine* ale dreptei. Dacă $A(a, 0)$ și $B(0, b)$ sînt cele două puncte pe axe, a este abscisa la origine și b ordonata la origine (fig. 36).

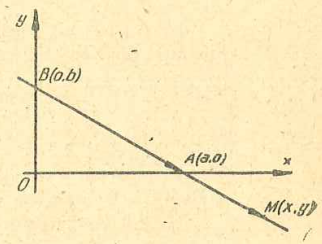


Fig. 36.

Fie acum, pe dreapta AB, un punct curent $M(x, y)$. Vectorii $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BA}$ sînt evident coliniari și reciproc dacă vectorii AM și BA sînt coliniari ei sînt neapărat pe aceeași dreaptă, deoarece au punctul A comun, deci $M\in AB$. Prin urmare condiția necesară și suficientă ca M să fie pe dreapta AB este ca vectorii $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BA}$ să fie coliniari, adică să aibă coordonatele proporționale. Însă

$$\overrightarrow{AM}=(x-a)\vec{i}+y\vec{j} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{BA}=a\vec{i}-b\vec{j}$$

Rezultă $\frac{x-a}{a}=\frac{y}{-b}$ sau trecînd totul în prima parte

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0 \tag{16}$$

care se numește ecuația dreptei *prin tăieturi* sau prin *coordonate la origine*.

Ecuația unei drepte sub forma (16) se poate scrie ori de cîte ori cunoaștem punctele situate pe axe, ale dreptei.

Exemple. 1) *Dreapta AB unde* $A(2, 0)$, $B(0, 3)$ *se scrie* $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1=0$, *care apoi se poate aduce la* $3x+2y-6=0$.

2) *Simetrica dreptei precedente în raport cu Oy va avea pe axe punctele* $A'(-2, 0)$, $B(0, 3)$, *deci ecuația este* $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}-1=0$ *sau* $-3x+2y-6=0$ (să se compare cu ecuația precedentă), *sau încă* $3x-2y+6=0$.

10. *Condiția ca un punct să se afle pe o dreaptă* este ca ecuația dreptei să fie verificată de coordonatele acelui punct. De exemplu punctul $M(1, -3)$ se găsește pe dreapta $3x+5y+12=0$, deoarece $3\cdot 1+5(-3)+12=0$.

Putem pune și problema inversă, ca fiind dată o dreaptă să găsim puncte situate pe acea dreaptă. Este de ajuns să luăm o valoare pentru x (sau y) și se găsește valoarea corespunzătoare a lui y (sau x). De pildă, referindu-ne la dreapta de mai sus pentru $x=-3$ rezultă $y=-\frac{3}{5}$, deci punctul $\left(-3, -\frac{3}{5}\right)$.

În particular, punctul unde taie axa Ox se obține făcînd $y=0$ și punctul pe Oy făcînd $x=0$; în acest fel se determină tăieturile unei drepte. Pentru ecuația generală $Ax+By+C=0$ tăieturile sînt $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ și $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

În general vom scrie că punctul $M(x_0, y_0)$ se găsește pe dreapta $Ax+By+C=0$ arătînd că verifică ecuația dreptei, adică $Ax_0+By_0+C=0$.

La fel dacă ecuația dreptei este dată sub altă formă.

O dreaptă care trece prin origine $y=mx$ este determinată dacă mai trece prin alt punct $M_0(x_0, y_0)$. Acest punct trebuie să verifice ecuația dreptei, deci $y_0=m\,x_0$, de unde $m=\frac{y_0}{x_0}$. Rezultă că *ecuația dreptei determinată de origine și de un alt punct* $M_0(x_0, y_0)$ *este*

$$y=\frac{y_0}{x_0}x \quad \text{sau} \quad y_0\,x-x_0\,y=0. \tag{17}$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

60. Să se figureze dreptele: $3x-5=0$; $2y+3=0$; $2x+5y=0$; $4x-y=0$; $3x+5y-15=0$; $4x+3y-1=0$; $2x-3y+1=0$.

61. Să se găsească coordonatele numerice a patru puncte, după voie, aparținînd dreptei $5x+6y+30=0$.

62. Să se scrie ecuația unei drepte paralelă cu dreapta $y=-3x$ și trecînd prin punctul $A(0, -4)$.

63. Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin perechile de puncte:
a) $A(2, 0)$, $B(0, 5)$; b) $C(5, 0)$, $D(0, -5)$; c) $E(-4, 0)$, $F(0, 3)$; d) $G(-8, 0)$, $H(0, -6)$
și să se aducă la forma generală.

64. Să se determine parametrii λ și μ astfel ca ecuațiile

$$(3+\lambda)x-5y+4=0 \quad \text{și} \quad 5x-(4-\mu)y-5=0$$

să reprezinte aceeași dreaptă.

$\left[\lambda=-7;\ \mu=\frac{41}{4}.\right]$

65. Să se determine a și b astfel ca ecuațiile

$$ax+3y-8=0 \quad \text{și} \quad 4x+by+20=0$$

să reprezinte: 1) aceeași dreaptă; 2) drepte paralele.

[1) $a=-\frac{8}{5}$, $b=-\frac{15}{2}$; 2) o infinitate de soluții: $ab=12$.]

66. Se dă dreapta $6x+5y-15=0$. a) Să se scrie ecuația ei cu ajutorul tăieturilor: b) să se scrie ecuațiile simetricelor ei față de axa Ox, față de axa Oy și față de origine

67. Aceleași probleme pentru cazul general $Ax+By+C=0$.

[b) $Ax-By+C=0$; $-Ax+By+C=0$; $Ax+By-C=0$.]

68. Să se scrie ecuațiile laturilor rombului cu centrul în origine, cu diagonalele pe axe, știind că măsurile acestora sînt $\overline{AC}=2a$ ($\overline{AC}\in Ox$) și $\overline{BD}=2b$.

CAPITOLUL **V**

DREAPTA DETERMINATĂ PRIN CONDIȚII GEOMETRICE DATE

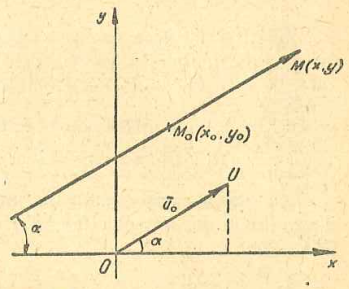


Fig. 37.

1. *Dreapta determinată de un punct și o direcție.* Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul dat și direcția definită prin coeficientul unghiular $m=\operatorname{tg}\alpha$, unde α este unghiul dreptei cu axa Ox. Luăm punctul curent $M(x, y)$ pe dreapta definită mai înainte și versorul $\bar{u}_0=\overrightarrow{OU}$ al direcției date. Vectorii (fig 37) $\bar{u}_0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha$ și $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}$ trebuie să fie coliniari, deci trebuie ca coordonatele lor să fie proporționale, adică

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}. \tag{1}$$

Din această relație rezultă imediat $y-y_0=\operatorname{tg}\alpha\cdot(x-x_0)$ sau

$$y-y_0=m(x-x_0). \tag{2}$$

Aceasta este legătura între coordonatele x, y ale punctului curent M pentru ca aceasta să descrie dreapta dată prin condițiile de la început. *Prin urmare (2) este ecuația dreptei determinate de un punct $M_0(x_0, y_0)$ și de direcția dată prin coeficientul unghiular m.*

Caz particular. Dacă dreapta trece prin origine, putem considera $M_0\equiv O(0, 0)$ și în acest caz (2) devine

$$y=mx \tag{2'}$$

ecuația unei drepte care trece prin origine și are coeficientul unghiular m. Am regăsit astfel rezultatul de la [IV, (4)].

Exemple. 1) *Să se scrie ecuația dreptei determinate de punctul $A(-2, 3)$ și coeficientul unghiular $m=\frac{3}{2}$.*

Avem $y-3=\frac{3}{2}(x+2)$ sau $3x-2y+12=0$.

2) *Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și face $120°$ cu axa Ox.*

Avem $m=\operatorname{tg}120°=-\operatorname{tg}60°=-\sqrt{3}$, deci ecuația este

$$y-1=-\sqrt{3}(x-1) \text{ sau } \sqrt{3}x+y-(1+\sqrt{3})=0.$$

2. *Ecuațiile parametrice ale dreptei definite printr-un punct și o direcție.* Acestea rezultă imediat din (1) dacă se notează cu ρ valoarea comună a rapoartelor, deci

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\rho, \tag{3}$$

de unde

$$x=x_0+\rho\cos\alpha,\quad y=y_0+\rho\sin\alpha. \tag{4}$$

Legătura nu mai este directă între x și y. Atît x cît și y depind de parametrul ρ. La fiecare valoare a parametrului ρ corespunde un punct pe dreaptă și reciproc fiecărui punct de pe dreaptă îi corespunde o valoare a lui ρ. De aceea (4) se numesc ecuațiile parametrice ale dreptei, cînd aceasta este dată printr-un punct și unghiul α. Prin eliminarea lui ρ se ajunge la (3) și de aici la forma (2), deci (2) și (4) sînt echivalente.

Interpretarea geometrică a parametrului ρ rezultă imediat dacă observăm că $x-x_0$ și $y-y_0$ sînt proiecțiile pe axe ale vectorului $\overrightarrow{M_0M}$, deci $x-x_0=|\overrightarrow{M_0M}|\cos\alpha$ și $y-y_0=|\overrightarrow{M_0M}|\sin\alpha$. Se vede din compararea cu (3) sau (4) că $\rho=|\overrightarrow{M_0M}|$, deci ρ este mărimea segmentului $\overline{M_0M}$. Acest lucru se poate arăta direct din (4) dacă se ridică la pătrat $(x-x_0)$ și $(y-y_0)$ și se adună. Rezultă

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\overline{M_0M}.$$

3. *Ecuația dreptei determinate prin două puncte.* Considerăm o dreaptă determinată prin două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ și pe această dreaptă un punct curent $M(x, y)$. Condiția necesară și suficientă ca punctul M să se afle pe dreapta M_1M_2 (fig. 38) este ca vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ și $\overrightarrow{M_1M}$ să fie coliniari, căci ei au punctul comun M_1 și prin urmare sînt situați neapărat pe aceeași dreaptă. Vectorii sînt

$$\begin{cases}\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}\\ \overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}.\end{cases} \tag{5}$$

Scriind că coordonatele (proiecțiile) lor sînt proporționale obținem

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{6}$$

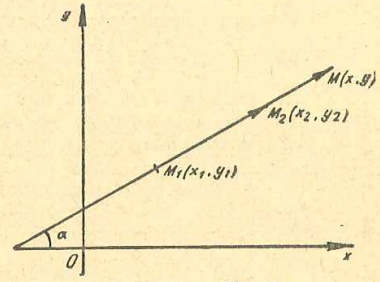


Fig. 38.

relația care dă legătura dintre coordonatele (x, y) ale punctului curent M. Prin urmare (6) este *ecuația dreptei definite de cele două puncte* M_1, M_2.

Din (6) se poate deduce ecuația dreptei determinate de origine și un alt punct. În adevăr dacă $M_1 \equiv 0$, atunci $x_1 = y_1 = 0$ și ecuația se reduce la $\frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2}$ sau sub formele

$$y = \frac{y_2}{x_2} x; \quad y_2 x - x_2 y = 0$$

care nu sînt decît ecuațiile [IV (17)] unde în loc de (x_0, y_0) avem (x_2, y_2).

4. *Coeficientul unghiular al dreptei determinate de două puncte.* Din (6) rezultă imediat

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{7}$$

Să scriem și ecuația dreptei care trece prin $M_1(x_1, y_1)$ și are coeficientul unghiular m [vezi ecuația (2)]

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Din compararea celor două ecuații rezultă imediat

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{8}$$

care se enunță astfel: *coeficientul unghiular al unei drepte date prin două puncte este raportul dintre diferența ordonatelor și diferența absciselor celor două puncte.*

Exemplu. *Să se scrie ecuația dreptei determinate de punctele* $A(3, 1)$, $B(-2, 5)$.

Putem proceda în două feluri. a) Folosim ecuația (6), deci $\frac{x-3}{-2-3} = \frac{y-1}{5-1}$ sau $4(x-3) = -5(y-1)$ care sub formă generală este $4x + 5y - 17 = 0$. b) Calculăm întîi coeficientul unghiular $m = \frac{5-1}{-2-3} = -\frac{4}{5}$, apoi scriem dreapta care trece prin A : $y - 1 = -\frac{4}{5}(x-3)$ care duce la aceeași formă generală.

Observare. Este bine ca elevii să se obișnuiască să verifice rezultatele. De pildă în exemplul de mai sus, să se vadă dacă coordonatele punctelor A, B verifică ecuația obținută.

5. *Ecuația dreptei sub formă de determinant.* Cînd dreapta este dată prin două puncte, ecuația ei se poate scrie sub formă de determinant. În adevăr din (6) rezultă

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Dar se verifică ușor că aceasta rezultă din

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

dezvoltînd determinantul după linia I.

De altfel este foarte ușor de constatat că (9) este *ecuația dreptei definite de punctele* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Pentru aceasta se va observa că dezvoltînd determinantul după prima linie, se obține o ecuație de gr. I în x și y, deci *ecuația unei drepte*. Apoi înlocuind x, y prin x_1, y_1, determinantul se anulează, avînd două linii identice, deci dreapta trece prin M_1. La fel, înlocuind x, y prin x_2, y_2, se arată că dreapta trece prin M_2; dreapta este $M_1 M_2$.

Ca exemplu să reluăm pe cel precedent: $A(3, 1)$, $B(-2, 5)$. Ecuația dreptei este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4x - 5y + 17 = 0 \quad \text{sau}$$

$4x + 5y - 17 = 0$, cum am mai găsit.

6. *Ecuațiile parametrice ale dreptei determinate de două puncte.* Reamintim formulele [II, (7)] care dau coordonatele punctului M care împarte segmentul $\overline{M_1 M_2}$ în raportul dat k, anume

$$x = \frac{x_1 - k x_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - k y_2}{1 - k}. \tag{10}$$

Cînd k variază punctul M își schimbă poziția, dar se află necontenit pe dreapta $M_1 M_2$ fie în interiorul segmentului ($k < 0$), fie în exterior ($k > 0$). Prin urmare ecuațiile (10) dau poziția oricărui punct de pe dreapta $M_1 M_2$, adică reprezintă dreapta $M_1 M_2$, de aceea se numesc ecuațiile parametrice ale dreptei $M_1 M_2$. Pentru a arăta că este vorba de un parametru și nu de un număr fix k, se obișnuiește să se noteze raportul variabil cu λ, deci (10) se scrie

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}. \tag{10'}$$

Sub această formă apar *ecuațiile parametrice ale dreptei determinate de două puncte.*

7. *Condiția ca trei puncte să fie în linie dreaptă* se poate obține fie pornind de la ecuația (6), fie de la ecuația (9). Să considerăm cele trei puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ și să scriem ecuația dreptei $M_1 M_2$ sub forma (6): $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Pentru ca cele trei puncte să fie coliniare, M_3 trebuie să fie pe dreapta $M_1 M_2$, deci coordonatele lui trebuie să verifice ecuația

dreptei. Înlocuind (x, y) prin (x_3, y_3) se găsește condiția $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$ sau inversînd rapoartele

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}. \qquad (11)$$

Dacă această condiție este îndeplinită, punctele sînt coliniare.

Desigur, condiția (11) poate fi scrisă și sub alte forme; toată chestiunea este ca indicii *ordonatelor* să fie în aceeași ordine ca și indicii *abscișelor*.

Exemplu. *Punctele* $A(3, 0)$, $B(1, 1)$, $C(-2; 2{,}5)$ *sînt coliniare fiindcă avem* $\frac{1-3}{-2-3}=\frac{1}{2{,}5}$.

Dacă se pornește de la ecuația dreptei sub formă de determinant (9) atunci se scrie întîi ecuația dreptei M_2M_3

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

și se pune condiția ca M_1 să verifice această ecuație, adică

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (12)$$

Aceasta este condiția ca cele trei puncte să fie coliniare.

Exemplul de mai înainte, reluat cu ajutorul determinantului (12) *dă*

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2{,}5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1{,}5 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1{,}5 \end{vmatrix}=0.$$

Al doilea determinant s-a obținut din primul prin scăderea ultimei coloane din prima și a doua. Punctele sînt coliniare.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

69. Se dau punctele $A(3, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 1)$. Se cere:
a) ecuația dreptei duse prin A paralelă cu BC,
b) ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

[a) Coeficientul unghiular al dreptei BC este $m=-\frac{2}{5}$. Ecuația cerută $2x+5y-31=0$; b) ecuația medianei $2x-y-1=0$.]

70. Aceleași date ca mai sus. Să se scrie ecuația dreptei AM unde $M\in BC$ și $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=-\frac{3}{4}$.

[$20x-13y+5=0$.]

71. Să se stabilească ecuația dreptei prin tăieturi [IV, (16)], scriind dreapta determinată de punctele pe axe, sub formă de determinant.

72. Se dă punctul fix $A(a, b)$ și punctul variabil $M(\alpha-b, \alpha-a)$, α fiind un parametru. Să se arate că dreapta AM este fixă și să se scrie ecuația ei.

[Coeficientul unghiular al dreptei AM este constant; $x-y-a+b=0$.]

73. Se dă punctul $A(1, 3)$, punctul variabil $M(\alpha, \alpha-1)$ și dreapta $5x-3y+10=0$. Să se determine coordonatele lui M astfel ca AM să fie paralelă cu dreapta dată.

$\left[M\left(-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right).\right]$

74. Se dau grupele de cîte trei puncte:

$$A\left(-\frac{4}{5}, 2\right),\ B\left(\frac{2}{5}, 4\right),\ C(1{,}5);$$

$$A'\left(-\frac{7}{5}, 1\right),\ B'\left(-1, \frac{5}{8}\right),\ C'(2, -5).$$

Să se spună în care grupă punctele sînt coliniare și să se scrie ecuația dreptei respective.

[Pentru ecuație trebuie numai două puncte. $5x-3y+10=0$.]

75. Să se determine punctul $M(\lambda, \lambda)$ astfel ca să fie în linie dreaptă cu punctele $A(1, -2)$ $B(2, 4)$.

$\left[M\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}\right).\right]$

76. Se dau punctele $A\left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right), B\left(\frac{7}{4}, \frac{21}{4}\right)$, $C(3, 4)$, $D(-7, 14)$.

a) Să se arate că cele patru puncte sînt coliniare.

b) Să se arate că punctele date formează o diviziune armonică, și anume C și D sînt conjugate față de A și B.

[a) Se va arăta că două puncte sînt coliniare cu al treilea, apoi cu al patrulea, sau se va scrie ecuația determinată de două puncte și se va arăta că celelalte o verifică. Punctele de bază se vor alege cele mai convenabile. b) Trebuie verificată una din relațiile [III, (9)]. Este preferabil să nu se facă un calcul brut, ci să se scoată factori în sumele neefectuate.]

77. Aceeași problemă pentru punctele $A(8, 4)$, $B(12, 0)$, $C(6, 6)$, $D(9, 3)$.

78. Să se scrie ecuațiile medianelor triunghiului format de punctele $A(1, 4)$, $B(3, -1)$, $C(8, -2)$. Să se verifice că centrul de greutate se află pe fiecare din ele.

[$3x+y-7=0$; $y-1=0$; $x+2y-4=0$. $G(2, 1)$.]

79. Se dau punctele $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ și dreapta (D) $x-4y+7=0$. Să se găsească coordonatele punctului C, așezat pe dreapta (D), astfel ca triunghiul ABC să fie isoscel cu baza AB.

[Se ia un punct $M(\alpha, \beta)$ și se scrie că $\overline{MA}=\overline{MB}$ și $M \in (D)$. Se găsește $M(1, 2)$.]

80. Se dau punctele $A(8, 0)$, $B(3, 6)$, $C(0, 3)$. Dreapta BC taie axa Ox în D și dreapta AB taie axa Oy în E.

Să se arate că mijloacele segmentelor $\overline{OB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DE}$ sînt coliniare.

81. Se dau punctul $A(2, 1)$ și dreptele (D) $2x-3y+1=0$, (D') $x+2y-7=0$. Să se determine punctul M de pe dreapta (D), știind că mijlocul segmentului $\overline{AM}$ se află pe (D').

[Se scrie că $M(\alpha, \beta) \in (D)$ și mijlocul lui $\overline{AM}$ se află pe (D'). $M(4, 3)$.]

CAPITOLUL VI

POZIȚIILE RELATIVE ALE DREPTELOR ÎN PLAN

A. DOUĂ DREPTE

1. *Intersecția a două drepte.* Fiind date ecuațiile a două drepte

$$Ax+By+C=0 \text{ și } A'x+B'y+C'=0 \tag{1}$$

dacă ele sînt concurente, coordonatele punctului de intersecție trebuie să verifice ambele ecuații, fiindcă punctul se găsește pe fiecare din ele. Prin urmare cele două coordonate reprezintă soluția sistemului de ecuații liniare (1), anume:

$$x=-\frac{CB'-C'B}{AB'-A'B}; \quad y=-\frac{AC'-A'C}{AB'-A'B} \tag{2}$$

cu condiția ca $AB'-A'B \neq 0$.

Discuție. 1) Sistemul (1) în care $AB'-A'B \neq 0$ este un sistem Cramer și are soluția unică (2), prin urmare cele două drepte au un punct comun, bine determinat. Dreptele sînt deci concurente.

2) Dacă $AB'-A'B=0$, adică $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ și $CB'-C'B \neq 0$ (sau $AC'-A'C \neq 0$) atunci sistemul este imposibil, prin urmare cele două drepte nu au nici un punct comun la distanță finită. Dreptele sînt deci paralele. Am regăsit astfel condiția de paralelism a două drepte. care a fost dată la (IV, § 7).

3) Dacă $AB'-A'B=0$ și de asemenea $CB'-C'B=0$, atunci rezultă $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$, deci și $AC'-A'C=0$. Sistemul este nedeterminat, deoarece notînd cu $\frac{1}{k}$ valoarea comună a rapoartelor, a doua ecuație din (1) devine $k(Ax+By+C)=0$, adică se reduce la prima. Cele două drepte au o infinitate de puncte comune, prin urmare coincid. Se regăsesc astfel rezultatele de la cap. IV, § 7.

2. *Unghiul a două drepte.* Presupunem dreptele (D) și (D') date sub formele $y=mx+n$ și $y=m'x+n'$ și ne propunem să calculăm unghiul format de ele.

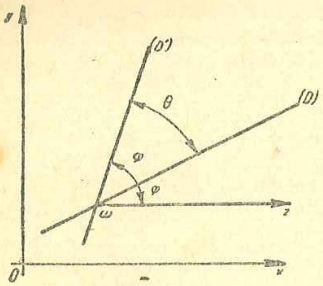


Fig. 39.

Prin punctul lor de intersecție ω ducem $\omega z \| Ox$ și notăm $\sphericalangle[\omega z, (D)] = \varphi$, $\sphericalangle[\omega z, (D')] = \varphi'$ și $\sphericalangle[(D), (D')] = \theta$.

Se știe că $m = \operatorname{tg} \varphi$ și $m' = \operatorname{tg} \varphi'$ (fig. 39), iar unghiul celor două drepte este evident $\theta = \varphi' - \varphi$. Rezultă

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\varphi' - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi}$$

sau

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m' - m}{1 + mm'}. \qquad (3)$$

Atunci cînd se dau ecuațiile dreptelor rămîne să hotărîm noi care este (D) și care (D'), dar după cum facem o alegere sau alta obținem, din cauza diferenței $(m' - m)$, două valori egale și de semne contrare pentru $\operatorname{tg} \theta$. Aceasta corespunde faptului geometric că cele două drepte fac între ele două unghiuri suplimentare. Convenim să alegem valoarea pozitivă, adică să calculăm unghiul ascuțit al dreptelor, afară de cazul cînd există considerații care ne obligă la alegerea contrară.

Exemple. 1) *Să se afle unghiul ascuțit al dreptelor*

$$x - 5y + 8 = 0 \text{ și } 3x - 2y - 12 = 0.$$

Coeficienții unghiulari sînt $m = \frac{1}{5}$, $m' = \frac{3}{2}$, deci

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}} = 1, \text{ de unde } \theta = 45°.$$

2) *Unghiul dreptelor* $x + y + 1 = 0$ *și* $3x + y - 6 = 0$ *este dat de* $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1 - (-3)}{1 + (-1)(-3)} = \frac{1}{2}$; $\theta = 26°33'54''$.

Dacă dreptele sînt date sub forma generală

$$Ax + By + C = 0;\ A'x + B'y + C' = 0,$$

atunci $m = -\frac{A}{B}$, $m' = -\frac{A'}{B'}$ și formula (3) devine

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{AB' - A'B}{AA' + BB'}. \qquad (3')$$

Exemplele precedente se pot trata direct cu relația (3').

Dacă în (3) $m = m'$, atunci $\operatorname{tg} \theta = 0$, deci $\theta = 0$ (sau π) și dreptele sînt paralele. Găsim și pe această cale condiția de paralelism a două drepte.

Condiția de paralelism dedusă din (3') este $AB' - A'B = 0$ sau $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$, ceea ce am găsit și pe alte căi.

Observare importantă. Dreptele $Ax + By + C = 0$ și $Ax + By + C' = 0$, care diferă numai prin termenul liber, sînt evident paralele fiindcă îndeplinesc condiția.

Reciproc, două drepte paralele pot fi aduse să difere numai prin termenul liber. În adevăr, dacă notăm $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = k$, atunci $A' = kA$, $B' = kB$ și ecuația $A'x + B'y + C' = 0$ devine $k\,Ax + k\,By + C' = 0$ sau $Ax + By + \frac{C'}{k} = 0$ care diferă numai prin termenul liber de $Ax + By + C = 0$.

Exemplu. *O paralelă oarecare la dreapta* $3x - 5y + 15 = 0$ *se scrie* $3x - 5y + \lambda = 0$, λ *fiind un parametru.*

3. *Condiția ca două drepte să fie perpendiculare* se deduce tot din relația (3), și anume cînd $\theta \to \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \theta$ nu este definită, de unde rezultă

$$1 + mm' = 0 \text{ sau } m' = -\frac{1}{m}. \qquad (4)$$

La același rezultat se ajunge dacă pornim de la inversa tangentei, adică de la

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1 + mm'}{m' - m}.$$

Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ avem cotangenta nulă, deci $1 + mm' = 0$ etc.

Din (4) se deduce regula ușor de ținut minte: *dacă două drepte sînt perpendiculare, coeficientul unghiular al uneia din ele este invers și de semn contrar cu al celeilalte.*

Dacă dreptele sînt date sub forma generală (fig. 40)

$$(D)\ Ax + By + C = 0;\ (D')\ A'x + B'y + C' = 0$$

atunci prima condiție (4) devine

$$AA' + BB' = 0. \qquad (4')$$

Această relație se poate deduce și altfel. Se știe [IV, § 4] că coeficienții A, B ai dreptei (D) sînt coordonatele vectorului normal $\overline{\mathcal{N}} = A\vec{i} + B\vec{j}$ și tot așa avem vectorul normal $\overline{\mathcal{N}'} = A'\vec{i} + B'\vec{j}$ față de (D'). Însă $\sphericalangle(\overline{\mathcal{N}}, \overline{\mathcal{N}'}) = \sphericalangle[(D), (D')]$ prin urmare dacă dreptele sînt perpendiculare și normalele lor sînt perpendiculare. Dar condiția de perpendicularitate a vectorilor $\overline{\mathcal{N}}$, $\overline{\mathcal{N}'}$ este [II, § 24]

$$AA' + BB' = 0.$$

Din aceasta se poate deduce condiția sub forma $1 + mm' = 0$.

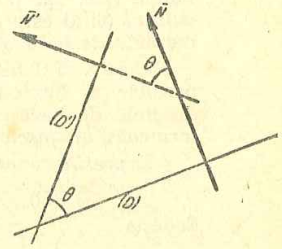


Fig. 40.

4. Aplicații. 1) *Să se ducă prin punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *paralelă la dreapta* $Ax + By + C = 0$.

Dreapta care trece prin M_0 și are coeficientul unghiular m este $y-y_0=m(x-x_0)$. Însă dreapta dată are $m=-\frac{A}{B}$, deci paralela prin M_0 este $y-y_0=-\frac{A}{B}(x-x_0)$ sau

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{5}$$

Altă metodă. O paralelă la dreapta dată are ecuația $Ax+By+\lambda=0$. Obligînd această paralelă să treacă prin M_0 avem $Ax_0+By_0+\lambda=0$. Prin scăderea celor două relații se elimină λ și se obține (5).

2) *Prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ să se ducă perpendiculara pe o dreaptă dată.*

a) Dreapta este dată sub formă explicită $y=mx+n$. Orice perpendiculară pe această dreaptă are coeficientul unghiular $m'=-\frac{1}{m}$, deci ecuația dreptei cerute este

$$y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0). \tag{6}$$

b) Dreapta este dată sub forma generală $Ax+By+C=0$. Atunci $m=-\frac{A}{B}$, deci $m'=\frac{B}{A}$ și ecuația dreptei cerute este $y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$ sau

$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0. \tag{6'}$$

Forma (6') se folosește practic mai rar decît (6).

Exemplu. *Să se scrie paralela dusă prin punctul $M_0(-2, 1)$ la dreapta $y=3x+2$.*

Ecuația dreptei căutate este $y-1=-\frac{1}{3}(x+2)$ sau $x+3y-1=0$.

3) *Să se afle unghiul dreptelor $y=mx+n$ și $y=\frac{m-1}{m+1}x+k$.*

Avem $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{m-\frac{m-1}{m+1}}{1+m\frac{m-1}{m+1}}=\dfrac{m^2+1}{m^2+1}=1$, deci $\theta=45°$.

5) *Fascicul de drepte.* Mulțimea dreptelor care trec printr-un punct fix se zice că formează un fascicul. Punctul fix se numește *vîrful* fasciculului. Acesta poate fi dat, din punct de vedere analitic, prin coordonatele sale, dar poate fi dat și ca intersecție a două drepte. *Vîrful fasciculului* (cînd este dat) sau *dreptele care definesc vîrful* le vom numi *elementele de bază* ale fasciculului.

Dacă vîrful fasciculului este aruncat la infinit, dreptele de bază devin paralele și fasciculul este format din mulțimea dreptelor paralele cu dreptele de bază. Altfel spus *toate dreptele din plan paralele între ele formează un fascicul.*

Expresiile analitice. a) *Fasciculul este dat prin dreptele de bază*

$$(D)=Ax+By+C=0 \text{ și } (D')=A'x+B'y+C'=0.$$

Ecuația

$$Ax+By+C+\lambda(A'x+B'y+C')=0 \tag{7}$$

sau mai scurt

$$(D)+\lambda(D')=0 \tag{7'}$$

reprezintă o dreaptă, deoarece este de gradul I în raport cu x și y, dar o dreaptă variabilă din cauza parametrului λ. Coordonatele punctului de intersecție al dreptelor de bază verifică fiecare ecuație $(D)=0$ și $(D')=0$, deci verifică și ecuația (7) sau (7'), oricare ar fi λ.

De aici rezultă că atunci cînd λ variază (7) reprezintă o infinitate de drepte, care însă trec toate prin punctul comun al dreptelor de bază, adică prin vîrful ω al fasciculului.

Se pune însă întrebarea: ecuația (7) sau (7') reprezintă, cînd λ variază, *toate* dreptele care trec prin intersecția ω a dreptelor de bază?

Este de ajuns să arătăm că fiind dată o dreaptă arbitrară (Δ) ce trece prin ω, se poate determina λ astfel ca (7) sau (7') să reprezinte pe (Δ). Fie (Δ) dreapta ωM_0, unde $M_0(x_0, y_0)$ este un punct oarecare din plan, nesituat pe nici una din dreptele de bază, prin urmare

$$(D_0)=Ax_0+By_0+C\neq 0 \quad \text{și} \quad (D'_0)=A'x_0+B'y_0+C'\neq 0. \tag{8}$$

Scriind că dreapta (7') trece prin $M_0(x_0, y_0)$ obținem

$$(D_0)+\lambda(D'_0)=0, \text{ de unde } \lambda=-\frac{(D_0)}{(D'_0)},$$

care este în mod unic determinat, cu condițiile (8). Înlocuind pe λ și eliminînd numitorul se obține ecuația dreptei (Δ), adică ωM_0:

$$(D'_0)(D)-(D_0)(D')=0, \tag{9}$$

diferită de dreptele de bază, deoarece M_0 nu se află pe nici una din ele. Însă și dreptele de bază se obțin din (7'), și anume: pentru $\lambda=0$, rămîne $(D)=0$, apoi scriind pe (7') sub forma $\frac{D}{\lambda}+(D')=0$ și făcînd $\lambda\to\infty$, rămîne $(D')=0$.

În felul acesta toată mulțimea dreptelor fasciculului cu vîrful $\omega\equiv(D)\cap(D')$ este conținută în (7') sau (7). De aceea se spune că (7) sau (7') reprezintă ecuația fasciculului care are ca elemente de bază dreptele $(D)=0$ și $(D')=0$.

De aici se desprinde următoarea concluzie: în cazul cînd coeficienții unei drepte conțin un același parametru λ, la puterea I, atunci se izolează termenii care conțin pe λ, se scoate acesta factor comun și se aduce ecuația la forma (7), *prin urmare dreapta trece printr-un punct fix.*

Punctul fix este dat de sistemul $(D)=0$, $(D')=0$. Acesta este procedeul prin care se dovedește că o dreaptă trece printr-un punct fix.

b) *Fasciculul este dat prin vîrful său $\omega(x_0, y_0)$.* Orice dreaptă care trece prin ω este cuprinsă în ecuația $y-y_0=m(x-x_0)$, unde coeficientul unghiular m este variabil, deci un parametru. Pentru uniformizarea notației îl vom înlocui cu λ, astfel încît ecuația fasciculului este

$$y-y_0=\lambda(x-x_0). \tag{10}$$

De altfel legătura cu cazul precedent este ușor de făcut: dreptele $D=0$ și $D'=0$ sînt aici $y-y_0=0$ și $x-x_0=0$, paralele cu axele, care au ca intersecție punctul de coordonate (x_0, y_0). În acest fel nu mai este necesar să arătăm din nou că orice dreaptă a fasciculului este cuprinsă în (10).

c) Fasciculul format din mulțimea dreptelor paralele este definit de direcția dreptelor, deci este dat prin coeficientul unghiular m.

Ecuația fasciculului este

$$y=mx+\lambda \tag{11}$$

care cuprinde toate dreptele cu direcția dată de m, λ fiind parametrul fasciculului.

Exemple. 1) *Se cere punctul fix prin care trec dreptele*

$$(1+2\lambda)x-(2+3\lambda)y+7+12\lambda=0.$$

Se scrie ecuația sub forma $x-2y+7+\lambda(2x-3y+12)=0$, fascicul cu dreptele de bază $x-2y+7=0$ și $2x-3y+12=0$, al căror punct comun este $\omega(-3, 2)$, punctul fix cerut.

2) *Dreapta* $x+\lambda y-2=0$ *trece prin punctul fix* $(2, 0)$.

3) *Dreapta* $\lambda x-6y+9=0$ *trece prin punctul fix* $\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

4) *Ecuația* $\lambda x+2\lambda y-4=0$ *se scrie* $(\lambda\neq 0)y=-\frac{1}{2}x+\frac{4}{\lambda}$ *și reprezintă un fascicul de drepte paralele.*

B. TREI DREPTE

6. Pozițiile relative a trei drepte pot fi următoarele:

a) *Dreptele se taie două cîte două și determină un triunghi.*

b) *Două drepte sînt paralele și a treia le intersectează (unul din vîrfurile triunghiului este aruncat la infinit).*

c) *Cele trei drepte sînt concurente.*

d) *Cele trei drepte sînt paralele (punctul de concurență aruncat la infinit).*

e) *Două drepte sînt confundate, a treia taie dreapta dublă.*

f) *Două drepte confundate, a treia paralelă cu dreapta dublă.*

g) *Cele trei drepte sînt confundate.*

În cele ce urmează vom presupune că dreptele sînt distincte, deci nu vom considera ultimele trei cazuri. Din punct de vedere analitic trebuie să regăsim cazurile pe care le-am enunțat aici.

Presupunem deci că dreptele sînt date prin ecuațiile

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A'x+B'y+C'=0 \\ A''x+B''y+C''=0 \end{cases} \tag{12}$$

În general un astfel de sistem nu este compatibil (posibil), adică nu există o pereche de valori (x_0, y_0) care să verifice toate ecuațiile. Aceasta înseamnă că cele trei drepte nu trec prin același punct, adică nu sînt concurente.

Dacă

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\neq 0; \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A'' & B'' \end{vmatrix}\neq 0; \quad \begin{vmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{vmatrix}\neq 0 \tag{13}$$

atunci ecuațiile (12), luate cîte două formează sisteme Cramer, compatibile și determinate. Dreptele se intersectează două cîte două și formează un triunghi. *Este cazul* (a). Dacă *numai unul* oarecare din determinanții (13) este nul (de exemplu primul), atunci două drepte (primele două) sînt paralele, dar fiecare din ele intersectează pe a treia, deoarece ecuațiile lor formează sistem Cramer. *Este cazul* (b). Dacă doi determinanți din (13) sînt nuli, atunci al treilea este de la sine nul. În adevăr fie $AB'-A'B=0$ și $AB''-A''B=0$, de unde rezultă

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}=\frac{A''}{B''}, \tag{14}$$

deci $A'B''-A''B'=0$.

Interpretarea geometrică este că dacă două drepte sînt paralele cu a treia, ele sînt paralele între ele. *Este cazul* (d).

În acest caz, din cauza egalităților (14), determinantul format cu toți coeficienții ecuațiilor este nul:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}=0 \tag{14'}$$

deoarece are elementele a două coloane proporționale.

7. *Condițiile ca trei drepte să fie concurente.* Ecuațiile dreptelor sînt cele date la (12). Pentru ca dreptele să fie concurente trebuie să existe un punct $M_0(x_0, y_0)$ care să verifice toate cele trei ecuații. Aceasta înseamnă că cele *trei ecuații* cu *două necunoscute* (12) trebuie să formeze sistem compatibil și determinat. Pentru aceasta condițiile necesare și suficiente sînt:

a) Să existe un determinant de ordinul II, format cu coeficienții lui x și y, diferit de zero, deci unul din determinanții (3) să fie diferit de zero;

b)
$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}=0 \tag{15}$$

Prima condiție (a) înseamnă din punct de vedere analitic, că două din drepte sînt concurente. Condiția (b), adică relația (15) arată că a treia dreaptă trece prin punctul de intersecție al primelor două.

Acestea sînt condițiile ca trei drepte să fie concurente. Coordonatele punctului comun se găsesc rezolvînd sistemul format de două oarecare din cele trei ecuații.

Să presupunem acum că prima condiţie (a) nu este îndeplinită; aceasta înseamnă că toţi determinanţii (13) sînt nuli, iar cele trei drepte sînt paralele [cazul (d)]. În studiul făcut mai înainte am văzut însă că atunci (14′) sau (15) este îndeplinită ca o consecinţă.

Prin urmare dacă este îndeplinită numai a doua condiţie (b) nu rezultă că dreptele sînt concurente; ele pot fi şi paralele.

Rezumăm discuţia de mai sus în următorul enunţ:

Dacă determinantul tuturor coeficienţilor a trei drepte (15) este nul, atunci cele trei drepte sînt **concurente sau paralele:** *dacă două din ele sînt concurente, atunci toate trei sînt concurente, iar dacă două sînt paralele, atunci şi a treia este paralelă cu ele.*

O enunţare şi mai concisă este următoarea:

Egalitatea (15) reprezintă condiţia ca trei drepte să fie concurente la distanţă finită sau la infinit.

8. *Altă metodă* de a dovedi concurenţa a trei drepte este aceea de a folosi fasciculele. În adevăr dacă trei drepte (D), (D'), (D'') de ecuaţii $(D)=0$, $(D')=0$, $(D'')=0$ sînt concurente, una din ele, de exemplu (D'') trece prin intersecţia celorlalte două, prin urmare luînd pe (D) şi (D') ca drepte de bază, (D'') este o dreaptă a fasciculului determinat de ele. Se poate scrie deci

$$\mu(D'')=(D)+\lambda(D')=0,$$

Dacă μ şi λ sînt fracţionari, prin eliminarea numitorilor se obţine

$$p(D'')=m(D)+n(D')=0 \qquad (16)$$

relaţie care arată că una din drepte, înmulţită cu un factor care poate fi şi 1, rezultă ca o *combinaţie liniară** a celorlalte două.

Exemple. 1) *Să se cerceteze dacă dreptele* $5x-2y+8=0$; $3x+4y-5=0$; $x-3y+6{,}5=0$ *sînt concurente.*

Metoda I. a) Avem

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0;$$

b)
$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 6{,}5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 13 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 6{,}5 \end{vmatrix} = 0,$$

deoarece liniile I şi III au elementele proporţionale. S-a scăzut linia a II-a din prima.

Metoda a II-a. Adunăm a doua ecuaţie cu a treia înmulţită cu 2 şi obţinem prima ecuaţie, deci dreptele sînt concurente.

2) *Dreptele* $6x+y-8=0$; $4x+3y-5=0$; $2x-2y-3=0$ *sînt concurente, deoarece ultima se obţine prin scăderea primelor două.*

3) *Să se determine* α *astfel ca dreptele* $2x+y-4=0$; $5x-2y+3=0$; $\alpha x+3y-2=0$, *să fie concurente.*

* Prin *combinaţie liniară* a două expresii E_1 şi E_2 se înţelege suma acelor expresii, înmulţite fiecare cu cîte un factor: $\alpha E_1+\beta E_2$. Dacă E_1 şi E_2 sînt ridicate la puteri, combinaţia nu mai este liniară.

Aici este preferabil să se folosească prima metodă. Se observă că

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ deci trebuie să avem } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \\ \alpha & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

care dezvoltat după ultima linie dă $5\alpha+60=0$, de unde $\alpha=-12$.

Aplicaţii. *1. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin intersecţia dreptelor* $2x-y+5=0$, $3x+2y-3=0$ *şi prin punctul* $A(-3,-2)$.

Metoda I. Fasciculul determinat de cele două drepte este

$$2x-y+5+\lambda(3x+2y-3)=0.$$

Scriind că dreapta trece prin $A(-3,-2)$ se găseşte $\lambda=\frac{1}{16}$. Ecuaţia dreptei căutate se obţine înlocuind pe λ în ecuaţia fasciculului. Se găseşte $35x-14y+77=0$ sau $5x-2y+11=0$.

Metoda a II-a. Intersecţia dreptelor date este punctul $\omega(-1,3)$, care se obţine rezolvînd sistemul celor două ecuaţii. Dreapta ωA are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5x-2y+11=0.$$

Metoda a III-a. Scriem o dreaptă oarecare ce trece prin A, $y+2=m(x+3)$, deci $mx-y+3m-2=0$ şi punem condiţia ca aceasta, împreună cu dreptele date, să fie concurente

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 3m-2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuaţie care dezvoltată după linia I, dă $m=\frac{5}{2}$ şi ecuaţia dreptei este $y+2=\frac{5}{2}(x+3)$, adică aceeaşi dreaptă.

2) Fie M un punct variabil pe prima bisectoare şi A(3, 1), B(−1, 2) două puncte fixe. Dreapta MA taie axa Ox în P, iar dreapta MB taie axa Oy în Q. Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix, ale cărui coordonate se cer.

Punctul M fiind pe prima bisectoare are coordonatele egale, de $M(\lambda,\lambda)$. Dreptele MA şi MB au respectiv ecuaţiile

$$(MA)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)x-(\lambda-3)y-2\lambda=0$$

$$(MB)\quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)x-(\lambda+1)y+3\lambda=0.$$

În prima ecuaţie se face $y=0$, iar în a doua $x=0$ şi se obţin punctele pe axe $P\left(\frac{2\lambda}{\lambda-1},0\right)$, $Q\left(0,\frac{3\lambda}{\lambda+1}\right)$.

Ecuaţia dreptei PQ se scrie prin tăieturi

$$\frac{(\lambda-1)x}{2\lambda}+\frac{(\lambda+1)y}{3\lambda}-1=0 \quad \text{sau}$$

$$3(\lambda-1)x+2(\lambda+1)y-6\lambda=0.$$

Separînd termenii în λ se obține fasciculul

$$\lambda(3x+2y-6)-(3x-2y)=0$$

cu dreptele de bază $3x+2y-6=0$ și $3x-2y=0$, care dau vîrful fasciculului $\omega\left(1,\frac{3}{2}\right)$ prin care trece dreapta PQ.

9. *Îndrumări pentru rezolvarea problemelor.* În exemplele și aplicațiile luate pînă aici am căutat să formăm deprinderea de a lucra cu coordonatele și cu metodele geometriei analitice. Pentru acest motiv am folosit date numerice, ceea ce înseamnă că toate figurile au fost legate de axele de coordonate.

Geometria analitică servește însă la rezolvarea oricărei probleme de geometrie, al căror enunț nu se referă la axe. Atunci trebuie să *ne alegem noi* sistemul de referință, adică axele de coordonate. Alegerea axelor de coordonate are o foarte mare importanță, căci de aceasta depinde ușurarea calculelor. Nu există reguli precise pentru alegerea sistemului de referință, însă putem da unele îndrumări care pot fi de folos, după cum urmează:

a) dreptele care se aleg ca axe trebuie să fie fixe;

b) dacă printre datele problemei apare sau putem noi duce o axă de simetrie, aceasta se va lua ca axă Ox sau Oy;

c) dacă putem pune în evidență două axe de simetrie, acestea se vor alege ca axe de coordonate;

d) dacă un punct este centru de simetrie pentru datele problemei, atunci este bine ca el să fie luat ca origine;

e) dacă în enunțul problemei este vorba de un unghi drept, un triunghi dreptunghic, un dreptunghi, pătrat etc., laturile unghiului drept se vor lua ca axe;

f) dacă nu avem nici o indicație în sensul celor arătate mai înainte, atunci alegerea se face astfel încît cît mai multe puncte să aibă o parte din coordonate nule, sau dreptele să aibă poziții particulare (paralele cu axele, sau să treacă prin origine etc.), pentru a ușura calculul.

Trebuie totuși să atragem atenția că sînt cazuri cînd este bine să renunțăm la simplificări de calcul și să alegem axele oarecare, pentru a nu strica simetria rezultatelor, care pot folosi pentru demonstrații, interpretări etc. Ca exemplu vom arăta cum se află ecuațiile medianelor unui triunghi (exemplul 3).

Îndemînarea de a alege axele se capătă prin exerciții cît mai multe. Pentru ilustrarea concretă a îndrumărilor precedente, dăm cîteva exemple.

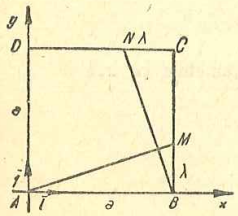


Fig. 41.

1) *Se dă un pătrat $ABCD$, pe laturile căruia se iau, în sensul $A-B-C-D$, segmentele $\overline{BM}=\overline{CN}$. Să se demonstreze că dreptele AM și BN sînt perpendiculare.*

Axele de coordonate se aleg laturile pătratului: AB ca axă Ox și AD ca axă Oy. Să notăm cu a latura pătratului și $\overline{BM}=\overline{CN}=\lambda$ variabil. Coordonatele punctelor A, B, C, M, N, se scriu direct urmărind figura 41:

$$A(0,\,0),\ B(a,\,0),\ C(0,\,a),\ M(a,\,\lambda),\ N(a-\lambda,\,a).$$

Coeficienții unghiulari ai dreptelor AM, BN sînt

$$m=\frac{\lambda}{a},\quad m'=\frac{a}{(a-\lambda)-a}=-\frac{a}{\lambda},$$

de unde se vede că $mm'=-1$ și dreptele sînt perpendiculare.

Soluția vectorială. Dacă scriem vectorii $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ cu ajutorul versorilor i, j, atunci $\overrightarrow{AM}=a\vec{i}+\lambda\vec{j}$ și $\overrightarrow{BN}=-\lambda\vec{i}+a\vec{j}$. Se vede imediat că produsul scalar al lor este $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=-a\lambda+\lambda a=0$, deci vectorii sînt perpendiculari și dreptele-suport de asemenea.

2) *Pe o latură a unui unghi se iau punctele A, B, iar pe cealaltă latură punctele C, D. Fie $E\equiv AD\cap BC$, F intersecția paralelelor duse prin A și C la laturile unghiului și G intersecția paralelelor duse prin B și D la aceleași laturi. Să se demonstreze că E, F, G sînt coliniare.*

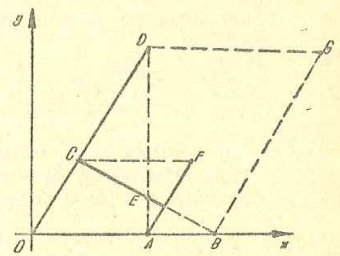


Fig. 42.

Dacă am considera cazul particular cînd unghiul este drept, este evident că laturile unghiului ar trebui luate ca axe.

În cazul general problema se tratează cu ușurință în *axe oblice**. Axele vor fi chiar laturile unghiului.

Pentru un unghi oarecare, în axe dreptunghiulare, cea mai mare simplificare pe care o putem face este să alegem vîrful unghiului ca origine și latura AB ca axă Ox. Axa Oy va fi perpendiculară în O pe AB.

Ecuația dreptei CD va fi $y=mx$, iar punctele vor avea coordonatele: $A(a,\,0)$, $B(b,\,0)$, $C(c,\,cm)$, $D(d,\,md)$. Ecuațiile dreptelor AD și BC (fig. 42) sînt

$$(AD)\quad\begin{vmatrix} x & y & 1\\ d & md & 1\\ a & 0 & 1\end{vmatrix}=md\,x+(a-d)y-ma\,d=0$$

$$(BC)\quad\begin{vmatrix} x & y & 1\\ c & mc & 1\\ b & 0 & 1\end{vmatrix}=mc\,x+(b-c)y-m\,bc=0$$

Rezolvînd sistemul se găsește

$$E\left[\frac{bd\,(a+c)-ac\,(b+d)}{bd-ac},\ \frac{m\,cd\,(b-a)}{bd-ac}\right].$$

Dreptele AF, CF au ecuațiile

$$(AF)\quad y=m(x-a);\qquad (CF)\quad y=mc$$

deci $F(a+c,\,mc)$.

În mod asemănător $G(b+d,\,md)$. Condiția ca punctele să fie coliniare este

$$\begin{vmatrix} \frac{bd(a+c)-ac(b+d)}{bd-ac} & \frac{m\,cd(b-a)}{bd-ac} & 1\\ a+c & mc & 1\\ b+d & md & 1\end{vmatrix}=0$$

* Elevii care doresc vor putea încerca, cu titlu de exercițiu, să trateze astfel problema, sub îndrumarea profesorului.

sau, dînd factor pe prima linie pe $\frac{1}{bd-ac}$ și pe a doua coloană pe m:

$$\frac{m}{bd-ac}\begin{vmatrix} bd(a+c)-ac(b+d) & cd(b-a) & bd-ac \\ a+c & c & 1 \\ b+d & d & 1 \end{vmatrix}=0$$

Deoarece $m\neq 0$, trebuie ca determinantul să fie nul. Acesta se descompune într-o diferență de doi determinanți, amîndoi nuli, deoarece primul are liniile I și II proporționale, iar al doilea liniile I și III, după cum se observă

$$\begin{vmatrix} bd(a+c) & bdc & bd \\ a+c & c & 1 \\ b+d & d & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} ac(b+d) & acd & ac \\ a+c & c & 1 \\ b+d & d & 1 \end{vmatrix}=0$$

Punctele E, F, G sînt deci coliniare.

Soluție vectorială. Pentru a dovedi că E, F, G sînt coliniare este de ajuns să dovedim că vectorii $\overrightarrow{EF}$ și $\overrightarrow{FG}$ sînt coliniari, căci avînd punctul F comun se găsesc neapărat pe aceeași dreaptă. Pentru aceasta notăm mărimile segmentelor $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$, $\overline{OD}=d$ (a nu se confunda cu c și d abscisele de la soluția analitică) și versorii direcțiilor OB, OD cu $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$.

Putem scrie imediat vectorii $\overrightarrow{OF}=a\bar{\alpha}+c\bar{\beta}$, $\overrightarrow{OG}=b\bar{\alpha}+d\bar{\beta}$, apoi $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OF}=(b-a)\bar{\alpha}+(d-c)\bar{\beta}$.

Mai puțin simplu se găsește vectorul $\overrightarrow{EF}$. Procedăm astfel

$$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AD}=\lambda(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=\lambda(d\bar{\beta}-a\bar{\alpha}),$$

$$\overrightarrow{CE}=\mu\overrightarrow{CB}=\mu(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\mu(b\bar{\alpha}-c\bar{\beta}).$$

Apoi $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}$, prin urmare trebuie ca

$$a\bar{\alpha}+\lambda(-a\bar{\alpha}+d\bar{\beta})=c\bar{\beta}+\mu(b\bar{\alpha}-c\bar{\beta})$$

sau egalînd proiecțiile pe aceleași axe

$$\lambda a+\mu b=a;\quad \lambda d+\mu c=c,\ \text{de unde}\ \lambda=\frac{c(b-a)}{bd-ac}.$$

Rezultă $\overrightarrow{AE}=\frac{c(b-a)}{bd-ac}(d\bar{\beta}-a\bar{\alpha})$ și $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=a\bar{\alpha}+\frac{c(b-a)}{bd-ac}(d\bar{\beta}-a\bar{\alpha})$.

Acum putem calcula vectorul $\overrightarrow{EF}$:

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=a\bar{\alpha}+c\bar{\beta}-a\bar{\alpha}-\frac{c(b-a)}{bd-ac}(d\bar{\beta}-a\bar{\alpha}),$$

de unde

$$\overrightarrow{EF}=\frac{ac}{bd-ac}[(b-a)\bar{\alpha}+(d-c)\bar{\beta}]=k\cdot\overrightarrow{FG},$$

deci vectorii $\overrightarrow{EF}$ și $\overrightarrow{FG}$ sînt coliniari și punctele E, F, G coliniare.

3) *Să se demonstreze că medianele unui triunghi sînt concurente.* Dacă am alege ca origine un vîrf al triunghiului și una din laturile ce trec prin acest vîrf ca axă Ox, trei din coordonatele vîrfurilor ar fi nule și am avea numai trei coordonate diferite de zero.

Dezavantajul este însă că se rupe simetria ecuațiilor și sîntem nevoiți să reluăm calculul de la început pentru fiecare mediană. De aceea nu vom particulariza sistemul de axe și vom vedea că după ce am stabilit ecuația unei mediane, celelalte se deduc prin permutări circulare.

Fie deci, față de un sistem de axe $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ vîrfurile triunghiului. Mijlocul laturii BC este $A'\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ și mediana AA' are ecuația

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \frac{x_2+x_3}{2} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2+x_3 & y_2+y_3 & 2 \end{vmatrix}=0$$

care scrisă dezvoltat este

$$(AA')\qquad (2y_1-y_2-y_3)x-(2x_1-x_2-x_3)y+x_1(y_2+y_3)-y_1(x_2+x_3)=0.$$

Ecuațiile celorlalte mediane se scriu permutînd circular vîrfurile triunghiului, adică pe x_1, x_2, x_3 și y_1, y_2, y_3. Ele se scriu deci direct

$$(BB')\qquad (2y_2-y_3-y_1)x-(2x_2-x_3-x_1)y+x_2(y_3+y_1)-y_2(x_3+x_1)=0$$

$$(CC')\qquad (2y_3-y_1-y_2)x-(2x_3-x_1-x_2)y+x_3(y_1+y_2)-y_3(x_1+x_2)=0.$$

Dacă adunăm cele trei ecuații obținem în prima parte zero, deci una din ecuații este o combinație liniară a celorlalte două. Aceasta arată că medianele sînt concurente (VI, § 8).

Observare. Dacă s-ar scrie condiția de concurență sub formă de determinant și s-ar aduna toate liniile la prima, s-ar obține pe prima linie toate elementele nule, deci determinantul este nul și condiția este verificată.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

82. Se dau punctele $A(3, 5)$, $M(-1, 3)$, $N(4, 1)$. Să se afle ecuațiile dreptelor duse prin A, înclinate la 45° și 135° față de MN.

[$3x-7y+26=0$; $7x+3y-36=0$.]

83. Se dă punctul $A(-3, 5)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului $\overline{OA}$.

[$3x-5y+17=0$.]

84. Se dă punctul $A(x_1, y_1)$. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului $\overline{OA}$.

$$\left[x_1x+y_1y=\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2).\right]$$

85. Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului format de punctele $A(5, 3)$, $B(-1, -2)$.

[$12x+10y-29=0$.]

86. Se dau punctele $A(0, 5)$, $B(4, 1)$ și dreapta (D) $x-4y+7=0$. Să se găsească coordonatele punctului $C\in(D)$ astfel ca triunghiul ABC să fie isoscel cu baza $\overline{AB}$.

[Mediatoarea laturii $\overline{BC}\cap(D)\cdot C(1, 2)$.]

87. Se dau punctele $A(3, 0)$ și $B(-1, 8)$. Prin A se duce o paralelă (D) la prima bisectoare.

a) Să se determine coeficientul unghiular al unei drepte ce trece prin B, care să taie dreapta (D) într-un punct C, astfel încît triunghiul ABC să fie isoscel cu baza $\overline{AB}$.

b) Să se calculeze coordonatele punctului H de întîlnire a înălțimilor triunghiului.

c) Să se găsească centrul O al cercului circumscris.

[a) Mediatoarea laturii $\overline{AB}$ taie pe (D) în punctul $C(13, 10)$. Coeficientul unghiular $m_{BC}=\frac{1}{7}$. b) Mediatoarea lui $\overline{AB}$ este și înălțime. Mai trebuie o înălțime. $H\left(\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right)$. c) Mai trebuie o mediatoare. $O\left(\frac{19}{8}, \frac{20}{3}\right)\cdot$]

88. Să se calculeze unghiul format de dreptele $2x-y-5=0$ și $x-3y+4=0$. Care este mărimea unghiului în care se află originea axelor?

[45°.]

89. Se dau punctele $A(a, 0)$ și $C(2a, 3a)$. Perpendiculara dusă în A pe AC taie dreapta $x+2a=0$ în B. Să se arate că triunghiul ABC este isoscel.

[$AB=AC=a\sqrt{10}$.]

90. Se dă dreptunghiul $ABCD$ și din punctul A se duce perpendiculara AE pe diagonala BD, unde $E\in BC$. Să se arate că lățimea AB a dreptunghiului este medie proporțională între lungimea lui și segmentul $\overline{BE}$.

Să se dea și o soluție vectorială.

[BC se ia ca Ox, BA ca Oy; $C(a, 0)$, $A(0, b)$. Se găsește $E\left(\frac{b^2}{a}, 0\right)$.

Se scrie $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$, apoi $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ etc.]

91. Fie M un punct variabil pe prima bisectoare și $A(a, b)$, $B(b, c)$ două puncte fixe. Dreapta MA taie axa Ox în P, iar MB taie axa Oy în Q. Să se demonstreze că dreapta PQ are o direcție fixă.

[Coeficientul unghiular al dreptei PQ este $m=\frac{b-c}{a-b}=$const.]

92. Se dau punctele $A(2, 1)$ și $B(-5, -3)$. Să se afle punctul M, pe dreapta $y=x+4$, astfel ca $\sphericalangle AMB=90°$.

[Un punct M de pe dreapta dată are coordonatele $M(\alpha, \alpha+4)$. Se scrie că $MA\perp MB$ și se află α. Două soluții: $M_1(-1,3)$ și $M_2\left(-\frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)\cdot$]

93. Se dau dreptele $x+y-2=0$ și $3x-2y+1=0$. Să se scrie ecuația fasciculului care are ca drepte de bază, dreptele date, apoi să se determine:

a) dreapta fasciculului care trece prin $M(2, 3)$;

b) dreapta fasciculului paralelă cu prima bisectoare.

[a) $3x-7y+5=0$; b) $5x-5y+4=0$.]

94. Se dau punctele $A(6, 0)$, $B(0, 4)$, $C(1, 5)$. Să se arate că:

a) există relația $\overline{OA}\cdot\overline{BC}+\overline{OB}\cdot\overline{AC}=\overline{OC}\cdot\overline{AB}$;

b) picioarele perpendiculare duse din origine pe laturile triunghiului ABC sînt coliniare.

95. Se dau dreptele: $x+y-1=0$; $x+y-2=0$; $x-2y+1=0$; $x-2y-3=0$, care sînt laturile unui paralelogram. Să se găsească ecuațiile diagonalelor (c.d.p.)*.

[I. Se pot determina întîi vîrfurile. II. Se pot folosi fasciculele de drepte. $3x+6y-5=0$ și $5x-2y-7=0$.]

96. Să se scrie ecuațiile înălțimilor triunghiului format de dreptele $x-y+2=0$; $3x-y+1=0$; $x+2y+2=0$, fără a calcula coordonatele vîrfurilor.

[Se scrie o dreaptă a fasciculului determinat de două laturi și se determină parametrul ca să fie perpendiculară pe a treia.

$4x-2y+3=0$; $x+3y+2=0$; $7x+7y+9=0$.]

97. Să se determine λ astfel ca dreapta $4x+3y+\lambda=0$ să treacă prin intersecția dreptelor $3x+y=0$; $9x+2y+6=0$.

[$\lambda=-10$.]

98. a) Care este punctul fix al fasciculului:

$$(\alpha-1)x+(\alpha-2)y-\alpha+3=0?$$

b) Să se determine dreapta din fascicul care taie axele Ox, Oy, respectiv în A și B astfel ca $\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}=10$.

[a) $(-1,2)$; b) două soluții; $\alpha=\frac{5}{2}$ și $\alpha=\frac{17}{4}\cdot$]

* C.d.p. = Culegere de probleme de G. Țițeica. „Gazeta Matematică", cea mai veche revistă de matematici din țară, a scos sub îngrijirea membrilor ei o serie de culegeri de probleme de mare folos pentru elevi, printre care și culegerea de goemetrie analitică de G. Țițeica.

99. Să se demonstreze că mediatoarele unui triunghi sînt concurente. Soluție analitică și vectorială.

[*Analitic.* Ecuația unei mediatoare: $(x_2-x_3)x+(y_2-y_1)y-\frac{x_2^2-x_3^2}{2}-\frac{y_2^2-y_3^2}{2}=0$ etc. *Vectorial.* Fie O intersecția a două mediatoare, D, E, F mijloacele laturilor $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Avem $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ sau $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$, $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$. Rămîne de arătat că $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.]

100. Fie $A'B'C'$ simetricul triunghiului ABC față de o dreaptă (Δ). Să se demonstreze că perpendicularele duse din A', B', C', respectiv pe BC, CA, AB sînt concurente.

[Se ia (Δ) ca axă Ox și o perpendiculară oarecare ca Oy. Perpendiculara din A': $(x_2-x_3)x+(y_2-y_3)y-x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)=0$.]

101. Se dau două drepte perpendiculare (D) și (D'). Pe (D) se iau trei puncte oarecare A, B, C, iar pe (D') la fel trei puncte A', B', C'. Să se demonstreze că punctele $E\equiv AB'\cap A'B$, $F\equiv BC'\cap B'C$, $G\equiv CA'\cap C'A$ sînt în linie dreaptă.

102. Față de sistemul de referință xOy se iau punctele $A(a, 0)$ și $B(0, b)$. Să se determine punctul M, situat pe dreapta $y=mx$, astfel ca unghiul AMB să fie drept.

Fie C al patrulea vîrf al dreptunghiului $OACB$. Să se arate că soluția vectorială conduce la condiția $CM\perp OM$.

[Abscisa lui M este $\alpha=\frac{a+mb}{m^2+1}$. Vectorial: $(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB})=0$ etc.]

103. Aceleași date ca mai înainte, însă M se află pe dreapta $x+y-b=0$.

$\left[M\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{b-a}{2}\right).\right]$

104. O dreaptă variabilă care trece printr-un punct fix A taie axele de coordonate Ox, Oy, respectiv în M și N. Paralela dusă prin M la prima bisectoare taie axa Oy în M', iar paralela dusă prin N la a doua bisectoare taie axa Ox în N'. Să se arate că dreapta $M'N'$ trece printr-un punct fix.

[Fie $A(a, b)$. Punctul fix este $A'(b, -a)$.]

105. Pe axele Ox și Oy se iau punctele fixe A și B și segmentele variabile $\overline{AA'}=\overline{BB'}$. Să se arate că mediatoarea segmentului $\overline{A'B'}$ trece printr-un punct fix (C.d.p.)

$\left[\text{Punctul fix } P\left(\frac{a-b}{2},\ -\frac{a-b}{2}\right).\right]$

106. Pe o latură a unui unghi drept se dau punctele fixe A și B, iar pe cealaltă latură punctul variabil M. Se proiectează vîrful O al unghiului drept pe dreptele MA și MB, respectiv în P și Q.

a) Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix.

b) Să se calculeze raportul în care acest punct împarte segmentul $\overline{AB}$.

[a) Ecuația dreptei PQ: $\lambda(a+b)x+(ab-\lambda^2)y-\lambda ab=0$, unde λ este ordonata lui M. Punctul fix $\left(\frac{ab}{a+b},\ 0\right)$; b) $\frac{\overline{LA}}{\overline{LB}}=\frac{a^2}{b^2}$.]

107. Pe catetele $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ ale unui triunghi dreptunghic se construiesc, în afară, pătrate în care vîrfurile opuse lui A sînt respectiv D și E. Să se demonstreze că dreptele CD, BE și înălțimea AH a triunghiului sînt concurente.

108. Se dă paralelogramul $ABCD$. O paralelă oarecare la AB taie laturile AD și BC, respectiv în M și N, iar o paralelă la AD taie laturile AB și CD, respectiv în P și Q. Fie $E\equiv MP\cap NQ$. Să se arate că D, B, E sînt coliniare.

[Este preferabil să se arate că MP, NQ și DB sînt concurente.]

TRANSA III

CAPITOLUL **VII**

SEPARAREA PLANULUI ÎN REGIUNI

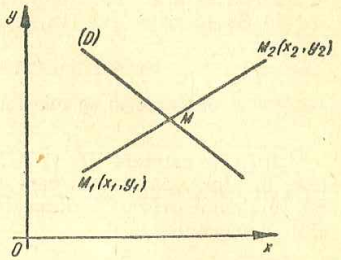


Fig. 43.

1. *Raportul în care o dreaptă împarte un segment.* Fiind date punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ se cere să se afle raportul în care dreapta (D) de ecuație $(D)=Ax+By+C=0$ împarte segmentul $\overline{M_1M_2}$ (fig. 43).

Fie $M \equiv M_1M_2 \cap (D)$ și $\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = k$.

Urmează să găsim expresia lui k.

Punctul M fiind pe dreapta M_1M_2 are coordonatele

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1-k}, \qquad y = \frac{y_1 - ky_2}{1-k}.$$

Însă $M \in (D)$ prin urmare trebuie să verifice ecuația, adică:

$$A\frac{x_1 - kx_2}{1-k} + B\frac{y_1 - ky_2}{1-k} + C = 0$$

sau

$$Ax_1 + by_1 + C - k(Ax_2 + By_2 + C) = 0,$$

care dă

$$k = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} = \frac{(D_1)}{(D_2)},$$

unde s-a notat $(D_1)=Ax_1+By_1+C$ și $(D_2)=Ax_2+By_2+C$.

Pentru $k<0$, punctul M este interior segmentului $\overline{M_1M_2}$, pentru $k>0$, M este exterior.

Exemplu. *Dreapta* $2x-y+2=0$ *împarte segmentul format de punctele* $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$ *în raportul*

$$k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{6-2+2}{-2-4+2} = -\frac{3}{2},$$

deci M se află între A și B. Verificarea se face prin calculul coordonatelor lui M, anume $M\left(\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

2. *Separarea planului în regiuni de către o dreaptă.* Orice dreaptă împarte planul în două semiplane, pe care le vom numi regiuni și le vom numerota: cu I regiunea (semiplanul) care conține originea și cu II regiunea cealaltă (fig. 44). Ecuația dreptei (D) o considerăm sub forma generală

$$Ax+By+C=0 \qquad (2)$$

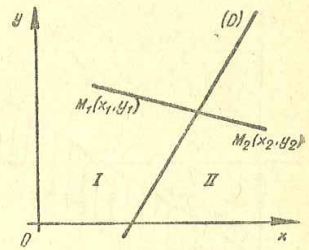


Fig. 44.

Dacă un punct $M_0(x_0, y_0) \in (D)$ atunci coordonatele lui verifică ecuația (2), adică $Ax_0+By_0+C=0$. Dacă însă punctul $M_0(x_0, y_0)$ nu se află pe dreaptă, atunci $Ax_0+By_0+C \neq 0$, adică expresia numerică obținută are o valoare oarecare, strict pozitivă sau strict negativă.

Vom demonstra următoarele proprietăți:

a) *polinomul general de gradul I în două variabile* $f(x, y)=Ax+By+C$ *păstrează același semn pentru toate punctele situate într-o aceeași regiune;*

b) *același polinom ia valori de semne contrare pentru puncte din regiuni diferite.*

a) Dacă punctele M_1 și M_2 sînt situate în aceeași regiune, dreapta (D) taie dreapta M_1M_2 în exteriorul segmentului $\overline{M_1M_2}$ și raportul $k=\frac{(D_1)}{(D_2)}>0$. Prin urmare (D_1) și (D_2) au același semn.

b) Dacă punctele M_1 și M_2 sînt în regiuni diferite, dreapta (D) întîlnește dreapta M_1M_2 într-un punct interior segmentului $\overline{M_1M_2}$ (fig. 48) și $k=\frac{(D_1)}{(D_2)}<0$, adică (D_1) și (D_2) au semne contrare.

O dată demonstrate proprietățile enunțate, este de ajuns să cercetăm semnul polinomului în una din regiuni, fiindcă în cealaltă rezultă ușor.

Dacă dreapta nu trece prin origine, atunci se caută semnul în regiunea care conține originea. Acesta este dat de

$$f(0, 0)=C. \qquad (3)$$

Dacă dreapta trece prin origine, atunci se alege alt punct, de exemplu (1, 0) sau (0, 1) etc.

Exemple. a) *Care sînt punctele din plan pentru care avem* $2x-3y-6<0$?

Se reprezintă dreapta $2x-3y-6=0$ (fig. 45). Termenul liber este (-6), deci punctele din semiplanul care conține originea fac polinomul negativ și verifică inecuația. Se pot face verificări cu diferite puncte (0, 1), (1, 1), (3, 1) etc. Regiunea haşurată nu convine.

b) *Să se rezolve inecuațiile simultane*

$$x-y<0; \quad 3x+4y-12>0.$$

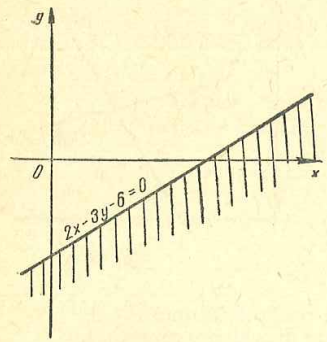


Fig. 45.

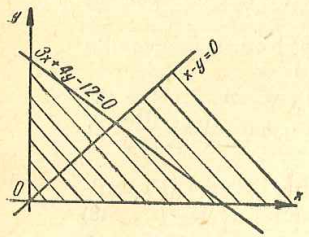


Fig. 46.

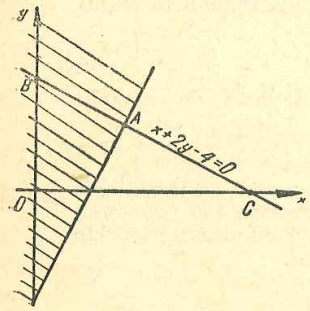


Fig. 47.

Dacă facem $y=0$ în primul polinom, se vede că obținem valori negative numai pentru $x<0$, deci regiunea care convine este cea *care conține semiaxa negativă*. A doua inecuație este verificată de regiunea *opusă originii*.

Mulțimea punctelor care satisfac simultan inecuațiile date este intersecția mulțimilor care verifică pe fiecare în parte, adică unghiul nehașurat din figura 46.

c) *Se cere mulțimea punctelor pentru care avem simultan*

$$x+2y-4=0 \quad \text{și} \quad 2x-y-2>0.$$

Egalitatea este verificată de toate punctele dreptei BC (fig. 47), inecuația de punctele din semiplanul opus originii.

Mulțimea care verifică ambele relații este formată din punctele semidreptei AC.

d) *Se dă ecuația* $x^2-2(\alpha+1)x+\alpha^2+\beta-1=0$. *Considerînd pe* α, β *drept coordonate ale unui punct din plan, să se afle regiunea pentru care ecuația dată are rădăcini reale.*

Realizantul ecuației este $R=4(2\alpha-\beta+2)$; trebuie ca $2\alpha-\beta+2\geqslant 0$. Originea verifică inecuația, deci regiunea care dă rădăcini reale pentru ecuație este semiplanul *închis* (inclusiv dreapta) care conține originea. De-a lungul dreptei $2\alpha-\beta+2=0$ ecuația dată are rădăcini reale, confundate.

3. *Aplicații la programarea liniară.* Producția unei întreprinderi, a unei unități agricole, transportul mărfurilor etc. care altădată se făceau oarecum empiric, ridică astăzi probleme de planificare în așa fel încît ținînd seamă de condițiile de lucru, posibilitățile de aprovizionare etc. să se ajungă pe totalul întreprinderii, unității agricole etc. la realizarea unui plan cu minimum de cheltuieli și cu venituri cît mai mari.

Condițiile de lucru se exprimă prin *ecuații sau inecuații de condiții*, iar realizarea finală printr-o funcție zisă *de scop, de obiectiv* sau *de eficiență*. Cînd ecuațiile, inecuațiile și funcția sînt de gradul I, programarea se numește *liniară*.

Nu putem da mai multe lămuriri în cadrul manualului, dar cîteva aplicații vor arăta

cum la unele probleme simple, rezolvarea se poate face cu ajutorul geometriei analitice. Metoda se numește „metoda grafică".

Exemplul 1. *O gospodărie agricolă trebuie să facă pe un teren de 8 ha două feluri de culturi A și B. Cheltuielile de investiții și venitul net pe ha, la fiecare cultură sînt în mii de lei:*

	A	B
investiții	2	3
venit net	4	5

Știind că gospodăria dispune de cel mult 18 mii lei pentru aceste culturi, se cere în cazul soluției optime:

a) *repartiția terenului pentru cele două culturi;*

b) *venitul net maxim realizat.*

Să notăm cu x și y suprafețele destinate respectiv culturilor A și B. Condițiile de lucru sînt:

$$x+y=8; \quad 2x+3y\leqslant 18. \qquad (\alpha)$$

Venitul net este dat de funcția (de eficiență)

$$f=4x+5y. \qquad (\beta)$$

Trebuie să ținem seama în plus că $x\geqslant 0$ și $y\geqslant 0$, care se numesc *condiții de nenegativitate*.

Problema se pune astfel: ținînd seama de condițiile (α) de lucru (o ecuație și o inecuație) și de condițiile de nenegativitate, să se determine x și y care fac funcția (β) maximă.

Pentru aceasta căutăm mulțimea punctelor care satisfac sistemul: $x+y-8=0$ și $2x+3y-18\leqslant 0$.

Inecuația este verificată pe semiplanul care conține originea (s-a hașurat partea care nu convine), deci porțiunea din dreapta $x+y-8=0$ (cadranul I) care intră în acest semiplan este segmentul $\overline{MN}$.

Ecuația (β) se scrie $y=-\frac{4}{5}x+\frac{f}{5}$ și considerînd pe f ca parametru, reprezintă un fascicul de drepte paralele de coeficient unghiular $m=-\frac{4}{5}$ și ordonata la origine $n=\frac{f}{4}$ (în figura 48 este desenată dreapta care trece prin origine și dă direcția). Ordonata la origine crește cînd dreapta fasciculului taie segmentul $\overline{MN}$ într-un punct care se mișcă de la N la M: este deci maximă cînd dreapta trece prin M. Însă M are coordonatele (6, 2), astfel că $f_{max}=4\cdot 6+5\cdot 2=34$ (mii de lei).

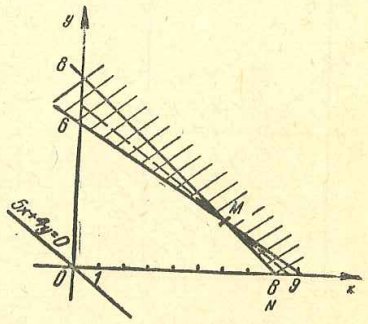


Fig. 48.

Programarea cea mai avantajoasă este deci: cultura A pe 6 ha ($x=6$) și cultura B pe 2 ha. Investițiile sînt de $2\cdot 6+3\cdot 2=18$ mii lei și venitul de 34 mii lei. Problema are o soluție unică.

Observări. a) Să presupunem că în aceleași condiții de lucru venitul net ar fi același pentru ambele culturi, de pildă 4 (mii de lei). În acest caz funcția de eficiență ar fi $f=4x+4y$. Ecuația $4x+4y-f=0$ reprezintă o dreaptă paralelă cu MN, care, dacă este verificată de un punct al lui MN, coincide cu MN. Atunci însă orice punct al segmentului $\overline{MN}$ este soluție, deci avem o infinitate de soluții.

Alegerea se face în acest caz după alte criterii de bună gospodărire.

b) Dacă am presupune veniturile astfel încît coeficientul unghiular al dreptei ce rezultă din funcția de eficiență să fie $m>-1$, atunci valoarea cea mai mare a lui f corespunde punctului N, prin urmare $y=0$. S-ar face numai cultura A pe întreg terenul.

2. Un centru alimentar este aprovizionat de trei gospodării furnizoare care dispun: prima de 5 autocamioane, a doua de 4 autocamioane și a treia de 6. Centrul alimentar are planificat să primească pe un interval dat de timp 12 autocamioane de marfă.

Știind că transportorul costă de la fiecare gospodărie respectiv 4, 6 și 5 zeci de lei, să se determine programarea mașinilor astfel încît costul transportului total să fie minim.

Notînd cu x, y, z numărul de mașini pe care trebuie să-l dea fiecare furnizor condițiile sînt următoarele: $x+y+z=12$; $x\leqslant 5$, $y\leqslant 4$, $z\leqslant 6$, apoi condițiile de nenegativitate $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. Funcția de eficiență este $f=4x+6y+5z$ și ea trebuie să fie minimă.

Fiind vorba de trei necunoscute, nu mai putem trata problema ca în cazul precedent. Vom proceda astfel: din prima ecuație rezultă $z=12-x-y\leqslant 6$, adică inecuația $x+y\geqslant 6$, la care se adaugă $x\leqslant 5$, $y\leqslant 4$. Înlocuind pe z în funcția de eficiență se deduce $y=x+f-60$.

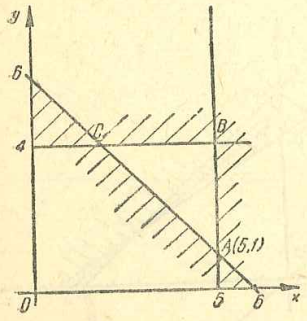


Fig. 40.

Rezumînd avem condițiile $x+y\geqslant 6$; $0\leqslant x\leqslant 5$; $0\leqslant y\leqslant 4$ care reprezentate în figura 49 ne dau ca regiune convenabilă interiorul triunghiului ABC.

Dreapta $y=x+f-60$ paralelă cu prima bisectoare va avea ordonata la origine ($f-60$) minimă cînd trece prin punctul cel mai de jos al triunghiului ABC, adică prin $A(5, 1)$. Înlocuind obținem $1=5+f-60$, deci $f=56$.

Programarea este: centrul I, cinci mașini, centrul II, 1 mașină, centrul III, 6 mașini. Costul minim al transportului $56\times 10=560$ lei.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

109. Se dau punctele $A(3, 1)$, $B(-2, 4)$ și dreapta $5x-y-8=0$. Se cere raportul în care dreapta împarte segmentul $\overline{AB}$. Punctul de intersecție cu dreapta AB este interior sau exterior segmentului?

$$\left[k=-\frac{3}{11},\ \text{interior.}\right]$$

110. Se dă punctul fix $A(1, -1)$ și punctul variabil $M\left(\frac{4\alpha-6}{\alpha}, \frac{\alpha-2}{\alpha}\right)$. Să se arate că dreapta $x-3y+9=0$ împarte segmentul AM într-un raport constant, oricare ar fi M.

111. **Teorema lui Menelaus.** *O dreaptă oarecare taie laturile BC, CA, AB ale unui triunghi, respectiv în punctele M, N, P. Să se demonstreze că există relația*

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1.$$

Reciproca este adevărată?

[Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ și $(D)=0$ ecuația dreptei. $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{(D_2)}{(D_3)}$ etc. Reciproca se demonstrează geometric, prin reducere la absurd.]

112. **Teorema lui Ceva.** *Fie M un punct în planul unui triunghi și A', B', C' punctele unde MA, MB, MC taie respectiv laturile BC, CA, AB. Să se demonstreze că*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1.$$

[Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $M(x_0, y_0)$. Ecuația dreptei AM este $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_0 & y_0 & 1\end{vmatrix}=0$. Avem $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_0 & y_0 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_0 & y_0 & 1\end{vmatrix}$ etc.]

113. Se dă un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A}=90°$) și un punct oarecare P. Să se cerceteze dacă există un unghi drept cu vîrful în P, astfel ca laturile lui să determine pe catetele AB, AC rapoarte egale.

[Se iau AB, AC ca axe Ox, Oy. $B(a, 0)$, $C(0, b)$, $P(x_0, y_0)$. Laturile unghiului drept: $\lambda(x-x_0)-(y-y_0)=0$; $x-x_0+\lambda(y-y_0)=0$.

Rapoartele sînt $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{-\lambda x_0+y_0}{\lambda(a-x_0)+y_0}$, $\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}=\frac{-x_0-\lambda y_0}{-x_0+\lambda(b-y_0)}$ etc.]

114. Să se rezolve sistemul $x>3$; $3x+y-6>0$; $x-2y-1>0$.

[Regiunea din dreapta lui $x=3$, cuprinsă în unghiul celorlalte două drepte.]

115. Să se rezolve sistemul: $3x+2y-6>0$; $y-x+1>0$; $y-\frac{x}{5}-1<0$.

[Interiorul triunghiului format din cele trei drepte.]

116. Să se rezolve sistemul $x^2-4<0$; $x+y-1<0$.

[Fîşia dintre paralelele $x=\pm 2$ care conţine originea şi este mărginită de dreapta dată.]

117. Se consideră inecuaţiile $2x+3y\geqslant 6$, $6x+2y\leqslant 11$ şi funcţia $f=x+4y$. Să se determine valorile lui x şi y care satisfac inecuaţiile şi fac funcţia f minimă.

[Regiunea convenabilă este cuprinsă în unghiul ascuţit al dreptelor $2x+3y-6=0$ şi $6x+2y-11=0$, dinspre Oy. Dreapta $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}f$ are ordonata la origine minimă în punctul comun celor două drepte: $x=\frac{3}{2}$, $y=1$, deci $f_{min}=\frac{11}{2}$.]

CAPITOLUL VIII

PROBLEME DE DISTANŢĂ

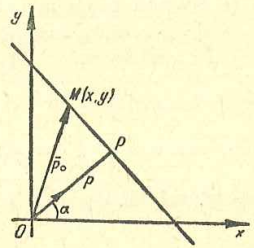


Fig. 50.

1. *Ecuaţia normală a dreptei.* O dreaptă este definită prin două elemente geometrice: un punct şi o direcţie sau două puncte.

Să luăm acum alte două elemente geometrice care pot defini o dreaptă: distanţa $\overline{OP}=p$ de la origine la dreaptă şi $\sphericalangle xOP=\alpha$, făcut de normala OP la dreaptă cu axa Ox (fig. 50).

Pentru a stabili ecuaţia dreptei cu aceste elemente considerăm un punct curent $M(x, y)$ pe dreaptă şi observăm că proiecţia vectorului $\overrightarrow{OM}$ pe direcţia normală OP este chiar segmentul $\overline{OP}=p$. Dar proiecţia unui vector pe o direcţie este produsul scalar între acel vector şi versorul direcţiei. În cazul nostru, notînd versorul direcţiei OP cu $\bar{p}_0$, avem

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j} \quad \text{şi} \quad \bar{p}_0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha.$$

Rezultă $\overline{OP}=\overrightarrow{OM}\cdot\bar{p}_0$ sau $p=x\cos\alpha+y\sin\alpha$, de unde

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \tag{1}$$

Această ecuaţie de gradul I în raport cu x şi y este ecuaţia dreptei definită cu elementele p şi α şi poartă numele de *ecuaţia normală a dreptei* sau ecuaţia dreptei sub forma lui *Hesse**. Se socoteşte p pozitiv, deci *termenul liber* în ecuaţia normală a dreptei este *negativ*.

Dacă $\alpha=$constant se obţine un fascicul de drepte paralele. Dacă $p=$const. şi α variabil se obţin tangentele la cercul cu centrul în origine şi cu raza p.

* *L. O. Hesse*, matematician german (1811—1874).

2. *Aducerea ecuației generale la forma normală.* Pentru ca ecuațiile $Ax+By+C=0$ și $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ să reprezinte aceeași dreaptă trebuie ca toți coeficienții lor să fie proporționali, adică

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\sin\alpha}{B}=\frac{-p}{C},\quad \text{de unde}\quad \frac{\cos^2\alpha}{A^2}=\frac{\sin^2\alpha}{B^2}=\frac{1}{A^2+B^2}.$$

Scoțînd rădăcina pătrată din ultimele rapoarte, rezultă

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\sin\alpha}{B}=\frac{-p}{C}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

deci

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\quad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\quad -p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2}$$

Acestea înlocuite în ecuația normală ne dă

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0 \tag{3}$$

Prin urmare pentru a aduce ecuația generală a dreptei la forma normală este de ajuns să o împărțim cu $\pm\sqrt{A^2+B^2}$.

Exemple. a) Ecuația $3x+4y-15$ adusă la forma normală este

$$\frac{3x+4y-15}{\pm 5}=0.$$

b) Ecuația $y=3x-5$ se scrie întîi $3x-y-5=0$ și de aici forma normală $\frac{3x-y-5}{\pm\sqrt{10}}=0$.

c) În general $y=mx+n$ se aduce la forma normală scriind întîi $mx-y+n=0$, apoi $\frac{mx-y+n}{\pm\sqrt{m^2+1}}=0$.

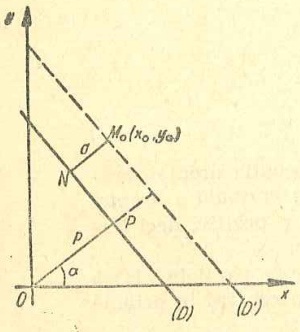


Fig. 51.

3. *Distanța de la un punct la o dreaptă.* Considerăm dreapta (D) dată prin ecuația normală

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

și punctul $M_0(x_0, y_0)$ (fig. 51). Problema care se pune este de a găsi expresia distanței $M_0N=d$ de la punctul M_0 la dreapta (D).

Presupunem întîi pe M_0 în semiplanul [față de dreapta (D)] care nu conține originea. Se duce prin M_0 paralela (D') la (D). Este evident că cele două drepte au între ele distanța d, prin urmare distanța de la origine la (D') este $(p+d)$. Ecuația normală a dreptei (D') este deci

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-(p+d)=0. \tag{4}$$

Scriind că punctul $M_0(x_0, y_0)\in(D')$ avem

$$x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-(p+d)=0, \tag{5}$$

de unde

$$d=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p. \tag{6}$$

Am ajuns la un rezultat extrem de simplu: *distanța de la un punct la o dreaptă se obține înlocuind coordonatele curente prin coordonatele punctului dat, în ecuația normală a dreptei.* Presupunem acum că punctul M_0 se află în același semiplan cu originea, față de dreapta (D). Distanța de la origine la (D') nu mai este $(p+d)$, ci $(p-d)$ și înlocuind în (5) rezultă

$$d=-(x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p). \tag{6'}$$

De obicei ecuația unei drepte nu este dată sub forma normală, ci sub formă generală. În acest caz aducem întîi ecuația la forma normală (3), apoi înlocuim coordonatele (x_0, y_0) și obținem

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{7}$$

În fața radicalului se ia semnul așa fel ca termenul liber $\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ să fie negativ; în acest caz (7) corespunde lui (6). Dacă se ia semnul contrar, atunci corespunde lui (6').

Trebuie acum să dăm lămuririle care urmează, pentru a evita confuziile.

I. Există probleme în care se cere numai mărimea distanței de la un punct la o dreaptă. În acest caz nu interesează semnul distanței și se scrie

$$d=|x_0\cos+y_0\sin-p|\quad\text{sau}\quad d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \tag{8}$$

Exemplu. *Să se afle raza cercului cu centrul în $C(-1, -2)$, care este tangent dreptei $5x+12y-10=0$.*

Avem

$$r=\left|\frac{5\cdot(-1)+12\cdot(-2)-10}{\sqrt{25+144}}\right|=\frac{39}{13}=3.$$

II. Există însă probleme în care trebuie să ținem seama de semnul distanței, pentru a nu pierde unele soluții. Iată un exemplu:

Să se afle punctele de pe dreapta $x-2y+1=0$, care au depărtarea de o unitate pînă la dreapta $3x+4y-12=0$.

Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul căutat. El trebuie să se găsească pe dreapta dată, deci $x_0-2y_0+1=0$; apoi distanța de la M_0 la dreapta $3x+4y-12=0$ trebuie să fie 1, adică $\frac{3x_0+4y_0-12}{\pm 5}=1$, care duce de fapt la *două ecuații.*

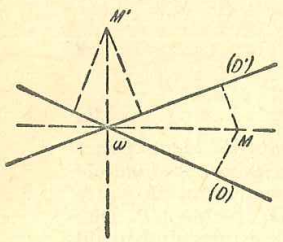


Fig. 52.

$M_0(x_0, y_0)$ trebuie deci să verifice următoarele sisteme

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x_0 - 2y_0 + 1 = 0 \\ 3x_0 + 4y_0 - 17 = 0 \end{cases}$$

$$\text{și (II)} \quad \begin{cases} x_0 - 2y_0 + 1 = 0 \\ 3x_0 + 4y_0 - 7 = 0 \end{cases}$$

care dau punctele $M_0(3, 2)$ și $M_0'(1, 1)$.

Observare. Dacă privim x_0, y_0 drept coordonate curente, atunci a doua ecuație din (I) și din (II) constituie drepte paralele cu $3x+4y-12=0$, la distanța de o unitate, de o parte și alta a ei. În acest fel se vede concordanța cu soluția geometrică a problemei.

4. *Ecuațiile bisectoarelor unghiurilor formate de două drepte.* Două drepte concurente formează *patru* unghiuri, două cîte două egale ca opuse la vîrf. Dacă dreptele nu sînt perpendiculare, atunci două unghiuri sînt ascuțite și două obtuze, suplimentare cu cele ascuțite. Să considerăm unul din unghiurile ascuțite, de exemplu cel care conține punctul M (fig. 52) și unul din unghiurile obtuze (cel care conține pe M'), cu bisectoarele lor OM și $OM' \perp OM$. Se știe că orice punct de pe bisectoare este egal depărtat de laturile unghiului. Dacă privim însă figura 56 observăm că M și M' sînt de aceeași parte a dreptei (D) prin urmare distanțele la (D) au același semn; față de (D') sînt situate de o parte și alta, deci distanțele sînt de semne contrare. Rezultă că dacă M are distanțele *egale* la cele două laturi, M' are distanțele *egale și de semne contrare* și invers. Așadar există o caracterizare diferențiată a punctelor de pe bisectoarea interioară a unui unghi și a punctelor de pe bisectoarea exterioară a lui. Fie acum

$$Ax+By+C=0 \quad \text{și} \quad A'x+B'y+C'=0 \tag{9}$$

ecuațiile a două drepte oarecare, *concurente* și $M(x_0, y_0)$ un punct situat pe una din bisectoarele unghiului. Vom scrie că distanțele de la M la cele două drepte sînt egale (fără a le lua în modul), adică

$$\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{A'x_0 + B'y_0 + C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

Aceasta este legătura ce trebuie să existe între x_0 și y_0 pentru ca M să se afle pe una din bisectoare. Dar M fiind punct curent se pot suprima indicii și combinînd semnele (+) și (—) în toate felurile, ajungem la ecuațiile

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} \tag{10}$$

care reprezintă cele două bisectoare. Se observă că cele două ecuații conținute în (10) sînt de gradul I în x și y, deci ecuațiile unor drepte.

Observare. Dacă dreptele (9) sînt paralele, atunci ele pot fi aduse la formele $Ax+By+C=0$, $Ax+By+C'=0$. În (10) semnul (+) duce la o imposibilitate, iar semnul (—) la $Ax+By+\frac{C+C'}{2}=0$, care este ecuația dreptei echidistante de cele două paralele.

5. *Problema care se pune acum* este ca, fixîndu-ne asupra unuia din cele patru unghiuri a două drepte, să știm care din ecuațiile (10) reprezintă bisectoarea interioară și care bisectoarea exterioară a acelui unghi. În cazul general putem proceda în două feluri.

Metoda I. a) Scriem ecuațiile bisectoarelor sub forma

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{A'x+B'y+C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}} \tag{10'}$$

apoi alegem semnele dinaintea radicalilor astfel ca termenii liberi

$$\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \frac{C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

să fie ambii negativi.

b) Considerăm bisectoarea *unghiului care conține originea* (fig. 53). Orice punct M de pe această bisectoare, fiind de aceeași parte cu originea, are distanțele pînă la cele două drepte negative (cum are și originea), deci de același semn. Atunci pentru a scrie ecuația acestei bisectoare, se ia în partea a doua a ecuației, înaintea liniei de fracție, semnul (+). Pentru bisectoarea unghiului suplimentar se ia semnul (—).

Rezumînd ajungem la următoarea regulă: a) *se aleg în (10') semnele din fața radicalilor astfel ca termenii liberi din ambele părți ale ecuației să fie negativi; b) pentru ecuația bisectoarei ce trece prin unghiul care conține originea se ia semnul (+), iar pentru cealaltă bisectoare semnul (—).*

Metoda a II-a. Căutăm punctele unde *laturile unghiului* care ne interesează taie una din axe: Ox sau Oy; apoi căutăm punctele unde *fiecare din cele două bisectoare* taie aceeași axă. După pozițiile acestor puncte ne putem da seama care este bisectoarea interioară și care bisectoarea exterioară unghiului.

Cazuri particulare. a) Dacă una din laturile unghiului trece prin origine, atunci prima metodă nu se poate folosi. Bisectoarele se vor identifica prin a doua metodă.

b) Dacă vîrful unghiului este originea, nici una din cele două metode nu este aplicabilă. Presupunînd că axele de coordonate nu sînt bisectoarele unghiului, atunci una din bisectoare trece prin cadranele I și III, iar cealaltă prin II și IV. Această observare folosește la determinarea bisectoarei care ne interesează.

Exemplele care urmează ilustrează practic toate cazurile.

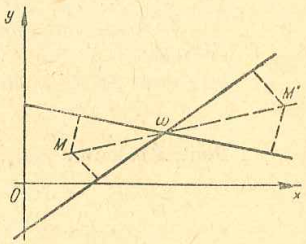


Fig. 53.

1) *Să se scrie ecuația bisectoarei unghiului ascuțit format de dreptele* $4x-3y+6=0$ *și* $5x+12y+10=0$.

Metoda I. Reprezentînd dreptele se observă că unghiul lor ascuțit conține originea, deci vom scrie, conform regulii $\frac{4x-3y+6}{-5}=+\frac{5x+12y+10}{-13}$ sau $27x-99y+28=0$.

Metoda a II-a. Reprezentăm cele două drepte. Laturile unghiului taie axa Oy în punctele $(0, 2)$ și $\left(0, -\frac{5}{6}\right)$. Cele două bisectoare au ecuațiile $27x-99y+28=0$ și $77x+21y+128=0$, deci ele taie axa Oy în punctele $\left(0, \frac{28}{99}\right)$ și $\left(0, -\frac{128}{21}\right)$. Se vede că prima este bisectoarea unghiului ascuțit, deoarece ordonata la origine este cuprinsă între ordonatele laturilor.

Observare. Prima metodă are avantajul că ne îngăduie să scriem dintr-o dată ecuația bisectoarei care ne interesează. Prin a doua metodă trebuie scrise ambele ecuații și după aceea se face alegerea.

2) *Să se afle cordonatele centrului cercului înscris în triunghiul format de axele de cordonate și de dreapta* $8x+15y-120=0$.

Ne trebuie două bisectoare interioare, însă una este chiar prima bisectoare a axelor $y=x$, deci mai avem nevoie de una. Tăieturile dreptei sînt $A(15, 0)$ și $B(0, 8)$. Scriem bisectoarele unghiului OAB: $\frac{8x+15y-120}{17}=\pm y$. Nu putem folosi prima metodă, deci vom separa cele două bisectoare și vom alege pe aceea care are ordonata la origine pozitivă. Ecuațiile sînt $4x-y-60=0$ și $x+4y-15=0$; a doua este bisectoarea căutată, deoarece are ordonata la origine $\frac{15}{4}$.

Centrul cercului înscris se află la intersecția bisectoarelor $y=x$ și $x+4y-15=0$ și este $J(3, 3)$.

A treia bisectoare a triunghiului este determinată de punctele B, J.

3) *Să se scrie ecuația bisectoarei unghiului ascuțit format de dreptele* $x-2y=0$ *și* $3x+y=0$.

Ambele drepte trec prin origine, deci nu se poate folosi nici una din metode. Figurînd dreptele se observă că bisectoarea unghiului ascuțit trebuie să treacă prin cadranul I. Ecuațiile bisectoarelor sînt:

$$\frac{x-2y}{\sqrt{5}}=\pm\frac{3x+y}{\sqrt{10}} \text{ sau } \sqrt{2}(x-2y)=\pm(3x+y).$$

Separînd cele două ecuații găsim că bisectoarea căutată este $(3+\sqrt{2})x-(2\sqrt{2}-1)y=0$ sau înmulțind cu $(2\sqrt{2}+1)$:

$$(\sqrt{2}+1)x-y=0.$$

Observare. Ca verificare, bisectoarea interioară și cea exterioară a unui unghi trebuie să fie perpendiculare.

6. *Aria unui triunghi.* Considerăm triunghiul dat prin vîrfurile sale $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Fie $\overline{AA'}$ înălțimea din A. Aria triunghiului este dată de formula cunoscută $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AA'}$. Lungimea laturii $\overline{BC}$ este

$$\overline{BC}=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}. \tag{11}$$

Pentru calculul înălțimii $\overline{AA'}$ pornim de la ecuația dreptei BC:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{12}$$

în care coeficienții lui x și y sînt: (y_2-y_3) și $-(x_2-x_3)$.

Înălțimea $\overline{AA'}$ este distanța de la vîrful A la BC, deci

$$\overline{AA'}=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x^2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}} \tag{13}$$

Ținînd seama de valoarea lui $\overline{BC}$ din (11) și de formula ariei avem

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

care este expresia analitică pentru aria unui triunghi, cînd se dau coordonatele vîrfurilor.*

Acum trebuie făcută o precizare: *aria în geometria analitică are un semn.* În adevăr relația (14) ne dă aria considerînd triunghiul parcurs în sensul $A-B-C$; dacă însă sensul de parcurgere este $A-C-B$, atunci ultimele două linii ale determinantului se schimbă între ele și determinantul își schimbă semnul.

Rămîne să vedem care este sensul care dă aria pozitivă. Pentru aceasta luăm un triunghi particular, anume $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$, unde $a>0$. $b>0$, care dă imediat $\mathcal{A}_{OAB}=\frac{1}{2}ab$, prin urmare sensul care dă aria pozitivă este sensul trigonometric sau sensul de rotire de la Ox către Oy.

Sînt cazuri în care nu ne interesează decît mărimea ariei; atunci aceasta se ia în valoare absolută.

În particular aria triunghiului format de origine și punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, are ca expresie

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1). \tag{14'}$$

7. *Condiția ca trei puncte să fie în linie dreaptă* se poate regăsi pornind de la aria triunghiului. În adevăr condiția *necesară și suficientă* pentru ca aria triunghiului să fie nulă este ca cele trei puncte (presupuse distincte) să fie în linie dreaptă; rezultă că punctele sînt coliniare dacă

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

* Am făcut această precizare fiindcă există și o expresie a ariei atunci cînd se dau ecuațiile laturilor triunghiului.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

118. Să se aducă la forma normală ecuația dreptei prin tăieturi.

$$\left[\frac{bx+ay-ab}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0.\right]$$

119. Să se găsească distanța de la punctul $A(1, 3)$ la dreapta $12x-5y+42=0$.

[$d=3$.]

120. Să se calculeze înălțimile triunghiului format de punctele $A(1, 0)$, $B(5, -2)$, $C(3, 3)$.

$$\left[\text{Se calculează ca distanțe de la vîrfuri la laturile opuse. } \frac{16}{\sqrt{29}}, \frac{16}{\sqrt{13}}, \frac{8}{\sqrt{5}}.\right]$$

121. Să se cerceteze dacă punctul $A(-2, 4)$ este interior sau exterior cercului cu centrul în $\omega(0, 3)$, tangent dreptei $3x+4y-24=0$.

122. Să se cerceteze dacă dreapta $3x-4y+8=0$ este secantă sau exterioară cercului cu centrul în $\omega(2, 1)$, care trece prin $A(6, 4)$.

123. Se dă fasciculul de drepte cu vîrful în $\omega(-1, 2)$ și punctul $A(3, 5)$. Să se determine dreptele din fascicul, față de care punctul A are distanța de 3 unități.

[$y=2$ și $24x-7y+38=0$.]

124. Se dă fasciculul cu dreptele de bază $3x+2y-1=0$, $x-y+3=0$ și punctul $A(3, 4)$. Să se determine dreptele din fascicul față de care punctul A are distanța $d=\sqrt{10}$.

[$3x-y+5=0$ și $x+3y-5=0$.]

125. Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele $48x+14y-21=0$ și $24x+7y-28=0$.

[Se calculează distanța de la un punct al unei drepte pînă la cealaltă. Se poate lua $(0, 4)$ de pe a doua dreaptă; $d=0, 7$.]

126. Să se calculeze distanța dintre două drepte paralele, aduse la formele $Ax+By+C=0$ și $Ax+By+C'=0$.

Să se aplice formula găsită la problema precedentă.

[Se poate calcula distanța de la $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$, abscisa la origine a primei drepte, pînă la a doua dreaptă; $d=\left|\frac{C'-C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$. Pentru aplicație se vor aduce întîi dreptele la forma din enunț.

127. Să se calculeze proiecția segmentului format de punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, pe direcția dată de coeficientul unghiular m.

[Se scrie distanța de la punctul A la dreapta ce trece prin B, perpendiculară pe direcția dată. Pr. $\overline{AB}=\left|\frac{x_1-x_2+m(y_1-y_2)}{\sqrt{1+m^2}}\right|$. Să se caute și soluția vectorială.]

128. Se dă dreapta $5x-12y+32=0$ și punctele $A(1, -1)$, $B(5, -3)$. Să se afle coordonatele punctului M, egal depărtat de A și B, care are distanța de 4 unități pînă la dreapta dată.

[*Indicație.* Fie $M(\alpha, \beta)$. Se scrie că $\overline{MA}=\overline{MB}$, apoi că distanțele pînă la dreapta dată sînt de ± 4 unități. Rezultă două sisteme de ecuații în α și β care dau $M_1(4, 0)$ și $M_2\left(\frac{180}{19}, \frac{208}{19}\right)$.]

129. Să se arate că suma distanțelor de la un punct interior la laturile unui triunghi echilateral este constantă.

[Se poate lua o latură ca Ox și mediatoarea ei ca Oy. Atenție la semnele distanțelor pentru a nu face diferență în loc de sumă. Suma constantă are valoarea înălțimii.]

130. Să se găsească pe axa Oy un punct M egal depărtat de dreptele $3x-4y+6=0$ și $4x-3y-9=0$.

$$\left[M_1(0, 15) \text{ și } M_2\left(0, -\frac{3}{7}\right).\right]$$

131. Se dau punctele $A(3, 0)$ și $B(0, 5)$. Pe paralela dusă prin A la Oy să se determine un punct C astfel încît bisectoarea unghiului ACB să treacă prin origine.

[Două soluții: $C(3, 1)$ și $C'(3, 9)$.]

132. Față de un sistem de axe dreptunghiulare xOy se dau punctele $B(4, 0)$ și $C(0, 3)$. Să se găsească coordonatele punctului egal depărtat de B și C și în același timp egal depărtat de laturile unghiului OBC. Cîte soluții sînt?

$$\left[\text{Două soluții: } M\left(\frac{13}{2}, \frac{15}{2}\right) \text{ și } M'\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\right).\right]$$

133. Să se calculeze coordonatele centrului cercului înscris triunghiului format de dreptele

$$4x-y+2=0;\ x-4y-8=0;\ x+4y-8=0.$$

$$\left[\left(\frac{6}{5}, 0\right).\right]$$

134. Să se scrie ecuațiile bisectoarelor interioare ale triunghiului format de punctele $A(3, 1)$, $B(2, 4)$ și origine. Să se verifice că sînt concurente; să se calculeze coordonatele centrului cercului înscris triunghiului și raza acestui cerc.

[$(2\sqrt{2}+1)x-(3+\sqrt{2})y=0$; $x+2y-5=0$; $(3+2\sqrt{2})x-(\sqrt{2}-1)y-10=0$. Se scade prima ecuație din a treia și se obține a doua ecuație. Punctul comun este $(2\sqrt{2}-1, 3-\sqrt{2})$; $r=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$.]

135. Să se calculeze aria triunghiului format de punctele $A(1, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(-4, -3)$.

[$\mathcal{A}=13,50$ unități pătrate.]

136. Să se calculeze aria patrulaterului format de punctele $A(3, 0)$, $B(2, 5)$, $C(-1, 3)$, $D(1, -4)$.

[Se descompune în triunghiuri. Atenție la semnele ariilor pentru a nu face diferența în loc de sumă. $\mathcal{A}=\frac{39}{2}$.]

137. Să se demonstreze că aria unui patrulater ale cărui vîrfuri sînt A_i $(i=1, 2, 3, 4)$ și care are ca diagonale A_1A_3 și A_2A_4 este dată de una din formulele

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_4 & y_2-y_4 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

[Aceeași indicație ca mai înainte. Se va ține seama de proprietățile determinanților.]

138. Se dă dreapta $3x-4y+4=0$ și punctul $A(8, 0)$. Să se calculeze cordonatele punctelor unde dreptele ce trec prin A și fac cu axa Ox 45° și 135° taie dreapta dată. Să se afle aria triunghiului format de cele trei drepte.

[$B(36, 28)$, $C(4, 4)$. $\mathcal{A}=112$ unități de arie.]

139. Se dau punctele $A(2, 2)$ și $B(5, 1)$. Să se determine punctul C, situat pe dreapta $x-2y+8=0$, astfel încît aria triunghiului ABC să fie de 17 u².

[*Indicație.* Se ia $C(\alpha, \beta)$ care trebuie să verifice dreapta dată, iar aria $ABC=\pm 17$, căci C poate fi de o parte sau alta a dreptei date, deci aria poate fi pozitivă sau negativă. Sistemele dau $C(12, 10)$ și $C'(-16, -4)$.]

CAPITOLUL IX

TRANSLAȚIA AXELOR

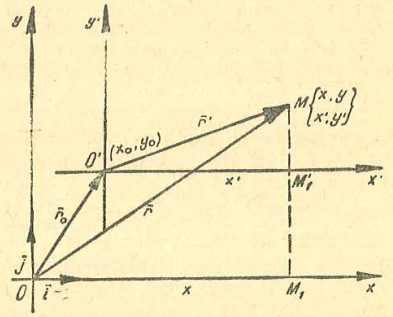


Fig. 54.

1. Să considerăm punctul $M(x, y)$ raportat la sistemul cartezian ortogonal xOy și să efectuăm asupra sistemului de axe O translație, pînă cînd originea vine într-un punct oarecare $O'(x_0, y_0)$. Desigur, față de noile axe $x'O'y'$, punctul M va avea alte coordonate (x', y'). Problema care se pune este aceasta: *să se găsească relațiile care leagă vechile cordonate (x, y) cu cele noi (x', y') și cu coordonatele (x_0, y_0) ale originii noi O' față de vechile axe.*

Pentru aceasta să notăm cu $\bar{r}_0$, $\bar{r}$ vectorii de poziție ai punctelor O', M față de reperul O și cu $\bar{r}'$ vectorul de poziție al lui M față de reperul O' (fig. 54). Făcînd observarea că oriunde ar fi translatate axele, versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ rămîn aceiași, putem scrie:

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j};\quad \bar{r}_0=x_0\bar{i}+y_0\bar{j};\quad \bar{r}'=x'\bar{i}+y'\bar{j}. \tag{1}$$

Înlocuind acestea în relația vectorială evidentă

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\bar{r}' \tag{2}$$

se obține

$$x\bar{i}+y\bar{j}=(x_0+x')\bar{i}+(y_0+y')\bar{j}.$$

Descompunerea după versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ fiind unică trebuie să avem

$$x=x_0+x';\quad y=y_0+y'. \tag{3}$$

Acestea sînt relațiile căutate. Deci *abscisa veche este egală cu suma dintre abscisa noii origini și abscisa nouă; se poate da un enunț asemănător pentru ordonate.*

Exemplu. *Față de sistemul xOy se dă punctul $M(4, 5)$. Să se afle coordonatele lui M față de sistemul de axe translatat în $O'(-1, 2)$.*

Avem $4=-1+x'$, $5=2+y'$, de unde $x'=5$, $y'=3$.

Observare. Dacă ne uităm la figura 58 se pare că este tot așa de ușor să stabilim relațiile (3) direct, fără să apelăm la relația vectorială (2). În realitate însă dacă procedăm direct trebuie să ne asigurăm că relațiile (3) se păstrează în diferite cazuri de figură: O' în cadranele II, III sau IV și de asemenea M în diferite cadrane. Relația vectorială (2) este însă generală oricum ar fi punctele O, O', M în plan și deci relațiile (3) sînt generale.

Această observare *scoate în evidență generalitatea formulelor vectoriale* și deci a expresiilor analitice *deduse pe cale vectorială.*

2. *Ecuația dreptei în raport cu noile axe.* Fie $(D)=Ax+By+C=0$ ecuația dreptei raportată la vechile axe și $O'(x_0, y_0)$ noua origine. Înlocuind x și y din relațiile (3) se obține $A(x_0+x')+B(y_0+y')+C=0$ sau notînd $D_0=Ax_0+By_0+C$,

$$Ax'+By'+(D_0)=0. \tag{4}$$

Prin urmare termenul liber este rezultatul înlocuirii coordonatelor (x_0, y_0) în ecuația dreptei date $(D)=0$. Dacă dreapta dată trece prin noua origine, atunci $(D_0)=0$ și ecuația dreptei în noile axe devine

$$Ax'+By'=0. \tag{4'}$$

Dacă dreapta este dată sub altă formă, se aduce întîi la forma generală și apoi se folosește formula (4).

3. *Elemente care rămîn invariabile față de translația de axe.*

a) *Distanța între două puncte.* Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ cele două puncte raportate la sistemul cartezian xOy și $O'(x_0, y_0)$ punctul în care se mută originea după translație. Noile coordonate ale lui M_1 și M_2 le notăm (x_1', y_1') și (x_2', y_2').

Distanța $\overline{M_1M_2}$ față de vechile axe este dată de

$$(\overline{M_1M_2})_{xOy}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \tag{5}$$

iar față de noile axe, este

$$(\overline{M_1M_2})_{x'O'y'}=\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}. \tag{6}$$

Însă potrivit relațiilor (3) avem

$$x_1=x_0+x_1', \quad y_1=y_0+y_1'; \quad x_2=x_0+x_2', \quad y_2=y_0+y_2',$$

deci

$$x_2-x_1=x_2'-x_1', \quad y_2-y_1=y_2'-y_1' \tag{7}$$

relații care arată că $(\overline{M_1M_2})_{xOy}=(\overline{M_1M_2})_{x'O'y'}$, adică *distanța între două puncte rămîne invariabilă la o translație de axe.*

b) *Unghiul a două drepte.* Fie $(D)=Ax+By+C=0$ și $(D')=A'x+B'y+C'=0$ două drepte concurente, raportate la vechile axe. Coeficienții lor unghiulari sînt

$$m=-\frac{A}{B} \text{ și } m'=-\frac{A'}{B'}.$$

Ecuațiile dreptelor raportate la noile axe sînt $Ax'+By'+D_0=0$ și $A'x'+B'y'+D_0'=0$ și este clar că au aceiași coeficienți unghiulari $m=-\frac{A}{B}$, $m'=-\frac{A'}{B'}$. Dacă direcțiile dreptelor rămîn neschimbate, atunci și *unghiul celor două drepte rămîne neschimbat după translație.*

Așadar *distanța între două puncte și unghiul a două drepte sînt elemente invariante față de translația axelor de coordonate.*

Exemple. *1. Ce devine ecuația dreptei $2x-5y+12=0$ dacă se dă o translație sistemului de referință astfel ca originea să vină în $O'(1, 2)$?*

Avem $(D_0)=2\cdot 1-5\cdot 2+12=4$, deci ecuația dreptei față de noile axe este $2x'-5y'+4=0$.

2. Aceeași problemă pentru dreapta $3x+8y+2=0$, noua origine fiind $O'(2, -1)$.

$$(D_0)=3\cdot 2+8(-1)+2=0, \text{ deci } 3x'+8y'=0,$$

adică dreapta dată trece prin noua origine, cu alte cuvinte s-a ales ca nouă origine un punct al dreptei date.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

140. Să se spună ce devin ecuațiile dreptelor $x+2y-5=0$; $2x+3y-8=0$; $3x-7y=0$; $3x-2y+6=0$, dacă originea se mută printr-o translație în $O'(2, 3)$.

[$x'+2y'+3=0$; $2x'+3y'+5=0$; $3x'-7y'-15=0$, $3x'-2y'+6=0$ (rămîne neschimbată).]

141. Se dau dreptele $5x+y-7=0$ și $3x-5y-21=0$. Ce devin ecuațiile acestor drepte dacă, prin translație, se mută originea în punctul de intersecție al celor două drepte?

[$5x'+y'=0$; $3x'-5y'=0$.]

142. Se consideră ecuațiile aceleiași drepte (D) raportate la vechile axe xOy și noile axe $x'O'y'$, după translație. Să se arate că termenii liberi sînt de același semn dacă O și O' sînt de aceeași parte a dreptei (D) și de semne contrare, dacă sînt de o parte și alta a lui (D).

143. Se dau punctele $A(3, 2)$, $B(1, 5)$, $C(-2, -1)$. Să se spună ce devin ecuațiile laturilor triunghiului, dacă se mută originea, prin translație, în centrul de greutate al triunghiului.

[$3x'+2y'-7=0$; $6x'-3y'+7=0$; $3x'-5y'-7=0$.]

144. Să se trateze problema în cazul general cînd vîrfurile triunghiului sînt $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

[*Indicație.* Se vor scrie ecuațiile laturilor sub formă de determinant și se va ține seama că $G\left(\frac{\Sigma x_i}{3}, \frac{\Sigma y_i}{3}\right)$. Se găsește ca termen liber $\frac{2}{3}A$, unde A este aria triunghiului dat.]

145. Să se cerceteze care sînt dreptele a căror ecuație se păstrează după o translație de axe.

[Fie $Ax+By+C=0$ dreapta. Trebuie ca $D_0=C$, care arată că $-\frac{A}{B}=\frac{y_0}{x_0}$, deci dreapta trebuie să fie paralelă cu OO'. Vezi un exemplu la exercițiul 140.]

CAPITOLUL X

LOCURI GEOMETRICE

1. Din geometria elementară știm că se numește *loc geometric mulțimea punctelor care se bucură de o aceeași proprietate.* În plan această mulțime de puncte poate alcătui una sau mai multe curbe. De pildă toate punctele din plan *egal depărtate de un punct fix* se găsesc pe un cerc, prin urmare locul geometric — cercul — este format dintr-o singură curbă, în timp ce punctele egal depărtate de o dreaptă sînt situate pe două drepte paralele cu dreapta dată, de o parte și alta a ei, deci locul geometric este alcătuit din *două drepte.*

Putem concepe locul geometric și în alt mod, bazat pe mișcare, deci *cinematic.* Anume putem să ne închipuim un punct M mobil, care păstrează în tot timpul mișcării proprietatea dată și generează astfel locul geometric. În acest fel punctul M coincide pe rînd cu punctele locului geometric definit mai înainte static, ca mulțime de puncte. Sîntem astfel conduși la o definiție cinematică: *se numește loc geometric figura plană descrisă de un punct* **mobil** *M, care satisface o anumită condiție (proprietate) dată.*

Figura plană de care am vorbit poate fi alcătuită din una sau mai multe curbe sau chiar de o porțiune din plan.

În scopul de a putea da reguli precise pentru determinarea locurilor geometrice pe cale analitică, vom despărți locurile geometrice în două categorii, după condiția la care este supus punctul variabil: a) locuri geometrice rezultate din mișcarea unui punct care păstrează neschimbată o *relație geometrică;* b) locuri geometrice descrise prin schimbarea poziției *punctului de intersecție* a două *curbe variabile.* În acest din urmă caz, proprietatea care se păstrează este că punctul variabil se găsește mereu la întretăierea celor două curbe.

Vom studia cele două categorii de locuri geometrice, cu suficiente exemple pentru ca lucrurile să fie bine lămurite.

2. *Locuri geometrice rezultate din relații geometrice.* A găsi locul geometric al punctului $M(x, y)$ înseamnă a găsi relația de legătură între coordonatele x și y, adică ecuația locului. În cazul cînd $M(x, y)$ satisface o anumită relație geometrică, este de ajuns să transformăm relația dată într-o relație analitică și am găsit legătura între x și y. Ajungem astfel la această regulă simplă: *locul geometric al unui punct care satisface o relație geometrică se găsește transformînd relația geometrică în relație analitică.*

Exemple. 1) *Se cere locul geometric al punctelor egal depărtate de o dreaptă dată.*

Fie (D) dreapta dată, M punctul care are distanța d pînă la (D) și $\overline{MN} \perp (D)$, unde $N \in (D)$. Relația geometrică, este evident $\overline{MN}=d$. Dacă nu intervin alte considerații și putem alege cum vrem axele, atunci vom lua pe (D) ca axă Ox și o perpendiculară oarecare pe ea ca Oy. Relația geometrică transformată analitic este

$$y=\pm d \tag{1}$$

și reprezintă două drepte paralele cu Ox, deci cu (D). Dacă însă sîntem obligați să alegem alte axe (în cazul cînd locul cerut este numai o parte a unei probleme mai complexe), atunci (D) are ecuația $Ax+By+C=0$ și ecuația locului este

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm d. \tag{2}$$

Locul este desigur același, dar raportat la alte axe.

2) *Să se găsească locul geometric al punctelor care au suma distanțelor la două drepte perpendiculare, constantă și egală cu a.*

Problema poate fi studiată sub două aspecte după cum distanțele sînt socotite cu semn sau în valoare absolută. În orice caz, axele de coordonate vor fi chiar cele două drepte și atunci este foarte clar că distanțele unui punct M la cele două drepte sînt chiar coordonatele punctului. Relația geometrică dată de enunț este $\overline{MM_1}+\overline{MM_2}=a$.

Cazul I. Dacă distanțele sînt socotite cu semn, atunci acestea sînt coordonatele punctului M, cu semnele respective în cele patru cadrane. Relația geometrică transformată analitic este deci

$$x+y=a \tag{3}$$

și reprezintă dreapta AB (fig. 55) în întregime, deci și partea punctată. Să se observe însă că dacă M iese din cadranul I, atunci din punctul de vedere al geometriei fără semne avem *diferența distanțelor* constantă și nu suma.

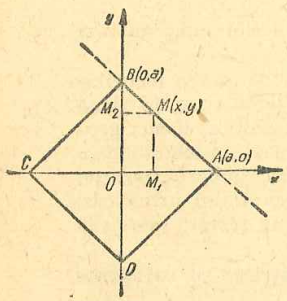


Fig. 55.

Cazul II. Dacă relația geometrică se referă la distanțele absolute, atunci relația analitică este

$$|x|+|y|=a \tag{4}$$

și reprezintă pătratul $ABCD$, lucru care se vede ușor, deoarece dacă M aparține locului, atunci simetricele față de Ox, Oy și origine aparțin de asemenea locului.

Din punctul de vedere al *geometriei elementare* problema se încadrează în al doilea caz.

Atragem atenția că după ce s-a obținut ecuația locului geometric trebuie cercetat dacă natura problemei permite ca toate punctele care verifică ecuația să aparțină locului, sau *numai o parte.* Este chestiunea locului geometric limitat.

3) *Fiind date trei puncte A, B, C să se găsească locul geometric al punctelor care satisfac relația*

$$\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=2\cdot\overline{MA}^2.$$

Se alege dreapta BC ca axă Ox și mediatoarea segmentului $\overline{BC}$ ca axă Oy. Coordonatele punctelor sînt: $A(x_1, y_1)$, $B(a, 0)$, $C(-a, 0)$ și $M(x, y)$ care este punct curent al locului. Relația geometrică transpusă analitic este

$$(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2=2(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$$

sau, după dezvoltare și reducerea termenilor asemenea

$$2x_1x+2y_1y=x_1^2+y_1^2-a^2. \tag{5}$$

Aceasta este ecuația locului geometric și reprezintă o perpendiculară pe mediana OA a triunghiului ABC, deoarece coeficientul său unghiular este $-\frac{x_1}{y_1}$.

Discuție. a) Problema prin enunțul ei, nu duce la nici o limitare a locului geometric, deci locul geometric este toată dreapta.

b) *Cazuri particulare.* 1) Dacă $\overline{OA}=a$, adică mediana triunghiului ABC este jumătatea laturii BC, atunci $x_1^2+y_1^2=a^2$ și ecuația locului se reduce la $x_1x+y_1y=0$, adică perpendiculara pe OA care trece prin origine.

2) Dacă triunghiul ABC este isoscel, atunci $A \in Oy$ și $x_1=0$. Ecuația locului devine $y=\frac{y_1^2-a^2}{2y_1}$, o paralelă la Ox.

3) Dacă A, B, C, sînt coliniare, atunci $A \in Ox$ și $y_1=0$. Ecuația (5) se reduce la $x=\frac{x_1^2-a^2}{2x_1}$, deci o perpendiculară pe dreapta ABC.

Am dat acest model de discuție pentru a arăta că în primul rînd trebuie văzut dacă locul este limitat sau nu, apoi este bine să se prezinte unele generalizări sau cazuri particulare interesante.

3. *Locuri geometrice rezultate din intersecții.* În cazul locurilor rezultate din intersecții de curbe punctul M se află la intersecția a două curbe variabile, a căror poziție depinde de un parametru λ. Prin urmare ecuația fiecărei curbe conține variabilele x, y și un același parametru λ care schimbă poziția fiecărei curbe, dar nu modifică gradul ecuației sale. Cele două curbe se pot scrie deci, în general, sub forma

$$f(x, y; \lambda)=0 \text{ și } g(x, y; \lambda)=0. \tag{6}$$

Ne propunem să găsim metoda de a determina locul geometric al punctului M în acest caz.

Ecuațiile (6) formează un sistem pe care îl putem rezolva în raport cu x și y; acestea vor fi funcții de λ, deci vom avea

$$x=\varphi(\lambda),\ y=\psi(\lambda). \tag{7}$$

Trebuie să precizăm că din punct de vedere practic rezolvarea sistemului (6) poate duce *uneori* la greutăți destul de mari, dar, așa cum vom vedea, această rezolvare ne interesează prea puțin.

În baza relațiilor (7) la fiecare valoare a lui λ corespunde o pereche de valori (x, y), deci un punct în plan. Cînd λ variază continuu, punctul $M(x, y)$ își schimbă și el continuu poziția și descrie curba-loc geometric. Pentru acest motiv se zice că (7) reprezintă *ecuațiile parametrice* ale locului geometric. Legătura între x și y este făcută indirect prin parametrul λ.

Pe noi ne interesează legătura directă între x și y, deci *ecuația carteziană* a locului. Aceasta se face eliminînd pe λ între cele două ecuații (7), deci scoțînd pe λ dintr-una din ele și introducîndu-l în cealaltă. În acest fel se obține o relație de forma

$$F(x,\ y)=0 \qquad (7')$$

care este ecuația locului geometric căutat.

Să observăm însă că ecuațiile (6) și (7) sînt echivalente, prin urmare putem elimina pe λ direct din (6), fără a mai trece prin (7) și vom obține același loc geometric.

De aici regula:

Pentru a găsi locul geometric rezultat din intersecția a două curbe variabile, care depind de un același parametru, se elimină parametrul între ecuațiile celor două curbe.

După cum s-a văzut sistemul (7) a fost necesar numai pentru *a demonstra* că locul geometric se obține prin eliminarea parametrului. Se întîmplă însă cîte o dată ca eliminarea parametrului din (6) să se facă greu. Atunci trebuie încercat dacă nu cumva trecînd de la (6) la (7), eliminarea se face mai ușor între ecuațiile (7).

4. *Cazul cînd curbele conțin mai mulți parametri.* Se poate ca din enunțul unei probleme să apară *doi* parametri și atunci ecuațiile curbelor care determină locul geometric conțin doi parametri, adică sînt de forma

$$f(x,\ y;\ \lambda,\ \mu)=0,\ g(x,\ y;\ \lambda,\ \mu)=0. \qquad (8)$$

În acest caz însă tot enunțul problemei trebuie să ne dea și o relație de legătură între cei doi parametri, deci

$$h(\lambda,\ \mu)=0. \qquad (8')$$

Eliminarea celor doi parametri se face între cele trei ecuații (8) și (8'). În mod asemănător *trei* parametri se vor elimina între *patru* ecuații etc.

Se întîmplă uneori, destul de rar, ca o problemă să conțină doi parametri, *fără relație de legătură între ei* și totuși să existe un loc geometric. În astfel de cazuri, atunci cînd se elimină unul din parametri, se elimină de la sine și al doilea.

Exemplele care urmează vor lămuri și mai bine expunerea.

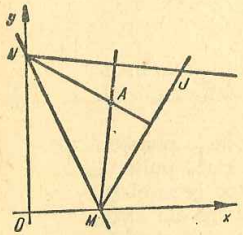


Fig. 56.

Exemple. *1. Se consideră un unghi drept și un punct fix A. O dreaptă de direcție constantă taie laturile unghiului, respectiv în M și N. Se cere locul geometric al intersecției perpendicularei din M pe AN, cu perpendiculara din N pe AM.*

Laturile unghiului drept se aleg în mod firesc ca axe (fig. 56). Punctul A are coordonate oarecare: $A(x_0,\ y_0)$. Dreapta de direcție constantă o scriem sub forma $y=mx+\lambda$ (λ este parametrul problemei) unde m=const. dă direcția dreptei.

Punctele $M\in Ox$ și $N\in Oy$ sînt tăieturile dreptei, iar coordonatele lor se obțin făcînd succesiv $y=0$ și $x=0$. Se găsește $M\left(-\frac{\lambda}{m},\ 0\right)$ și $N(0,\ \lambda)$. Pentru dreptele AN și AM ne trebuie numai coeficienții unghiulari. Ele fiind determinate prin două puncte avem imediat

$$m_{AN}=\frac{y_0-\lambda}{x_0};\quad m_{AM}=\frac{y_0}{x_0+\frac{\lambda}{m}}.$$

Rezultă ecuațiile perpendicularelor din M și N, respectiv pe AN și AM: $y=-\frac{x_0}{y_0-\lambda}\left(x+\frac{\lambda}{m}\right)$, $y-\lambda=-\frac{x_0+\frac{\lambda}{m}}{y_0}x$, care se mai pot scrie sub formele

$$xx_0+yy_0=\lambda\left(y-\frac{x_0}{m}\right)\ \text{și}\ xx_0+yy_0=\lambda\left(y_0-\frac{x}{m}\right).$$

Locul geometric al punctului J de intersecție a celor două drepte se capătă prin eliminarea parametrului λ; aceasta se obține scăzînd ecuațiile și împărțind cu $\lambda\neq 0$. Ecuația locului geometric este

$$y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0).$$

Se observă că locul este perpendiculara dusă din A pe dreapta MN de direcție constantă.

Notă. Soluția geometrică este simplă: oricare ar fi triunghiul MJN, AM și AN sînt înălțimi, deci JA este a treia înălțime și $JA\perp MN$.

2. Prin punctul fix M_0 se duc două drepte perpendiculare: una taie axa Ox în A. cealaltă axa Oy în B. Să se găsească locul mijlocului lui $\overline{AB}$ cînd unghiul drept se rotește în jurul lui M_0 (C.d.p.).

Scriem ecuațiile a două drepte ce trec prin M_0 și sînt perpendiculare:

$$(M_0A)\qquad y-y_0=\lambda(x-x_0)$$
$$(M_0B)\qquad y-y_0=-\frac{1}{\lambda}(x-x_0).$$

Parametrul comun este coeficientul unghiular λ al primei drepte. Intersectînd cele două drepte, respectiv cu Ox și Oy, se obține $A\left(x_0-\frac{y_0}{\lambda},\ 0\right)$, $B\left(0,\ y_0+\frac{x_0}{\lambda}\right)$. Atunci mijlocul segmentului $\overline{AB}$ are coordonatele:

$$x=\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{y_0}{\lambda}\right),\quad y=\frac{1}{2}\left(y_0+\frac{x_0}{\lambda}\right).$$

De data aceasta curbele variabile care determină prin intersecția lor punctul M sînt drepte paralele cu axele, cu alte cuvinte am găsit chiar un sistem de forma (7). Pentru eliminarea lui λ ar trebui să-l scoatem dintr-o ecuație și să-l introducem în cealaltă, dar este mai simplu să scriem întîi ecuațiile sub formele $\frac{y_0}{\lambda}=x_0-2x$; $\frac{x_0}{\lambda}=2y-y_0$, de unde $\frac{y_0}{x_0}=\frac{x_0-2x}{2y-y_0}$, sau $2x_0x+2y_0y=x_0^2+y_0^2$.

Locul geometric este mediatoarea segmentului $\overline{OM_0}$ (a se vedea problema 84).

3. Pe laturile unui unghi drept xOy se iau punctele A pe Ox și B pe Oy, apoi punctele variabile M pe Ox, N pe Oy care satisfac relația

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = 2.$$

Să se găsească locul geometric al punctului $J \equiv AN \cap BM$.

Am luat acest exemplu cu un anumit scop: de a arăta că dacă cele două drepte variabile coincid la un moment dat, atunci orice punct al lor este punct de intersecție și dreapta aceasta dublă apare ca loc geometric, fără a fi adevăratul loc geometric. Astfel de locuri geometrice rezultă din *nedeterminarea punctului de intersecție* și este bine să știm să le recunoaștem pentru a le separa ca să rămînă locul geometric veritabil.

În problema dată axele sînt laturile unghiului drept. Coordonatele punctelor le notăm: $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $M(\alpha, 0)$, $N(0, \beta)$.

Dreptele din enunț se scriu prin tăieturi:

$$(AN) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0; \qquad (BM) \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

la care se adaugă relația de legătură

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 2.$$

Avem în față o problemă cu *doi parametri* α, β și o *relație de legătură* între ei. Între cele trei ecuații trebuie eliminați α și β.

Din primele două ecuații se scoate:

$$\beta = \frac{ay}{a-x}; \quad \alpha = \frac{bx}{b-y};$$

acestea introduse în relația de legătură ne dau $\frac{bx}{a(b-y)} + \frac{ay}{b(a-x)} = 2$ sau efectuînd calculele

$$b^2x^2 + 2ab\,xy + a^2y^2 - 3ab(bx+ay) + 2a^2b^2 = 0.$$

Am obținut o ecuație de gradul al II-lea. Să observăm însă că atunci cînd $N \equiv B$, deci $\beta = b$, relația de legătură ne dă $\alpha = a$, adică $M \equiv A$. În acest caz însă dreptele AN și BM coincid și toate punctele dreptei AB sînt puncte comune, deci AM *trebuie* să apară ca loc geometric rezultat din nedeterminare. În consecință, ecuația de gradul al II-lea *trebuie să se descompună*.

În adevăr se observă că ecuația poate fi scrisă $(bx+ay)^2 - 3ab(bx+ay) + 2a^2b^2 = 0$, care rezolvată în raport cu $(bx+ay)$* duce la

$$bx+ay = 2ab \text{ și } bx+ay = ab \qquad \text{sau}$$

$$(D) \quad \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - 1 = 0, \qquad (D') \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Dreapta (D) este veritabilul loc geometric și se construiește imediat avînd tăieturile $2a$, $2b$; este deci paralelă cu AB.

A doua dreaptă (D') este AB, care așa cum am prevăzut trebuia să apară ca loc rezultat din nedeterminarea punctului de intersecție.

* În caz de nevoie se va nota $bx+ay=z$.

4. Se dă un paralelogram ABCD. O paralelă la AB taie laturile AD și BC, respectiv în M și N, iar o paralelă la AD taie laturile AB și CD, respectiv în P și Q. Să se afle locul geometric al punctului $PN \cap MQ$.

Se alege latura AB ca axă Ox și perpendiculara pe ea în A ca Oy, apoi se notează cu a abscisa lui B (fig. 57). Ecuațiile laturilor paralelogramului sînt: (AB) $y=0$; (CD) $y=b$; (AD) $y=mx$; (BC) $y=m(x-a)$. Ecuațiile dreptelor MN și PQ sînt respectiv: $y=\beta$ și $y=mx+\alpha$. După cum se vede apar doi parametri α și β fără ca problema să ne dea o legătură între ei, totuși există un loc geometric. Rezolvînd sistemele formate de dreptele MN și AD, apoi de MN și BC găsim:

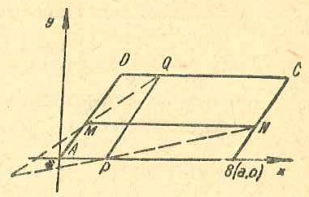


Fig. 57.

$$M\left(\frac{\beta}{m}, \beta\right); \quad N\left(a + \frac{\alpha}{m}, \beta\right).$$

De asemenea $PQ \cap AB$ și $PQ \cap CD$ ne dau $P\left(-\frac{\alpha}{m}, 0\right)$; $Q\left(\frac{b-\alpha}{m}, b\right)$.

Acum se pot scrie ecuațiile dreptelor MQ și NP, care aduse la forma generală sînt

$$(MQ) \qquad m(\beta-b)x + (b-\alpha-\beta)y + \alpha\beta = 0$$

$$(NP) \qquad m\beta x - (ma+\alpha+\beta)y + \alpha\beta = 0.$$

Prin scăderea acestor două ecuații (prima din a doua) dispar amîndoi parametri și se obține ecuația locului

$$mbx - (b+ma)y = 0,$$

o dreaptă care trece prin origine și prin punctul C, deci locul este chiar diagonala AC a paralelogramului*.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

146. Să se găsească locul punctelor M astfel ca diferența pătratelor distanțelor lor la două puncte fixe A și B să fie constantă. Să se caute și o soluție vectorială.

[O perpendiculară pe AB.]

* Cum se explică faptul că deși în unele probleme există *doi parametri*, fără relație de legătură între ei, totuși avem un loc geometric? Să ne închipuim în problema de față că MN rămîne fixă și variază numai PQ și să notăm cu L_α locul geometric datorit primului parametru α. Presupunem apoi pe PQ fixă și să notăm cu L_β locul datorit lui β. În general L_α și L_β sînt distincte, dar dacă se întîmplă să coincidă, cum a fost cazul aici, atunci va exista un loc geometric rezultat din variația a doi parametri, fără legătură între ei.

De exemplu dacă $ABCD$ este un trapez cu bazele $\overline{AB}$ și CD, $\overline{MN}$ paralelă cu bazele, iar PQ paralelă cu dreapta care unește mijloacele bazelor, atunci L_α este o dreaptă, diferită de diagonală, iar L_β este o conică ce trece prin A și C. Cînd bazele trapezului devin egale, deci, trapezul devine paralelogram, atît L_α cît și L_β se reduc la diagonala AC a paralelogramului.

147. Să se găsească locul geometric al punctelor care au raportul distanțelor la două drepte concurente, constant.

[Două drepte care trec prin punctul comun dreptelor date. Pentru $k=1$ se obțin cele două bisectoare.]

148. Fiind date trei puncte A, B, C, să se găsească locul punctului M care satisface relația:

$$\overline{MB}^2+\overline{MC}^2-2\overline{MA}^2=k \text{ (const.)}.$$

Să se deducă problema de la exemplul 3 § 2.

149. Dîndu-se în plan $(n+1)$ punctele: M_1, $M_2, \ldots, M_n$, M_{n+1}, să se găsească locul punctului M care satisface relația

$$\overline{MM_1}^2+\overline{MM_2}^2+\ldots+\overline{MM_n}^2-n\cdot\overline{MM_{n+1}}^2=k \text{ (const.)}.$$

Caz particular $k=0$.

[O dreaptă. Este generalizarea problemei precedente.]

150. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza $\overline{BC}=a$ și catetele $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$. Să se găsească locul geometric al punctelor M care satisfac relația

$$b^2\cdot\overline{MB}^2+c^2\cdot\overline{MC}^2-a^2\cdot\overline{MA}^2=k \text{ (const.)}.$$

Caz particular $k=0$.

[O paralelă la ipotenuză. Pentru $k=0$ se obține o relație interesantă a punctelor de pe ipotenuză. S.G.M. IV.p.97.]

151. Se dă un patrulater $ABCD$ având două laturi egale $\overline{AB}=\overline{CD}$. Să se arate că locul geometric al punctelor care satisfac relația

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=\overline{MC}^2+\overline{MD}^2$$

este mediatoarea segmentului care unește mijloacele laturilor egale.

152. Dintr-un punct P se duc perpendicularele PM, PN pe laturile OM, ON ale unui unghi dat. Să se găsească locul punctului P știind că $\overline{OM}+\overline{ON}=$const. (Salmon).

[O perpendiculară pe bisectoarea unghiului. Se pot alege ca axe bisectoarele (interioară și exterioară) unghiului.]

153. Un triunghi are o latură fixă și aria constantă. Să se afle locul vîrfului mobil.

[Se scrie că aria este constantă. a) Dacă aria se consideră cu semn, locul este o paralelă la bază. b) Dacă aria se consideră în modul, locul este compus din două paralele la bază.]

154. Se dă o dreaptă (D) și un punct A exterior. Dacă $M\in(D)$ și este mobil, să se afle:

a) locul mijlocului segmentului AM;

b) locul punctului care împarte într-un raport dat k segmentul $\overline{AM}$.

[Paralele la dreapta (D).]

155. Vîrfurile A, B, C ale unui triunghi se mișcă arbitrar pe trei drepte paralele. Să se arate că centrul de greutate G descrie un loc geometric și să se precizeze poziția lui. Să se dea și o soluție vectorială.

[Se va lua Ox cu direcția dreptelor paralele. Atunci $A(\alpha, a)$, $B(\beta, b)$, $C(\gamma, c)$ și $y=\dfrac{a+b+c}{3}=$ const. etc. Să se observe că problema conține parametri independenți α, β, γ.]

156. Patrulaterul $ABCD$ are vîrfurile A, B fixe, iar C și D mobile pe două drepte (Δ), (Δ') paralele între ele. Fie M, N mijloacele segmentelor AB, CD. Să se afle locul mijlocului segmentului $\overline{MN}$.

[Problema conține doi parametri. Se va lua o paralelă la (Δ) și (Δ'). ca axa Ox. Atunci $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(\alpha, a)$, $D(\beta, b)$. Ordonata mijlocului lui MN este constantă. Locul este o paralelă la (Δ), (Δ') a cărei poziție este precizată.]

157. O dreaptă se deplasează paralel cu ea însăși și întîlnește axele de coordonate în M și N. Prin M și N se duc drepte cu direcții fixe; să se afle locul geometric al intersecției lor.

[O dreaptă care trece prin origine.]

158. Pe o dreaptă (D) se dau două puncte fixe A, B și un punct mobil M. Pe perpendiculara ridicată în M pe (D) se iau segmentele constante $\overline{MP}=p$ și $\overline{MQ}=g$. Se cere locul geometric al punctului $AP\cap BQ$ (S.G.M. IV).

[Fie Q_a poziția lui Q cînd $M\equiv A$ și P_b poziția lui P cînd $M\equiv B$. Locul este dreapta Q_aP_b.]

159. Se dă un punct fix A pe axa Ox și o dreaptă (D). Prin A se duce o dreaptă variabilă (Δ) și fie $M\equiv(\Delta)\cap(D)$, $N\equiv(\Delta)\cap Oy$. Să se găsească locul geometric al intersecției perpendicularei pe Oy în N cu dreapta OM.

[$A(a, 0)$ și $y=mx+n$ ecuația dreptei (D). Locul cerut este $(am+n)x-ay+an=0$, o dreaptă.]

160. O dreaptă se deplasează păstrînd direcția și întîlnește axele Ox, Oy, respectiv în A și B. Se construiește un dreptunghi $ABCD$ cu vîrful C pe o dreaptă fixă (Δ). Să se găsească locul vîrfului D (C.d.p.).

[k este coeficientul unghiular al direcției constante și $y=mx+n$ ecuația dreptei fixe. Locul este dreapta $kx+(k^2-mk-1)y+n=0$.]

161. Se dau punctele fixe $A\in Ox$ și $B\in Oy$. Se iau apoi punctele variabile $A'\in Ox$ și $B'\in Oy$ astfel ca $\overline{OA'}+\overline{OB'}=\overline{OA}+\overline{OB}$. Să se găsească locul intersecției dreptelor AB' cu $A'B$ (Salmon).

[$A(a, 0)$, $B(0, b)$. Locul este $x+y=a+b$. În ecuația locului apare însă și dreapta AB. Să se explice de ce (vezi problema 3 § 3).]

162. Se dă dreapta (D) $2x+3y-12=0$. Un punct M mobil pe (D) se proiectează în P pe Ox și în Q pe dreapta $x-y+2=0$. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $\overline{PQ}$.

[$M(\alpha, \beta)$ (D) deci $2\alpha+3\beta-12=0$. Se calculează coordonatele lui P și Q, apoi ale lui N, mijlocul lui $\overline{PQ}$: $x=\frac{1}{4}(3\alpha+\beta-2)$, $y=\frac{1}{4}(\alpha+\beta+2)$. Se elimină α și β între cele trei ecuații. Locul este dreapta $x-7y+10=0$.]

163. Se dau două drepte (Δ), (Δ') și un punct fix A. O dreaptă variabilă care trece prin A taie pe (Δ) și (Δ'), respectiv în M și N. Să se găsească locul geometric al punctului $P \in MAN$, care satisface relația:

$$\frac{a}{\overline{AM}}+\frac{b}{\overline{AN}}=\frac{c}{\overline{AP}}$$

a, b, c fiind constante. Caz particular $c=a+b$. Se va cerceta cazul cînd P este conjugatul lui A față de M și N.

[*Indicație.* Se scrie $a\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}+b\frac{\overline{AP}}{\overline{AN}}=c$. Se observă că $\frac{\overline{MP}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{MA}+\overline{AP}}{\overline{MA}}=1-\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}$ etc. și relația devine $a\frac{\overline{MP}}{\overline{MA}}+b\frac{\overline{NP}}{\overline{NA}}=a+b-c$. Se ia una din dreptele date ca Ox, cealaltă fiind $y=mx$. Se notează $A(x_0, y_0)$ și $P(x, y)$ și se ține seamă că rapoartele în care dreptele date împart segmentul $\overline{AP}$ sînt tocmai cele de mai sus. Locul este dreapta $a\frac{y}{y_0}+b\frac{mx-y}{mx_0-y_0}=a+b-c$. Pentru P conjugat cu A avem $a=b=1$, $c=2$. Se va scrie ecuația locului și în cazul cînd ecuațiile dreptelor date sînt $D=0$ și $D'=0$, oarecare.]

CAPITOLUL XI

CERCUL

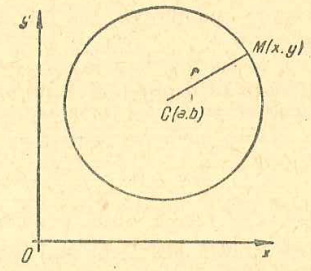


Fig. 58.

1. *Ecuația cercului.* Cercul este locul geometric descris de un punct M care rămîne la egală distanță de un punct fix C, centrul cercului. Dacă notăm cu r raza cercului, relația geometrică pe care o satisface punctul curent M este (fig. 58)

$$\overline{CM}=r.$$

Fie $C(a, b)$ și $M(x, y)$ centrul și punctul curent raportate la un sistem dreptunghiular de axe. Relația geometrică se scrie analitic

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

sau, adusă la forma rațională

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.} \qquad (1)$$

Aceasta este ecuația cercului, cînd se dau centrul și raza.

Dacă centrul este în origine, atunci $a=b=0$ și ecuația devine

$$\boxed{x^2+y^2-r^2=0.} \qquad (2)$$

Ecuațiile (1) și (2) reprezintă cercuri numai în axe dreptunghiulare.

Dacă vrem să tratăm problema vectorial, atunci trebuie observat că vectorul $\overline{CM}$ își schimbă poziția, dar are modulul constant, deci $|\overrightarrow{CM}|=r$, care duce la același rezultat.

2. Dacă desfacem pătratele în (1) obținem ecuația cercului sub forma

$$\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0,} \qquad (3)$$

care este o ecuație de gradul al II-lea în x și y. Reciproc însă, *nu* orice ecuație de gradul al II-lea reprezintă un cerc.

În adevăr ecuația generală de gradul al II-lea în x și y este

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (4)$$

care comparată cu (3) ne duce la următoarele constatări:

1) Ecuația cercului (3) nu conține termenul în xy, deci în (4) trebuie ca $B=0$.

2) În (3) x^2 și y^2 au coeficienții egali cu 1, dar dacă a și b sînt fracționari, prin eliminarea numitorilor se obțin coeficienți diferiți de 1, dar *egali între ei*, deci în (4) trebuie să avem $C=A$.

Prin urmare pentru ca (4) să reprezinte un cerc trebuie să aibă forma

$$A(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0 \qquad (5)$$

pe care o vom numi *ecuația generală* a cercului. Dacă împărțim cu A ($A\neq 0$, căci altfel nu mai avem cerc) și notăm $\frac{D}{A}=2m$, $\frac{E}{A}=2n$, $\frac{F}{A}=p$ obținem

$$x^2+y^2+2mx+2ny+p=0 \qquad (6)$$

pe care o vom numi *ecuația normală* a cercului*.

În rezumat formele principale sub care se prezintă ecuația unui cerc sînt: *ecuația generală* (5), *ecuația normală* (6) și *ecuația cu pătratele strînse* (1)

Deoarece trecerea de la ecuația generală la ecuația normală se face foarte simplu prin împărțirea cu A, formele care interesează în mod deosebit sînt (1) și (6)

3 *Interpretarea geometrică a coeficienților*. Ne referim la ecuația normală a cercului (6): aceasta comparată cu (3) ne dă

$$m=-a;\ n=-b;\ p=a^2+b^2-r^2. \qquad (7)$$

Coeficienții lui x și y ($2m$ și $2n$) sînt coordonatele centrului, *dublate* și cu *semn schimbat*. Pentru interpretarea lui **p** ducem din origine tangenta OT la cerc (fig. 59) și din triunghiul dreptunghic OCT scoatem: $\overline{OT}^2=\overline{OC}^2-r^2=a^2+b^2-r^2$, deci

$$p=\overline{OT}^2.$$

Așa cum arată și figura, s-a presupus originea exterioară cercului.

Dacă originea este interioară cercului, atunci se duce coarda care trece prin O și este perpendiculară pe diametrul OC: fie T' unul din punctele unde aceasta taie cercul. Avem (fig. 60)

$$\overline{OT'}^2=r^2-\overline{OC}^2=r^2-(a^2+b^2)=-(a^2+b^2-r^2),$$

de unde

$$p=-\overline{OT'}^2.$$

* Prin analogie cu ecuația normală a dreptei, care se capătă din ecuația generală, prin împărțirea cu un factor. Analogia este mai evidentă la puterea punctului față de cerc.

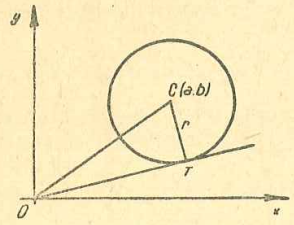


Fig. 59.

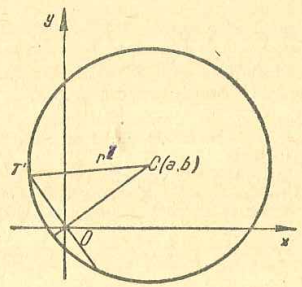


Fig. 60.

În ambele cazuri p reprezintă puterea originii față de cerc*. În primul caz puterea originii este dată de *pătratul tangentei* OT, în al doilea caz puterea originii este dată de *pătratul semicoardei* $OT'\perp OC$ luat cu semnul (—).

De aici rezultă că numai privind ecuația unui cerc putem spune dacă originea este *exterioară* sau *interioară* cercului, după cum termenul liber **p** este respectiv *pozitiv* sau *negativ*. Dacă $p=0$, cercul trece prin origine.

4. *Determinarea centrului și a razei*. Considerăm cercul dat prin ecuația normală

$$x^2+y^2+2mx+2ny+p=0.$$

Din relațiile (7) rezultă imediat:

$$a=-m,\ b=-n,\ r^2=a^2+b^2-p \qquad (8)$$

care dau coordonatele centrului și raza. Coordonatele centrului sînt *jumătățile coeficienților lui x și y, cu semnul schimbat*. Expresia razei ne conduce la următoarea discuție:

I. Dacă $a^2+b^2-p>0$, raza este reală și cercul de asemenea real.

II. Dacă $a^2+b^2-p=0$, atunci $r=0$, deci cercul se reduce la un punct. Ecuația lui se scrie

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0, \qquad (9)$$

și singurele *valori reale* care anulează această sumă de pătrate sînt cele care anulează fiecare pătrat, adică $x=a$, $y=b$, deci punctul (a, b).

III. Dacă $a^2+b^2-p<0$, raza cercului este imaginară și cercul este imaginar. Deoarece r^2 este negativ, ecuația cercului scrisă cu pătratele strînse este

$$(x-a)^2+(y-b)^2+r^2=0. \qquad (10)$$

De data aceasta nu mai există nici o pereche de valori reale (x, y) care să verifice ecuația (10).

5. *Cazuri particulare*. a) Dacă $b=0$, centrul cercului se află pe axa Ox, iar ecuația cercului se reduce la $x^2+y^2+2mx+p=0$. *Lipsește termenul în y.*

* Vezi manualul de cl. a X-a.

b) Dacă $a=0$, centrul cercului se află pe Oy, iar ecuația este $x^2+y^2+2ny+p=0$. *Lipsește termenul în x.*

c) Dacă $p=0$ ecuația cercului rămîne $x^2+y^2+2mx+2ny=0$ și cercul trece prin origine (vezi și § 3).

Exemple. 1) Ecuația cercului cu centrul în origine și cu raza $r=2$ este: $x^2+y^2-4=0$.

2) Cercul cu centrul $C(1, 2)$ și raza $r=5$ are ecuația $(x-1)^2+(y-2)^2-25=0$ sau $x^2+y^2-2x-4y-20=0$. Deoarece $p<0$, originea este interioară cercului.

3) Să se strîngă în pătrate ecuația cercului $x^2+y^2+x-4y-2=0$.

Avem $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$, $r^2=\frac{1}{4}+4+2=\frac{25}{4}$; ecuația este

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2-\frac{25}{4}=0.$$

4) Să se afle centrul și raza cercului a cărei ecuație este

$$3(x^2+y^2)-4x+6y+3=0.$$

Se împarte întîi cu 3 și se obține ecuația normală, de unde

$$a=\frac{2}{3},\ b=-1,\ r^2=\frac{4}{9}+1-1=\frac{4}{9};\ r=\frac{2}{3}.$$

5) Să se scrie sub forma strînsă în pătrate ecuația cercului

$$x^2+y^2-4x+2y+8=0.$$

Avem $a=2$; $b=-1$, $r^2=4+1-8=-3$, deci $r=i\sqrt{3}$. Cercul este imaginar și ecuația cerută este

$$(x-2)^2+(y+1)^2+3=0.$$

6) Să se spună unde are centrul, cercul de ecuație

$$x^2+y^2+6x-2\lambda y=0.$$

Coordonatele centrului sînt $a=-3$, $b=\lambda$, deci centrul se află pe dreapta $x=-3$.

6. *Determinarea unui cerc* Se știe că un cerc este determinat de trei puncte care nu sînt în linie dreaptă. Acest lucru, cunoscut din geometrie, va trebui să-l regăsim pe cale analitică. Pentru ca un cerc să treacă printr-un punct $M_0(x_0, y_0)$ trebuie ca ecuația cercului să fie verificată de coordonatele punctului. Însă ecuația unui cerc conține trei parametri m, n, p, deci pentru determinarea lor trebuie trei ecuații și acestea se obțin scriind că cercul trece prin trei puncte. Dacă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ sînt cele trei puncte, atunci pentru primul punct trebuie să avem

$x_1^2+y_1^2+2mx_1+2ny_1+p=0$, sau

și asemănător.

$$\left.\begin{aligned} 2mx_1+2ny_1+p&=-(x_1^2+y_1^2)\\ 2mx_2+2ny_2+p&=-(x_2^2+y_2^2)\\ 2mx_3+2ny_3+p&=-(x_3^2+y_3^2)\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Necunoscutele fiind $2m$, $2n$, p, condiția ca sistemul să fie compatibil și determinat (sistem Cramer) este ca determinantul coeficienților să fie diferit de zero, adică

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\neq 0, \qquad (12)$$

relație care arată că cele trei puncte A, B, C nu trebuie să fie coliniare. Cu această condiție $2m$, $2n$, p au valori unice și cercul este perfect determinat.

Exemplu. *Să se găsească ecuația cercului determinat de punctele* $(-1, 1)$, $(2, -1)$, $(1, 3)$.

Înlocuind coordonatele fiecărui punct în ecuația normală a cercului se obține sistemul

$$2m-2n-p=2;\ 4m-2n+p=-5;\ 2m+6n+p=-10$$

care dă $m=-\frac{11}{10}$, $n=-\frac{9}{10}$, $p=-\frac{12}{5}$. Ecuația cercului este $5(x^2+y^2)-11x-9y-12=0$.

Altă metodă. Se determină centrul cercului ca intersecție a două mediatoare ale triunghiului, apoi raza ca distanță de la centru la unul din punctele date.

Observări. a) Dacă se dau numai două puncte, se obțin numai *două ecuații* cu *trei necunoscute*. Se pot scoate *două necunoscute* în funcție de a treia și ecuația cercului depinde de un singur parametru. Se zice că avem *un fascicul de cercuri*. Asupra acestui lucru vom reveni.

b) Dacă se dă un singur punct, atunci condiția ca cercul să treacă prin acest punct duce la *o ecuație* cu *trei necunoscute*, deci se poate scoate una din ele ca funcție de celelalte două. Ecuația cercului depinde de *doi parametri*. *Exemplu:* cercurile care trec prin origine $x^2+y^2+2mx+2ny=0$.

7. Ca și dreapta, cercul poate fi determinat în mai multe feluri, dar totdeauna vor trebui determinați trei parametri. Astfel dacă se cunosc coordonatele centrului (a, b) și raza r, cercul este perfect determinat. Să se observe că a da centrul echivalează cu două condiții, căci sînt determinați a și b.

În afară de aceste două moduri de a determina un cerc, se pot imagina și altele. De exemplu dacă se pune condiția ca centrul să se afle pe o dreaptă, aceasta dă o relație între coordonatele centrului, deci o ecuație etc.

1) *Să se determine cercul cu centrul pe dreapta* $x=3$, *tangent axei* Oy *și care trece prin punctul* $A(5, 4)$.

Din cei trei parametri a, b, r, condițiile problemei fixează doi: $a=3$ și $r=3$. Lăsînd pe b nedeterminat vom scrie ecuația

$$(x-3)^2+(y-b)^2-9=0.$$

Obligăm acest cerc să treacă prin $A(5, 4)$ și obținem $(5-3)^2+(4-b)^2-9=0$ sau $(b-4)^2=5$ de unde $b=4\pm\sqrt{5}$, deci două soluții. Ecuațiile celor două cercuri se obțin înlocuind valorile lui b în ecuația de mai sus.

2) *Să se scrie ecuația cercului cu centrul în* $C(5, 5)$ *și tangent dreptei* $3x+4y-5=0$.

Cunoscînd centrul ne trebuie numai raza. Aceasta se află ca distanță de la C la dreapta dată, deci $r=\left|\frac{3\cdot 5+4\cdot 5-5}{5}\right|=6$. Ecuația cercului este $(x-5)^2+(y-5)^2-36=0$ sau $x^2+y^2-10x-10y+14=0$.

3) *Să se scrie ecuația cercului tangent axei* Ox *în punctul* $A(4, 0)$ *și care trece prin punctul* $(-2, 2)$.

Se dau trei condiții: să treacă prin cele două puncte și să fie tangent axei Ox. Centrul se află pe paralela dusă prin A la Oy, deci $a=4$, $b=\lambda$. Geometric se vede că $r=\lambda$, deci scriem ecuația cercului $(x-4)^2+(y-\lambda)^2-\lambda^2=0$ sau $x^2+y^2-8x-2\lambda y+16=0$. Ca să treacă prin punctul $(-2, 2)$ trebuie ca $4+4+16-4\lambda+16=0$, de unde $\lambda=10$. Ecuația cercului este $x^2+y^2-8x-20y+16=0$.

8. *Intersecția unui cerc cu o dreaptă.* A găsi punctele comune dintre un cerc și o dreaptă înseamnă a găsi perechile de valori care verifică ambele ecuații, adică a rezolva sistemul format din ecuația cercului și a dreptei. De exemplu să căutăm punctele de intersecție ale cercului $x^2+y^2+x-y-6=0$ cu dreapta $2x+3y-7=0$.

Din ecuația dreptei scoatem $y=\frac{7-2x}{3}$ care dus în ecuația cercului ne dă $13x^2-13x-26=0$ sau $x^2-x-2=0$, cu rădăcinile $x_1=-1$, $x_2=2$, la care corespund $y_1=3$, $y_2=1$. Punctele de intersecție sînt deci $(-1, 3)$ și $(2, 1)$.

9. *Intersecția unei drepte oarecare cu un cerc cu centrul în origine* este dată de sistemul

$$x^2+y^2-r^2=0;\ y=mx+n. \tag{13}$$

Înlocuind pe y în prima ecuație obținem ecuația de gradul al II-lea

$$(1+m^2)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \tag{14}$$

care dă abscisele x_1, x_2 ale punctelor de intersecție. Ordonatele se obțin înlocuind pe x_1 și x_2 în expresia lui y din (13). Fără a rezolva ecuația (14) putem să ne dăm seama care este poziția dreptei față de cerc. În adevăr realizantul ecuației este

$$R=4[m^2n^2-(1+m^2)(n^2-r^2)]=4[r^2(1+m^2)-n^2]. \tag{15}$$

Sînt următoarele situații posibile:

— *Dacă* $R>0$ rădăcinile sînt reale și dreapta taie cercul efectiv în două puncte distincte, deci este secantă cercului. Deoarece $r>0$ trebuie să avem din (15)

$$r>\left|\frac{n}{\sqrt{1+m^2}}\right|. \tag{16}$$

Observînd că partea a II-a a inegalității este distanța de la origine la dreapta dată, rezultă că dreapta este secantă cercului dacă această distanță este mai mică decît raza; regăsim pe cale analitică un lucru cunoscut din geometrie.

— *Dacă* $R=0$ rădăcinile sînt confundate și dreapta este tangentă cercului. Din (15) rezultă

$$r=\left|\frac{n}{\sqrt{1+m^2}}\right| \tag{17}$$

deci raza trebuie să fie egală cu distanța de la centru (origine) la dreaptă, lucru știut din geometrie.

— *Dacă* $R<0$ dreapta taie cercul în două puncte imaginare și este exterioară cercului. În acest caz $r<\left|\frac{n}{\sqrt{1+m^2}}\right|$, adică raza este mai mică decît distanța de la centru la dreapta dată.

10. *Cazul general:* o dreaptă și un cerc oarecare, deci

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \quad \text{și} \quad y=mx+n. \tag{18}$$

Se poate proceda direct prin eliminarea lui y, dar în acest fel sînt necesare unele calcule care devin inutile dacă reducem problema la cea precedentă.

Pentru aceasta să dăm sistemului de axe o translație luînd ca nouă origine centrul cercului $C(a, b)$. Formulele, în care x', y' reprezintă noile coordonate, sînt

$$x=a+x',\ y=b+y'. \tag{19}$$

Sistemul (18) devine

$$x'^2+y'^2-r^2=0;\ y'=mx'+ma-b+n. \tag{19'}$$

Comparînd cu sistemul (13) singura deosebire este că **n** din ecuația dreptei este înlocuit cu $(ma-b+n)$.

Rezultă imediat

$$R=4[r^2(1+m^2)-(am-b+n)^2] \tag{20}$$

de unde cazurile care urmează.

Dacă $R>0$, rădăcinile sînt reale și dreapta secantă cercului.

Din (20) se deduce condiția $r>\left|\frac{am-b+n}{\sqrt{1+m^2}}\right|$, adică raza cercului trebuie să fie mai mare decît distanța de la centrul $C(a, b)$ la dreapta dată $mx-y+n=0$.

Dacă $R=0$, rădăcinile sînt confundate și dreapta este tangentă cercului. Condiția este

$$r=\left|\frac{am-b+n}{\sqrt{1+m^2}}\right|,$$

adică raza egală cu distanța de la centru la dreaptă.

Dacă $R<0$, rădăcinile sînt complexe și dreapta este exterioară cercului. Sensul inegalității fiind contrar primului caz, raza cercului trebuie să fie mai mică decît distanța de la centru la dreaptă.

Exemple. 1) *Să se spună dacă dreapta* $3x+y-25=0$ *este secantă cercului* $x^2+y^2-65=0$ *şi, în caz afirmativ, să se afle coordonatele punctelor de intersecţie.*

Notînd cu r raza cercului şi cu d distanţa de la origine la dreaptă, avem

$$r^2=65;\ d=\frac{25}{\sqrt{10}},\ \text{deci}\ d^2=\frac{625}{10}=62{,}5,\ \text{de unde}\ r>d.$$

Dreapta este secantă. Coordonatele se află rezolvînd sistemul. Avem $y=25-3x$, care dus în ecuaţia cercului ne dă $x^2-15x+56=0$. Rădăcinile sînt $x_1=7$, $x_2=8$ şi, înlocuindu-le în ecuaţia dreptei, găsim $y_1=4$, $y_2=1$.

Punctele de intersecţie sînt: (7, 4) şi (8, 1).

2) *Dreapta* $3x-5y-15=0$. *întîlneşte cercul* $x^2+y^2+2x-6y-15=0$?

Elementele cercului sînt centrul $(-1, 3)$ şi raza $r=\sqrt{1+9+15}=5$. Distanţa de la centru la dreapta dată este $d=\left|\frac{-3-15-15}{\sqrt{9+25}}\right|=\frac{33}{\sqrt{34}}$. Deoarece $\sqrt{34}<6$, rezultă $d>5{,}5>r$.

Dreapta este exterioară cercului.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

164. Să se scrie ecuaţia cercului cu centrul în origine şi cu raza $r=4$, apoi a cercului cu aceeaşi rază, dar cu centrul în punctul $(-3, -5)$.

[$x^2+y^2-16=0$; $x^2+y^2+6x+10y+18=0$.]

165. Se cere centrul şi raza cercului a cărui ecuaţie este

$$x^2+y^2-2x+2\sqrt{5}y-10=0.$$

Care este poziţia originii faţă de acest cerc?

[$(1, -\sqrt{5})$; $r=4$. Originea este interioară.]

166. Aceeaşi problemă pentru cercul $8(x^2+y^2)+4x+12y-27=0$. Să se pună ecuaţia cercului sub forma strînsă în pătrate.

$$\left[C\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right),\ r=2.\ \text{Originea interioară.}\right]$$

167. Să se spună care este mărimea tangentelor duse din origine la cercurile:

$$3(x^2+y^2)+2mx+2ny+9=0;\quad \lambda(x^2+y^2)+2mx+2y+16=0,$$

unde m, n, λ sînt variabile.

$$\left[\text{Lungimile tangentelor: } \sqrt{3}\ \text{(constantă) şi } \frac{4}{\sqrt{\lambda}}\ \text{(variabilă).}\right]$$

168. Să se pună sub forma strînsă în pătrate cercurile:

$$x^2+y^2-4x+8y+25=0;\quad 2(x^2+y^2)+6x-2y+5=0.$$

[Cerc imaginar; cerc de rază nulă.]

169. Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin punctele $A(1, 1)$, $B(2, 0)$, $C(3, 2)$. Să se afle centrul, raza şi lungimea tangentei duse din origine la cerc.

$$\left[3(x^2+y^2)-13x-7y+14=0;\ \overline{OT}^2=\frac{14}{3}.\right]$$

170. Se cere ecuaţia cercului determinat de punctele $A(-4, 0)$, $B(4, 4)$ şi originea axelor.

[$x^2+y^2+4x-12y=0$.]

171. Se dau punctele $A(-1, 4)$, $B(3, -2)$. Să se scrie ecuaţia cercului care are pe AB ca diametru.

[Se determină centrul şi raza; $x^2+y^2-2x-2y-11=0$.]

172. Se dau punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Să se scrie ecuaţia cercului cu diametrul $\overline{AB}$.

[Generalizarea problemei precedente. $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$.]

173. Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin origine şi este tangent dreptei $x+2=0$, în punctul $(-2, -3)$.

$$\left[a=\lambda,\ b=-3,\ r=\lambda+2.\ \text{Se găseşte } \lambda=\frac{5}{4};\ x^2+y^2-\frac{5}{2}x+6y=0.\right]$$

174. Să se scrie ecuaţia cercului tangent axei Ox în origine şi care trece prin punctul $A(\sqrt{3}, -3)$. Să se determine centrul şi raza.

[$x^2+y^2+4y=0$. $C(0, -2)$, $r=2$.]

175. Se cere poziţia fiecărei din dreptele: $3x+4y-35=0$, $4x-3y+20=0$, $12x-5y-78=0$, faţă de cercul cu centrul în origine şi cu raza $r=6$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecţie reale.

$$\left[\text{Secanta: } M\left(\frac{-16+6\sqrt{5}}{5}, \frac{12+8\sqrt{5}}{5}\right) N\left(\frac{-16-6\sqrt{5}}{5}, \frac{12-8\sqrt{5}}{5}\right).\right.$$

$$\left.\text{Tangenta: } T\left(\frac{72}{13}, -\frac{30}{13}\right).\right]$$

176. Să se afle intersecţia cercului $x^2+y^2-4x-8y-80=0$ cu dreapta $4x+3y-70=0$.

[Dreapta este tangentă în punctul (10, 10).]

177. Să se spună dacă cercul cu centrul în $C(4, 0)$, tangent dreptei $4x+3y-6=0$ taie sau nu dreapta $4x-3y-6=0$.

[Este tangent şi la a doua dreaptă. Se calculează distanţa de la C la drepte.]

178. Ce poziţie are dreapta $(1-\lambda^2)x-2\lambda y+2(1+\lambda^2)=0$ faţă de cercul cu centrul în origine şi cu raza $r=2$?

[Tangentă.]

179. Să se scrie ecuațiile tangentelor la cercul $x^2+y^2-4x-5=0$, perpendiculare pe dreapta $12x+5y-50=0$.

[Fasciculul de drepte perpendiculare pe dreapta dată este $5x-12y+\lambda=0$. Se determină λ astfel ca distanța de la centrul cercului la dreapta variabilă să fie egală cu raza. Două soluții: $5x-12y-49=0$; $5x-12y+29=0$.]

180. Să se găsească ecuația secantei paralele cu dreapta $x-2y=0$, care determină în cercul $x^2+y^2-8x=0$, o coardă $\overline{MN}=2$.

[$x-2y-4\pm5\sqrt{3}=0$.]

181. Să se calculeze lungimea coardei determinate de dreapta $4x+3y-8=0$, în cercul cu centrul $C(2, 1)$ tangent dreptei $5x-12y+15=0$.

[Se calculează distanța de la centru la coardă și se folosește teorema lui Pitagora. *Altfel:* Se caută M și N intersecțiile cercului cu dreapta, apoi se calculează $\overline{MN}$; $\overline{MN}=1{,}6$.]

182. Să se scrie ecuația cercului cu raza $r=2$, tangent axei Ox și dreptei $3x+4y-24=0$.

[Patru soluții: $x^2+y^2-4x-4y+4=0$; $x^2+y^2-\frac{52}{3}x-4y+\frac{676}{9}=0$; $x^2+y^2-28x-4y+196=0$; $x^2+y^2-\frac{44}{3}x-4y+\frac{484}{9}=0$. Se notează centrul $C(\alpha, \beta)$ și fiind tangent la Ox rezultă $\beta=\pm2$; se scrie apoi că distanța de la centru la dreapta dată este ±2.]

183. Să se scrie ecuația cercului înscris în triunghiul format de dreptele $4x+3y-32=0$, $10x-24y+95=0$ și axa Ox.

[Bisectoarele unghiurilor făcute de cele două drepte cu axa Ox sînt $2x-10y+19=0$ și $x+2y-8=0$. Cercul înscris este $x^2+y^2-6x-5y+9=0$.]

184. Se cere ecuația cercului cu centrul în $\omega(-2, 5)$ și tangent cercului $x^2+y^2-4x-4y-1=0$.

[Se scrie că suma sau diferența razelor este egală cu distanța centrelor. Două soluții.]

CAPITOLUL XII

PROBLEME DE TANGENȚĂ

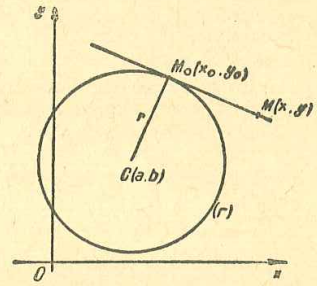


Fig. 61.

1. *Tangenta într-un punct situat pe cerc.* Presupunem cercul (Γ) dat prin centrul $C(a, b)$ și raza r (fig. 61), deci ecuația lui este

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.$$

Pe tangenta în M_0, situat pe cerc, luăm un punct curent $M(x, y)$. Deoarece $M_0\in(\Gamma)$ trebuie să avem

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2=0. \tag{1}$$

De altă parte se știe că tangenta la cerc este perpendiculară pe raza punctului de contact, deci vectorii $\overrightarrow{CM_0}$ și $\overrightarrow{M_0M}$ sînt perpendiculari și produsul lor scalar trebuie să fie nul. Vectorii fiind dați prin cîte două puncte se pot scrie

$$\overrightarrow{CM_0}=(x_0-a)\vec{i}+(y_0-b)\vec{j};\ \overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}.$$

Punînd condiția ca produsul scalar să fie nul obținem

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0.$$

Vom scrie $x-x_0=x-a+a-x_0=x-a-(x_0-a)$ și $y-y_0=y-b-(y_0-b)$ care înlocuite ne dau

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)-(x_0-a)^2-(y_0-b)^2=0$$

sau ținînd seama de (1)

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)-r^2=0 \tag{2}$$

cu condiția

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2=0.$$

Aceasta este ecuația tangentei într-un punct al cercului.

Ecuația (2) se ține minte foarte ușor dacă se scrie ecuația cercului cu termenii *dedublați:*

$$(x—a)(x—a)+(y—b)(y—b)—r^2=0,$$

apoi primele paranteze din cele două produse le lăsăm așa cum sînt, iar în celelalte înlocuim x și y prin x_0 și y_0. Se zice că ecuația tangentei se obține din ecuația cercului *prin dedublare.*

Dacă cercul are *centrul în origine*, atunci $a=b=0$ și ecuația tangentei devine

$$xx_0+yy_0—r^2=0 \text{ cu condiția } x_0^2+y_0^2—r^2=0. \tag{3}$$

Să considerăm acum cazul cînd ecuația cercului este dată sub forma normală

$$x^2+y^2+2mx+2ny+p=0.$$

Dezvoltînd parantezele din (2) și grupînd convenabil termenii se poate scrie tangenta sub forma

$$xx_0+yy_0—a(x+x_0)—b(y—y_0)+a^2+b^2—r^2=0.$$

Însă știm [XI, (7)] că $a=—m$, $b=—n$ și $a^2+b^2—r^2=p$; ecuația tangentei devine

$$xx_0+yy_0+m(x+x_0)+n(y+y_0)+p=0. \tag{4}$$

cu condiția

$$x_0^2+y_0^2+2mx_0+2ny_0+p=0.$$

Să se observe că $(x+x_0)$ și $(y+y_0)$ au drept coeficienți *jumătățile* coeficienților lui x și y din ecuația normală a cercului. Ecuația (4) se poate obține din ecuația cercului tot prin dedublare scriind: $x^2=x\cdot x$, $y^2=y\cdot y$, $2x=x+x$, $2y=y+y$, adică

$$x\cdot x+y\cdot y+m(x+x)+n(y+y)+p=0.$$

Acum în fiecare termen lăsăm un x sau y neschimbat, iar celui de-al doilea îi punem un indice și căpătăm (4). Dacă cercul este dat prin ecuația generală $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$, se împarte întîi cu A și se aduce la forma normală și numai după aceea se scrie tangenta prin dedublare.

E x e m p l e. 1) Tangenta în punctul $A(2, —4)$ la cercul $x^2+y^2—20=0$ este $x\cdot 2+y(—4)—20=0$ sau

$$x—2y—10=0.$$

2) Tangenta la cercul $x^2+y^2—5x+4y=0$ în punctul $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este

$$x\cdot\frac{1}{2}+y\cdot\frac{1}{2}—\frac{5}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+2\left(y+\frac{1}{2}\right)=0$$

sau

$$8x—10y+1=0.$$

Atragem atenția că atunci cînd se dă cercul și punctul, primul lucru care trebuie făcut este să se verifice dacă punctul se află pe cerc. În cele două exemple de mai sus verificarea o poate face ușor cititorul.

2. *Tangente cu direcția dată.* a) *Cercul cu centrul în origine.* Pentru ca dreapta $y=mx+n$ să fie tangentă cercului $x^2+y^2—r^2=0$ trebuie să taie cercul în două puncte confundate. Înlocuind pe y în ecuația cercului găsim ecuația de gradul al II-lea în x pe care am scris-o în capitolul precedent, § 8. Realizantul ecuației de asemenea este scris, dar îl transcriem aici:

$$R=4[r^2(1+m^2)—n^2]. \tag{5}$$

Presupunem acum că vrem să găsim tangentele la cerc care au direcția dată prin coeficientul unghiular m. Din ecuația dreptei rămîne să determinăm pe n. Însă ca ecuația în x, de gradul al II-lea, să aibă rădăcini confundate trebuie ca realizantul ei să fie nul, de unde se deduce

$$n=\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

Înlocuind pe n în ecuația dreptei găsim că se pot duce două tangente la cerc cu direcția dată de m, anume

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}. \tag{6}$$

Dacă ne interesează și *punctele de contact,* acestea știm că se află pe diametrul perpendicular pe direcția tangentei, deci de coeficient unghiular $\left(—\frac{1}{m}\right)$. Prin urmare punctele de contact se pot găsi intersectînd fiecare din cele două drepte (6) cu $y=—\frac{1}{m}x$, adică rezolvînd sistemele

$$y=—\frac{1}{m}x;\quad y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

O b s e r v a r e. Punctele de contact s-ar putea obține și altfel, de pildă: a) intersectînd cercul cu fiecare tangentă, ceea ce revine la a rezolva două sisteme de gradul al II-lea; b) intersectînd cercul cu perpendiculara pe direcția tangentei, deci $y=—\frac{1}{m}x$, ceea ce revine la a rezolva un sistem de gradul al II-lea cu rădăcini distincte.

Metoda pe care am dat-o în manual este mai simplă fiindcă reduce problema la sisteme de gradul I. În plus are avantajul că aflarea tangentelor și a punctelor de contact constituie probleme independente.

b) *Centrul cercului este* $\omega(a, b)$, deci ecuația cercului este

$$(x—a)^2+(y—b)^2—r^2=0. \tag{7}$$

Să mutăm axele, printr-o translație, cu originea în ω. Formulele sînt $x=a+x'$, $y=b+y'$ și ecuația cercului devine

$$x'^2+y'^2—r^2=0. \tag{7'}$$

Dreapta $y=mx+n$ prin translație nu-și schimbă direcția, prin urmare coeficientul unghiular m rămîne același. În aceste condiții tangentele la cercul (7'), cu direcția dată de m, sînt

$$y'=mx'\pm r\sqrt{1+m^2}. \tag{8}$$

Revenind la vechile axe avem $x'=x-a$, $y'=y-b$, deci tangentele la cercul (7) sînt

$$y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}. \qquad (8')$$

Punctele de contact se află intersectînd fiecare tangentă cu perpendiculara dusă din centrul cercului pe ea, adică rezolvînd sistemele:

$$y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2};\ y-b=-\frac{1}{m}(x-a). \qquad (9)$$

Din felul cum se scriu tangentele paralele cu o dreaptă dată se desprinde că este necesar să determinăm centrul și raza cercului.

Exemplu. *Să se scrie tangentele la cercul* $x^2+y^2-3x+6y+9=0$, *înclinate la* $60°$ *pe axa* Ox.

Centrul cercului este $\omega\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ și raza $r=\sqrt{\frac{9}{4}+9-9}=\frac{3}{2}$. Coeficientul unghiular al dreptei: $m=\sqrt{3}$. Ecuațiile tangentelor rezultă: $y+3=\sqrt{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\pm$ $\pm\frac{3}{2}\sqrt{1+3}$, deci separîndu-le avem

$$2\sqrt{3}x-2y-3\sqrt{3}=0 \quad \text{și} \quad 2\sqrt{3}x-2y-3(4+\sqrt{3})=0.$$

Punctele de contact se găsesc intersectînd fiecare tangentă cu $y+3=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{3}{2}\right)$. Se găsesc $T_1\left[\frac{3}{4}(2+\sqrt{3}), -\frac{15}{4}\right]$ și $T_2\left[\frac{3}{4}(2-\sqrt{3}), -\frac{9}{4}\right]$.

Notă. Ca exercițiu, elevii care doresc pot stabili ecuațiile tangentelor de direcție dată, pe cale vectorială. Pentru aceasta este necesar să ia un punct curent $M(x, y)$ pe tangentă, să scrie versorul $\overrightarrow{\mathcal{C}_0}$ al direcției normale la tangentă și să pună condiția $\overrightarrow{\omega M}\cdot\overrightarrow{\mathcal{C}_0}=r$.

3. *Tangentele la cerc, duse dintr-un punct exterior.* Fie cercul cu centrul în $\omega(a, b)$, de rază r și punctul exterior $A(x_0, y_0)$, din care vrem să ducem tangentele la cerc (fig. 62). Pentru aceasta scriem tangenta la cerc de direcție dată (m)

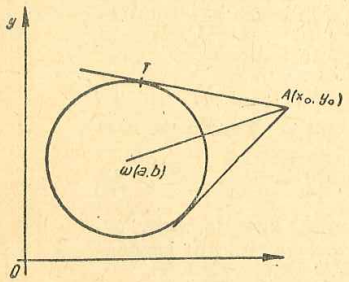


Fig. 62.

$$y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}$$

și impunînd condiția să treacă prin A, determinăm pe m. Prin urmare trebuie ca

$$y_0-b=m(x_0-a)\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

Separînd radicalul și ridicînd la pătrat, obținem ecuația de gradul al II-lea

$$[y_0-b-m(x_0-a)]^2=r^2(1+m^2) \qquad (10)$$

care, rezolvată, ne dă două rădăcini m_1 și m_2. Există deci două direcții pentru care tangentele la cerc trec prin A, adică din A se pot duce două tangente la cerc. Ecuațiile tangentelor se scriu ca drepte determinate de un punct (A) și de direcția respectivă, prin urmare

$$y-y_0=m_1(x-x_0) \text{ și } y-y_0=m_2(x-x_0). \qquad (11)$$

Exemplu. *Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul* $A(-13, -4)$ *la cercul* $x^2+y^2-4x-2y=0$.

Elementele cercului sînt centrul $\omega(2, 1)$ și raza $r^2=5$. Ecuația în m este

$$(-5+15m)^2=5(1+m^2) \quad \text{sau} \quad 22m^2-15m+2=0$$

care dă $m_1=\frac{1}{2}$ și $m_2=\frac{2}{11}$. Cele două tangente au, așadar, ecuațiile

$$y+4=\frac{1}{2}(x+13) \quad \text{și} \quad y+4=\frac{2}{11}(x+13)$$

sau, eliminînd numitorii

$$x-2y+5=0 \quad \text{și} \quad 2x-11y-18=0.$$

4. *Altă metodă* de a găsi tangentele duse dintr-un punct $A(x_0, y_0)$ la un cerc este de a scrie fasciculul dreptei cu vîrful în A

$$y-y_0=\lambda(x-x_0)$$

și de a determina pe λ așa fel ca dreapta să taie cercul în două puncte confundate. Prin urmare eliminînd pe y, ecuația care rezultă trebuie să aibă realizantul nul.

Metoda, care este mai directă decît prima, are dezavantajul că duce la calcule mai lungi.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

185. Să se scrie ecuația tangentei în punctul $(-3, 1)$ la cercul $x^2+y^2-10=0$.

[$3x-y+10=0$.]

186. Să se scrie ecuația tangentei în punctul $(-1, -2)$ la cercul $x^2+y^2-6x+3y-5=0$.

[$8x+y+10=0$.]

187. Să se scrie ecuațiile tangentelor la cercul

$$x^2+y^2-3x+y+2=0$$

în punctele de intersecție cu axa Ox.

[$x-y-1=0$; $x+y-2=0$.]

188. Se dă cercul $4(x^2+y^2)+8x-12y+9=0$ și punctul $A(-3, 2)$. Să se găsească ecuațiile tangentelor la cerc:

a) paralele cu dreapta $15x+8y-12=0$;

b) perpendiculare pe diametrul care trece prin A.

[a) $m=-\frac{15}{8}$; $15x+8y+20=0$; $15x+8y-14=0$; b) $m=4$; $8x-2y+11\pm2\sqrt{17}=0$.]

189. Se dă cercul $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

a) Să se arate că dreapta $12x-5y+19=0$ este tangentă la cerc și să se determine punctul de tangență.

b) Să se scrie ecuațiile laturilor pătratului circumscris cercului, în care una din laturi este pe dreapta de mai sus.

[a) $T\left(-\frac{21}{13}, -\frac{1}{13}\right)$; b) $5x+12y-56=0$, $5x+12y+74=0$, $12x-5y-111=0$.]

190. Un cerc cu raza de 3 unități este tangent unei drepte (Δ). Care este lungimea umbrei aruncate pe (Δ), dacă razele soarelui sînt înclinate la 150° pe (Δ)?

Generalizare pentru un cerc de rază r situat oricum față de (Δ), razele soarelui avînd o direcție dată.

[Se alege (Δ) ca Ox și perpendiculara din centrul cercului pe (Δ) ca Oy. Lungimea umbrei este de 12 unități. În general: $2r\frac{\sqrt{1+m^2}}{|m|}$.]

191. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din origine la cercul $x^2+y^2-4x+6y+1=0$ (C.d.p.)

[Ecuația în m: $8m^2-12m+3=0$. Tangentele: $y=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}x$.]

192. Să se găsească punctele de pe dreapta $x+2y-6=0$, de unde se pot duce tangente perpendiculare la cercul $x^2+y^2-4=0$ și să se scrie ecuațiile acestor tangente.

[Punctele se găsesc la intersecția dreptei cu cercul concentric cu cel dat și cu raza $2\sqrt{2}$. $A\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$, $B(2, 2)$. Tangentele din A: $3x-4y+10=0$ și $4x+3y-10=0$, cele din B paralele cu axele.]

193. Să se scrie ecuația cercului care trece prin origine și prin punctele $A(1, 0)$, $B(0, 2)$. Să se scrie apoi ecuațiile tangentelor în punctele O, A, B și să se verifice că aceste tangente întîlnesc laturile opuse ale triunghiului OAB în trei puncte coliniare.

[$x^2+y^2-x-2y=0$. Tangentele: $x+2y=0$, $x-2y-1=0$, $x-2y+4=0$. Punctele pe laturi: $M\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $N\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $P(-4,0)$.]

194. Fie AB diametrul unui cerc și (T), (T') tangentele în A și B. Tangenta dusă într-un punct variabil M întîlnește pe (T) și (T'), respectiv în P și Q. Să se demonstreze că:

1) $\overline{AP}\cdot\overline{BQ}=$ const. 2) Diametrii care trec prin P și Q sînt perpendiculari.

195. Un cerc de rază r se reazemă pe podea și pe un perete vertical; planul cercului este perpendicular pe ambele plane. Unde trebuie așezată o sursă luminoasă A pe podea, în planul cercului, astfel ca umbra aruncată de cerc pe perete să fie de două ori cît diametrul cercului?

[Intersecțiile planului cercului cu podeaua și peretele se iau ca axe Ox și Oy. Fie $A(\alpha, 0)$; se determină α astfel ca tangenta la cerc (diferită de Ox) să aibă ordonata la origine $4r$. Se găsește $\alpha=\overline{OA}=3r$.]

196. Se dă cercul $x^2+y^2-6y+8=0$. Să se găsească $M\in Ox$ din care ducînd tangentele la cerc, acestea să determine pe dreapta $y=6$ un segment de 6 unități.

[$M(\alpha, 0)$. Tangentele din M la cerc: $y=m_1(x-\alpha)$, $y=m_2(x-\alpha)$, m_1 și m_2 rădăcinile ecuației în m. Rezultă pentru $y=6$: $x_1=\frac{6}{m_1}+\alpha$, $x_2=\frac{6}{m_2}+\alpha$. Se scrie că $|x_2-x_1|=6$ etc.; $\alpha=\pm2\sqrt{2}$.]

197. Să se scrie ecuația tangentei la cercul $x^2+y^2-r^2=0$ în punctul $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ și să se compare cu ecuația normală a dreptei.

198. Se dau cercurile $x^2+y^2-4y+4=0$ și $x^2+y^2-14x-2y+49=0$. Să se determine tangentele comune exterioare.

[Ambele cercuri sînt tangente axei Ox. Se caută intersecția liniei centrelor cu Ox și se duce a doua tangentă la unul din cercuri; $y=0$ și $12y+5x-60=0$.]

199. Să se determine cercul care este tangent axei Ox și trece prin punctele $A(2, 3)$, $B(4, 1)$.

[Un cerc tangent axei Ox are ecuația $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2=0$. Se pune condiția să treacă prin A și B. Două cercuri cu centrele $(5+\sqrt{6}, 4+\sqrt{6})$ și $(5-\sqrt{6}, 4-\sqrt{6})$.]

CAPITOLUL **XIII**

PUTEREA PUNCTULUI FAȚĂ DE CERC

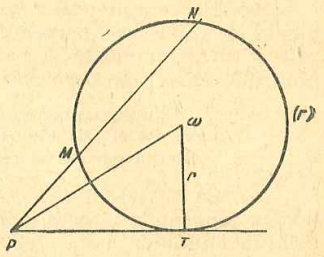


Fig. 63.

1. Definiții. Să considerăm un cerc (Γ) cu centrul ω și cu raza r, un punct P în planul cercului și o secantă dusă prin P, care taie cercul în punctele M și N (fig. 63).

Se știe (cl. a X-a) că produsul $p=\overline{PM}\cdot\overline{PN}$ este constant cînd secanta se rotește în jurul punctului P și acest produs poartă numele de *puterea punctului* P față de cercul (Γ).

Dacă punctul P este exterior cercului, atunci putem roti secanta în jurul lui P, pînă cînd devine tangentă la cerc, iar punctele M, N se confundă în punctul de tangență T. Expresia puterii punctului P este atunci

$$p=\overline{PT}^2=P\omega^2-r^2. \tag{1}$$

Relația (1) se menține și dacă punctul P este interior cercului, dar în acest caz p este *negativ*: tangentele din P la cerc sînt imaginare, adică nu se pot duce tangente la cerc. Reamintim că în acest caz puterea, în modul, este dată de pătratul *semicoardei* duse prin P, perpendiculară pe ωP. Dacă $P\in(\Gamma)$ puterea punctului este nulă.

2. *Expresia analitică a puterii punctului.* Presupunem figura 63 raportată la un sistem de axe dreptunghiulare xOy, oarecare și notăm $\omega(a, b)$, $P(x_0, y_0)$, iar raza cercului r. Ecuația cercului este

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0. \tag{2}$$

Puterea punctului se obține din (1) traducînd relația analitic, anume

$$p=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2. \tag{3}$$

De aici următoarea regulă simplă: *puterea unui punct P față de cercul (1) se obține înlocuind în ecuația cercului coordonatele curente prin coordonatele punctului P.*

Dacă cercul este dat prin ecuația normală, atunci puterea punctului față de cerc este

$$p=x_0^2+y_0^2+2mx_0+2ny_0+p, \tag{4}$$

deoarece ecuația normală nu este decît ecuația (1) dezvoltată. Dacă însă cercul este dat prin ecuația generală

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \tag{5}$$

atunci trebuie adus întîi la forma normală, prin împărțirea cu A și numai după aceea se aplică regula de calcul a puterii punctului. Prin urmare

$$p=x_0^2+y_0^2+\frac{B}{A}x_0+\frac{C}{A}y_0+\frac{D}{A} \quad \text{sau} \quad p=\frac{A(x_0^2+y_0^2)+Bx_0+Cy_0+D}{A}. \tag{6}$$

Se poate observa că există o analogie pronunțată între *distanța de la un punct la o dreaptă* și *puterea unui punct față de un cerc*, anume: a) și una și cealaltă se obțin din ecuația generală prin împărțirea cu o constantă; b) și una și cealaltă se obțin înlocuind coordonatele curente prin coordonatele punctului dat, după ce s-au adus ecuațiile respective la forma normală.

Această analogie îndreptățește numirea de *ecuație normală* a cercului în cazul cînd coeficienții lui x^2 și y^2 sînt 1 sau cînd sînt aduși să fie 1 prin împărțirea cu A.

Exemple. a) *Puterea punctului* $P(1, -1)$ *față de cercul* $x^2+y^2+2x=0$ este $p=4$. *Punctul este exterior cercului și tangentele din P la cerc au lungimea* $\overline{PT}=2$.

b) *Puterea punctului* $P(2, -2)$ *față de cercul* $2(x^2+y^2)-9x+2=0$ este $p=\dfrac{2(4+4)-9\cdot 2+2}{2}=0$. *Punctul se află pe cerc.*

c) *Puterea punctului* $M(2, 1)$ *față de cercul* $x^2+y^2-9=0$ este $p=-4$, *deci M este interior cercului.*

3. Aplicații. I. *Locul geometric al punctelor care au aceeași putere față de un cerc este un alt cerc concentric cu cel dat.*

În adevăr fie cercul dat prin centrul $\omega(a, b)$ și raza r. Puterea punctului $M(x_0, y_0)$ este $p=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2$. Dacă $p=$const., atunci legătura în x_0 și y_0 este $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-(r^2+p)=0$ sau trecînd la coordonate curente (x, y)

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(r^2+p)=0.$$

Locul geometric este deci un cerc cu același centru, dar cu raza $\sqrt{r^2+p}$.

II. *Cercuri ortogonale.* Dacă două curbe oarecare (C) și (C') se taie astfel că în punctul comun tangentele lor sînt perpendiculare, curbele se numesc *ortogonale în acel punct.*

Să considerăm acum două cercuri care se taie în A și B (fig. 64): unul cu centrul ω, altul cu centrul ω'. Dacă cele două cercuri sînt ortogonale, atunci $\omega' A\perp\omega A$. Deci pentru ca două cercuri să fie ortogonale trebuie ca ducînd tangentele din centrul unuia din ele la celălalt, lungimea tangentei să fie egală cu raza lui. Altfel spus, puterea centrului unui cerc, față de al doilea, trebuie să fie dată de pătratul razei lui.

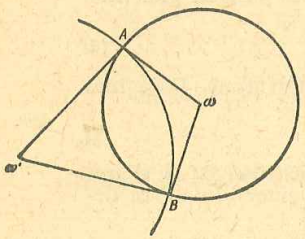


Fig. 64.

De această observare ne vom servi ca să găsim condiția analitică pentru ca două cercuri să fie ortogonale. Fie

$$(\omega) \qquad x^2+y^2+2mx+2ny+p=0$$
$$\text{și } (\omega') \qquad x^2+y^2+2m'x+2n'y+p'=0$$

ecuațiile celor două cercuri. Primul cerc are centrul $\omega(-m, -n)$ și raza $r^2=m^2+n^2-p$. Scriind că puterea centrului este egală cu pătratul razei obținem

$$m^2+n^2-2m'm-2n'n+p'=m^2+n^2-p$$
sau
$$2mm'+2nn'=p+p'. \qquad (7)$$

Exemplu. *Să se determine cercul cu centrul pe dreapta $x=3$ și cu raza de 3 unități, ortogonal cercului $x^2+y^2-4x=0$.*

Elementele cercului căutat sînt: centrul $(3, \lambda)$ și raza $r=3$. Puterea centrului față de cercul dat trebuie să fie $r^2=9$, deci $9+\lambda^2-12=9$, de unde $\lambda=\pm 2\sqrt{3}$. Problema are două soluții; acestea sînt cercurile

$$(x-3)^2+(y\pm 2\sqrt{3})^2-9=0.$$

Observare. Condiția (7) ca două cercuri să fie ortogonale se poate obține și din triunghiul dreptunghic $\omega A\omega'$, scriind că $\omega\omega'^2=r^2+r'^2$ și transformînd relația geometrică în relație analitică.

4. *Axa radicală a două cercuri.* Ne propunem să găsim locul geometric al punctelor care au aceeași putere față de două cercuri date. Problema a fost tratată geometric în cl. a IX-a. O reluăm acum sub aspectul ei analitic.

Ecuațiile celor două cercuri sînt, sub formă normală:

$$x^2+y^2+2mx+2ny+p=0 \qquad (\omega)$$
$$x^2+y^2+2m'x+2n'y+p'=0. \qquad (\omega')$$

Relația geometrică dată de enunț este

$$\rho=\rho' \qquad (8)$$

unde ρ și ρ' sînt puterile unui punct $M(x_0, y_0)$ față de cele două cercuri (fig. 65). După cum știm locul geometric se capătă transformînd relația geometrică în relație analitică, deci

$$x_0^2+y_0^2+2mx_0+2ny_0+p=x_0^2+y_0^2+$$
$$+2m'x_0+2n'y_0+p'.$$

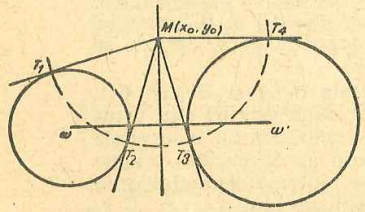


Fig. 65.

Deoarece x_0, y_0 sînt coordonate curente putem șterge indicii și trecînd toți termenii în prima parte obținem

$$2(m-m')x+2(n-n')y+p-p'=0 \qquad (9)$$

care este locul geometric căutat.

Ecuația (9) fiind de gradul I reprezintă o dreaptă; aceasta poartă numele de *axă radicală* a celor două cercuri. Așadar, *locul geometric al punctelor care au aceeași putere față de două cercuri date este o dreaptă care se numește axa radicală a celor două cercuri.*

Dacă privim ecuațiile celor două cercuri (ω) și (ω') și ecuația (9) a axei radicale se observă că ecuația axei radicale se obține direct din ecuațiile cercurilor prin scăderea lor.

Dacă însă ecuațiile cercurilor se prezintă sub formă generală ($A\neq 1$), atunci trebuie aduse întîi la forma normală și numai după aceea prin scădere se obține axa radicală. Aceasta fiindcă relația (8) cere ca fiecare cerc să fie adus la forma normală.

Proprietățile axei radicale. a) Deoarece orice punct M al axei radicale are puteri egale față de cele două cercuri, rezultă că dacă M este exterior cercurilor, *tangentele duse din M la cercurile date sînt egale* (fig. 65).

b) Notînd cu T_1, T_2, T_3, T_4 punctele de tangență avem $\overline{MT}_1=\overline{MT}_2=\overline{MT}_3=\overline{MT}_4$, deci cercul cu centrul M și raza $\overline{MT}_1$ trece prin celelalte puncte de contact. Este ușor de observat că acest cerc este ortogonal ambelor cercuri date (ω), (ω'). Se poate spune atunci că *axa radicală a două cercuri este locul geometric al centrelor cercurilor ortogonale cu două cercuri date.* (O discuție va urma după proprietăți.)

c) Centrele cercurilor date avînd coordonatele $\omega(-m, -n)$, $\omega'(-m', -n')$, linia centrelor are coeficientul unghiular

$$\mu=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{n-n'}{m-m'}.$$

Din ecuația (9) rezultă coeficientul unghiular al axei radicale

$$\mu'=-\frac{m-m'}{n-n'}=-\frac{1}{\mu},$$

de unde se deduce că *axa radicală este perpendiculară pe linia centrelor.*

Prin urmare este suficient să cunoaștem un singur punct al axei radicale și construcția rezultă ducînd din acel punct perpendiculara pe linia centrelor.

5. Discuție. Consecințe. *Dacă cercurile date sînt tangente în A axa radicală este tangenta comună.* În adevăr A aparține axei radicale, deoarece are *puterea nulă* față de ambele cercuri (puteri egale), iar tangenta comună în A este perpendiculară pe linia centrelor.

În acest caz, locul geometric al centrelor cercurilor ortogonale cu cercurile date este format din axa radicală, *fără punctul A.*

Dacă cercurile date sînt secante în A și B, atunci A și B au puteri nule față de cele două cercuri, deci axa radicală este secanta comună AB.

Punctele situate pe coarda $\overline{AB}$ sînt interioare ambelor cercuri, deci din aceste puncte nu se pot duce tangente la cele două cercuri. Rezultă că locul centrelor cercurilor ortogonale la două cercuri secante este format din axa radicală din care se scoate segmentul închis $\overline{AB}$.

Consecințe: a) Ecuația secantei comune (cercuri secante) sau a tangentei comune (cercuri tangente) se obține prin simpla scădere a ecuațiilor celor două cercuri.

b) Punctele de intersecție a două cercuri se obțin intersectînd unul din cercuri cu axa lor radicală.

6. *Centrul radical a trei cercuri.* Trei cercuri luate două cîte două au trei axe radicale care sînt concurente. Punctul lor comun se numește *centrul radical al celor trei cercuri.* Pentru a demonstra analitic această proprietate considerăm cercurile care au ca ecuații

$$(\omega_i) \qquad x^2+y^2+2m_ix+2n_iy+p_i=0 \ (i=1,\ 2,\ 3)$$

Axele radicale a cîte două cercuri sînt

$$2(m_1-m_2)x+2(n_1-n_2)y+p_1-p_2=0$$
$$2(m_2-m_3)x+2(n_2-n_3)y+p_2-p_3=0$$
$$2(m_3-m_1)x+2(n_3-n_1)y+p_3-p_1=0.$$

Se observă imediat că aceste trei drepte sînt concurente, deoarece adunînd pe primele două, obținem pe a treia. Se poate dovedi același lucru punînd condiția de concurență sub formă de determinant. Dacă se adună toate liniile la prima se obține ca rezultat zero. În adevăr

$$\begin{vmatrix} 2(m_1-m_2) & 2(n_1-n_2) & p_1-p_2 \\ 2(m_2-m_3) & 2(n_2-n_3) & p_2-p_3 \\ 2(m_3-m_1) & 2(n_3-n_1) & p_3-p_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2(m_2-m_3) & 2(n_2-n_3) & p_2-p_3 \\ 2(m_3-m_1) & 2(n_3-n_1) & p_3-p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Coordonatele centrului radical se obțin ca intersecție a două axe radicale. Centrul radical are *puteri egale* față de cele trei cercuri fiindcă aparține fiecărei axe radicale. Prin urmare dacă el este exterior cercurilor, atunci se pot duce *șase tangente egale* la cele trei cercuri și centrul radical este centrul unui *cerc ortogonal* deodată la cele trei cercuri. Dacă centrul radical este interior cercurilor, atunci nu se pot duce tangente la cele trei cercuri și nici nu există cerc ortogonal față de ele.

În cazul cînd există cerc ortogonal, ecuația lui se scrie imediat, deoarece cunoaștem centrul (centrul radical), iar pătratul razei este puterea centrului radical față de oricare din cele trei cercuri; desigur că vom alege pe cel care are ecuația cea mai simplă.

Exemple. a) *Să se scrie ecuația cercului ortogonal cercurilor* $x^2+y^2-6x++5=0$; $x^2+y^2-8y-31=0$; $x^2+y^2+4x+5y=0$.

Scădem prima ecuație din cele următoare și obținem două axe radicale: $3x-4y-18=0$ și $2x+y-1=0$, care dau centrul radical $\omega(2,-3)$. Puterea centrului radical față de oricare cerc dă pătratul razei, de exemplu față de primul cerc: $r^2=4+9-12+5=6$.

Ecuația cercului ortogonal este

$$(x-2)^2+(y+3)^2-6=0 \quad \text{sau} \quad x^2+y^2-4x+6y+7=0.$$

b) *Să se cerceteze dacă cercurile* $x^2+y^2-x-y=0$; $x^2+y^2-4x+y+1=0$; $x^2+y^2++6x-5y-3=0$ *admit un cerc ortogonal.*

Scăzînd prima ecuație din celelalte două obținem axele radicale $3x-2y-1=0$ și $7x-4y-3=0$ care dau centrul radical $\omega(1,1)$. Dar ω are puterea *nulă* față de cercurile date, deci cele trei cercuri au un punct comun. Cercul ortogonal se reduce la un punct, deci nu există.

c) *Aceeași problemă pentru cercurile* $x^2+y^2-5x-5=0$; $x^2+y^2-3y-6=0$; $x^2+y^2+x-y-10=0$.

Se obține $\omega(2,3)$ și $r^2=-2$, deci ω este interior cercurilor. Nu există cerc ortogonal.

7. *Punctele de intersecție a două cercuri* se găsesc, așa cum am arătat la § 5, intersectînd unul din cercuri cu axa lor radicală. Este de ajuns să dăm un exemplu: să căutăm punctele comune cercurilor

$$2(x^2+y^2)-5x+10y+10=0;\ 3(x^2+y^2)+2x-4y-23=0.$$

Scriem cercurile sub formele

$$x^2+y^2-\frac{5}{2}x+5y+5=0;\ x^2+y^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y-\frac{23}{3}=0,$$

de unde axa radicală $x-2y-4=0$.

Se scoate din ecuația axei radicale $x=2y+4$, care dus în oricare din cercuri dă: $5y^2+16y+11=0$, cu rădăcinile $y_1=-1$; $y_2=-\frac{11}{5}$, la care corespund $x_1=2$ și $x_2=-\frac{2}{5}$.

Punctele de intersecție ale cercurilor sînt $(2,-1)$ și $\left(-\frac{2}{5},-\frac{11}{5}\right)$.

8. *Fascicule de cercuri.* I. Fiind date două cercuri

$(C)=x^2+y^2+2mx+2ny+p=0$; $(C')=x^2+y^2+2m'x+2n'y+p'=0$,

ecuația

$$(C)+\lambda(C')=0 \qquad (10)$$

reprezintă de asemenea un cerc ($\lambda\neq-1$); aceasta se observă scriind ecuația (10) dezvoltat

$$(1+\lambda)(x^2+y^2)+2(m+\lambda m')x+2(n+\lambda n')y+p+\lambda p'=0. \qquad (10')$$

Cercul (10) sau (10′) este variabil din cauza parametrului λ, deci cînd λ variază avem o mulțime de cercuri. Toate cercurile acestei mulțimi trec însă prin punctele de intersecție ale cercurilor $(C)=0$ și $(C')=0$, deoarece acestea verificînd ambele ecuații, verifică și pe (10). Aceste puncte pot fi reale, confundate sau imaginare, dar totdeauna ele determină axa radicală.

Se zice că (10) sau (10′) reprezintă un *fascicul de cercuri* determinat de *cercurile de bază* $(C)=0$ și $(C')=0$. Din cele spuse mai înainte rezultă că *cercurile unui fascicul* au aceeași axă radicală.

Se poate demonstra, ca și la fasciculele de drepte, că (10) reprezintă toate cercurile din plan care trec prin intersecția cercurilor $(C)=0$, $(C')=0$. Determinarea unui cerc al fasciculului se obține impunînd condiția ca cercul (10) să treacă printr-un punct $M_0(x_0,\ y_0)$, de unde rezultă $\lambda=-\frac{(C_0)}{(C'_0)}$, care este perfect determinat dacă M_0 nu aparține nici unuia din

cercurile de bază. Deci *printr-un punct oarecare al planului trece un singur cerc al fasciculului.* Axa radicală se poate considera și ea un cerc degenerat al fasciculului ($\lambda=-1$).

II. Un fascicul de cercuri poate avea ca elemente de bază un cerc și o dreaptă:

$$(C)=x^2+y^2+2mx+2ny+p=0;\ (D)=Ax+By+C=0.$$

Ecuația fasciculului este

$$(C)+\lambda(D)=0 \qquad (11)$$

care reprezintă evident un cerc, variabil cu λ. De fapt $(D)=0$ reprezintă axa radicală a două cercuri oarecare ale fasciculului.

Proprietățile sînt aceleași ca la fasciculele de cercuri.

Aplicație *Se dă un cerc și un punct fix A în planul cercului. O dreaptă (Δ) taie cercul în M și N. Să se arate că atunci cînd (Δ) se deplasează paralel cu ea însăși, cercul MAN trece prin al doilea punct fix, diferit de A.*

Alegem axele astfel: originea în centrul cercului și Ox paralelă cu (Δ). Punctul A are cordonatele (x_0, y_0). Ecuația cercului este $x^2+y^2-r^2=0$ și a dreptei (Δ) $y-\lambda=0$. Toate cercurile care trec prin M și N aparțin fasciculului

$$x^2+y^2-r^2+k(y-\lambda)=0.$$

Ca să treacă prin A trebuie să avem $x_0^2+y_0^2-r^2+k(y_0-\lambda)=0$, deci $k=-\dfrac{x_0^2+y_0^2-r^2}{y_0-\lambda}$.

Înlocuind pe k obținem ecuația cercului AMN: $(y_0-\lambda)(x^2+y^2-r^2)-(x_0^2+y_0^2-r^2)(y-\lambda)=0$ sau $y_0(x^2+y^2-r^2)-(x_0^2+y_0^2-r^2)y-\lambda(x^2+y^2-x_0^2-y_0^2)=0$.

Am obținut un fascicul de cercuri cu punctele fixe date de cercurile $y_0(x^2+y^2-r^2)-(x_0^2+y_0^2-r^2)y=0$ și $x^2+y^2-(x_0^2+y_0^2)=0$.

Înlocuind $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$ și simplificînd cu $x_0^2+y_0^2-r^2\neq 0$ se obține $y=y_0$, de unde $x=\pm x_0$.

Punctele fixe sînt $A(x_0, y_0)$ și $A'(-x_0, y_0)$ simetrice față de Oy, ceea ce apare evident geometric.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

200. Să se afle puterea punctului $A(2, 3)$ față de cercul $3(x^2+y^2)-6x+8y-3=0$.

[$\rho=16$.]

201. Se cere locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente cu lungimea de 6 unități la cercul $x^2+y^2-8x+6=0$.

[$\rho=36$; $x^2+y^2-8x-30=0$.]

202. Să se determine pe dreapta $3x-y+4=0$ punctele din care se pot duce tangente de 4 unități lungime la cercul $x^2+y^2-6x+2y=0$.

[Intersecțiile dreptei cu cercul ale cărui puncte au puterea $\rho=16$ față de cercul dat. $M(-2, -2)$ și $N\left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$.]

203. Să se găsească punctele care care au puterea ρ_1 față de cercul $(C_1)=0$ și ρ_2 față de cercul $(C_2)=0$, unde s-a notat cu (C_1) și (C_2) primele părți din ecuațiile cercurilor. Discuție.

Aplicație numerică: $(C_1)=x^2+y^2-4=0$; $(C_2)=x^2+y^2-7x-14y+20=0$; $\rho_1=9$; $\rho_2=-16$.

[Aplicația: $M(3, 2)$, $N\left(-\frac{1}{5}, \frac{18}{5}\right)$.]

204. Să se scrie ecuația unui cerc ortogonal cercurilor $x^2+y^2-1=0$ și $x^2+y^2-12x+23=0$, care să aibă raza de două unități.

[Centrul trebuie să fie pe axa radicală, deci $C(2, \lambda)$. Puterea față de cercuri: $\rho=r^2=4$. Rezultă $\lambda=\pm 1$.]

205. Să se scrie ecuațiile a două cercuri luînd ca axă Ox linia centrelor și ca axă Oy, axa lor radicală.

[Trebuie ca $m\neq m'$; $n=n'$ și $p=p'$.]

206. Se dau cercurile $x^2+y^2+10x+6=0$ și $x^2+y^2-8x+6=0$ și dreapta $4x+3y-10=0$. Să se determine punctul M astfel ca tangentele duse la cercurile date să fie egale între ele și egale cu distanța de la M la dreapta dată.

[Oy este axa radicală, deci $M(0, \lambda)$. Două soluții $M\left(0, -\frac{5}{2}\right)$; $M'\left(0, -\frac{5}{4}\right)$.]

207. Se dau cercurile de ecuații

$$x^2+y^2+4x+4y+4=0;\ x^2+y^2-6x+5=0;\ x^2+y^2-42x-10y+24=0.$$

a) Să se afle centrul lor radical. b) Să se scrie ecuația cercului ortogonal celor trei cercuri.

[a) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$; b) $x^2+y^2-3x+7y+4=0$.]

208. Se cere punctul egal depărtat de punctele $A(4, 6)$, $B(8, 4)$ care are aceeași putere față de cercurile $x^2+y^2-6x+4y+9=0$ și $x^2+y^2-8y+7=0$.

Să se trateze cazul general cînd se dau două puncte A, B și două cercuri (C_1) și (C_2).

[$M\left(\frac{41}{9}, \frac{19}{9}\right)$. În cazul general are mare importanță alegerea axelor.]

209. Să se afle punctele de intersecție ale cercurilor

$$x^2+y^2-4x+2y-9=0;\ 4(x^2+y^2)-10x+11y-12=0.$$

[Cercurile sînt interioare.]

210. Aceeași problemă pentru cercurile

$$5(x^2+y^2)-20x+10y-96=0;\ 5(x^2+y^2)-4x+18y-32=0.$$

[Cercurile sînt tangente în $T\left(-\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}\right)$.]

211. Aceeași problemă pentru cercurile:

$$x^2+y^2-3x+9y-20=0;\quad 2(x^2+y^2)-5x+22y-49=0.$$

[Axa radială $x+4y-9=0$. Punctele comune: $A(1, 2)$; $B(5, 1)$.]

212. Să se scrie ecuația cercului care trece prin punctul $A(2, 1)$ și are aceeași axă radicală ca și cercurile din problema precedentă.

[Se scrie ecuația fasciculului de cercuri cu cercurile de bază date și se alege cel care trece prin A. Se găsește $x^2+y^2-7x-7y+16=0$.]

213. Se dă cercul $x^2+y^2-2x-6y+6=0$, dreapta $2x+5y-10=0$ și punctul $A(4, 6)$. Să se determine cercul care trece prin A și are dreapta dată ca axă radicală cu cercul dat.

[Se scrie fasciculul determinat de cercul dat și dreapta dată. $2(x^2+y^2)-6x-17y+22=0$.]

CAPITOLUL XIV

LOCURI GEOMETRICE

1. Nu este cazul să repetăm cele ce am spus despre locurile geometrice la capitolul X. Acolo locurile geometrice erau numai linii drepte, aici vor putea fi și cercuri. Avînd însă cunoștință și despre ecuația cercului, care este de gradul al II-lea, putem aduce completările care urmează.

Găsirea locurilor geometrice cu ajutorul geometriei elementare se rezumă la un cadru destul de restrîns, anume la acele curbe care pot fi ușor recunoscute: linie dreaptă, cercul, parabola etc.

Geometria analitică este aceea care a pus ordine în chestiunea locurilor geometrice, și anume sub două aspecte:

a) Orice problemă de loc geometric tratată pe cale analitică ne duce la un rezultat, adică la o ecuație (care eventual se poate descompune) și aceasta reprezintă una sau mai multe curbe.

b) Gradul ecuației curbei-loc geometric ne arată gradul de dificultate a problemei: dacă ecuația este de gradul I, locul este o dreaptă, dacă ecuația este de gradul al II-lea, curba este o conică (caz particular cerc); dacă însă curba este de grad mai mare, atunci se face reprezentarea grafică folosind metodele analizei matematice.

Mai trebuie precizat un lucru: uneori locul geometric este limitat, deși din punct de vedere analitic obținem o ecuație care reprezintă o curbă întreagă. Limitarea se obține fie prin considerații geometrice, fie analitice.

Faptul că din punct de vedere analitic se obține curba întreagă se explică prin aceea că în geometria analitică intră în joc și elementele imaginare. De pildă dacă o dreaptă este exterioară unui cerc, punctele de intersecție sînt imaginare, dar mijlocul segmentului este un punct real.

Considerăm necesare cîteva exemple.

2. *Locuri rezultate din relații geometrice.* 1) *Fiind date două puncte fixe A, B, să se afle locul geometric al punctului M* care satisface relația

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=k^2 \text{ (const.)}.$$

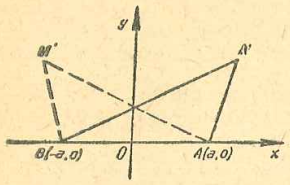


Fig. 66.

Se ia în mod firesc AB ca axă Ox. Axa Oy va fi mediatoarea segmentului $\overline{AB}$. Motivarea este că dacă luăm două puncte M, M' simetrice față de mediatoare, avem evident $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=\overline{M'A}^2+\overline{M'B}^2=k^2$ și mediatoarea este axă de simetrie a locului (fig. 66). Coordonatele punctelor sînt deci

$$A(a, 0),\quad B(-a, 0),\quad M(x, y).$$

Relația geometrică, scrisă analitic, devine

$$(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2=k^2$$

sau

$$x^2+y^2=\frac{k^2}{2}-a^2.$$

Locul este un cerc real dacă $\frac{k^2}{2}-a^2>0$. Pentru $k=2a=\overline{AB}$ locul este cercul cu diametrul $\overline{AB}$.

Dacă un punct M aparține locului, atunci raza cercului este $\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}=$ =const. Se deduce de aici:

Dacă o latură a unui triunghi este fixă, iar suma pătratelor celorlalte două constantă, vîrful mobil al triunghiului descrie cercul cu centrul în mijlocul laturii fixe, avînd mediana ca rază.

Iată și o soluție *vectorială*. Scriem relațiile vectoriale evidente $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}$ și $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$, le ridicăm la pătrat și le adunăm. Avem

$$\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}^2=4\overrightarrow{MO}^2;\quad \overrightarrow{MB}^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{AB}^2=4a^2.$$

Prin adunare produsele scalare se reduc și ținînd seama că $\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{MA}^2$, rezultă $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2(\overline{MO}^2+a^2)=k^2$, de unde $\overline{MO}^2=\frac{k^2}{2}-a^2=$const. Locul este cercul de rază $\overline{OM}$.

2) *Să se afle locul geometric al punctului M care are puterile față de două cercuri date într-un raport constant.*

Relația geometrică este $\frac{\rho}{\rho'}=k$ sau $\rho=k\rho'$. Alegem ca axe de coordonate linia centrelor cercurilor date (Ox) și axa lor radicală (Oy). În acest caz avem $n=n'=0$ și $p=p'$, deoarece originea are puteri egale față de cele două cercuri. Cercurile au deci ecuațiile

$$x^2+y^2+2mx+p=0 \quad \text{și} \quad x^2+y^2+2m'x+p=0. \tag{1}$$

Dacă $M(x_0, y_0)$ este punctul al cărui loc geometric se cere, relația geometrică se transformă astfel în relație analitică:

$$x_0^2+y_0^2+2mx_0+p=k(x_0^2+y_0^2+2m'x_0+p). \tag{2}$$

Trecînd totul într-o parte, împărțind cu $1-k\neq 0$ (pentru $k=1$ se obține axa radicală) și ștergînd indicii se obține ecuația locului

$$x^2+y^2+2\frac{m-km'}{1-k}x+p=0 \tag{3}$$

care este un cerc aparținînd fasciculului determinat de cercurile date [se vede din (2)]. Dacă C și C' sînt centrele cercurilor date, ecuația (3) arată că centrul locului este punctul care împarte segmentul $\overline{CC'}$ în raportul k.

Observare. Dacă se modifică enunțul și se cere ca *tangentele din M la cele două cercuri* să aibă raportul constant, atunci în cazul cercurilor secante în A și B trebuie scos din locul geometric *arcul de cerc* cuprins între A și B, deoarece din punctele acestui arc, interioare cercurilor date, nu se pot duce tangente.

3. *Locuri rezultate din intersecții.* Vom da exemple de locuri geometrice care rezultă din intersecții de curbe depinzînd:

a) de un parametru; b) de doi parametri cu o relație de legătură; c) de doi parametri independenți.

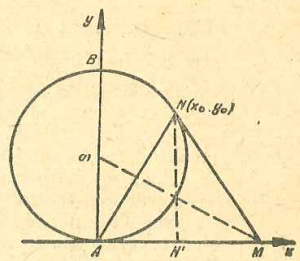


Fig. 67.

1) *Se consideră o dreaptă (Δ) și un cerc de rază variabilă, tangent dreptei (Δ) într-un punct fix A. Să se afle locul punctelor de intersecție ale cercului cu un diametru al său care are o direcție dată, fixă.*

Alegem pe (Δ) ca axă Ox și perpendiculara în A ca Oy, apoi notăm cu λ raza cercului și k coeficientul unghiular al direcției date. Centrul cercului fiind $C(0, \lambda)$, ecuația se scrie imediat

$$x^2+y^2-2\lambda y=0 \tag{4}$$

Diametrul cercului, cu direcția dată de k are ecuația

$$y-\lambda=kx. \tag{5}$$

Eliminarea parametrului λ se face simplu scoțîndu-l din (5) și înlocuind în (4). Se obține

$$x^2-y^2+2kxy=0 \quad \text{sau} \quad y^2-2kxy-x^2=0 \tag{6}$$

ecuație omogenă de gradul al II-lea care se rezolvă ca ecuație în y și ne dă două drepte ce trec prin A:

$$y=(k+\sqrt{k^2+1})x \quad \text{și} \quad y=(k-\sqrt{k^2+1})x.$$

Dreptele sînt perpendiculare, deoarece produsul coeficienților unghiulari este $mm'=(k+\sqrt{k^2+1})(k-\sqrt{k^2+1})=-1$.

Diametrul cercului și cercul se taie în două puncte M, N. Una din cele două drepte reprezintă locul lui M, cealaltă locul lui N, deci una este AM și cealaltă AN. Se observă și geometric că $\sphericalangle MAN=90^\circ$.

2) *Pe tangența dusă într-un punct fix A al cercului (C) se ia un punct mobil M. Se duce din M a doua tangentă la cerc punctul de contact fiind N. Se cere locul geometric al ortocentrului (punctul de întîlnire al înălțimilor) triunghiului AMN*, cînd M descrie tangenta în A.

Metoda I. *Folosim doi parametri.* Alegem tangenta în A ca axă Ox și A ca origine (fig. 67). Centrul cercului este $\omega(0, r)$, iar ecuația cercului

$$x^2+y^2-2ry=0. \tag{7}$$

Tangenta în $N(x_0, y_0)\in(\omega)$ are ecuația

$$xx_0+yy_0-r(y+y_0)=0$$

cu condiția

$$x_0^2+y_0^2-2ry_0=0. \tag{8}$$

Tangenta taie axa Ox în $M\left(\frac{ry_0}{x_0}, 0\right)$. În triunghiul AMN ne trebuie numai două înălțimi și le alegem astfel: $NN'\parallel Oy$ și $M\omega$ a cărei ecuație se scrie prin tăieturi. Ecuațiile sînt

$$(NN')\quad x=x_0;\qquad (M\omega)\quad \frac{x_0x}{ry_0}+\frac{y}{r}-1=0.$$

Adăugînd relaţia de condiţie (8) avem de eliminat parametrii x_0, y_0 între trei ecuaţii. Din prima ecuaţie rezultă $x_0=x$, care dus în a doua dă $y_0=-\frac{x^2}{y-r}$. Acestea duse în relaţia de condiţie (8) ne dau locul geometric

$$x^2+\frac{x^4}{(y-r)^2}+2r\frac{x^2}{y-r}=0 \text{ sau } x^2(x^2+y^2-r^2)=0.$$

Locul geometric se descompune în $x=0$ (diametrul $A\omega$) şi cercul $x^2+y^2=r^2$, cu centrul în A şi raza r, care este *locul veritabil.*

Diametrul $A\omega$ rezultă din nedeterminarea punctului de intersecţie, anume cînd $M\to\infty$ tangentele în A şi N devin paralele ($N\equiv B$). Două din înălţimi sînt AB şi BA care se confundă şi această dreaptă apare în ecuaţia locului (cap. X, § 3 exemplul 3).

Metoda a II-a. Problema se poate trata folosind un singur parametru, abscisa α a punctului M, deci $M(\alpha, 0)$. Ecuaţia în m a tangentelor duse din M la cerc este

$$(r+m\alpha)^2=r^2(1+m^2)$$

care dă $m_1=0$ şi $m_2=\frac{2r\alpha}{r^2-\alpha^2}$; prima este axa Ox, ceea ce ştiam. Ecuaţia tangentei MN se scrie ca dreaptă care trece prin M are coeficientul unghiular m_2 şi se găseşte $2r\alpha x+(\alpha^2-r^2)y-2r\alpha^2=0$. Aici vom folosi înălţimea care pleacă din A; fiind perpendiculară pe MN are ecuaţia

$$y=\frac{\alpha^2-r^2}{2r\alpha}x.$$

A doua înălţime este $M\omega$, de ecuaţie

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{r}-1=0.$$

Parametrul α se elimină între aceste două ecuaţii. Din a doua rezultă $\alpha=-\frac{rx}{y-r}$, care dus în prima ecuaţie dă acelaşi loc geometric compus din $A\omega$ (datorit nedeterminării) şi cercul, locul propriu-zis.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

214. Să se afle locul geometric al punctelor M care satisfac relaţia

$$\alpha\overline{MA}^2+\beta\overline{MB}^2=k^2.$$

A, B fiind două puncte fixe, iar α, β, k nişte coeficienţi constanţi.

[Cerc.]

215. Să se afle locul punctelor care satisfac relaţia

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=k^2 \text{ (const.)},$$

A, B, C fiind trei puncte fixe. Generalizare în cazul a n puncte fixe.

[Cerc cu centrul în centrul de greutate al triunghiului ABC. Se va considera şi cazul cînd A, B, C sînt coliniare.]

216. Se dă o dreaptă şi un punct fix O, exterior dreptei. Dacă P este mobil pe dreapta dată şi $M\in OP$ astfel că $\overline{OM}\cdot\overline{OP}=k$, să se afle locul punctului M.

[Originea în O. Un cerc care trece prin O.]

217. Fiind date două cercuri, să se găsească locul centrelor cercurilor care au cu cercurile date două axe radicale perpendiculare.

[Cercul descris pe distanţa centrelor ca diametru.]

218. Locul punctelor care au raportul distanţelor la două puncte fixe constant.

[Un cerc. Cînd constanta este 1, cercul devine mediatoarea segmentului.]

219. Locul centrelor cercurilor care trec printr-un punct fix A şi sînt ortogonale unui cerc dat (C).

[M centrul cercului variabil. Relaţia geometrică este $\overline{MA}^2=\rho$. Locul este o perpendiculară pe diametrul ce trece prin A. Problema se poate privi şi astfel: locul este axa radicală a cercului (C) şi cercul de rază nulă A, deci o perpendiculară pe linia centrelor.]

220. Se dă un triunghi isoscel şi se cere locul punctelor care au produsul distanţelor la laturile egale, egal cu pătratul distanţei pînă la bază.

[Se ia baza ca Ox şi mediatoarea ei ca Oy. Locul este cercul tangent laturilor egale, la extremităţile bazei.]

221. Să se afle locul geometric al punctelor care au suma puterilor faţă de două cercuri egală cu suma puterilor faţă de alte două cercuri. Generalizare.

[Locul este o dreaptă.]

222. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor

$$x=2+\cos\alpha;\ y=-1-\sin\alpha.$$

[Cercul $(x-2)^2+(y+1)^2=1$.]

223. Să se afle locul piciorului perpendicularei duse din punctul $A(1, 5)$ pe o dreaptă care trece prin punctul $B(5, 3)$.

[Cercul cu diametrul AB.]

224. Extremităţile unui segment de lungime constantă alunecă pe două drepte perpendiculare. Se cere locul mijlocului segmentului.

[Un cerc cu centrul în origine.]

225. Se cere locul punctului care împarte într-un raport dat k segmentul ce uneşte un punct M de pe cercul (C), cu punctul fix A. Caz particular $k=-1$.

[Cerc.]

± 226. Fiind dat un cerc, se cere locul mijloacelor coardelor ce trec printr-un punct fix.

[ω centrul cercului și A punctul fix. Dacă A este interior cercului, locul este cercul cu diametrul $\overline{A\omega}$. Se vor discuta celelalte cazuri.]

± 227. O dreaptă variabilă (Δ) care trece prin punctul fix A taie axa Ox în M. Se ia pe Oy punctul N, astfel ca $\overline{ON}=\overline{OM}$. Se cere locul intersecției dreptei (Δ) cu perpendiculara dusă din N pe ea.

[A(a, b). Locul este $x^2+y^2-(a-b)x-(a+b)y=0$.]

± 228. La capetele segmentului $\overline{AB}=2a$ se ridică perpendicularele AU și BV. O dreaptă ce trece prin A taie pe BV în N, iar alta care trece prin B taie pe AU în M. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor AN și BM, știind că $\overline{AM}\cdot\overline{BN}=4a^2$.

[Simetria arată că mediatoarea segmentului $\overline{AB}$ se ia ca axă Oy. Cercul $x^2+y^2-a^2=0$.]

229. Se dă un triunghi dreptunghic ABC. Să se găsească locul punctului M astfel ca perpendicularele ridicate în A, B, C respectiv pe MA, MB, MC să fie concurente.

[Cercul circumscris triunghiului.]

230. Se dau axele dreptunghiulare Ox, Oy și o dreaptă (D). Se cere locul geometric al punctului M care are proiecțiile P, Q, R pe cele două axe și pe dreapta (D) în linie dreaptă.

[Cercul circumscris triunghiului format de axe și de dreapta (D). Teorema lui Simson particularizată la triunghi dreptunghic.]

231. Se dau trei puncte A, B, C în linie dreaptă. Să se afle locul punctelor de contact al tangentelor duse din A la un cerc variabil ce trece prin B și C.

[Originea în A; $B(b, 0)$, $C(c, 0)$. Cercul $x^2+y^2-bc=0$. Se poate folosi puterea punctului pentru lungimea tangentei.]

232. Se dau două cercuri cu centrele în ω și ω′. M fiind un punct mobil pe axa radicală a celor două cercuri, se cere locul geometric al intersecției perpendicularelor ridicate în ω și ω′, respectiv pe $M\omega$ și $M\omega'$.

[Este indicat să se aleagă drept axe, linia centrelor și axa radicală a celor două cercuri. Locul este mediatoarea segmentului $\omega\omega'$.]

233. Se dau punctele P, Q și un cerc fix cu centrul pe dreapta PQ. Fie M, N capetele unui diametru variabil al cercului. Se cere locul intersecției dreptelor MP și NQ.

[Originea în centrul cercului. $P(a, 0)$, $Q(b, 0)$, $M(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, $N(-r\cos\alpha, -r\sin\alpha)$. Locul este cercul $\left(x-\frac{2ab}{a+b}\right)^2+y^2=r^2\frac{(a-b\pi)^2}{(a+b)^2}$.]

234. Două cercuri de centre O și O' se taie în A și B. Prin A se duce o secantă variabilă, care întîlnește cele două cercuri, respectiv în M și N. Se cere: a) locul mijlocului segmentului $\overline{MN}$; b) locul intersecției dreptelor OM și $O'N$.

[a) Cerc cu centrul la mijlocul distanței centrelor. b) Cerc care trece prin cele două centre.]

235. Locul punctelor M care au polarele față de două cercuri date perpendiculare.

[Cercul cu diametrul distanța centrelor.]

236. Într-un cerc se duc doi diametri perpendiculari AB și CD. O dreaptă variabilă ce trece prin C taie diametrul AB în M și cercul în N. Să se afle locul geometric al intersecției paralelei la CD, dusă prin M, cu tangenta la cerc în N (S.G.M. VI).

[Originea în centrul cercului. $A(r, 0)$, $C(0, r)$. Se găsesc ecuațiile $x=\pm r$; $y=-r$. Să se aleagă locul veritabil și să se explice de ce apar celelalte.]

237. Se dă un cerc (O) și un punct fix A în planul cercului. Fie MN un diametru al cercului.

a) Să se scrie ecuația cercului determinat de punctele M, N, A.

b) Se cere locul geometric al intersecției dreptei MN cu tangenta în A la cercul (MNA), cînd diametrul MN se rotește în jurul centrului.

[OA ca axă Ox. a) Se scrie fasciculul determinat de cercul dat și diametrul $y=mx$, apoi se pune condiția să treacă prin $A(a, 0)$. b) Locul este o perpendiculară pe OA.]

CAPITOLUL **XV**

ELIPSA ŞI HIPERBOLA

A. ELIPSA

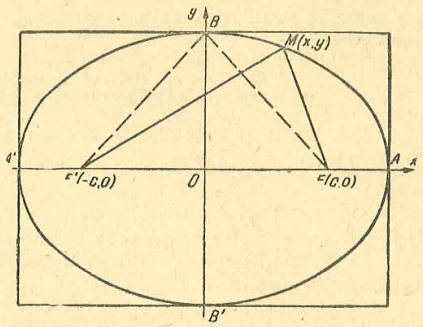


Fig. 68.

1. Definiţie. *Elipsa este locul geometric al punctelor care au suma distanţelor la două puncte fixe constantă.*

Punctele fixe se numesc *focare* şi se notează cu F şi F'. Dacă M este un punct curent pe elipsă, distanţele $\overline{FM}$, $\overline{F'M}$ poartă numele de *raze vectoare*.

Potrivit definiţiei, relaţia geometrică pe care o satisface punctul M este

$$\overline{MF}+\overline{MF'}=2a \text{ (constant).} \tag{1}$$

Pentru a găsi *ecuaţia elipsei* este de ajuns să transformăm analitic această relaţie. Alegem pe FF' ca axă Ox şi mediatoarea segmentului $\overline{FF'}$ ca axă Oy (fig. 68). Se notează $FF'=2c$, prin urmare $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, iar punctul curent M are coordonatele (x, y). Relaţia (1) devine

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a. \tag{2}$$

Ecuaţia curbei trebuie dată însă sub formă raţională. De aceea izolăm un radical şi ridicăm la pătrat. Obţinem

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

sau, după reduceri de termeni şi izolarea radicalului rămas:

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx. \tag{3}$$

Se ridică din nou la pătrat şi se ordonează termenii. În acest fel se obţine ecuaţia

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-c^2)=0. \tag{4}$$

În triunghiul MFF' se ştie că $\overline{MF}+\overline{MF'}>\overline{FF'}$ sau $2a>2c$, deci $a>c$, astfel că $a^2-c^2>0$. Se poate nota prin urmare

$$a^2-c^2=b^2 \tag{5}$$

şi împărţind în (4) cu a^2b^2 se capătă forma definitivă a ecuaţiei elipsei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{6}$$

Pentru a găsi punctele de intersecţie ale curbei cu axele de coordonate facem pe rînd $y=0$ şi $x=0$. Rezultă $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ pe Ox şi $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ pe Oy. $\overline{AA'}=2a$ se numeşte axa mare a elipsei, iar $\overline{BB'}=2b$ axa mică. Jumătăţile lor, adică $\overline{OA}=a$ şi $\overline{OB}=b$ sînt semiaxele elipsei. Cînd $M\equiv B$ avem $\overline{BF}+\overline{BF'}=2a$, dar $\overline{BF}=\overline{BF'}$, astfel că $\overline{BF}=a$. Din triunghiul dreptunghic OBF se deduce

$$a^2=b^2+c^2 \tag{7}$$

care de fapt este relaţia (5) interpretată acum geometric.

2. *Forma elipsei.* Din ecuaţia (6) a elipsei se scoate

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{8}$$

Vom studia numai ramura de curbă $y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, pentru care $y\geqslant 0$. Cealaltă se deduce prin simetrie faţă de axa Ox.

Forma curbei rezultă din reprezentarea ei grafică. Domeniul de existenţă este dat de condiţia $a^2-x^2\geqslant 0$, prin urmare $-a\leqslant x\leqslant a$, deci numai între A' şi A. Deoarece în (6) x şi y se găsesc la puteri pare, curba este simetrică atît în raport cu Ox cît şi în raport cu Oy, deci şi în raport cu originea. De aici rezultă că este de ajuns să se studieze numai porţiunea de curbă cuprinsă în cadranul I, adică între O şi A. Derivata pentru funcţia considerată [cu semnul (+)] este

$$y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{9}$$

Pentru $x>0$, y' este negativ deci curba descreşte; în plus $y'(0)=0$ şi $\lim_{x\to a} y'(x)=-\infty$, deci tangenta în B este paralelă cu Ox, iar cea din A paralelă cu Oy. Tabloul de variaţie rezumă acest studiu

x	0		a
$y'(x)$	0	—	∞
y	b	descreşte	0

Reprezentarea grafică este dată, cu completările din celelalte cadrane, în figura 68 şi arată că toată curba este închisă în dreptunghiul format de paralelele la axe duse prin punctele A, A', B, B'. Aceste patru puncte poartă numele de *vîrfurile elipsei*.

Dacă $b=a$, elipsa *devine cerc*, iar *distanța focală este nulă*.

Ecuația elipsei apare sub forma simplă (6) fiindcă s-au ales ca axe de coordonate tocmai axele ei de simetrie. De aceea se zice că (6) reprezintă ecuația elipsei, raportată la axele ei.

În cazul cînd elipsa este raportată la axe dreptunghiulare oarecare, ecuația rămîne de gradul al II-lea, dar forma nu mai este simplă.

Notă. Profităm de faptul că știm să efectuăm o translație de axe, pentru a arăta care este ecuația unei elipse raportate la axe paralele cu axele ei de simetrie. În adevăr, fie xOy un sistem de axe paralele cu axele elipsei și $x'Oy'$ sistemul de referință format din axele elipsei.

Translația de axe care aduce pe O în $O'(p, q)$ ne dă relațiile $x=p+x'$, $y=q+y'$. Ecuația elipsei, raportată la axele ei, este

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0,$$

prin urmare față de vechile axe xOy va fi

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}-1=0$$

unde (p, q) sînt coordonatele centrului O' al elipsei față de sistemul de axe xOy.

Exemple. a) *Să se determine vîrfurile și semiaxele elipsei* $2x^2+4y^2-5=0$.

Ecuația se scrie $\frac{x^2}{\frac{5}{2}}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}-1=0$, din care se deduce $a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Vîrfurile sînt $A\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$, $A'\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$, $B=\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $B'\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) *Să se determine elementele elipsei* $3x^2+5y^2+9=0$. Din ecuația dată se deduce $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{\frac{9}{5}}+1=0$ care seamănă cu ecuația elipsei, dar nu poate fi verificată pentru valori reale ale lui x și y, deoarece suma a trei numere pozitive nu poate fi nulă. Este o *elipsă imaginară*, lucru care se constată dacă vrem să aflăm semiaxele, intersectînd cu $y=0$ și cu $x=0$.

3. 1) *Construcția elipsei prin mișcare continuă.* Fie F, F' focarele elipsei de construit și $\overline{UV}=2a$ lungimea axei mari. Se înfig în foaia de hîrtie, și anume în F și F', două ace, apoi se trece peste ele un fir ale cărui capete s-au înnodat între ele, astfel ca lungimea totală a firului, după ce s-a făcut nodul, să fie $l=\overline{FF'}+2a$. Se întinde bine firul cu vîrful unui creion, apoi se mișcă vîrful M al creionului pe foaia de hîrtie (fig. 69). Curba desenată de vîrful creionului M este elipsa cu focarele F, F' și axa mare $2a$, deoarece $\overline{MF}+\overline{MF'}=l-\overline{FF'}=2a$.

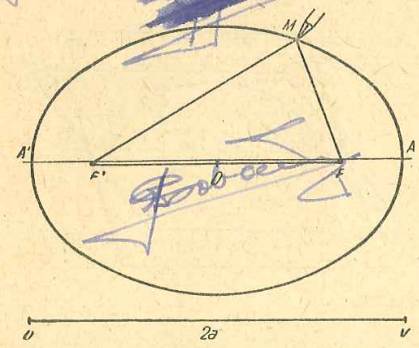


Fig. 69.

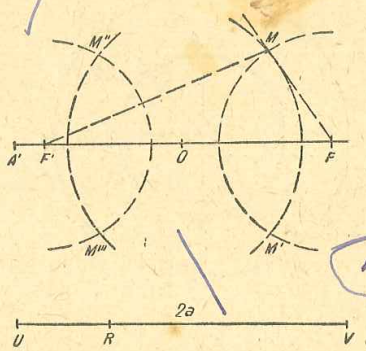


Fig. 70.

În acest fel construiesc grădinarii ronduri eliptice de flori, înfigînd în pămînt doi țăruși peste care se trece o sfoară întinsă de un al treilea țăruș mobil care trasează pe teren elipsa.

2) *Construcția elipsei prin puncte. Metoda* I. Fie F, F' focarele elipsei. Desenăm separat un segment $\overline{UV}=\overline{AA'}=2a$. Cu o deschidere de compas $\overline{VR}<\overline{VU}$ tragem un cerc cu centrul în F', iar cu raza $\overline{RU}$ un alt cerc cu centrul în F (fig. 70). Cele două cercuri se taie în două puncte M și M' (simetrice față de AA'), care aparțin elipsei, deoarece $\overline{MF}+\overline{MF'}=\overline{VR}+\overline{RU}=2a$.

Schimbînd între ele centrele F și F', ale celor două cercuri, se obțin încă două puncte, simetrice cu primele față de BB'. Se găsesc astfel pentru fiecare punct $R\in\overline{UV}$ cîte patru puncte ale elipsei. Construim atîtea puncte, cîte sînt necesare pentru a trage curba.

Observare. Dacă nu se cunoaște distanța focală $\overline{FF'}$, ci axa mare și axa mică, focarele se construiesc pe baza observării pe care am făcut-o că $\overline{BF}=\overline{BF'}=a$. Cercul cu centrul în B și cu raza a taie axa mare în punctele F, F', focarele elipsei. De aici încolo construcția se face ca mai înainte.

Metoda a II-a. Presupunem cunoscute axa mare și axa mică, dar nu mai folosim focarele. Să notăm cu y ordonata elipsei și cu Y ordonata cercului de rază a, avînd același centru ca și elipsa. Ținînd seama de relația (8) avem $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, însă din ecuația cercului rezultă $Y=\sqrt{a^2-x^2}$, prin urmare se poate scrie

$$\frac{y}{Y}=\frac{b}{a}. \qquad (10)$$

Să ducem acum cercurile concentrice cu razele a și b, apoi doi diametri perpendiculari, unul care taie cercul mare în A și A', al doilea care taie cercul mic în B și B' (fig. 71). Aceste patru puncte sînt vîrfurile elipsei.

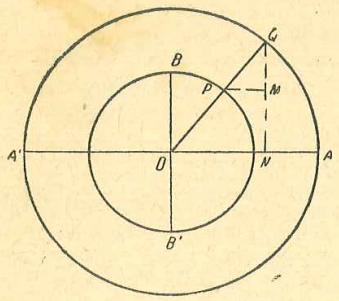


Fig. 71.

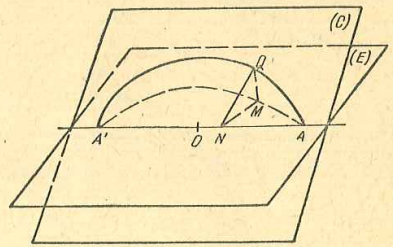


Fig. 72.

O rază variabilă întîlnește cercul mic în P și pe cel mare în Q. Se duce prin P o paralelă la AA' și prin Q o paralelă $QN (N \in AA')$ la BB'. Fie M punctul lor comun. Teorema lui Thales ne dă

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{NQ}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}, \text{ însă } \overline{NQ}=Y,\ \overline{OP}=b,\ \overline{OQ}=a, \text{ deci } \frac{\overline{MN}}{Y} = \frac{b}{a}.$$

Aceasta comparată cu relația (10) arată că $\overline{NM}=y$, adică M este un punct al elipsei. În acest fel se pot construi oricîte puncte vrem. Să observăm însă că la fiecare rază OQ obținem un singur punct M.

4. *Elipsa este proiecția unui cerc.* Cercul cu diametrul cît axa mare $\overline{AA'}=2a$ a elipsei se numește *cerc principal* al elipsei. Vrem să arătăm în cele ce urmează că *elipsa este proiecția cercului său principal pe un anumit plan.* Pentru aceasta să reluăm relația (10) pe care o punem sub forma $y=Y\cdot\frac{b}{a}$. Însă $\frac{b}{a}<1$, deci se poate găsi un unghi α pentru care $\cos\alpha=\frac{b}{a}$, și atunci $y=Y\cos\alpha$. Să ne închipuim că elipsa rămîne în planul ei, în timp ce rotim cercul său principal în jurul axei mari AA', cu unghiul α. Ordonata $\overline{QN}$ a cercului rămîne într-un plan perpendicular pe AA' și fie Q_1 noua poziție a lui Q și M proiecția lui Q_1 pe planul elipsei. (Se poate folosi figura 72, unde Q se va considera ca fiind Q_1.) Prin urmare $\sphericalangle MNQ_1=\alpha$ și $\overline{NM}=\overline{NQ_1}\cos\alpha=Y\cos\alpha=Y\cdot\frac{b}{a}$, cu alte cuvinte $\overline{NM}=y$, ordonata elipsei. Așadar ordonata elipsei este proiecția ordonatei cercului său principal, înclinat cu unghiul α, dat de $\cos\alpha=\frac{b}{a}$, pe planul elipsei. Aceasta arată că punctele elipsei sînt proiecțiile punctelor de pe cerc, sau că elipsa însăși este proiecția cercului său principal.

Acest lucru se poate arăta și pe altă cale, analitică. Fie un cerc cu diametrul $\overline{AA'}=2a$ așezat într-un plan (C) (fig. 72). Prin AA' ducem un alt plan (E) și să notăm cu α unghiul lor diedru. Unghiul plan corespunzător unghiului diedru este format din două perpendiculare duse dintr-un

punct al muchiei comune AA', una în planul (C) și una în planul (E). Fie Q un punct pe cerc, N proiecția lui pe AA' și M proiecția lui pe planul (E). Conform celor spuse mai înainte avem $\alpha=\sphericalangle QNM$.

În planul (C) punctul Q are coordonatele $X=\overline{ON}$ și $Y=\overline{NQ}$. În planul (E), punctul M are coordonatele $x=\overline{ON}$ și $y=\overline{NM}=\overline{NQ}\cos\alpha$. Deci

$$x=X;\ y=Y\cos\alpha \text{ sau } Y=\frac{y}{\cos\alpha}. \tag{11}$$

Coordonatele punctului Q trebuie să verifice ecuația cercului cu diametrul $\overline{AA'}=2a$, deci

$$X^2+Y^2-a^2=0.$$

Locul geometric al punctului M se află înlocuind pe X și Y în ecuația cercului, deci

$$x^2+\frac{y^2}{\cos^2\alpha}-a^2=0.$$

sau

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\cos^2\alpha}-1=0;$$

aceasta reprezintă o elipsă cu semiaxele a și $b=a\cos\alpha$. Deducem că: *elipsa este proiecția cercului său principal, așezat într-un plan care face cu planul elipsei, un unghi α dat de relația $\cos\alpha=\frac{b}{a}$.*

5. *Ecuațiile parametrice ale elipsei.* În figura 71 să notăm $\sphericalangle NOQ=\theta$. Știm că punctul M aparține elipsei, dar coordonatele lui M sînt $x=\overline{ON}=\overline{OQ}\cos\theta=a\cos\theta$ și $y=\overline{NM}=\overline{OP}\sin\theta=b\sin\theta$. Prin urmare coordonatele parametrice ale elipsei sînt

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta. \tag{12}$$

Ca verificare, dacă se scot $\cos\theta$ și $\sin\theta$ și se introduc în relația fundamentală $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ se obține ecuația carteziană a elipsei.

Ținem să atragem atenția asupra unui lucru, anume că θ este unghiul făcut de raza cercului principal (OQ) cu axa mare a elipsei și în general este diferit de unghiul făcut de raza vectoare OM a elipsei cu axa mare, adică în general $\theta\neq\sphericalangle AOM$. Aceste două unghiuri sînt egale numai cînd M coincide cu A, B, A' sau B', deci pentru valorile $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

6. *Aria elipsei.* Am văzut că elipsa este proiecția cercului său principal pe un plan care face cu planul cercului unghiul dat de $\cos\alpha=\frac{b}{a}$. Aria cercului principal fiind πa^2, aria elipsei va fi aria cercului înmulțită cu cosinusul unghiului de proiecție (Geometria în spațiu cl. a X-a), adică

$$A=(\pi a^2)\cos\alpha=\pi a^2\cdot\frac{b}{a}=\pi ab.$$

B. HIBERBOLA

7. Definiţie. *Hiperbola este locul geometric al punctelor care au diferenţa distanţelor la două puncte fixe constantă.*

Punctele fixe se numesc focare şi se notează în mod obişnuit cu F şi F'. Dacă M este un punct curent al hiperbolei, $\overline{MF}$ şi $\overline{MF'}$ poartă numele de raze vectoare. Conform definiţiei, relaţia geometrică pe care trebuie să o satisfacă punctul M este

$$|\overline{MF'}-\overline{MF}|=2a$$

sau

$$\overline{MF'}-\overline{MF}=\pm 2a \text{ (const.)}. \tag{13}$$

Ecuaţia locului geometric al punctului M se găseşte transformînd analitic această relaţie geometrică. Se aleg axele de coordonate astfel: FF' ca axă Ox şi mediatoarea lui $\overline{FF'}$ ca axă Oy (fig. 73).

Notăm, ca şi la elipsă, $\overline{FF'}=2c$, deci $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$. $M(x, y)$ fiind punctul curent al locului geometric, relaţia (13) scrisă analitic este

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{14}$$

Ecuaţia curbei trebuie adusă la formă raţională. Pentru aceasta trecem al doilea radical în partea a doua a ecuaţiei şi ridicăm la pătrat. Obţinem

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2.$$

După reducerea termenilor asemenea şi trecerea în prima parte a tuturor celor care nu conţin radicali, avem

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

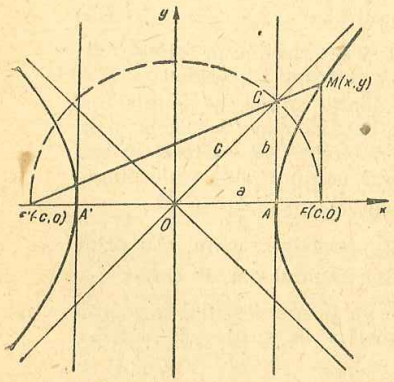


Fig. 73.

O nouă ridicare la pătrat ne dă, după ordonarea termenilor

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2-a^2(c^2-a^2)=0.$$

Este cazul să observăm aici că am obţinut *exact aceeaşi ecuaţie (4) de la elipsă*, ceea ce rezultă imediat înmulţind cu (-1) şi schimbînd semnele în paranteze.

Deosebirea vine din altă parte. Dacă la elipsă am avut $a>c$, la hiperbolă, din triunghiul MFF' rezultă $\overline{FF'}>|\overline{MF'}-\overline{MF}|=2a$, adică $c>a$ şi atunci expresia c^2-a^2 este pozitivă. Prin urmare se poate nota

$$c^2-a^2=b^2 \tag{15}$$

şi ecuaţia (14) devine, după împărţirea cu a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{16}$$

+ elipsă
− hiperbolă

care este forma definitivă a ecuaţiei hiperbolei.

Punctele de intersecţie cu axele se obţin făcînd succesiv $y=0$ şi $x=0$. Pe axa Ox avem $A(a, 0)$ şi $A'(-a, 0)$, iar pe axa Oy se constată că *nu avem puncte reale*, deci axa Oy nu taie hiperbola.

Pentru aceste motive AA' se numeşte *axa transversă*, iar A şi A' sînt vîrfurile hiperbolei, pe cîtă vreme axa Oy este axa netransversă.

8. *Forma hiperbolei.* Din (16) se deduce

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{17}$$

şi este de ajuns să se studieze ramura $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, deoarece cealaltă se trage prin simetrie faţă de axa Ox. Ceva mai mult, dînd lui x valori egale şi semne contrare se obţine pentru y aceeaşi valoare; punctele căpătate astfel sînt semetrice faţă de Oy, prin urmare curba este simetrică şi faţă de Oy.

De aceea este de ajuns să studiem curba în primul cadran şi restul se construieşte simetric faţă de ambele axe şi faţă de origine.

Ne ocupăm deci numai de ramura

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{17'}$$

care, pe partea pozitivă a axei Ox, are domeniul de existenţă dat de $x^2-a^2\geqslant 0$, adică $x\geqslant a$.

Asimptote. Se observă imediat că nu există asimptote paralele cu axele ($\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$). Căutăm deci asimptotele oblice.

Avem
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{b}{a};$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2}-x)=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0,$$

astfel că asimptota este $y=\frac{b}{a}x$. Ţinînd seama de simetria curbei faţă de axe înseamnă că avem în total două asimptote, anume

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{18}$$

Acestea de fapt se deduc din ecuaţia hiperbolei (16) *dacă se lasă la o parte termenul liber*, adică

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0. \tag{18'}$$

Derivata pentru ramura (17′) este $y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, care pentru $x > 0$ rămîne mereu pozitivă, deci funcția este crescătoare. Avem apoi $\lim_{x \to a} y' = \infty$, care arată că tangenta în A este perpendiculară pe Ox și $\lim_{x \to \infty} y' = \frac{b}{a}$, care arată că există o dreaptă de coeficient unghiular $\frac{b}{a}$, care este tangentă hiperbolei în punctul de la infinit; aceasta este asimptota $y = \frac{b}{a} x$. Tabloul de variație se reduce deci la

x	a			$+\infty$
y'	∞	$+$	$+$	$\frac{b}{a}$
y	0	crește		$+\infty$

Acum se poate construi bine curba, avînd grijă ca ramurile ei să se apropie necontenit de asimptote, cu tendința de a deveni tangentele lor la infinit. Forma hiperbolei este dată în figura 73.

Se atrage atenția că forma simplă (16) sub care se prezintă ecuația hiperbolei, se datorește faptului că este *raportată la axele ei de simetrie*. Cazul cînd sistemul de referință este oarecare depășește cadrul manualului.

O b s e r v a r e. Ecuația hiperbolei se capătă imediat din ecuația elipsei, dacă se înlocuiește b^2 prin $(-b^2)$. Aceasta înseamnă că semiaxa b se înlocuiește cu bi, unde $i = \sqrt{-1}$ este simbolul imaginar. Vom vedea în cele ce urmează că multe din proprietățile elipsei se transpun la hiperbolă prin această simplă înlocuire.

Notă. Se poate arăta, ca și la elipsă și în mod cu totul asemănător, că dacă axele hiperbolei sînt paralele cu axele de coordonate, atunci ecuația hiperbolei este

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

unde $O'(p, q)$ este centrul hiperbolei. Elevii pot face acest lucru ca un exercițiu de translație a axelor.

E x e m p l u. *Să se determine vîrfurile, focarele și asimptotele hiperbolei* $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$.

Se scrie hiperbola sub forma $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{8}{5}} - 1 = 0$, de unde rezultă imediat: $a^2 = 4$, $b^2 = \frac{8}{5}$, $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{28}{5}$. Prin urmare vîrfurile sînt $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$ și focarele $F(2\sqrt{\frac{7}{5}}, 0)$, $F'(-2\sqrt{\frac{7}{5}}, 0)$. Ecuațiile asimptotelor se deduc ușor: $y = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}\, x$.

9. *Hiperbola echilateră raportată la axele ei* este un caz particular al hiperbolei, anume cazul cînd $b = a$. Ecuația hiperbolei echilatere este așadar

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0 \quad \text{sau} \quad x^2 - y^2 = a^2. \tag{19}$$

Asimptotele se deduc imediat: $y = \pm x$, adică bisectoarele axelor de coordonate. Hiperbola echilateră are prin urmare asimptotele perpendiculare.

10. *Hiperbola echilateră raportată la asimptote.* Faptul că asimptotele hiperbolei echilatere sînt perpendiculare face ca ele să poată fi luate drept axe de cordonate. Desigur, ecuația capătă altă înfățișare, care trebuie neapărat cunoscută, fiindcă sub această formă intervine în unele fenomene fizice.

Considerăm prima bisectoare ca axă transversă (fig. 74), cu vîrfurile A_1, A_1', deci $\overline{OA_1} = \overline{OA_1'} = a$ și focarele F_1, F_1', deci $\overline{OF_1} = \overline{OF_1'} = a\sqrt{2}$ ($c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$). Proiectînd pe axe, sub unghiul de 45°, obținem coordonatele vîrfurilor și ale focarelor

$$A_1\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right); A_1'\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right); F_1(a, a),\ F_1'(-a, -a).$$

Pentru a găsi ecuația hiperbolei echilatere scriem că punctul curent $M(x, y)$ satisface relația

$$\overline{MF_1} - \overline{MF_1'} = \pm 2a$$

care transformată analitic devine

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = \pm 2a.$$

Se trece al doilea radical în partea a doua a ecuației, se ridică la pătrat și se reduc termenii asemenea. Se obține

$$\pm\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} = a + x + y.$$

O nouă ridicare la pătrat ne dă, după ce se fac reducerile,

$$xy = \frac{a^2}{2} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{20}$$

Aceasta este ecuația hiperbolei echilatere. Dacă se notează $\frac{a}{\sqrt{2}} = m$, ecuația hiperbolei echilatere se scrie

$$xy = m^2. \tag{20′}$$

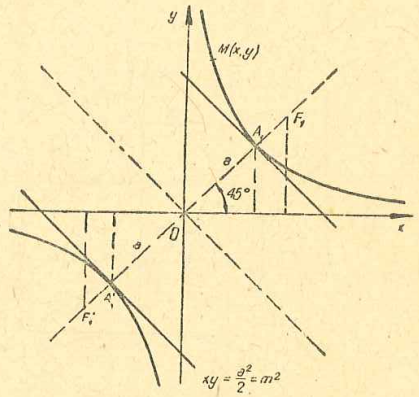


Fig. 74.

Din această ecuație se deduce

$$y=\frac{m^2}{x}, \qquad (20'')$$

de unde se vede că y variază invers proporțional cu x. Invers, toate mărimile aritmetice, geometrice, mecanice, fizice etc. care variază invers proporțional cu variabila de care depind, au ca reprezentare grafică hiperbole echilatere raportate la asimptote.

Exemple: laturile unui dreptunghi a cărui arie este constantă $xy=a^2$, *legea lui Boyle-Mariotte* $pv=$const. etc.

Hiperbola echilateră (20) sau (20′) are vîrfurile pe prima bisectoare, în $A_1(m, m)$, $A_1'(-m, -m)$; de fapt ea se obține din hiperbola raportată la axele de simetrie printr-o rotație de 45°, în sens trigonometric (fig. 74).

Dacă rotirea se face în sens invers, deci cu unghiul de (—45°), axa transversă este cea de-a doua bisectoare, iar ecuația hiperbolei are forma

$$xy=-m^2.$$

11. *Hiperbola conjugată.* Ecuația

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0 \qquad (21)$$

reprezintă de asemenea o hiperbolă, care însă taie axa Oy în două puncte $B(0, b)$ și $B'(0, -b)$, dar nu taie axa Ox (fig. 75, hiperbola punctată). Prin urmare de data aceasta Oy *este axa transversă* și Ox axa netransversă.

Hiperbola (21) și hiperbola studiată mai înainte

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (21')$$

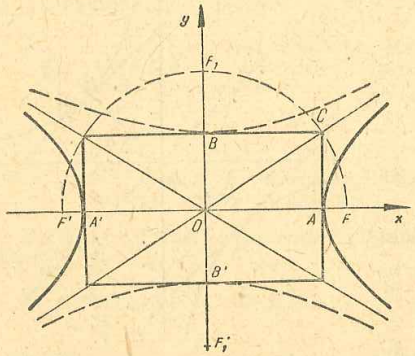


Fig. 75.

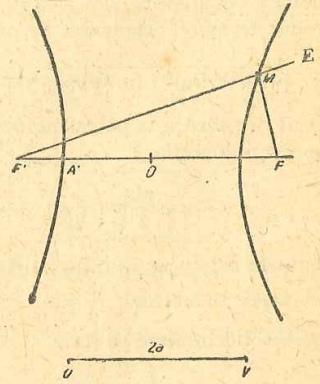


Fig. 76.

au aceleași axe și aceleași asimptote $y=\pm\frac{b}{a}x$, însă (21) este așezată în unghiul asimptotelor care cuprinde axa Oy, adică acolo unde nu există nici un punct al hiperbolei (21′). Hiperbolele (21) și (21′) se numesc *hiperbole conjugate.*

12. 1) *Construcția unui arc de hiperbolă prin mișcare continuă.* Se presupun date focarele F, F' și lungimea $2a$ a axei traverse. Este evident că vîrfurile A, A' se pot fixa imediat, dar ele rezultă și prin trasarea ramurilor de hiperbolă.

Se ia o riglă și se fixează cu un capăt în F', astfel ca să se poată roti în jurul lui F'. Lungimea $\overline{F'E}$ a riglei trebuie să fie mai mare decît $\overline{FF'}$. Se ia apoi un fir de lungime l, astfel ca $l=\overline{F'E}-2a$ și se fixează un capăt al lui în F, iar celălalt la extremitatea E a riglei. Se întinde bine firul cu vîrful M al unui creion care se sprijină pe riglă (fig. 76). Rotind rigla în jurul focarului F', vîrful M al creionului descrie un arc de hiperbolă, deoarece

$$\overline{MF'}-\overline{MF}=\overline{EF'}-(\overline{EM}+\overline{MF})=\overline{EF'}-l=2a.$$

Schimbînd centrul de rotație al riglei în F și legînd al doilea capăt al firului în F', se obține în mod asemănător un arc din a doua ramură a hiperbolei.

2) *Construcția hiperbolei prin puncte.* Cînd vrem să figurăm prin puncte o hiperbolă trebuie să procedăm într-o anumită ordine, așa cum arătăm aici.

a) Se așază vîrfurile A, A' și focarele F, F', care se presupun date ($\overline{AA'}=2a$, $\overline{FF'}=2c>2a$).

b) Se desenează *asimptotele.* Pentru aceasta se duc în A și A' perperpendicularele pe AA' (tangentele în A și A' la hiperbolă), apoi se descrie cercul cu centrul în O și cu raza $\overline{OF}=c$, care taie cele două perpendiculare în C și C' (fig. 77). Avem $\overline{AC}=b$, deoarece triunghiul dreptunghic OAC ne dă $\overline{AC}^2=\overline{OC}^2-\overline{OA}^2=c^2-a^2=b^2$.

Coeficientul unghiular al dreptei OC este $m=\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$, deci OB este chiar asimptota hiperbolei. Rezultă următoarea construcție: se duce cercul cu centrul în O și cu raza $\overline{OF}=c$, care taie tangentele la vîrfurile hiperbolei în patru puncte care formează un dreptunghi. Diagonalele acestui dreptunghi sînt asimptotele hiperbolei.

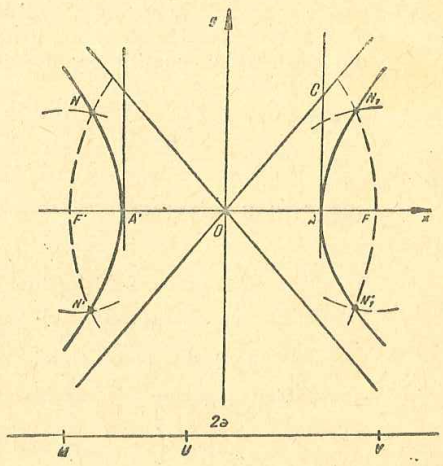


Fig. 77.

În particular la hiperbola *echilateră* $a=b$ și dreptunghiul devine pătrat; diagonalele, deci asimptotele, fac 45° cu axele.

c) După ce am așezat vîrfurile, focarele și am construit asimptotele, urmează să găsim și cîteva puncte, pentru a putea trasa curba.

Luăm separat o dreaptă și pe ea segmentul $\overline{UV}=\overline{AA'}=2a$, apoi luăm un punct M pe dreaptă, în afara segmentului $\overline{UV}$ (fig. 77). Descriem un cerc cu raza $\overline{MU}$ și cu centrul în F', apoi un al doilea cerc cu raza $\overline{MV}$ și cu centrul în F. Aceste două cercuri se taie în două puncte N, N' simetrice față de Ox. Avem

$$\overline{NF}-\overline{NF'}=\overline{MV}-\overline{MU}=2a,$$

deci N aparține hiperbolei. Simetricul său față de Ox aparține de asemenea hiperbolei.

Dacă se păstrează razele, dar se inversează centrele, se obțin încă două puncte ale curbei, simetrice cu cele precedente, față de Oy. Prin urmare cu un singur punct M putem construi *patru* puncte ale curbei.

Trasarea hiperbolei este mult ajutată de asimptote, ținînd seama că ramurile curbei se apropie necontenit de ele.

13. *Ecuațiile parametrice al hiperbolei.* Ecuația hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ se poate pune sub forma

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1.$$

O astfel de egalitate este satisfăcută dacă se pune

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t\,;\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{t}$$

din care rezultă ecuațiile parametrice ale hiperbolei

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right). \tag{22}$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

238. Să se arate că expresiile:

$$(E_1)=(x_0-c)^2+y_0^2,\quad (E_2)=(x_0+c)^2+y_0^2,$$

în care (x_0, y_0) sînt coordonatele unui punct de pe elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, sînt pătrate perfecte. Ce interpretare geometrică au expresiile date?

[$(E_1)=\left(a-\frac{c}{a}x_0\right)^2$, $(E_2)=\left(a+\frac{c}{a}x_0\right)^2$. Sînt pătratele distanțelor de la punct la focare. După stabilirea directă se va confrunta cu relația (3).]

239. Capetele A și B ale unui segment de lungime constantă alunecă pe două drepte perpendiculare. Fie M un punct fix al acestui segment. Se cere locul punctului M.

[Se ia OA ca axă Ox și se notează $\overline{AM}=b$, $\overline{MB}=a$. Locul este elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. Proprietatea se folosește la construcția elipsografului.]

240. Fie M un punct pe elipsa de semiaxe a și b, F_1 și F_2 focarele sale, iar O centrul său. Să se arate că avem relația:

$$\overline{MF_1}\cdot\overline{MF_2}+\overline{MO}^2=a^2+b^2.$$

[Se poate folosi problema 238. Se poate pleca și de la relația de definiție a elipsei, se ridică la pătrat și se ține seama de teorema medianei.]

241. Se dă elipsa $(E)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ și se notează cu (E_1) rezultatul înlocuirii lui x și y din (E) prin x_1 și y_1. Să se demonstreze că:

a) dacă $P(x_1, y_1)$ este interior elipsei, atunci $(E_1)<0$;

b) dacă $P(x_1, y_1)$ este exterior elipsei, atunci $(E_1)>0$.

[a) Se duce prin P o paralelă la Oy care taie elipsa în $Q(x_0, y_0)$. Avem $x_1=x_0$, $y_1<y_0$, deci $(E_1)<\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1=0$. b) Același procedeu, dar sensul inegalităților se schimbă.]

242. Să se găsească ecuația unei elipse avînd axele de coordonate ca axe de simetrie și trecînd prin punctele $M(3, 4)$ și $N(6, 2)$ (C.d.p. I. Dumitriu).

[$a^2=45$, $b^2=20$.]

243. Fie $\overline{MN}$ ordonata unui punct variabil pe un cerc cu centrul în origine și Q punctul care împarte această ordonată într-un raport constant $\frac{\overline{MQ}}{\overline{QN}}=k$. Se cere locul geometric al punctului Q.

[Elipsă.]

244. Se cere locul punctelor care au suma pătratelor distanțelor la două drepte concurente, fixe, constantă (C.d.p.).

[Se vor lua bisectoarele unghiurilor formate de drepte, ca axe.]

245. Se dă un cerc și un diametru fix al său. Se cere locul punctului M care are suma dintre pătratul distanței la diametrul fix și puterea punctului față de cerc, constantă.

[Elipsă.]

246. Se dă hiperbola $H=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ și ne notează cu H_1 rezultatul înlocuirii în H a lui x, y prin x_1, y_1. Să se demonstreze că:

a) dacă $P(x_1, y_1)$ este în afara ramurilor hiperbolei, atunci $H_1<0$;

b) dacă $P(x_1, y_1)$ este interior uneia din ramurile hiperbolei, atunci $H_1>0$.

[a) Se duce prin P o paralelă la Ox, care taie hiperbola în $Q(x_0, y_0)$. Avem $x_1 < x_0$, $y_1 = y_0$, deci $H_1 < \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$. b) Același procedeu, sensul inegalităților se schimbă.]

247. Să se arate că expresiile $E_1 = (x_0 - c)^2 + y_0^2$; $E_2 = (x_0 + c)^2 + y_0^2$, în care (x_0, y_0) sînt coordonatele unui punct de pe hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, sînt pătrate perfecte. Ce interpretare geometrică au aceste expresii?

[$E_1 = \left(\frac{cx_0}{a} - a\right)^2$; $E_2 = \left(\frac{cx_0}{a} + a\right)^2$. Sînt pătratele distanțelor de la punct la focare.]

248. Fiind dată hiperbola cu semiaxele a și b, cu focarele F_1 și F_2 și cu centrul O, să se arate că dacă M este un punct al curbei, avem relația:

$$\overline{OM}^2 - \overline{MF}_1 \cdot \overline{MF}_2 = a^2 - b^2.$$

[Se transpun aici indicațiile de la problema 240.]

249. Într-o hiperbolă echilateră, segmentul care unește centrul O cu un punct oarecare de pe curbă este medie proporțională între cele două raze vectoare $\overline{FM}$, $\overline{F'M}$ care unesc focarele cu punctul M, adică $\overline{OM}^2 = \overline{FM} \cdot \overline{F'M}$ (C.d.p.).

[Se va trata direct, apoi ca particularizare a problemei precedente.]

250. Fie $x^2 - y^2 = a^2$ o hiperbolă echilateră. Să se arate că ordonata $\overline{MN}$ a unui punct M de pe această curbă este egală cu tangenta dusă din N la cercul descris pe axa transversă a curbei, ca diametru (C.d.p.).

[Se folosește puterea punctului N față de cerc.]

251. Se dă cercul cu centrul în origine și cu raza $r = 3$. Să se afle locul geometric al punctului M care are distanța pînă la axa Ox cît jumătatea tangentei duse din M la cerc.

[Se folosește puterea punctului. Hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} - 1 = 0$.]

252. Se dă un cerc cu raza r și un diametru (D) al său, fix. Să se afle locul punctului M care are *raportul* dintre puterea sa față de cerc și pătratul distanței pînă la diametrul (D) constant și egal cu k.

Se vor examina cazurile $k < 1$; $k = 1$; $k > 1$ desenînd locurile geometrice și interpretînd rezultatele.

[Generalizarea problemei precedente. $k < 1$, elipsă așezată între dreptele $x = \pm r$; $k = 1$, dreptele $x = \pm r$; $k > 1$, hiperbolă. Pentru $k < 0$ elipsa este interioară cercului dat.]

253. Se dă un punct A și o dreaptă (D). Prin A se duce o secantă variabilă care taie dreapta (D) în M și în acest punct se ridică perpendiculara pe (D). Pe această perpendiculară se poartă segmentul $\overline{MN} = \overline{MA}$. Să se găsească locul lui N.

[Se ia (D) ca axă Oy și perpendiculara din A pe (D) ca Ox. Locul este hiperbola echilaterală raportată la aceste axe, cu un vîrf în A.]

254. Să se găsească ecuația unei hiperbole, raportată la axele sale, știind că trece prin punctele $C(5\sqrt{2};\ 2\sqrt{5})$ și $D(45, 40)$.

[$a^2 = 25$, $b^2 = 20$.]

CAPITOLUL XVI

INTERSECȚIA CU O DREAPTĂ. PROBLEME DE TANGENȚĂ

A. INTERSECȚIA CU O DREAPTĂ

1. Problemele care urmează se pot trata deodată pentru elipsă și hiperbolă, deoarece singura deosebire între ecuațiile celor două curbe este că b^2 se înlocuiește prin $(-b^2)$. Dacă însă am studia problemele numai pentru elipsă și le-am transpune fără demonstrație la hiperbolă, procedeul nu ar fi convingător, fiindcă nu se poate ști dinainte dacă simpla înlocuire a lui b^2 prin $(-b^2)$ duce totdeauna la rezultatul corect. Dacă am face studiul separat pentru fiecare curbă, atunci ar trebui să refacem multe calcule cu totul asemănătoare. De aceea vom face un studiu simultan pentru cele două curbe și în acest scop vom scrie ecuațiile lor concentrate în una singură:

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1), \tag{1}$$

astfel că pentru $\varepsilon = +1$ se obține elipsa, iar pentru $\varepsilon = -1$ hiperbola.

2. *Intersecția elipsei și hiperbolei cu o dreaptă.* Pentru a găsi coordonatele punctelor de intersecție ale elipsei sau hiperbolei cu dreapta $y = mx + n$ trebuie să rezolvăm sistemul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0; \qquad y = mx + n. \tag{2}$$

Eliminînd numitorii în prima ecuație și înlocuind pe y din ecuația dreptei se capătă

$$\varepsilon b^2 x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) - \varepsilon a^2 b^2 = 0 \text{ sau}$$
$$(a^2m^2 + \varepsilon b^2)x + 2a^2mnx + a^2(n^2 - \varepsilon b^2) = 0 \tag{3}$$

Această ecuație ne dă abscisele punctelor de intersecție ale dreptei cu elipsa dacă se ia $\varepsilon = +1$ sau cu hiperbola dacă se ia $\varepsilon = -1$. Ordonatele corespunzătoare se obțin din ecuația dreptei, înlocuind pe x cu valorile date de (3).

Discuție. Punctele de intersecție dintre dreapta dată și curba respectivă sînt reale, confundate sau imaginare după cum realizantul ecuației (3) este *pozitiv, zero* sau *negativ.* Notînd cu R realizantul, avem

$$R=4a^4m^2n^2-4a^2(a^2m^2+\varepsilon b^2)(n^2-\varepsilon b^2)=4a^2b^2[b^2+\varepsilon(a^2m^2-n^2)].$$

Dar semnul realizantului este același cu semnul expresiei

$$E=b^2+\varepsilon(a^2m^2-n^2)$$

care pentru elipsă ($\varepsilon=1$) devine

$$E_e=a^2m^2+b^2-n^2, \tag{4}$$

iar pentru hiperbolă ($\varepsilon=-1$)

$$E_h=b^2-a^2m^2+n^2. \tag{5}$$

Cazul elipsei a) *Dacă* $E_e>0$, adică $|n|<\sqrt{a^2m^2+b^2}$, punctele de intersecție sînt *reale* și distincte, iar dreapta este *secantă* elipsei.

b) *Dacă* $E_e=0$, adică $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$, dreapta taie elipsa în două puncte *confundate* și prin urmare este *tangentă* elipsei.

c) *Dacă* $E_e<0$, deci $|n|>\sqrt{a^2m^2+b^2}$, punctele de intersecție sînt imaginare și dreapta este *exterioară.*

Cazul hiperbolei. I. Presupunînd $a^2m^2-b^2<0$, prin urmare $b^2-a^2m^2>0$, avem totdeauna $E_h>0$, deci dreapta $y=mx+n$ taie totdeauna hiperbola în două puncte *reale și distincte,* adică este secantă curbei.

Condiția de mai sus cere ca $-\frac{b}{a}<m<\frac{b}{a}$: aceasta din punct de vedere geometric înseamnă că paralela dusă prin origine la dreapta dată este conținută în unghiurile asimptotelor, în care se află și ramurile hiperbolei. De aici concluzia: *orice paralelă la o dreaptă care trece prin origine și taie ramurile unei hiperbole este de asemenea o secantă a hiperbolei.*

II. Presupunem acum $a^2m^2-b^2>0$. Putem avea următoarele situații:

a) Dacă $E_h>0$, adică $|n|>\sqrt{a^2m^2-b^2}$, punctele de intersecție sînt *reale* și dreapta este *secantă* hiperbolei.

b) Dacă $E_h=0$, sau $n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$, punctele de intersecție sînt *confundate* și dreapta este *tangentă* hiperbolei.

c) Dacă $E_h<0$, deci $|n|<\sqrt{a^2m^2-b^2}$, punctele de intersecție sînt *imaginare* și dreapta nu taie hiperbola: ea este situată între cele două ramuri ale hiperbolei.

III. $a^2m^2-b^2=0$, de unde $m=\pm\frac{b}{a}$. În acest caz ecuația (3) nu mai este de gradul al II-lea, ci de gradul I și nu mai există decît un singur punct de intersecție la distanță finită. Al doilea punct este la infinit (elevii vor demonstra că dacă în ecuația $ax^2+bx+c=0$, $a\to0$, una din rădăcini tinde către ∞). Dar $m=\pm\frac{b}{a}$ sînt coeficienții unghiulari ai asimptotelor hiperbolei. De aici proprietatea:

Orice paralelă la una din asimptotele hiperbolei taie curba într-un singur punct la distanță finită.

Pentru hiperbola echilaterală discuția este aceeași cu specificarea că, deoarece $a=b$, expresia $a^2m^2-b^2$ devine $a^2(m^2-1)$.

Exemple. a) *Să se afle punctele de intersecție ale elipsei* $\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$, *cu dreapta* $3x+2y-3=0$.

Din ecuația dreptei se scoate $2y=3(1-x)$, care dus în ecuația elipsei $x^2+4y^2-4=0$, dă $10x^2-18x+5=0$, cu rădăcinile $x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{31}}{10}$. Rezultă $y_{1,2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1\pm\sqrt{31}}{10}$.

b) *Dreapta* $y=2x+7$ *este exterioară elipsei* $x^2+3y^2-9=0$.

În adevăr din ecuația elipsei se deduce $a^2=9$, $b^2=3$. Expresia $E_e=a^2m^2+b^2-n^2$ devine $E_e=9\cdot4+3-49=-10<0$, deci punctele de intersecție ale dreptei cu elipsa sînt imaginare.

c) *Să se determine punctele comune ale dreptei* $x-2y+4=0$ *cu hiperbola* $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}-1=0$.

Din ecuația dreptei rezultă $x=2y-4$ care dus în ecuația hiperbolei dă

$$9(4y^2-16y+16)-16y^2-9\cdot16=0.$$

După reducerea termenilor asemenea și împărțirea cu 4 se obține $5y^2-36y=0$, deci $y_1=0$ și $y_2=\frac{36}{5}$ la care corespund $x_1=-4$, $x_2=\frac{52}{5}$. Dreapta taie hiperbola în punctele $A'(-4, 0)$ — vîrful hiperbolei — și $P\left(\frac{52}{5}, \frac{36}{5}\right)$

d) *Dreapta* $y=2x-8$ *este tangentă hiperbolei* $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}-1=0$. *Să se afle punctul de contact.*

Înlocuind pe y în ecuația hiperbolei se obține

$36x^2-25\cdot4(x^2-8x+16)-25\cdot36=0$, care se împarte cu 4 și după ordonarea termenilor dă

$$16x^2-8\cdot25x+25^2=0 \text{ sau } (4x-25)^2=0.$$

Punctul de contact are coordonatele $\left(\frac{25}{4}, \frac{9}{2}\right)$.

8. PROBLEME DE TANGENȚĂ

3. *Tangenta într-un punct curent, la o curbă oarecare.* Este bine să reamintim următoarele chestiuni din analiza matematică, de care ne vom folosi în problemele de tangență.

Derivata unei funcții $y=f(x)$, în punctul de abscisă x_0, este tangenta trigonometrică a unghiului α făcut de tangenta geometrică în M la curbă, cu axa Ox. În limbaj analitic vom zice mai scurt: derivata calculată în

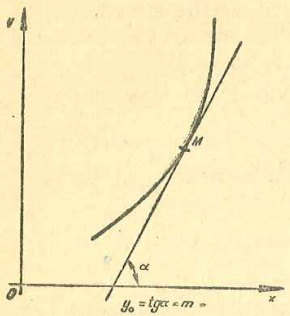


Fig. 78.

punctul M (pentru $x=x_0$) este coeficientul unghiular al tangentei la curbă în M (fig. 78).

Dacă notăm cu y'_0 sau $f'(x_0)$ valoarea derivatei pentru $x=x_0$, putem scrie

$$m=y'_0=f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (6)$$

O dată reamintite aceste lucruri, să trecem la problema pe care ne-am propus-o. Ecuația tangentei la o curbă, dată prin ecuația ei, se va scrie ca o dreaptă care trece prin punctul $M(x_0, y_0)$ al curbei și are direcția cunoscută, dată de derivata funcției $y=f(x)$, în acel punct. Prin urmare

$$y-y_0=y'_0(x-x_0) \qquad (7)$$

cu condiția $y_0=f(x_0)$.

Trebuie totdeauna să se scrie după ecuația tangentei (7) și condiția ca punctul să se găsească pe curbă, așa cum s-a făcut aici, căci *fără această condiție (7) nu mai reprezintă tangenta la curbă.*

Exemplu. *Să se găsească ecuația tangentei la curba* $y=\dfrac{x^3+1}{x-1}$, *în punctul* $M(-1, 0)$.

În primul rînd se constată că punctul se află pe curbă. Derivata $y'=\dfrac{2x^3-3x^2-1}{(x-1)^2}$ devine, pentru $x=-1$, $y_M=-\dfrac{3}{2}$, astfel că ecuația tangentei este $y=-\dfrac{3}{2}(x+1)$ sau $3x+2y+3=0$.

Ca verificare, sistemul format de ecuația curbei și a tangentei trebuie să aibă o soluție dublă ($x=-1$).

4. *Tangenta într-un punct al elipsei sau hiperbolei.* Scriem ecuațiile elipsei și hiperbolei condensate în

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}-1=0 \qquad \begin{cases}\varepsilon=+1, \text{ elipsa}\\ \varepsilon=-1, \text{ hiperbola}\end{cases} \qquad (8)$$

Pentru tangenta la curbă în $M_0(x_0, y_0)$ avem nevoie de derivata funcției y, deci de y'. Pentru aceasta scoatem din ecuația curbei

$$y^2=\varepsilon b^2-\frac{\varepsilon b^2}{a^2}x^2$$

de unde, prin derivare în ambele părți în raport cu x, obținem

$$2yy'=-2\frac{\varepsilon b^2}{a^2}x \text{ sau } y'=-\frac{\varepsilon b^2 x}{a^2 y}.$$

În punctul $M_0(x_0, y_0)$ vom avea $y'_0=-\dfrac{\varepsilon b^2 x_0}{a^2 y_0}$ și ecuația tangentei se scrie vezi (7)

$$y-y_0=-\frac{\varepsilon b^2 x_0}{a^2 y_0}(x-x_0)$$

sau, înmulțind cu y_0 și împărțind cu εb^2

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{\varepsilon b^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{yy_0}{\varepsilon b^2}\right)=0,$$

cu condiția ca M_0 să verifice ecuația (8), adică

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{\varepsilon b^2}-1=0.$$

Însă, în baza acestei condiții, suma din paranteză este egală cu unitatea, astfel încît forma definitivă a tangentei la curbă (8) este

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{\varepsilon b^2}-1=0, \text{ cu condiția } \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{\varepsilon b^2}-1=0.$$

Acum separăm cele două curbe (8) luînd pentru elipsă $\varepsilon=+1$ și pentru hiperbolă $\varepsilon=-1$ și obținem:

Tangenta la elipsă în punctul $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0, \text{ cu condiția } \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0. \qquad (9)$$

Tangenta la hiperbolă în punctul $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0, \text{ cu condiția } \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1=0. \qquad (10)$$

Dacă se elimină numitorii, ecuațiile tangentelor se scriu

$b^2xx_0+a^2yy_0-a^2b^2=0$ pentru elipsă (9′)

$b^2xx_0-a^2yy_0-a^2b^2=0$ pentru hiperbolă (10′)

Exemple. a) *Să se scrie ecuațiile tangentelor la elipsa* $x^2+9y^2-4=0$, *în punctele care au abscisa* $x=1$. Din ecuația elipsei se deduce, pentru $x=1$, $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Tangentele în cele două puncte $M_1\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $M_2\left(1, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\frac{x\cdot 1}{4}\pm\frac{y\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{9}}-1=0 \qquad \text{sau separate}$$

$$x+3\sqrt{3}y-4=0 \text{ și } x-3\sqrt{3}y-4=0.$$

Ele se întîlnesc pe axa ox în punctul $(4, 0)$.

b) *Să se scrie ecuația tangentei la hiperbolă* $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{9}-1=0$, *în punctul* $(4, 3)$.

Punctul verifică ecuația curbei, deci se găsește pe hiperbolă. Ecuația tangentei este $\dfrac{x\cdot 4}{8}-\dfrac{y\cdot 3}{9}-1=0$ sau $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}-1=0$. Sub această formă se observă imediat că tăieturile dreptei sînt $P(2, 0)$, $Q(0, -3)$.

5. *Tangentele de direcție dată.* Direcția este dată de coeficientul unghiular m. Problema care se pune este de a determina ordonata la origine n așa fel ca dreapta $y=mx+n$ să fie tangentă elipsei sau hiperbolei, adică să taie curba respectivă în două puncte confundate.

Tangentele de direcție dată, la elipsă. Condiția ca dreapta să taie elipsa în două puncte confundate este (§ 2) ca $E_e=a^2m^2+b^2-n^2=0$, de unde $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$. O dată determinat n, se introduce în ecuația dreptei și se obțin două tangente la elipsă, care au direcția dată prin coeficientul unghiular m

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \tag{11}$$

Luînd pe rînd semnul (+), apoi (—) se vede că cele două tangente paralele sînt *simetrice* față de centrul elipsei, deoarece taie axa oy în două *puncte simetrice*.

Să se observe că fiind dat m, totdeauna există două tangente la elipsă, avînd coeficientul unghiular m, deoarece $a^2m^2+b^2>0$.

Dacă $a=b=r$ regăsim ecuațiile tangentelor la cerc, cu o direcție dată, cînd centrul cercului este în origine.

Tangentele de direcție dată, la hiperbolă. Tot la § 2 am găsit condiția ca dreapta $y=mx+n$ să fie tangentă hiperbolei, anume $E_h=b^2-a^2m^2+n^2=0$, de unde $n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$. Înlocuind în ecuația dreptei, se găsesc ecuațiile tangentelor care au direcția dată de coeficientul unghiular m:

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}. \tag{12}$$

Ca și la elipsă, ele sînt simetrice față de centrul hiperbolei.

În particular dacă $a=b$ obținem ecuațiile tangentelor, cu direcția dată de m, la hiperbola echilaterală:

$$y=mx\pm a\sqrt{m^2-1}. \tag{12'}$$

Spre deosebire de elipsă și cerc, la hiperbolă nu se pot duce tangente paralele cu orice dreaptă, deci pentru orice m. În adevăr pentru ca tangentele să fie reale trebuie ca $a^2m^2-b^2>0$, deci

$$m<-\frac{b}{a} \quad \text{sau} \quad m>\frac{b}{a}. \tag{13}$$

Prin urmare trebuie ca direcția tangentei să facă cu axa Ox un unghi mai mare (în valoare absolută) decît al asimptotei.

Altfel spus, *o paralelă dusă prin centrul hiperbolei,* la o tangentă oarecare a curbei, este exterioară unghiului asimptotelor care cuprinde axa Ox, deci nu *întîlnește curba.*

Exemple. a) *Să se scrie ecuațiile tangentelor cu direcția dată de* $m=\frac{1}{2}$, *la elipsa* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$. *Să se afle coordonatele punctelor de contact.*

Avem $n=\pm\sqrt{9\cdot\frac{1}{4}+4}=\pm\frac{5}{2}$. Ecuațiile tangentelor sînt $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ și $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ sau $x-2y+5=0$ și $x-2y-5=0$.

Intersectînd elipsa cu fiecare din cele două drepte se găsesc punctele de contact $T\left(-\frac{9}{5},\frac{8}{5}\right)$, $T'\left(\frac{9}{5},-\frac{8}{5}\right)$.

b) *Tangentele la elipsă paralele cu a doua bisectoare sînt:*

$$y=-x\pm\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{sau} \quad x+y\pm\sqrt{a^2+b^2}=0.$$

c) *Tangentele la hiperbolă paralele cu prima bisectoare sînt:*

$$y=x\pm\sqrt{a^2-b^2} \quad \text{sau} \quad x-y\pm\sqrt{a^2-b^2}=0.$$

Astfel de tangente nu există decît la hiperbolele care au $a>b$, deci unghiul asimptotelor, în care este situată hiperbola, este mai mic decît 90°.

6. Problemă. *Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la elipsă.*

Cele două tangente fiind perpendiculare vor avea drept coeficienți unghiulari m și $-\frac{1}{m}$. Ecuațiile lor se scriu ca tangente la elipsă cu direcția dată, deci

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \text{și} \quad y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{m^2}+b^2}. \tag{14}$$

Locul geometric al intersecției celor două tangente se obține eliminînd parametrul m. Pentru aceasta se elimină numitorul la cea de-a doua ecuație, apoi se separă radicalii și se ridică la pătrat. Ecuațiile devin

$$y^2-2mxy+m^2x^2=a^2m^2+b^2$$
$$m^2y^2+2mxy+x^2=a^2+m^2b^2.$$

Prin adunare se capătă

$$(1+m^2)x^2+(1+m^2)y^2=(1+m^2)a^2+(1+m^2)b^2,$$

ecuație care se împarte cu $1+m^2\neq0$ și dă locul geometric

$$x^2+y^2=a^2+b^2. \tag{15}$$

Locul este un cerc concentric cu elipsa, cu raza cît diagonala dreptunghiului construit pe semiaxe. Acest cerc este circumscris dreptunghiului care încadrează elipsa și se numește *cercul lui Monge* sau cercul *ortoptic.*

7. Problemă. *Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la hiperbolă.*

Este inutil să reluăm calculul făcut la elipsă (elevii îl vor face ca exercițiu și ca verificare). Locul se găsește direct înlocuind în (15) pe b^2 prin $(-b^2)$, ceea ce dă cercul

$$x^2+y^2=a^2-b^2. \tag{16}$$

Acest cerc cu centrul în origine are raza $r=\sqrt{a^2-b^2}$, de unde se vede că nu este real decît dacă $a>b$, adică dacă *unghiul asimptotelor, care conține axa transversă, este ascuțit.*

În cazul hiperbolei echilaterale ($a=b$), cercul se reduce la un punct: originea. Tangentele perpendiculare duse din origine sînt chiar asimptotele.

Pentru hiperbolele care au $a<b$ (asimptotele fac un unghi obtuz), cercul este imaginar și *nu există nici un punct* din care să se poată duce tangente perpendiculare la curbă.

În cazul cînd cercul este real ($a>b$) el se numește, ca și la elipsă, *cercul lui Monge* sau *cercul ortoptic.*

8. *Tangentele duse dintr-un punct exterior, la elipsă și hiperbolă.* Considerăm ecuațiile celor două curbe concentrate în

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}-1=0 \qquad (\varepsilon=\pm1)$$

și fie $P(x_0, y_0)$ punctul exterior din care vrem să ducem tangentele. Pentru aceasta scriem tangenta cu direcția dată de coeficientul unghiular m, nedeterminat

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+\varepsilon b^2}$$

și îl aflăm pe m punînd condiția ca această tangentă să treacă prin P. Trebuie să avem

$$y_0=mx_0+\sqrt{a^2m^2+\varepsilon b^2}$$

de unde, izolînd radicalul și ridicînd la pătrat obținem ecuația de gradul al II-lea în m:

$$(y_0-mx_0)^2=a^2m^2+\varepsilon b^2. \tag{17}$$

Din cauză că facem o ridicare la pătrat este inutil să se ia înaintea radicalului din ecuația tangentei, semnele ($\pm$).

Dacă luăm $\varepsilon=1$, atunci avem ecuația în m pentru elipsă

$$(y_0-mx_0)^2=a^2m^2+b^2, \tag{17'}$$

iar dacă luăm $\varepsilon=-1$, avem ecuația în m pentru hiperbolă:

$$(y_0-mx_0)^2=a^2m^2-b^2. \tag{17''}$$

Fiecare din aceste două ecuații dă două rădăcini m_1, m_2, deci două direcții pentru care tangenta la elipsă sau la hiperbolă trece prin P. Ecuațiile acestor tangente se scriu simplu, observînd că trec prin $P(x_0, y_0)$ și au direcțiile cunoscute m_1, m_2:

$$y-y_0=m_1(x-x_0),\quad y-y_0=m_2(x-x_0). \tag{18}$$

Dacă m_1, m_2 sînt rădăcinile ecuației (17'), atunci (18) reprezintă tangentele duse din P la elipsă; dacă m_1, m_2 sînt rădăcinile ecuației (17''), atunci (18) reprezintă tangentele duse din P la hiperbolă.

Observare. Dacă se calculează realizantul ecuației (17') sau (17'') se observă că pentru ca m să fie real trebuie ca P să fie exterior elipsei sau hiperbolei (la hiperbolă exterior înseamnă situat în regiunea care conține axa netransversă).

Exemple. a) *Să se scrie ecuațiile tangentelor duse la elipsă din punctul* $(5a, 5b)$.

Ecuația (17') ne dă $(5b-5am)^2=a^2m^2+b^2$ sau, dezvoltat:

$$24a^2m^2-50amb+24b^2=0$$

cu rădăcinile $m_1=\frac{4b}{3a}$, $m_2=\frac{3b}{4a}$. Ecuațiile celor două tangente sînt

$$y-5b=\frac{4b}{3a}(x-5a) \text{ și } y-5b=\frac{3b}{4a}(x-5a) \text{ sau}$$

$$4bx-3ay-5ab=0 \text{ și } 3bx-4ay+5ab=0.$$

b) *Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul* $P\left(3, \frac{5}{2}\right)$ *la hiperbola* $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}-1=0$.

Ecuația (17'') ne dă $\left(\frac{5}{2}-3m\right)^2=36m^2-25$ sau $27m^2+15m-\frac{125}{4}=0$, cu rădăcinile $m_1=\frac{5}{6}$, $m_2=-\frac{25}{18}$. Ecuațiile tangentelor sînt $y-\frac{5}{2}=\frac{5}{6}(x-3)$ și $y-\frac{5}{2}=-\frac{25}{18}(x-3)$ sau $5x-6y=0$ (una din asimptote) și $25x+18y-120=0$.

Faptul că una din tangente este chiar asimptota hiperbolei se explică prin aceea că P se află pe acea asimptotă, care astfel este *una din tangentele* duse din P la curbă.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

255. Să se determine punctele de intersecție dintre elipsa $x^2+3y^2-27=0$ și dreapta $x-y-3=0$.

$\left[(0,-3) \text{ și } \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right).\right]$

256. Să se ducă în elipsa $x^2+4y^2=9$ o coardă al cărui mijloc să fie punctul $M(2, 1)$. (C.d.p.).

[Se duce dreapta $y-1=\lambda(x-2)$, care taie elipsa în două puncte astfel ca $\frac{x_1+x_2}{2}=2$, de unde se scoate λ. Nu se rezolvă ecuația de gradul al II-lea, ci se folosește semisuma rădăcinilor.]

257. Să se determine ecuația unei drepte înclinate cu 60° față de axa Ox, care să determine în hiperbola echilateră $x^2-y^2=a^2$ o coardă de lungime $2a\sqrt{2}$ (S.G.M. VI).

$[y=\sqrt{3}x\pm 2a.]$

258. O dreaptă paralelă la axa netransversă a unei hiperbole taie o asimptotă a ei în M, o ramură a hiperbolei în N și axa transversă în P. Să se arate că avem $\overline{PM}^2-\overline{PN}^2=\text{const.}$ cînd dreapta variază (C.d.p.).

259. O paralelă (Δ) la axa netransversă taie o hiperbolă în punctele M și N. Paralelele la una din asimptote, duse prin M și N, taie axa netransversă, respectiv în P și Q. Să se demonstreze că produsul $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\text{const.}$, atunci cînd ($\Delta$) variază.

[Constanta este b^2.]

260. Să se găsească un punct M pe elipsa $\frac{x^2}{369}+\frac{y^2}{144}-1=0$, așa fel ca razele vectoare să fie perpendiculare.

[$M(x_0, y_0)$. Condiția de perpendicularitate duce la $x_0^2+y_0^2=225$, deci M trebuie să fie pe acest cerc și pe elipsă. Patru puncte: $x=\pm\frac{9\sqrt{41}}{5}$, $y=\pm\frac{48}{5}$.]

261. Să se trateze problema de mai sus în cazul general și să se găsească condiția ca să existe soluții. Cum se pot construi grafic cele patru puncte? Să se deducă și pe cale geometrică condiția ca să existe soluții.

Pentru ce fel de elipsă avem numai două soluții și care sînt ele?

[Condiția este $c>b$. Dacă $c=b$, deci $a=b\sqrt{2}$, numai două soluții.]

262. Un unghi drept se rotește în jurul vîrfului său, care este în vîrful A al unei elipse, iar laturile sale întîlnesc din nou elipsa în punctele M și N. Să se demonstreze că dreapta MN trece printr-un punct fix.

[Particularizare a teoremei lui Frégier. Ecuația dreptei MN: $(a^2+b^2)mx+a^2(m^2-1)y-ac^2m=0$. Se împarte cu m și se notează $\frac{m^2-1}{m}=\lambda$; se obține un fascicul.]

263. Să se scrie ecuația tangentei în punctul $x=2$, la curba $y^2=x^3+1$.

[$y=\pm\sqrt{x^3+1}$, deci curba are două ramuri. Tangenta la $y=\sqrt{x^3+1}$ este $2x-y-1=0$.]

264. Să se scrie ecuația elipsei care trece prin punctele $M(6, 4)$, $B(0, 5)$, elipsa fiind raportată la axele sale.

Să se scrie ecuația tangentei în punctul M.

$$\left[\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{15}-1=0;\ 3x+8y-50=0.\right]$$

265. Să se scrie ecuația tangentei la elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1=0$, în punctul din cadranul I care are $x=2$.

[$3x+4\sqrt{3}y-24=0$.]

266. Să se găsească ecuația unei elipse, raportată la axele sale, știind că are axa mare egală cu 8 și este tangentă dreptei $y=x+5$ (C.d.p.).

[$a^2=16,\ b^2=9$.]

267. Să se găsească ecuația unei elipse care este raportată la axele sale, știind că axa mică este de 6 unități și are ca tangentă dreapta $x-2y+14=0$.

[$a^2=160,\ b^2=9$.]

268. Să se determine ecuația elipsei, raportată la axele sale, care este tangentă dreptelor $x-4y+13=0$ și $4x-5y-25=0$.

Să se figureze elipsa și dreptele.

[$a^2=25,\ b^2=9$.]

269. Să se afle ecuația elipsei, raportată la axele sale, care este tangentă dreptei $2x+3\sqrt{3}y-24=0$, în punctul $(3, 2\sqrt{3})$.

[$a^2=36,\ b^2=16$.]

270. Să se găsească ecuația hiperbolei, raportată la axele sale, care este tangentă dreptei $3x-2y-8=0$, în punctul $(6, 5)$.

[$a^2=16,\ b^2=20$.]

271. Să se scrie ecuațiile tangentelor la hiperbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}-1=0$, paralele cu dreapta $2x-y+2=0$.

[$y=2x\pm 8$.]

272. Să se găsească ecuația unei hiperbole, știind că este raportată la axele sale, că distanța focală este $\overline{FF'}=10$ și că este tangentă dreptei $5x-4y-16=0$.

[$a^2=16,\ b^2=c^2-a^2=9$.]

273. Să se afle ecuația hiperbolei, raportată la axele sale, care este tangentă dreptelor $7x-5y-25=0$ și $8x-5\sqrt{2}y-20=0$.

[$a^2=25,\ b^2=24$.]

274. Să se determine hiperbola echilaterală raportată la axe:

a) care trece prin punctul $(13, 5)$;

b) care este tangentă dreptei $3x-2y-10=0$;

c) a cărei tangentă în punctul corespunzător abscisei focarului are ordonata la origine $y=3$.

[a) $x^2-y^2=144$; b) $x^2-y^2=20$; c) $x^2-y^2=9$.]

275. Se duce prin mijlocul semiaxei OB' o paralelă la axa mare a unei elipse, care taie elipsa în punctele M și N. Să se arate că tangenta în M este paralelă coardei BN și tangenta în N este paralelă coardei BM.

276. O tangentă variabilă la elipsă întîlnește tangentele duse la extremitățile A, A' ale axei mari în punctele P și Q. Să se demonstreze că produsul $\overline{AP}\cdot\overline{A'Q}$ este constant. Să se precizeze dinainte care este constanta.

[Pentru a preciza constanta, se duce tangenta în B, poziție particulară.]

277. Aceleași date ca mai sus. Să se arate că segmentul PQ al tangentei variabile este văzut din focare sub un unghi drept.

278. Să se arate că produsul distanțelor de la focare la o tangentă oarecare a elipsei este constant (C.d.p.).

279. Produsul distanțelor de la un focar la două tangente paralele este constant. Să se caute legătura dintre această problemă și cea precedentă.

[Din cauza simetriei, distanțele din această problemă sînt egale cu cele din problema precedentă.]

280. Se duce tangenta într-un punct M al unei hiperbole. Să se arate că M este mijlocul segmentului din tangentă, cuprins între asimptote.

281. O dreaptă întîlnește o hiperbolă în M și N, iar asimptotele ei în P și Q. Să se arate că segmentele MN și PQ au același mijloc.

Să se deducă de aici proprietatea din problema precedentă.

282. Să se afle ecuațiile tangentelor duse din punctul $P(5, 7)$ la elipsa $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}-1=0$.

[$3x+5y-50=0$; $x+3y-26=0$.]

283. Fiind dată o elipsă cu focarele F și F', se ia un punct T pe tangenta la elipsă într-una din extremitățile axei mici. Să se arate că a doua tangentă dusă prin T la elipsă este tangentă și cercului TFF' (C.G.M(*) 1928).

284. O tangentă variabilă întîlnește în M și M' tangentele duse la extremitățile axei mari ale unei elipse. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor MA' și $M'A$.

[Elipsa cu axa mică pe jumătate. Se ia $MA=\lambda$ și atunci $M'A=\frac{b^2}{\lambda}$. Vezi și problema 276.]

285. Aceleași date ca mai sus. Se cere locul intersecției perpendicularelor duse din M și M', respectiv pe OM' și OM. Locul fiind o elipsă cu semiaxele α și β, să se arate că avem relația

$$\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{c^2}.$$

286. O elipsă are axa mare $\overline{AA'}=2\overline{BB'}$. O tangentă variabilă taie tangenta din B în punctul N și tangenta din B' în punctul N'. Se cere locul intersecției perpendicularelor duse din N și N', respectiv pe BN' și $B'N$.

[Cercul $x^2+y^2-b^2=0$.]

287. Să se găsească ecuațiile tangentelor duse din punctul $C(7a, 8b)$ la hiperbola cu semiaxele a și b, raportată la axele sale.

$$\left[\frac{5x}{3a}-\frac{4y}{3b}-1=0; \quad \frac{13x}{-5a}+\frac{12y}{5b}-1=0.\right]$$

288. Să se găsească punctul M pe axa netransversă a unei hiperbole, astfel ca tangentele duse la curbă să determine pe tangenta în vîrful A un segment de lungime dată $2k$. Care este valoarea minimă a lui k? Caz particular $k=c$ (semidistanța focală).

[Se scrie ecuațiile tangentelor și se taie cu $x-a=0$; $M(0, \sqrt{k^2-b^2}$, $M'(0,-\sqrt{k^2-b^2}$; $k=b$ cînd $M\equiv 0$. Caz particular: $M(0, a)$, $M'(0, -a)$.]

* Concursul „Gazetei Matematice".

289. Prin focarul F al unei hiperbole se duce perpendiculara pe axa transversă și fie C unul din punctele unde această perpendiculară întîlnește hiperbola. Să se afle ecuațiile tangentelor paralele care determină pe tangenta în C un segment egal cu $2\sqrt{a^2+c^2}$.

Caz particular pentru hiperbola echilateră.

[$(b^2+c^2)x-2acy\pm a^3=0$; $3x-2\sqrt[3]{2}y\pm a=0$.]

290. Se dă hiperbola echilateră raportată la axele sale și cercul care are ca diametru axa transversă. O paralelă la Ox taie cercul în M și hiperbola în N. Să se determine această paralelă astfel ca tangentele în M și N la cele două curbe să fie perpendiculare.

$$\left[y=\pm\frac{a}{\sqrt[4]{2}}.\right]$$

291. O paralelă (Δ) la una din asimptotele unei hiperbole întîlnește hiperbola în punctul M. Tangenta în M la hiperbolă taie aceeași asimptotă în N. Se cere locul geometric al intersecției dreptei (Δ) cu paralela dusă prin N la o doua asimptotă.

$$\left[\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}-1=0.\right]$$

292. O elipsă și o hiperbolă au aceleași focare. Să se arate că în punctele de intersecție tangentele la cele două curbe sînt perpendiculare (curbele sînt ortogonale).

CAPITOLUL **XVII**

PROPRIETĂȚI ALE ELIPSEI ȘI HIPERBOLEI

LOCURI GEOMETRICE

1. *Tangenta la elipsă într-un punct M este bisectoarea exterioară a unghiului format de razele vectoare ale lui M.*

Fie $M(x_0, y_0)$ un punct al elipsei, prin urmare

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0. \qquad (1)$$

Ecuația razei vectoare FM este

$$(FM)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}=y_0x-(x_0-c)y-cy_0=0.$$

Pentru raza vectoare $F'M$ este destul să schimbăm pe c în $(-c)$ și găsim ecuația

$$(F'M)\ y_0x-(x_0+c)y+cy_0=0.$$

Ecuațiile bisectoarelor unghiului format de razele vectoare sînt

$$\frac{y_0x-(x_0-c)y-cy_0}{\pm\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}}=\pm\frac{y_0x-(x_0+c)y+cy_0}{\pm\sqrt{y_0^2+(x_0+c)^2}}.$$

Pentru a scrie bisectoarea exterioară, ne vom referi la regula pe care am dat-o la scrierea bisectoarelor, anume vom face ca în fiecare parte a ecuației termenul liber din ecuația normală să fie negativ; pentru aceasta în prima parte se ia în fața radicalului $(+)$, iar în a doua parte $(-)$. Apoi în fața liniei de fracție, pentru unghiul care *conține originea* se ia semnul $(+)$, deci *pentru unghiul* exterior $(-)$.

Ținînd apoi seama că $\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=\frac{a^2+cx_0}{a}$ și $\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\frac{a^2-cx_0}{a}$ [a se vedea cap. XV, (3)], ecuația bisectoarei exterioare este:

$$\frac{y_0x-(x_0-c)y-cy_0}{a^2-cx_0}=\frac{y_0x-(x_0+c)y+cy_0}{a^2+cx_0}.$$

Dacă facem suma numărătorilor pe suma numitorilor, apoi diferența numărătorilor pe diferența numitorilor obținem

$$\frac{y_0x-x_0y}{a^2}=\frac{y_0-y}{x_0} \text{ sau } x_0y_0x+(a^2-x_0^2)y-a^2y_0=0.$$

Însă M fiind pe elipsă, din (1) rezultă $a^2-x_0^2=\frac{a^2}{b^2}y_0^2$ și ecuația bisectoarei devine $x_0y_0x+\frac{a^2}{b^2}y_0^2y-a^2y_0=0$, care simplificată cu y_0 și împărțită cu a^2 ne dă

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0, \qquad (2)$$

adică tangenta în M. Prin urmare bisectoarea unghiului exterior celui format de razele vectoare este tangenta în M. Perpendiculara în M pe tangentă la curbă poartă numele de *normala la elipsă în punctul M*. Este evident că normala este bisectoarea interioară a unghiului format de razele vectoare FM, $F'M$.

Observare. În baza acestei proprietăți, dacă o jumătate de elipsă ar fi oglindită pe partea interioară și s-ar așeza o sursă luminoasă într-un focar, atunci razele reflectate s-ar concentra în celălalt focar. Din această cauză proprietatea se numește *proprietatea optică* a elipsei.

2. *Tangenta la hiperbolă într-un punct M este bisectoarea interioară a unghiului format de razele vectoare ale lui M.* Deoarece $M(x_0, y_0)$, $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ecuațiile dreptelor FM și $F'M$ rămîn absolut aceleași ca la elipsă. Ca să ne asigurăm este destul să privim determinantul care dă pe FM și să observăm că elementele sînt aceleași.

Deosebirile față de elipsă sînt următoarele:

1) Condiția ca M să fie pe hiperbolă $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$;

2) $\sqrt{y_0^2+(x_0-c)^2}=\frac{cx_0-a^2}{a}$, deoarece la hiperbolă avem $c>a$, $x_0>a$ și deci $cx_0-a^2>0$ (la elipsă $a^2-cx_0>0$).

3) Fiind vorba de bisectoarea interioară, deci a unghiului care conține originea, în fața liniei de fracție se ia semnul $(+)$.

Ecuația bisectoare interioară se scrie direct

$$\frac{y_0x-(y_0-c)y-cy_0}{cx_0-a^2}=+\frac{y_0x-(x_0+c)y+cy_0}{-(cx_0+a^2)}.$$

Dacă se aplică şi aici proprietăţile rapoartelor egale şi se face suma numărătorilor pe suma numitorilor, apoi diferenţa numărătorilor pe diferenţa numitorilor, se obţine

$$\frac{y_0x - x_0y}{-a^2} = \frac{y - y_0}{x_0} \quad \text{sau} \quad x_0y_0x - (x_0^2 - a^2)y - a^2y_0 = 0.$$

Dar din condiţia ca M să fie pe hiperbolă avem $x_0^2 - a^2 = \frac{a^2}{b^2}y_0^2$, care înlocuită în ecuaţia de mai înainte şi făcînd aceleaşi operaţii ca la elipsă, ne duce la ecuaţia bisectoarei

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0;$$

aceasta nu este decît tangenta în M la hiperbolă.

Bisectoarea exterioară a unghiului FMF' este perpendiculară pe tangenta în M, prin urmare este *normala în M* la hiperbolă.

3. Consecinţe. a) *Construcţia tangentei la elipsă şi hiperbolă.* Fie M punctul în care vrem să ducem tangenta *la elipsă*. Prelungind raza vectoare $\overline{F'M}$ cu lungimea $\overline{MN} = \overline{MF}$ (fig. 79) se formează triunghiul isoscel FMN, în care bisectoarea (tangenta) este şi înălţime şi mediană. Prin urmare tangenta în M se poate construi fie ca *mediatoare* a segmentului $\overline{FN}$, fie ca *mediană* a triunghiului FMN.

La hiperbolă, construcţia tangentei într-un punct M se face în mod asemănător, cu deosebirea că segmentul $\overline{MN} = \overline{MF}$ se ia pe raza vectoare MF' şi nu pe prelungirea ei (fig. 80). Se obţine triunghiul isoscel FMN. Restul construcţiei, ca la elipsă.

b) *Cercurile directoare.* La elipsă, urmărind figura 79 se observă că avem $\overline{F'N} = \overline{F'M} + \overline{MN} = \overline{F'M} + \overline{MF} = 2a$, relaţie care arată că punctul N descrie un cerc cu centrul în F' şi cu raza $2a$, cît axa mare a elipsei. Acesta se numeşte *cerc director* al elipsei. În mod asemănător se arată că avem un al doilea cerc director, cu centrul în F şi cu aceeaşi rază.

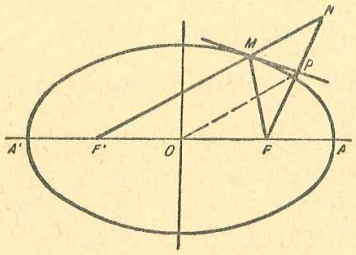


Fig. 79.

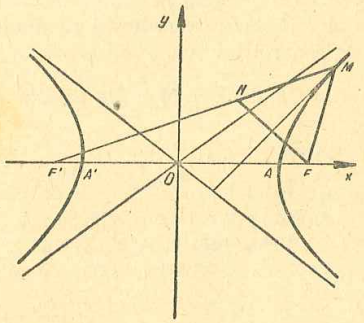


Fig. 80.

Observînd că N este simetricul focarului F faţă de tangentă, se poate enunţa următoarea proprietate: *locul geometric al simetricului unui focar, faţă de o tangentă variabilă la elipsă, este cercul director cu centrul în celălalt focar.*

Depărtarea de la un punct la un cerc se măsoară pe dreapta care uneşte acel punct cu centrul cercului, deci depărtarea de la punctul M la cercul director cu centrul în F' este $\overline{MN}$. Se observă apoi că elipsa este în întregime interioară cercului director. Aceste observaţii simple ne permit să enunţăm următoarea propoziţie: *locul geometric al punctelor egal depărtate de un cerc şi de un punct F interior cercului este o elipsă, avînd ca focare punctul F şi centrul cercului, iar axa mare egală cu raza cercului.*

La hiperbolă avem evident (fig. 80)

$$\overline{F'N} = \overline{F'M} - \overline{NM} = \overline{F'M} - \overline{MF} = 2a,$$

deci punctul N descrie un cerc — *cercul director* — cu centrul în F' şi raza $2a$, cît axa transversă a hiperbolei. Al doilea cerc director, cu aceeaşi rază, are centrul în F.

Deoarece N este simetricul focarului F faţă de tangentă, se poate enunţa propoziţia: *locul geometric al simetricului unui focar faţă de o tangentă variabilă la hiperbolă, este cercul director cu centrul în celălalt focar.*

Se observă că distanţa de la M la cercul director este $\overline{MN}$, iar focarul F este la hiperbolă exterior acestui cerc. De aici rezultă: *locul geometric al punctelor egal depărtate de un cerc şi de un punct F exterior cercului, este o hiperbolă, avînd ca focare punctul F şi centrul cercului, iar axa transversă egală cu raza cercului.*

c) Fie P mijlocul segmentului $\overline{FN}$, care este în acelaşi timp proiecţia focarului F al elipsei pe tangenta în M (v. fig. 79). În triunghiul $FF'N$, segmentul $\overline{OP}$ uneşte mijloacele a două laturi, deci $OP \| F'N$ şi $\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{F'N} = a$. De aici se desprinde că: *locul geometric al proiecţiei unui focar al elipsei pe tangentele ei, este cercul cu centrul în origine şi cu raza a, adică cercul principal.*

La hiperbolă proprietatea este aceeaşi şi se demonstrează la fel.

Locul geometric este deci cercul cu diametrul cît axa mare a elipsei sau axa transversă a hiperbolei.

4. *Elipsa şi hiperbola* se obţin ca secţiuni făcute cu un plan într-o suprafaţă conică de rotaţie. Suprafaţa conică se obţine prelungind generatoarele unui con la infinit, de o parte şi de cealaltă a vîrfului, astfel că întreaga suprafaţă este simetrică faţă de vîrf.

Prin vîrful suprafeţei conice să ducem un plan Pv, paralel cu planul de secţiune P în suprafaţa conică.

a) Dacă Pv nu întîlneşte suprafaţa conică în nici un punct afară de vîrf, secţiunea făcută de P în suprafaţa conică este o *elipsă*.

b) Dacă Pv taie suprafaţa conică după două generatoare distincte, secţiunea făcută de P în suprafaţa conică este o *hiperbolă*. De aceea elipsa şi hiperbola se mai numesc *secţiuni conice*, sau mai scurt *conice*. Deoarece ambele curbe au *centru de simetrie*, ele poartă numele de *conice cu centru*.

Această origine comună a celor două curbe, ca secţiuni conice, explică asemănarea proprietăţilor lor, pe care am constatat-o pînă aici şi pe care o vom urmări şi în cele ce urmează.

TRANŞA III

5. *Directoare la elipsă și hiperbolă.* Să ducem o perpendiculară pe axa mare AA' (la hiperbolă pe axa transversă), la o distanță $\overline{OE}=x$ de centru, dată de

$$x=\frac{a^2}{c}. \tag{3}$$

La elipsă $a>c$, deci $x=a\cdot\frac{a}{c}>a$ și dreapta este exterioară segmentului $\overline{AA'}$ (deci exterioară elipsei); la hiperbolă $a<c$ și $x=a\cdot\frac{a}{c}<a$, deci $E\in\overline{AA'}$ (dreapta este tot *exterioară* hiperbolei).

Dreapta $x=\frac{a^2}{c}$ se numește directoarea elipsei sau a hiperbolei.

Construcția directoarei la elipsă. Fie N punctul de pe cercul principal care are aceeași abscisă ca focarul (fig. 81). *Tangenta în N la cercul principal taie axa Ox în punctul E.*

În adevăr din triunghiul dreptunghic ONE, în care NF este înălțime, rezultă $\overline{ON}^2=\overline{OF}\cdot\overline{OE}$, de unde

$$\overline{OE}=\frac{\overline{ON}^2}{\overline{OF}}=\frac{a^2}{c}.$$

Perpendiculara în E pe AA' este dreapta $x=\frac{a^2}{c}$, prin urmare directoarea elipsei, corespunzătoare focarului F.

A doua directoare corespunde focarului F' și are drept ecuație

$$x=-\frac{a^2}{c}.$$

Se observă că cele două directoare sînt simetrice față de centrul elipsei.

Construcția directoarei la hiperbolă. Se duce tangenta din focarul F la cercul cu diametrul $\overline{AA'}$ și se notează cu T punctul de tangență. *Perpendiculara dusă din T pe axa transversă este directoarea corespunzătoare focarului F* (fig. 82).

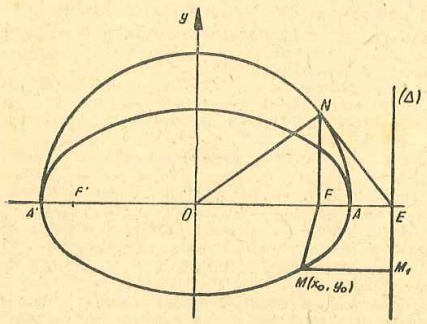


Fig. 81.

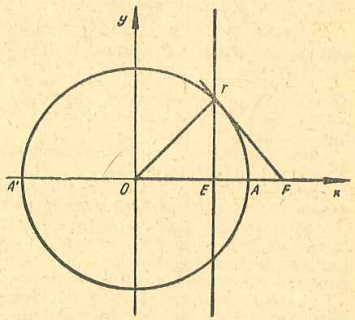


Fig. 82.

În adevăr dacă E este proiecția lui T pe axa Ox, atunci din triunghiul dreptunghic OTF avem

$$\overline{OT}^2=\overline{OE}\cdot\overline{OF},\ \text{deci}\ \overline{OE}=\frac{\overline{OT}^2}{\overline{OF}}=\frac{a^2}{c}.$$

A doua directoare, corespunzătoare focarului F', este simetrică primei directoare față de origine, adică

$$x=-\frac{a^2}{c}.$$

6. Teoremă. *Raportul distanțelor de la un punct al elipsei (hiperbolei) la focar și la directoare este constant.*

Fie $M(x_0, y_0)$ pe elipsă. Din relația (3) cap. XV avem schimbînd pe (c) în $(-c)$:

$$\overline{MF}=\sqrt{(x_0-c)^2+y^2}=\frac{a^2-cx_0}{a}.$$

Distanța $\overline{MM_1}$ de la M la directoare este diferența absciselor, prin urmare

$$\overline{MM_1}=\frac{a^2}{c}-x_0=\frac{a^2-cx_0}{c}.$$

Rezultă imediat

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MM_1}}=\frac{c}{a}=\text{const.}$$

Acest raport constant se notează cu litera e (să nu se confunde cu baza logaritmilor naturali) și se numește *excentricitatea elipsei.* Deoarece la elipsă $c<a$, avem $e=\frac{c}{a}<1$. Excentricitatea arată cît de depărtate de centru (deci cît de excentrice) sînt focarele pe axa mare. Dacă $e=0$, atunci $c=0$ și elipsa se reduce la un cerc; dacă $e=1$, atunci $c=a$ $(b=0)$ și elipsa degenerează în axa mare $\overline{AA'}$. Prin urmare cu cît excentricitatea este mai mică cu atît elipsa se apropie mai mult de cerc.

La hiperbolă problema se tratează în mod asemănător cu deosebirea că $\overline{MF}=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\frac{cx_0-a^2}{a}$ și $\overline{MM_1}=x_0-\frac{a^2}{c}=\frac{cx_0-a^2}{c}$, de unde

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MM_1}}=\frac{c}{a}=\text{const.}$$

Ca și la elipsă raportul acesta se notează cu e și se numește *excentricitatea hiperbolei.* La hiperbolă însă $c>a$, deci $e=\frac{c}{a}>1$; hiperbola are excentricitatea *supraunitară.*

7. *Diametri.* Orice dreaptă care trece prin centrul unei elipse sau al unei hiperbole se numește *diametru.*

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

293. Fie M punctul din primul cadran unde elipsa este tăiată de diagonala dreptunghiului circumscris ei. Să se arate că OM și tangenta în M sînt egal înclinate pe axa mare a elipsei.

[Se arată că punctul N în care tangenta taie axa Ox are abscisa de două ori mai mare decît abscisa lui M, deci OMN este isoscel.]

294. Tangenta într-un punct M al elipsei taie tangentele de la extremitățile A, A' ale axei mari în punctele P și Q. Să se demonstreze că dreptele PF și QF' și perpendiculara M pe tangentă (normala la elipsă) sînt concurente. Să se afle locul punctului de concurență.

[Locul geometric este elipsa $b^2x^2+(a-c)^2y^2-b^2c^2=0$. Axa mare este pe Oy și axa mică egală cu distanța focarelor elipsei date.]

295. Să se arate că suma inverselor pătratelor a doi diametri perpendiculari într-o elipsă este constantă. Să se găsească dinainte constanta, fără calcul.

[Doi diametri perpendiculari sînt chiar axele, deci constanta este: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.]

296. Să se demonstreze că dacă axa mare AA' a unei elipse este egală cu diagonala pătratului care are ca latură distanța focală FF', atunci segmentul MN perpendicular pe tangenta într-un punct curent M, unde $N\in Ox$, este media geometrică a segmentelor $\overline{F'N}$ și $\overline{NF}$.

297. Perpendiculara pe tangenta într-un punct M (normala) al unei hiperbole echilaterale, raportată la axe, taie aceste axe în P și Q. Să se arate că M este mijlocul segmentului $\overline{PQ}$.

298. Tangenta într-un punct M al hiperbolei taie tangentele din vîrfurile A și A', respectiv în P și Q. Să se demonstreze că atunci cînd M se mișcă pe hiperbola:

a) produsul $\overline{AP}\cdot\overline{A'Q}$ este constant;

b) unghiurile PFQ și $PF'Q$ sînt drepte (F, F' focarele).

299. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ și hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$. Prin vîrful comun A al celor două conice se duce o secantă variabilă care le intersectează a doua oară, respectiv în M și N. Se cere locul geometric al intersecției tangentelor: în M la elipsă și în N la hiperbolă.

[Secanta $y=\lambda(x-a)$. Ecuațiile tangentelor: $(a^2\lambda^2-b^2)x-2a^2\lambda y-a(a^2\lambda^2+b^2)=0$; $(a^2\lambda^2+b^2)x-2a^2\lambda y-a(a^2\lambda^2-b^2)=0$. Eliminarea lui λ prin scădere. Locul este tangenta în A'.]

CAPITOLUL XVIII

PARABOLA

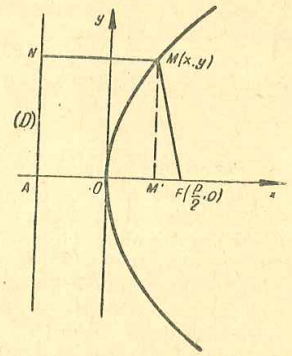


Fig. 83

1. Definiție. *Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de o dreaptă fixă și de un punct fix. Dreapta fixă se numește* **directoarea** *parabolei, iar punctul fix* **focarul** *parabolei.*

Pentru a găsi ecuația parabolei ne alegem întîi un sistem de referință, anume: perpendiculara din focarul F pe directoarea (D) ca axă Ox și paralela la (D) dusă la jumătatea distanței dintre focar și directoarea (D), ca axă Oy. Notăm $A\equiv(D)\cap Ox$. Fie M un punct al parabolei și N proiecția lui pe directoare (fig. 83).

Se obișnuiește să se noteze $\overline{AF}=p$, de unde rezultă: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ și $A\left(-\frac{p}{2},0\right)$. $\overline{MF}$ se numește, ca și la elipsă sau hiperbolă, rază vectoare. Relația geometrică pe care o satisface punctul M se deduce din enunț

$$\overline{MF}=\overline{MN}. \tag{1}$$

Dacă $M(x,y)$ este un punct curent al parabolei, avem $\overline{MN}=x-\left(-\frac{p}{2}\right)=x+\frac{p}{2}$, astfel încît (1) devine

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}. \tag{1'}$$

Ridicînd la pătrat și trecînd toți termenii în prima parte se obține

$$y^2-2px=0. \tag{2}$$

Aceasta este ecuația parabolei, raportată la axele alese; p se numește *parametrul parabolei.*

Observare. Dacă s-ar schimba între ele A cu F, aceasta ar însemna să se înlocuiască p cu $(-p)$ și ecuația parabolei ar deveni

$$y^2+2px=0. \tag{2'}$$

Parabolele (2) și (2') sînt dispuse simetric față de axa Oy.

2. *Forma parabolei.* Să notăm cu (Γ) parabola. Dacă $M(x_0, y_0)\in(\Gamma)$, adică verifică ecuația (2), este clar că și $M_1(x_0, -y_0)$ verifică ecuația, deci $M_1\in(\Gamma)$. Însă M și M_1 sînt simetrice față de Ox, astfel că parabola are punctele simetrice față de Ox; prin urmare Ox (perpendiculara dusă din focar pe directoare) este axa de simetrie a parabolei. Acest lucru se poate constata și rezolvînd ecuația (2) în raport cu y; se obține $y=\pm\sqrt{2px}$ care reprezintă două ramuri de curbă, simetrice față de Ox. Originea O aparține curbei și este singurul punct care coincide cu simetricul său. Acest punct este *vîrful parabolei.* Rezultă că axa Oy taie curba în două puncte confundate, deci este tangentă la parabolă și se numește *tangenta la vîrf.* Pentru a ne da seama de forma curbei, este de ajuns să studiem ramura așezată deasupra axei Ox

$$y=\sqrt{2px}\,; \tag{3}$$

restul se completează prin simetrie. Curba există pentru $x\geqslant 0$ și se observă că y crește o dată cu x. Nu există nici un fel de asimptote. Forma curbei este dată în figura 83.

Parabola se obține, ca și elipsa sau hiperbola, prin secțiunea unei suprafețe conice cu un plan, însă de data aceasta planul trebuie să fie paralel cu un *plan tangent la suprafața conică,* de-a lungul unei generatoare. Așadar și parabola este o *secțiune conică,* însă *fără centru de simetrie* sau, mai scurt, *conică fără centru.*

Ecuația parabolei se prezintă sub formă simplă (2) datorită faptului că am ales axele în mod particular. Se zice că (2) este ecuația parabolei, *raportată la axa de simetrie și la tangenta la vîrf.*

Dacă parabola se raportează la alte axe, ecuația ei nu mai apare sub forma simplă (2).

3. 1) *Construcția unui arc de parabolă prin mișcare continuă.* Fie (D) directoarea și F focarul parabolei. Se așază o riglă L, astfel ca marginea ei să se suprapună dreptei (D) și un echer a cărui catetă mică BC se sprijină pe riglă. Un fir de lungime egală cu cateta mare AB a echerului se fixează cu un capăt în F și cu celălalt în vîrful A al echerului. Se întinde bine firul cu vîrful M al unui creion, care se sprijină pe cateta AB (fig. 84). Cînd echerul se deplasează, alunecînd cu cateta BC pe rigla L, punctul M descrie un arc de parabolă, deoarece $\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AM}+\overline{MF}$, adică $\overline{MB}=\overline{MF}$.

Răsturnînd echerul se descrie arcul de parabolă simetric față de perpendiculara dusă din F pe (D).

2) *Construcția parabolei prin puncte*

Metoda I. Cu vîrful compasului în F descriem un cerc cu raza r, apoi ducem o paralelă la directoarea (D), la distanța r, de la A spre F (fig. 85). Punctele comune cercului și dreptei astfel construite aparțin parabolei, deoarece sînt egal depărtate de directoare și de focar.

Metoda a II-a se desprinde din faptul că triunghiul FMN este isoscel. Se ia un punct N pe directoare, se duce prin N paralela NM la Ox, apoi mediatoarea segmentului $\overline{NF}$, care întîlnește pe NM în M. Acesta este un punct al parabolei, deoarece $\overline{MN}=\overline{MF}$.

Prima metodă dă deodată două puncte simetrice și se poate trage curba de ambele părți ale axei. Prin a doua metodă, la fiecare punct $N\in(D)$ se obține un singur punct M al parabolei. Vom vedea însă mai tîrziu că mediatoarea segmentului $\overline{NF}$ este chiar tangenta în M la parabolă, fapt care permite trasarea mult mai exactă a curbei, în jurul punctului M.

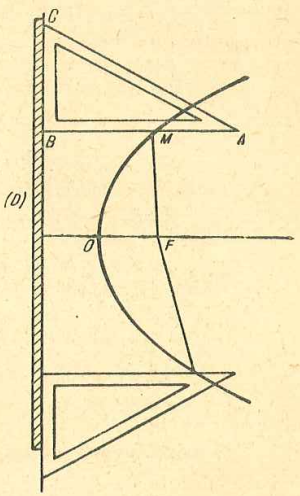


Fig. 84.

4. *Excentricitatea parabolei* este, ca și la celelalte conice, *raportul* dintre distanța de la punctul M la focar și la directoare, adică $e=\dfrac{\overline{MF}}{\overline{MN}}$. La parabolă însă $\overline{MF}=\overline{MN}$, deci $e=\dfrac{\overline{MF}}{\overline{MN}}=1$.

După cum se vede excentricitatea este un element care caracterizează cele patru curbe de gradul al II-lea, și anume

$e=0$	caracterizează	cercul
$0<e<1$	„	elipsa
$e=1$	„	parabola
$e>1$	„	hiperbola

5. *Intersecția parabolei cu o dreaptă.* Punctele comune parabolei cu dreapta $y=mx+n$ se găsesc rezolvînd sistemul

$$y^2-2px=0; \qquad y=mx+n. \tag{4}$$

Înlocuind pe y în prima ecuație se obține ecuația care dă abscisele

$$m^2x^2+2(mn-p)x+n^2=0. \tag{5}$$

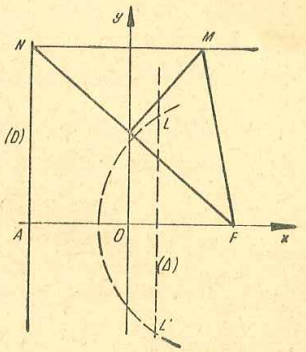


Fig. 85.

Ordonatele se capătă înlocuind rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației (5) în ecuația dreptei.

Discuție. Realitatea punctelor de intersecție depinde de realizantul ecuației (5), care este

$$R=(mn-p)^2-m^2n^2=p(p-2mn). \tag{6}$$

Presupunem $p>0$, adică parabola îndreptată către x pozitiv. Putem avea următoarele cazuri:

a) $R>0$, dacă $p>2mn$. Rădăcinile sînt *reale* și distincte și dreapta este secantă *parabolei.*

b) $R=0$, dacă $p=2mn$. Rădăcinile sînt *confundate* și dreapta este *tangentă* parabolei.

c) $R<0$, dacă $p<2mn$. Rădăcinile sînt *complexe* și dreapta nu taie parabola, adică este *exterioară* ei.

Exemple. a) *Ce poziție are dreapta* $2x-3y+6=0$, *față de parabola* $y^2=6x$?

Eliminînd pe y se găsește $2x^2-15x+18=0$, cu rădăcinile $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=6$. Din ecuația dreptei rezultă $y_1=3$, $y_2=6$. Dreapta taie deci parabola în punctele $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ și (6, 6).

b) *Să se arate că dreapta* $x-2y+3=0$ *este tangentă parabolei* $y^2-3x=0$.

Prin eliminarea lui y se obține ecuația $x^2-6x+9=0$, cu rădăcina dublă $x=3$. Punctul de tangență este (3, 3).

c) *Să se arate că dreapta* $4x+2y+1=0$ *este exterioară parabolei* $y^2-x=0$.

În adevăr înlocuind pe $y=-\frac{4x+1}{2}$ în ecuația parabolei se găsește ecuația $16x^2+4x+1=0$, ale cărei rădăcini sînt complexe.

Probleme de tangență

6. *Tangenta într-un punct al parabolei.* Ecuația parabolei

$$y^2-2px=0 \tag{7}$$

dă $y^2=2px$, de unde, prin derivare, $2yy'=2p$. Rezultă $y'=\frac{p}{y}$. În punctul $M(x_0, y_0)$ de pe parabolă vom avea $y'_0=\frac{p}{y_0}=m$, coeficientul unghiular al tangentei. Atunci ecuația tangentei este

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0) \text{ sau } yy_0-y_0^2-px+px_0=0.$$

Deoarece M aparține parabolei trebuie ca $y_0^2=2px_0$ și înlocuind în ecuația precedentă se obține pentru tangentă forma definitivă

$$yy_0-p(x+x_0)=0 \tag{8}$$

cu condiția $y_0^2-2px_0=0$.

Ecuația tangentei într-un punct al parabolei se deduce din ecuația parabolei prin același procedeu de dedublare ca la cerc, anume se scrie parabola sub forma

$$yy-p(x+x)=0,$$

apoi se pune indice unui y și unui x.

Exemplu. *Să se scrie ecuațiile tangentelor la parabola* $y^2-2px=0$, *în punctele care se proiectează pe axă în focar.* Fie M și M' aceste puncte, care au, evident, abscisa $x=\frac{p}{2}$. Din ecuația parabolei rezultă $y=\pm p$, deci $M\left(\frac{p}{2}, p\right)$ și $M'\left(\frac{p}{2}, -p\right)$. Înlocuind în (8) se obțin cele două tangente

$$py-p\left(x+\frac{p}{2}\right)=0 \quad \text{și} \quad -py-p\left(x+\frac{p}{2}\right)=0 \text{ sau}$$

$$x-y+\frac{p}{2}=0 \quad \text{și} \quad x+y+\frac{p}{2}=0.$$

Se observă că ele sînt paralele cu bisectoarele axelor de coordonate și trec prin punctul $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ unde directoarea parabolei taie axa Ox.

7. *Tangenta de direcție dată.* Direcția se dă, ca de obicei, prin coeficientul unghiular m, prin urmare ca dreapta $y=mx+n$ să fie tangentă parabolei rămîne să se determine n. Însă aceasta rezultă imediat din condiția ca realizantul (6) să fie nul, anume $p=2mn$, de unde se deduce $n=\frac{p}{2m}$. Înlocuind în ecuația dreptei se găsește că la parabolă se poate duce *o singură tangentă* cu direcția dată, a cărei ecuație este

$$y=mx+\frac{p}{2m}. \tag{9}$$

După cum se vede, apare o deosebire față de elipsă și hiperbolă.

Exemplu. *Să se determine ecuațiile tangentelor la parabolă, paralele cu bisectoarele axelor.*

Facem pe rînd $m=1$ și $m=-1$ în (9) și rezultă cele două tangente: $y=x+\frac{p}{2}$; $y=-x-\frac{p}{2}$.

Sînt aceleași tangente ca cele găsite în exemplul din § 6.

Problemă. *Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce, la o parabolă, tangente perpendiculare.*

Scriem ecuația unei tangente oarecare a parabolei

$$y=mx+\frac{p}{2m}$$

și a tangentei perpendiculare, care va avea drept coeficient unghiular

$$m' = -\frac{1}{m},$$

$$y = -\frac{1}{m}x - \frac{mp}{2}.$$

Urmează să eliminăm parametrul m între cele două ecuații, pentru a găsi locul geometric. Înmulțind ecuațiile cu m, ele se scriu

$$my = m^2x + \frac{p}{2} \quad \text{și} \quad -my = x + m^2\frac{p}{2}.$$

Prima adunare se obține $(m^2+1)\left(x+\frac{p}{2}\right)=0$, sau, deoarece $m^2+1\neq 0$, rămîne ecuația locului geometric

$$x + \frac{p}{2} = 0 \text{ sau } x = -\frac{p}{2}$$

Locul căutat este *directoarea* parabolei.

8. *Tangentele duse la parabolă, dintr-un punct exterior.* Fie $P(x_0, y_0)$ punctul din care vrem să ducem tangentele la parabolă. Ne trebuie coeficientul unghiular m, astfel ca tangenta la parabolă

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

să treacă prin P. Înlocuim deci în această ecuație coordonatele lui P și obținem

$$y_0 = mx_0 + \frac{p}{2m}, \tag{10}$$

de unde rezultă ecuația de gradul al II-lea în m

$$x_0m^2 - y_0m + \frac{p}{2} = 0 \tag{10'}$$

Dacă m_1, m_2 sînt rădăcinile acestei ecuații, tangentele căutate se scriu ca drepte care trec prin $P(x_0, y_0)$ și au coeficientul unghiular cunoscut, deci

$$y - y_0 = m_1(x - x_0) \text{ și } y - y_0 = m_2(x - x_0). \tag{11}$$

Așadar dintr-un punct exterior se pot duce două tangente la parabolă.

Exemplu. *Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul* $P(-3, 5)$ *la parabola* $y^2 = 8x$.

Avem $p=4$. Ecuația (10') devine $3m^2+5m-2=0$, cu rădăcinile $m_1=-2$; $m_2=\frac{1}{3}$.

Cele două tangente au ecuațiile $y-5=-2(x+3)$ și $y-5=\frac{1}{3}(x+3)$ sau aduse la forma generală: $2x+y+1=0$ și $x-3y+18=0$.

Aplicație. *Să regăsim locul geometric al punctelor de unde putem duce tangente perpendiculare, la o parabolă.*

$5 = -3m + \frac{4}{2m}$

$5m = -3m^2 + 2$

Pentru ca tangentele să fie perpendiculare trebuie ca rădăcinile ecuației (10') să satisfacă condiția $m_1m_2=-1$, care dă $\frac{p}{2x_0}=-1$ sau $x_0=-\frac{p}{2}$, deci P trebuie să se afle pe directoarea parabolei. Acesta este locul căutat.

9. *Ecuația parabolei raportată la axe paralele cu axa de simetrie și cu tangenta la vîrf.*

Fie $O'x'$ axa de simetrie, $O'y'$ tangenta la vîrf și xOy un sistem de axe paralele cu $x'O'y'$. Un punct oarecare M din plan are coordonatele (x', y') față de sistemul $x'O'y'$ și (x, y) față de xOy; în particular vîrful parabolei are coordonatele $O'(\alpha, \beta)$ față de xOy.

Ecuația parabolei raportate la axa ei și la tangenta la vîrf este

$$y'^2 - 2px' = 0. \tag{12}$$

Translația de axe care aduce pe O în O' este definită de

$$x = \alpha + x', \qquad y = \beta + y', \tag{13}$$

de unde rezultă $x'=x-\alpha$ și $y'=y-\beta$, care duși în (12) ne va da ecuația parabolei raportate la sistemul xOy:

$$(y-\beta)^2 - 2p(x-\alpha) = 0. \tag{14}$$

În general însă ecuația nu se întîlnește sub această formă, de aceea vom dezvolta și vom ordona termenii. Rezultă

$y^2 - 2\beta y - 2px + \beta^2 + 2p\alpha = 0$, de unde se scoate

$$x = \frac{1}{2p}y^2 - \frac{\beta}{p}y + \frac{\beta^2}{2p} + \alpha. \tag{15}$$

Prin urmare forma generală sub care se întîlnește ecuația este

$$x = ay^2 + by + c. \tag{15'}$$

Din identificarea ecuațiilor (15) și (15') rezultă $a=\frac{1}{2p}$, $b=-\frac{\beta}{p}$, $c=\frac{\beta^2}{2p}+\alpha$, din care se deduce

$$p = \frac{1}{2a}, \qquad \alpha = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{R}{4a}, \qquad \beta = -\frac{b}{2a}. \tag{16}$$

Prin urmare ecuația (15') reprezintă o parabolă cu axa de simetrie paralelă cu Ox, care are parametrul $p=\frac{1}{2a}$ și vîrful $V\left(-\frac{R}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$, unde $R=b^2-4ac$. Dacă $a>0$, atunci și $p>0$ și parabola are concavitatea către $x>0$; dacă $a<0$, concavitatea este către x negativ.

Parabola (15') taie axa Oy în punctele de ordonate date de

$$ay^2 + by + c = 0. \tag{17}$$

Acestea sînt reale sau imaginare după cum $R=b^2-4ac \gtrless 0$. Totdeauna însă axa de simetrie trece prin mijlocul segmentului determinat de

cele două puncte, care este *real*, oricum ar fi punctele. În adevăr ordonata mijlocului este

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{b}{2a},$$

deci punctul se află pe axa de simetrie; cînd $b=0$, ecuația parabolei se reduce la $x=ay^2+c$, a cărei axă de simetrie este chiar Ox.

Dacă se schimbă între ele coordonatele x și y, atunci ecuația (15′) devine

$$y=ax^2+bx+c \tag{18}$$

și reprezintă o parabolă a cărei axă de simetrie, paralelă cu Oy, are ecuația $x=-\frac{b}{2a}$; înlocuind pe x în (18) se obține ordonata vîrfului: $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{R}{4a}$. Parametrul parabolei este $p=\frac{1}{2a}$.

Prin urmare (18) este ecuația unei parabole cu axa de simetrie paralelă la Oy, avînd parametrul $p=\frac{1}{2a}$ și vîrful $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{R}{4a}\right)$ Pentru $a>0$ concavitatea parabolei este îndreptată spre y pozitiv, pentru $a<0$, spre y negativ.

Dacă $b=0$, parabola are ca axă de simetrie chiar axa Oy. De altfel toate chestiunile legate de ecuația (18) sînt cunoscute de la studiul trinomului de gradul al II-lea, din algebră. Ceea ce s-a completat aici este determinarea parametrului parabolei.

Concluzie Din studiul făcut mai înainte se desprind următoarele: *Dacă în ecuația generală de gradul al II-lea în x și y:*

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

lipsește termenul în xy, precum și unul din termenii în x^2 sau y^2, ecuația rămasă reprezintă o parabolă. Axa parabolei este paralelă la Ox sau la Oy după cum lipsește termenul în x^2 sau în y^2. Vîrful și parametrul parabolei se determină așa cum s-a arătat.

Proprietăți

10. *Tangenta la parabolă într-un punct M este bisectoarea unghiului format de raza vectoare și paralela la axă dusă prin M.*

Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul situat pe parabolă, deci trebuie ca

$$y_0^2=2px_0. \tag{19}$$

Ecuația razei vectoare M_0F este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ sau } y_0x-\left(x_0-\frac{p}{2}\right)y-\frac{p}{2}y_0=0, \tag{20}$$

iar paralela prin M la Ox este $y-y_0=0$. Bisectoarea unghiului format de aceste drepte este de aceeași parte cu originea; presupunînd că $y_0>0$, termenii liberi din ambele ecuații sînt negativi și putem scrie direct bisectoarea unghiului care conține originea

$$\frac{y_0x-\left(x_0-\frac{p}{2}\right)y-\frac{p}{2}y_0}{\sqrt{y_0^2+\left(x_0-\frac{p}{2}\right)^2}}=y-y_0.$$

Însă din definiția parabolei avem $\overline{M_0F}=\overline{M_0N}$ ($M_0N\|Ox$ și $N\in Oy$), adică

$$\sqrt{\left(x_0-\frac{p}{2}\right)^2+y_0^2}=x_0+\frac{p}{2}$$ și înlocuind mai sus obținem

$$y_0x-\left(x_0-\frac{p}{2}\right)y-\frac{p}{2}y_0=\left(x_0+\frac{p}{2}\right)(y-y_0)$$

sau, după efectuarea calculelor

$$2x_0y-y_0(x+x_0)=0. \tag{21}$$

Dar din (19) avem $2x_0=\frac{y_0^2}{p}$, astfel că ecuația bisectoarei devine

$$yy_0-p(x+x_0)=0 \tag{21′}$$

care nu este decît tangenta la parabolă în M_0.

Dacă tangenta este bisectoarea unghiului FM_0N, atunci perpendiculara în M_0 pe tangentă, adică *normala la parabolă*, este bisectoarea unghiului exterior.

Această proprietate a parabolei arată că dacă o sursă luminoasă trimite raze paralele cu axa unei oglinzi parabolice, atunci razele reflectate trec toate prin focar și invers dacă o sursă luminoasă se așază în focar, razele reflectate sînt paralele cu axa oglinzii. Din această cauză oglinzile parabolice au multe întrebuințări (telescoape, faruri etc.).

Acesta este motivul pentru care proprietatea arătată aici se numește *proprietatea optică* a parabolei.

11. *Demonstrație vectorială a proprietății optice a parabolei.* Deoarece triunghiul FM_0N este isoscel rezultă că suma vectorilor $\overrightarrow{FM_0}$ și $\overrightarrow{NM_0}$ este un vector situat pe bisectoarea unghiului FM_0N. Fie deci $\bar{s}=\overrightarrow{FM_0}+\overrightarrow{NM_0}$. Avem $\overrightarrow{FM_0}=\overrightarrow{OM_0}-\overrightarrow{OF}=(x_0\bar{i}+y_0\bar{j})-\frac{p}{2}\bar{i}=\left(x_0-\frac{p}{2}\right)\bar{i}+y_0\bar{j}$; $\overrightarrow{NM_0}=\overrightarrow{OM_0}-\overrightarrow{ON}=(x_0\bar{i}+y_0\bar{j})-\left(-\frac{p}{2}\bar{i}+y_0\bar{j}\right)=\left(x_0+\frac{p}{2}\right)\bar{i}$. Prin urmare

$$\bar{s}=\left(x_0-\frac{p}{2}\right)\bar{i}+y_0\bar{j}+\left(x_0+\frac{p}{2}\right)\bar{i}=2x_0\bar{i}+y_0\bar{j} \tag{22}$$

este vectorul care are direcția bisectoarei unghiului FM_0N. Fie acum $M(x, y)$ un punct oarecare din plan. Expresia vectorului $\overrightarrow{M_0M}$ este

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}. \qquad (23)$$

Pentru ca vectorii (22) și (23) să fie coliniari trebuie ca coordonatele lor (proiecțiile) să fie proporționale, adică

$$\frac{x-x_0}{2x_0}=\frac{y-y_0}{y_0} \text{ de unde } \frac{x+x_0}{2x_0}=\frac{y}{y_0}$$

(s-au adunat numitorii la numărători), care dă

$$2x_0y=y_0(x+x_0),$$

adică ecuația (21). Înlocuind $2x_0=\frac{y_0^2}{p}$ se obține ecuația tangentei (21') în M_0 la parabolă. Astfel tangenta este situată pe bisectoarea unghiului FM_0N.

Notă. Fie M_0' proiecția lui M_0 pe Ox, deci $M_0'(x_0, 0)$. Avem

$$\vec{s}=2x_0\vec{i}+y_0\vec{j}=(x_0\vec{i}+y_0\vec{j})+x_0\vec{i}=\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{OM_0'}. \qquad (24)$$

Aceasta arată că tangenta la parabolă este paralelă cu diagonala paralelogramului construit cu vectorii $\overrightarrow{OM_0}$ și $\overrightarrow{OM_0'}$, proprietate care oferă un mijloc simplu de a construi tangenta la parabolă într-un punct dat (fig. 86).

12. Consecințe. 1) *Construcția tangentei la parabolă.* Știm că triunghiul FMN (fig. 85) este isoscel. Tangenta, fiind bisectoarea unghiului opus bazei $\overline{FN}$, este în același timp înălțime și mediană, deci și mediatoare. Tangenta se va construi sau ducînd din M perpendiculara pe FN sau ducînd mediatoarea segmentului $\overline{FN}$ care, ca verificare, va trebui să treacă prin M.

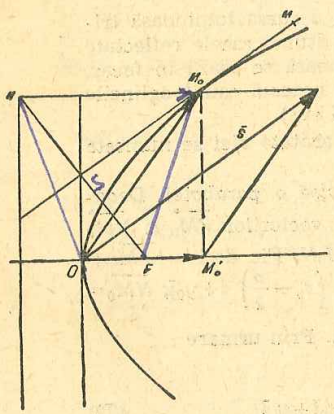


Fig. 86.

2) Fie P mijlocul segmentului $\overline{FN}$. Focarul și directoarea fiind la egală distanță de tangenta la vîrf, P se află pe această tangentă. Apoi MP fiind tangenta în M, unghiul MPF este drept. Se desprind de aici următoarele proprietăți:

a) *Proiecția focarului pe tangentă la parabolă se află pe tangenta la vîrf*, care apare astfel ca *loc geometric al proiecției focarului pe tangentele la parabolă.*

b) *Simetricul focarului față de o tangentă se găsește pe directoare, deoarece* $\overline{FP}=\overline{PN}$. Deci *locul geometric al simetricului focarului față de o tangentă variabilă este directoarea parabolei.*

13. Să găsim și pe cale analitică locul geometric al proiecției focarului pe o tangentă variabilă. Tangenta are ecuația

$$y=mx+\frac{p}{2m},$$

iar perpendiculara dusă din focar pe tangentă:

$$y=-\frac{1}{m}\left(x-\frac{p}{2}\right).$$

Înmulțind cu m ambele ecuații, ele devin

$$my=m^2x+\frac{p}{2} \quad \text{și} \quad my=-x+\frac{p}{2},$$

care prin scădere dau $(m^2+1)x=0$ sau, deoarece $m^2+1\neq 0$, $x=0$, care este ecuația axei Oy (tangenta la vîrf).

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

300. Se dă un punct fix O și o dreaptă fixă (D). O dreaptă variabilă, care trece prin O, taie pe (D) în N. Se cere locul intersecției perpendicularelor ridicate în N pe (D) și în O pe ON.

Să se figureze locul și să i se determine elementele.

[Se ia perpendiculara din O pe (D) ca Ox și paralela la (D) prin O, ca Oy; $y^2-ax=0$.]

301. Să se determine ecuația parabolei, raportată la axă și la tangenta la vîrf, știind că trece prin punctul (2, 5).

[$2y^2-25x=0$.]

302. Să se determine ecuația unei parabole, raportată la axa de simetrie și la tangenta la vîrf, știind că este tangenta dreptei $3x-2y+4=0$. Să se afle punctul de tangență.

$$\left[y^2-12x=0;\ T\left(\frac{4}{3},\ 4\right).\right]$$

303. Să se găsească ecuația parabolei, raportată la axă și la tangentă la vîrf, știind că tangenta paralelă cu dreapta $5x-4y-2=0$ trece prin punctul $A(4, 7)$.

[Coeficientul unghiular al dreptei este $m=\frac{5}{4}$. Se scrie că tangenta cu această direcție trece prin A; $y^2-10x=0$.]

304. Să se calculeze lungimea segmentului determinat de directoare și tangenta la vîrf, pe o tangentă de direcție m, în funcție de m și de parametrul p al parabolei.

$$\left[\frac{p}{2}\sqrt{1+m^2}.\right]$$

305. Se dă parabola $y^2-2px=0$. Să se determine înclinarea tangentei pe care axele de coordonate taie un segment egal cu $p\sqrt{3}$.

[Înclinarea: $\pm 30°$.]

306. Să se găsească ecuația unei parabole știind că axele determină pe tangenta paralelă dreptei $5x-12y-4=0$, un segment de 13 unități.

$$\left[m=\frac{5}{12}\cdot\frac{p^2}{4m^2}+\frac{p^2}{4m^2}=13^2, \quad \text{deci} \quad y^2-\frac{25}{3}x=0.\right]$$

307. Dacă N este un punct situat pe directoarea unei parabole, să se demonstreze că mediatoarea segmentului $\overline{FN}$ (F, focarul) este tangentă la parabolă.

$$\left[N\left(-\frac{p}{2}, y_0\right).\right]$$ Mediatoarea are ecuația $2yy_0-y_0^2-2px=0$. Fie $M(x_0, y_0)$ pe parabolă, astfel ca $NM \| Ox$. Avem $y_0^2=2px_0$ etc.]

308. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul $A(12p, 7p)$ la parabola $y^2-2px=0$.

[$x-2y+2p=0$; $x-12y+72p=0$.]

309. Se dă parabola $y^2-8x=0$ și dreapta $y=2x+3$. Să se găsească coordonatele punctului M, așezat pe dreapta dată, astfel ca tangentele duse din M la parabolă să determine pe tangenta la vîrf un segment de: a) 3 unități; b) $2\sqrt{3}$ unități.

$$\left[\text{a) } M(0, 3),\ M'(-1, 1);\ \text{b) } M\left(\frac{1}{2}, 4\right);\quad M'\left(-\frac{3}{2}, 0\right).\right]$$

310. Fie M_0 un punct pe o parabolă cu focarul F. Prin F se duce coarda $\overline{AB}$ paralelă cu tangenta în M_0 și mărginită la parabolă. Să se arate că avem $\overline{AB}=4\overline{FM}_0$ (C.d.p.).

311. Se duce o coardă prin focarul unei parabole. Să se arate că raportul dintre produsul segmentelor determinate de focar pe coardă și coarda întreagă este constant (Salmon).

$$\text{Raportul este } \left[\frac{p}{2}.\right]$$

312. Pe parabola $y^2=2px$ se consideră punctul M avînd abscisa de 2 ori cît aceea a focarului și se duce coarda MM' simetrică față de ordonata punctului M, cu coarda OM, O fiind vîrful parabolei. Să se arate că cercul descris pe $\overline{MM'}$ ca diametru trece prin vîrf (C.d.p.).

[Este suficient să se arate că $OM \perp OM'$.]

313. Pe o parabolă se consideră un punct M variabil și simetricul său M', față de axa de simetrie. Se cere locul geometric al intersecției tangentei în M cu paralela dusă prin M' la axa de simetrie (S.G.M.III).

$$\left[y=-\frac{2p}{3}x.\right]$$

314. Pe o parabolă se consideră un punct M variabil și simetricul său M' față de axa de simetrie. A fiind un punct fix pe axa parabolei, se cere locul geometric al intersecției dreptei MA cu paralela dusă prin M' la axă. (S.G.M.III).

[$y^2+2p(x-2a)=0$. Parabolă.]

315. Fie F focarul unei parabole, M un punct mobil pe ea și A un punct fix pe axa de simetrie.

Să se găsească locul intersecției dreptei MF cu paralela dusă prin A la tangenta în M.

Să se dea și o soluție geometrică (S.G.M.VIII).

[Cerc cu centrul în F și cu raza $\overline{FA}$.]

316. Se dă o parabolă, un punct A pe axa ei și dreapta (D), perpendiculară pe axă, trecînd prin simetricul lui A față de vîrf. Tangenta într-un punct M al parabolei taie dreapta (D) în N. Să se afle locul geometric al intersecției dreptei MA cu paralela dusă prin N la axa parabolei, cînd M descrie curba. Particularizare cînd A coincide cu vîrful parabolei.

[$y^2-p(x-a)=0$; caz particular $a=0$.]

317. Se dă parabola $y^2-2px=0$. Se cere locul punctului M, astfel ca tangentele duse din M la parabolă să determine pe tangentă la vîrf un segment de lungime dată a.

[$y^2-2px=a^2$. Aceeași parabolă, deplasată astfel ca pentru $x=0$, $y=\pm a$.]

318. Se dă un cerc și o dreaptă (D). Să se afle locul punctului M astfel ca tangentele duse din M la cercul dat să fie egale cu distanța de la M la dreapta (D). Particularizări.

[Se ia (D) ca axă Oy și perpendiculara din centrul ω al cercului ca Ox. Locul este parabola $y^2=2ax-(a^2-r^2)$. Cazuri particulare: 1) $a=r$; 2) $-a=r$; 3) $r=0$.]

319. Se dă parabola $y^2-2px=0$ și dreptele $x=\pm\frac{p}{8}$, care întîlnesc axa parabolei în A și B. O tangentă variabilă a parabolei întîlnește cele două drepte, respectiv în P și Q. Să se determine coeficientul unghiular al tangentei, astfel ca dreptele PB și AQ să fie perpendiculare.

$$[m=\pm\sqrt{-1+\sqrt{5}}.]$$

320. Se dă elipsa raportată la axe, cu semiaxele a, b și parabola $y^2-2px=0$. Ce condiție trebuie să îndeplinească elipsa, pentru ca cele două curbe să fie ortogonale? Să se arate dacă condiția este îndeplinită, atunci oricare ar fi p, parabola este ortogonală elipsei.

[$b=a\sqrt{2}$, elipsa are semiaxa mare pe Oy. Se va lua un punct $M(x_0, y_0)$, presupus pe elipsă și pe parabolă și se va scrie ca tangentele în M la cele două curbe sînt perpendiculare.]

321. Să se determine parabola $y^2-2px=0$, ortogonală cercului cu centrul în $A(-2, 0)$ și cu raza 5.

Aceeași problemă pentru un cerc cu același centru, dar cu raza r. Să se afle locul geometric al punctelor comune celor două curbe, cînd raza cercului variază.

[Se consideră $M(x_0, y_0)$ pe cerc și pe parabolă și se scrie că tangentele la cele două curbe sînt perpendiculare. În baza condițiilor inițiale se găsește $x_0=2$, $y_0=\pm\sqrt{r^2-16}$ (cazul general). Locul geometric este, evident, $x=2$.]

322. Fie M un punct situat pe o parabolă. Tangenta și normala (perpendiculară pe tangentă) în M întîlnesc axa parabolei, respectiv în T și N, iar M se proiectează pe axă în M'. Să se arate că:

a) Mijlocul segmentului TM' este vîrful parabolei.

b) Segmentul $\overline{M'N}$ este constant și egal cu parametrul parabolei*.

323. Prin focarul unei parabole se duce o coardă AB.

a) Tangentele în A și B sînt perpendiculare între ele.

b) Punctul M de intersecție a normalelor în A și B se află pe diametrul conjugat coardei AB.

c) Să se afle locul geometric al punctului M (C.d.p.).

324. Fie M un punct pe o parabolă și M simetricul său față de axa de simetrie. Să se afle locul geometric al intersecției perpendicularei în M pe tangentă (normala), cu paralela dusă prin M' la axă.

[Parabola $y^2=2p(x-2p)$.]

325. Fie M un punct pe tangenta la vîrful unei parabole. Să se arate că perpendiculara dusă din M pe polara lui în raport cu parabola trece printr-un punct fix.

326. Să notăm cu M, N punctele de intersecție ale polarei unui punct S, în raport cu o parabolă dată.

Se cere locul geometric al punctului S astfel că aria triunghiului SMN să fie constantă (S.G.M.VIII).

(Fie $S(\alpha, \beta)$. Locul este parabola $\beta^2-2p\alpha=\text{const.}$)

---

* Segmentul $\overline{TM'}$ se numește subtangenta, iar $\overline{M'N}$ subnormala relativă la punctul M.

PROBLEME DE RECAPITULARE ȘI SINTEZĂ

327. Se dau perechile de puncte (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2). Ce condiție trebuie să îndeplinească segmentele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, pentru ca, O fiind un punct oarecare al planului, vectorii

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2};\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2};\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}$$

să aibă extremitățile A, B, C în linie dreaptă?

[Fie A_0 mijlocul lui $\overline{A_1A_2}$. Avem $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OA_0}$ etc. Este suficient ca mijloacele celor trei segmente să fie coliniare.]

328. Se dau patru puncte A, B, C, D, într-un plan. Ce condiție trebuie să îndeplinească aceste puncte pentru ca să avem

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}?$$

[Rezultă $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}$ sau $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BD}$, deci figura $CADB$ trebuie să fie paralelogram.]

329. Se dau trei puncte A, B, C în plan. Se cere locul geometric al punctului P astfel ca să avem

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$$

[Înălțimea din A a triunghiului ABC.]

330. Se dau pe o axă punctele $A(-3)$ și $B(7)$. Fie M punctul care împarte segmentul $\overline{AB}$ în raportul $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{3}{2}$ și N punctul pentru care $\overline{MN}=8$. Să se calculeze raportul $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$.

[$M(3)$; $N(11)$.]

331. Se dau punctele $A(2, 3)$, $B(5, 6)$, $C(7, 4)$. Să se afle unghiurile pe care le fac dreptele AB, BC, CA, cu semiaxa pozitivă.

[45°; 135°; arctg $\frac{1}{5}$ =11°17′.]

332. Să se verifice că patrulaterul $ABCD$ format de punctele $A(0, -2)$, $B(1, -5)$ $C(5, 3)$, $D(2, 2)$ este trapez isoscel.

Soluţie analitică şi vectorială.

[Analitic se va arăta că două laturi sînt egal înclinate pe Ox, iar celelalte două sînt egale. Vectorial: se va arăta că vectorii $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sînt coliniari şi că $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ folosind produsele scalare.]

333. Se dau dreptele $3x-4y+6=0$ şi $4x-3y-9=0$. Să se determine paralela la a doua bisectoare a axelor de coordonate, care să formeze între cele două drepte un segment de $5\sqrt{2}$ unităţi.

[Două soluţii: $y=-x+50$ şi $y=-x-20$.]

334. Să se afle vîrfurile unui triunghi, cunoscînd mijloacele laturilor $P(3, -1)$, $Q(1, 7)$, $R(-4, 3)$.

[Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Se scrie că P este mijlocul lui AB etc., şi se obţine un sistem de ecuaţii.]

335. Se împart laturile $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ale unui triunghi în acelaşi raport prin punctele M, N, P. Să se demonstreze că triunghiul MNP are acelaşi centru de greutate ca şi ABC. (Teorema lui Pappus.)

336. Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ vîrfurile unui triunghi ale cărui laturi le notăm cu a, b, c. Să se demonstreze că centrul cercului înscris triunghiului are coordonatele:

$$x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}\,; \quad y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\,.$$

Fie AA' bisectoarea şi J centrul cercului înscris. Se ţine seama de rapoartele $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ şi $\frac{JA'}{JA}$.]

337. Se dau dreptele (BC) $12x+5y+168=0$; (CA) $4x-3y=0$; (AB) $8x+15y-168=0$, care formează triunghiul ABC. Să se calculeze:

a) Lungimile m_a, m_b, m_c ale medianelor. Să se verifice relaţia

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2).$$

b) Lungimile înălţimilor.

c) Aria triunghiului ABC.

[$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\,041}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4\,729}$; $m_c = 28$; $h_a = \frac{280}{13}$, $h_b = \frac{168}{5}$, $h_c = \frac{420}{17}$; $S = 420$.]

338. Aceleaşi date ca la problema precedentă. a) Să se calculeze coordonatele centrului cercului înscris şi raza sa r. b) Să se scrie ecuaţia cercului înscris triunghiului.

[Intersecţia a două bisectoare interioare dă $J\left(-\frac{48}{7}, \frac{36}{7}\right)$. Distanţa pînă la una din laturi dă $r=\frac{60}{7}$. b) $7(x^2+y^2)+96x-72y=0$.]

339. Fiind dat un trapez $ABCD$, dreptunghi în A şi D, se unesc vîrfurile B, C cu mijlocul M al lui $\overline{AD}$, apoi se duce din D o perpendiculară pe CM şi din A o perpendiculară pe BM. Fie N punctul de întîlnire al acestor perpendiculare. Să se demonstreze că dreapta MN este perpendiculară pe BC.

[Axele sînt evidente: AB ca Ox, AD ca Oy. Nu este nevoie de ecuaţia dreptei MN, ci numai de coeficientul ei unghiular.]

340. Ce valoare trebuie să aibă α pentru ca punctele $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$, $C(2, \alpha)$ să fie pe linie dreaptă?

[$\alpha=3{,}5$.]

341. Fie $A(2, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 4)$ vîrfurile unui triunghi. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din punctul $P(5, 4)$ pe laturile triunghiului ABC sînt în linie dreaptă.

342. Pentru ce valoare a lui α dreptele $x+y-3=0$; $2x+y-4=0$; $\alpha x+3y-7=0$ sînt concurente?

Înlocuind pe α cu valoarea aflată, dreapta rezultată aparţine fasciculului

$$2x+y-4+\lambda(x+y-3)=0;$$

pentru ce valoare a lui λ?

[$\alpha=1$; $\lambda=-\frac{5}{2}$.]

343. Se dau punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(3a, 3b)$, $D(4a, 2b)$. Se ia pe segmentul $\overline{BC}$ punctul M astfel ca $\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = k$, iar pe $\overline{DA}$ punctul N, astfel ca $\frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = \frac{k-1}{2}$. Să se demonstreze că dreapta MN trece printr-un punct fix.

[Punctul fix $\left(\frac{7a}{3}, 2b\right)$.]

344. Se consideră un punct M mobil pe latura Ox a unghiului fix xOy şi un alt punct fix N în acelaşi plan. Fie P proiecţia punctului M pe Oy şi Q proiecţia punctului O pe dreapta MN. Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix (N. G. Botea, G.M. XXXI).

[Axele: Ox şi perpendiculara în O pe ea, Oy are ca ecuaţia $y=mx$. Apoi $N(p, q)$; punctul fix este $\left(\frac{p-mq}{1+m^2}, \frac{mp+q}{1+m^2}\right)$.]

345. O dreaptă variabilă care trece prin punctul $A(0, 5)$ taie dreptele $x-2=0$ şi $x-3=0$, respectiv în B şi C. Să se arate că:

a) Paralela dusă prin B la OC trece printr-un punct fix.

b) Aria triunghiului OBC este constantă.

c) Există o poziţie a dreptei ABC, astfel ca $\sphericalangle BOC=45°$.

Pentru acest caz să se calculeze celelalte unghiuri ale triunghiului OBC (E. Morţun).

[a) Punctul fix $J\left(0, \frac{5}{3}\right)$; b) $S=\frac{5}{2}$ unităţi pătrate; c) $\lambda=-2$ şi $\lambda=-\frac{13}{6}$, fiind coef. unghiular al dreptei ABC. Pentru $\lambda=-\frac{13}{6}$, $tgB=-9$, $tgC=\frac{4}{5}$.]

346. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(4, 3)$, $C(0, 5)$. Se cere:

a) Să se determine coordonatele punctelor D, E, F, ştiind că D împarte latura $\overline{BC}$ în raportul $\left(-\frac{1}{2}\right)$, E împarte latura $\overline{CA}$ în raportul $\left(-\frac{4}{3}\right)$ şi F împarte latura AB în raportul $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

b) Să se arate că dreptele AD, BE, CF sînt concurente.

c) Să se arate că punctele E, F şi D', conjugatul lui D faţă de B şi C sînt coliniare.

$$\left[D\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right),\ E\left(\frac{4}{7}, \frac{15}{7}\right),\ F\left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right),\ D'(8, 1).\right]$$

347. Cunoscînd punctele $A(6, 3)$ şi $B(0, 5)$, să se afle:

a) coordonatele piciorului D al perpendicularei duse din B pe OA;

b) coordonatele piciorelor E şi F ale perpendicularelor duse din D, respectiv pe AB şi OB;

c) coordonatele punctelor M, N unde paralele duse prin D la OB şi AB întîlnesc dreptele AB şi OB;

d) să se arate că dreptele EF, MN, OA sînt concurente.

$$\left[\text{a) } D(2, 1);\ \text{b) } E(3, 4),\ F(0, 1);\ \text{c) } M\left(2, \frac{13}{3}\right),\ N\left(0, \frac{5}{3}\right).\right]$$

348. Se dă unghiul drept xOy, o dreaptă (Δ) ce trece prin O şi un punct A care se proiectează în B şi C pe Ox şi Oy. Paralela dusă prin

A la (Δ) întîlneşte pe Ox în punctul D. Fie D_1 şi O_1 proiecţiile punctelor D şi O, respectiv pe (Δ) şi AD. Să se arate că D_1O_1, paralela dusă prin C la (Δ) şi perpendiculara dusă din B pe (Δ) sînt trei drepte concurente.

349. Se dau punctele $A(6, 0)$, $B(0, 4)$, $C(1, 5)$.

a) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

b) Dreapta AC taie axa Oy în E, iar BC taie axa Ox în F.

Să se arate că mijloacele segmentelor $\overline{OC}$, $\overline{BA}$, $\overline{EF}$ sînt coliniare şi să se afle ecuaţia dreptei lor (D).

c) Să se arate că bisectoarele interioare ale unghiurilor AEO, BFO sînt perpendiculare şi se întîlnesc pe dreapta (D).

[(D) $x+5y-13=0$; bisectoarele: $(1+\sqrt{2})x+y-6=0$ şi $x-(1+\sqrt{2})y+4=0$.]

350. 1) Care sînt punctele din plan care satisfac sistemul:

$$2x-5y+4=0;\ x+2y-3>0;\ 3x-4y+2<0?$$

2) Să se afle lungimea segmentului de dreaptă pe care sînt situate punctele găsite.

3) Dacă se permută circular semnele $=$, $>$, $<$, se obţin încă două sisteme. Care dintre ele este incompatibil?

351. Se ia un punct M variabil pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC. Să se demonstreze că suma $\overline{AM}^2+\overline{BM}\cdot\overline{MC}$ este constantă.

[Constanta este $\overline{AB}^2$.]

352. Prin vîrfurile A, B, C ale unui triunghi se duc trei drepte paralele, care întîlnesc laturile opuse în punctele α, β, γ. Să se demonstreze egalitatea de arii:

$$S_{\alpha\beta\gamma}=-2S_{ABC}.$$

[Se poate lua $O\equiv A$ şi $A\alpha$ ca axă Ox, iar $Oy\perp A\alpha$.]

353. Se dau punctele $A\left(\frac{16}{3}, 1\right)$, $B\left(-1, -\frac{15}{4}\right)$, $C(-1, 1)$. Să se găsească aria triunghiului format de bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC (C.G.M. XXX).

$$\left[S=\frac{1\,805}{24}.\right]$$

354. Se dau patru puncte A, B, C, D într-un plan orientat şi se cere locul geometric al punctului M astfel ca să avem relaţia între arii:

$$S_{MAB}+S_{MCD}=S_{MBC}+C_{MDA}$$

[O dreaptă.]

355. Se dau două axe dreptunghiulare Ox, Oy. Un triunghi dreptunghic isoscel, variabil, are vîrful A fix pe Ox şi vîrful B al unghiului drept, mobil pe Oy. Se cere locul geometric al vîrfului C.

[$A(a, 0)$. Locul este $x-y+a=0$.]

356. O dreaptă se mişcă în plan păstrîndu-şi direcţia. Ea întîlneşte axele perpendiculare Ox şi Oy, respectiv în P şi Q. Fie $R \in Ox$, astfel ca $\overline{PR}=d$ (const.).

Se cere locul intersecţiei perpendicularelor ridicate în P şi R, respectiv pe QP şi QR.

[Fie m coeficientul unghiular al dreptei PQ. Locul este: $x+2my+d=0$.]

357. Se dă unghiul drept xOy, o dreaptă oarecare (D) şi un punct mobil M pe (D). Fie P şi Q proiecţiile lui M, respectiv pe Ox şi Oy. Se cere:

a) Locul geometric al intersecţiei paralelei duse prin P la (D), cu perpendiculara dusă din Q pe (D).

b) Locul intersecţiei paralelei duse prin Q la (D) cu perpendiculara dusă din P pe (D).

c) unghiul celor două locuri geometrice.

[Locurile sînt două drepte perpendiculare.]

358. $C(a, b)$ este un punct fix din planul axelor rectangulare Ox şi Oy, iar A şi B proiecţiile acestui punct pe axe. Prin C trece o dreaptă mobilă pe care se proiectează punctele A şi B, respectiv în C' şi C'', ale căror proiecţii pe AC sînt respectiv A' şi A''. Tot punctele C' şi C'' se proiectează pe BC în B' şi B''. Toate proiecţiile fiind ortogonale, se cere:

a) Să se arate că oricum s-ar roti dreapta mobilă în jurul punctului C, dreapta $A''B''$ are o direcţie fixă.

b) Să se afle locul descris de mijlocul segmentului $\overline{A'B'}$.

c) Idem, locul mijlocului segmentului $\overline{A''B'}$ (Şc. Polit. Buc., Lucrare parţială, 1939).

[a) $m=-\frac{a}{b}$; b) $\frac{2x}{3a}+\frac{2y}{3b}-1=0$; c) $ax-by=a^2-b^2$.

Cele două drepte-loc geometric sînt perpendiculare.]

359. Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(4, 2)$, $C(2, 3)$ şi se cere:

a) locul geometric al punctelor care satisfac relaţia:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2-\overline{MC}^2=20;$$

b) locul geometric al punctelor care satisfac relaţia:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2-2\overline{MC}^2=7;$$

c) să se cerceteze dacă există puncte în plan care să satisfacă deodată ambele relaţii.

[a) Cercul $x^2+y^2-4x-12=0$; b) dreapta $y=2$; c) $M_1[2(1+\sqrt{3}), 2]$; $M_2[2(1-\sqrt{3}), 2]$.]

360. a) Să se scrie ecuaţia cercului înscris triunghiului format de punctele $A\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $B(2, 0)$, $C(-2, 3)$.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul înscris, paralelă cu latura BC (E. Morţun).

c) Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin mijloacele A', B', C' ale laturilor şi să se arate că cele două cercuri sînt tangente într-un punct F, ale cărui coordonate se cer.

[a) Centrul cercului $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Cercul: $x^2+y^2-x-y+\frac{1}{4}=0$.

b) $4x+4y-1=0$; c) $x^2+y^2+\frac{7}{8}x-\frac{9}{4}=0$; $F\left(\frac{16}{17}, \frac{25}{34}\right)$]

361. Se dau axele dreptunghiulare xOy şi punctele $A(4, 0)$ şi $B(0, 3)$.

1) Să se scrie ecuaţia dreptei AB şi a bisectoarelor unghiurilor OAB, OBA.

2) Să se scrie ecuaţia cercului înscris triunghiului OAB şi a cercului care trece prin mijloacele laturilor lui OAB.

3) Să se demonstreze că aceste două cercuri sînt tangente şi să se calculeze coordonatele punctului de contact.

4) Să se demonstreze că dreptele ce unesc vîrfurile triunghiului OAB cu punctele de contact ale laturilor opuse cu cercul înscris, sînt trei drepte concurente (S.G.M. V).

[1) $3x+4y-12=0$, $x+3y-4=0$, $2x+y-3=0$; 2) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-2x-\frac{3}{2}y=0$; 3) $T(1, 2)$; 4) $3x+y-3=0$; $x+4y-4=0$, $9x-8y=0$.]

362. Se dau două axe dreptunghiulare xOy şi un punct A aşezat pe prima bisectoare a unghiului axelor. Fie A_1 şi A_2 proiecţiile lui A, respectiv pe Ox şi Oy, iar M şi N punctele în care o dreaptă variabilă ce trece prin A întîlneşte aceleaşi axe.

a) Dreptele MA_2, NA_1 şi perpendiculara din O pe MN sînt concurente.

b) Perpendicularele în M şi N pe MN întîlnesc respectiv pe Oy şi Ox în N' şi M'. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptei $M'N'$ cu perpendiculara dusă din O pe MN (S.G.M. VII).

[Locul este un cerc.]

363. Se dau două axe dreptunghiulare Ox, Oy şi punctele $A(1, 0)$, $A'(-2, 0)$, $B(0, 2)$. M fiind un punct oarecare pe axa Ox, se cere:

1) Să se scrie ecuaţiile cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM şi $A'BM$.

2) Să se calculeze coordonatele centrelor (C şi C'), razele r, r' şi distanţa $\overline{CC'}$.

3) Cînd punctul M se deplasează pe Ox, să se arate că centrele C şi C' descriu cîte o dreaptă şi că raportul razelor cercurilor este constant (V. Mioc).

[$M(\alpha, 0)$; 1) $x^2+y^2-(\alpha+1)x-\frac{\alpha+4}{2}y+\alpha=0$; $x^2+y^2-(\alpha-2)x+(\alpha-2)y-2\alpha=0$; 2) $r^2=\frac{5}{16}(\alpha^2+4)$; $r'^2=\frac{1}{2}(\alpha^2+4)$.]

364. Se prelungeşte diametrul $\overline{AB}$ al unui cerc cu lungimea $\overline{BC}=\overline{AB}$ şi se duce CX perpendiculară pe AB. Printr-un punct oarecare P al lui CX se duc tangentele PM, PN la cerc şi ele întîlnesc în H şi K tangenta în punctul A. Să se demonstreze că centrul de greutate al triunghiului PHK este un punct fix (G. Papelier).

[Axele: diametrul AB şi tangenta în A. Se scriu tangentele din P la cerc şi se intersectează cu $x=0$. Se calculează apoi coordonatele centrului de greutate care sînt $\left(\frac{4r}{3}, 0\right)$, r raza cercului.]

365. Se dau trei puncte A, B, C pe o axă orientată şi un cerc oarecare. Se notează cu α, β, γ puterile punctelor A, B, C în raport cu cercul. Să se demonstreze egalitatea:

$$\alpha\cdot\overline{BC}+\beta\cdot\overline{CA}+\gamma\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0 \qquad \text{(G. Papelier).}$$

[Se poate lua originea în centrul cercului şi $Ox\|ABC$. Dacă cercul se reduce la un punct se obţine relaţia lui Stewart.]

366. Se dau două axe perpendiculare Ox, Oy şi punctele A, B pe axa Ox. Se duce cercul fix (C) descris pe $\overline{OA}$ ca diametru, iar prin punctele date A, B un cerc variabil (C'), care taie cercul (C) în A şi în punctul mobil P.

Să se găsească locul punctului al doilea de intersecţie M, al dreptei OP cu cercul C, cînd acest cerc variază (C.G.M., XXIX).

[$A(a, 0)$, $B(b, 0)$. Ecuaţia locului se desface în $x^2+y^2-ax=0$ şi $y-b=0$. Cea din urmă este locul cerut.]

367. Se dau două cercuri C_1, C_2, tangente în originea axei Oy, avînd razele r_1 şi r_2. Se cere:

1) Coordonatele punctelor M şi N, unde o dreaptă variabilă care trece prin origine taie respectiv cercurile C_1 şi C_2.

2) Să se arate că tangentele în M şi N la cercurile respective sînt paralele.

3) Locul geometric al mijlocului segmentului $\overline{MN}$.

[1) $M\left(\frac{2r_1}{1+m^2}, \frac{2mr_1}{1+m^2}\right)$, $N\left(\frac{2r_2}{1+m^2}, \frac{2mr_2}{1+m^2}\right)$. 2) Acelaşi coeficient unghiular; $\mu=\frac{m^2-1}{2m}$; 3) Cercul $x^2+y^2-(r_1+r_2)x=0$.]

368. a) Să se scrie ecuaţia familiei de cercuri tangente la axele de coordonate, cuprinse în cadranele I sau III.

b) Dintre aceste cercuri să se determine cele care trec printr-un punct dat $A(a, b)$. Caz particular $A(2, 9)$.

c) Fie M punctul de contact al unuia din cercuri cu axa Ox. O dreaptă care trece prin M şi are o direcţie fixă taie din nou cercul în M'. Se cere locul geometric al punctului M'.

d) Dintre cercurile familiei de mai sus să se determine acelea care trec prin punctul $(\lambda-2, \lambda^2-2)$, λ fiind raza cercului (S.G.M., III).

[a) $x^2+y^2-2\lambda x-2\lambda y+\lambda^2=0$, (λ, λ) centrul şi λ raza. b) $\lambda=a+b\pm\sqrt{2ab}$. c) $2m^2x-(m+1)^2y=0$. d) Ecuaţia care dă pe λ este $\lambda^4-2\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda+8=0$, cu rădăcina întreagă $\lambda_1=2$ şi o rădăcină iraţională $\lambda_2\cong 2{,}38$.]

369. Se dă punctul $A(-2a, 0)$, cu $a>0$.

1) Să se scrie ecuaţia generală a cercurilor care trec prin punctele O şi A.

2) Fie M punctul unde unul din aceste cercuri taie din nou axa Oy. Să se găsească locul geometric al intersecţiei tangentelor în M şi O la cerc, atunci cînd cercul variază.

3) Fie P punctul unde cercul variabil taie a doua oară locul geometric (se lasă la o parte originea). Să se arate că abscisa punctului P este dată de o ecuaţie de gradul al III-lea, care are o singură rădăcină reală.

4) Să se calculeze coordonatele punctului P pentru cercul cu centrul în $O_1(-1, 7)$. (S.G.M., V).

[1) centrul $\omega(-a, \lambda)$; $x^2+y^2+2ax-2\lambda y=0$. 2) $M(0, 2\lambda)$, locul este parabola $y^2-ax=0$. 3) $x^3+6ax^2+9a^2x-4a\lambda^2=0$. Se aplică teorema lui Rolle. 4) $P(4, 2)$.]

370. Se dă curba $y=\frac{\sqrt{x+1}}{\lambda}+\frac{\lambda}{\sqrt{x+1}}$ şi fie M punctul unde curba taie axa Oy. Să se arate că:

a) atunci cînd λ variază, curba rămîne tangentă dreptei $y=2$;

b) tangenta la curbă în M este în acelaşi timp tangentă cercului cu centru în origine şi cu raza $r=2$ (S.G.M., VIII).

371. Se dau două elipse concentrice şi omotetice (au aceleaşi axe şi semiaxele proporţionale). O tangentă oarecare la elipsa interioară taie cealaltă elipsă în punctele M şi N. Să se demonstreze că punctul de tangenţă este mijlocul segmentului $\overline{MN}$.

372. Produsul distanţelor de la un punct oarecare al unei hiperbole la asimptotă este constant.

373. O tangentă oarecare la o hiperbolă formează cu asimptotele un triunghi a cărui arie este constantă.

374. Se consideră o elipsă şi o hiperbolă, avînd aceleaşi semiaxe a şi b, axele lor fiind suprapuse.

1) O dreaptă dusă prin centrul lor comun taie elipsa în P şi hiperbola în Q. Să se determine această dreaptă, astfel ca tangentele în P şi Q la curbele respective să fie perpendiculare între ele.

2) Pe una din tangentele comune la cele două curbe, să se determine un punct M, astfel ca tangentele duse din M la elipsă și hiperbolă (diferite de tangenta comună) să fie perpendiculare între ele (S.G.M., IV).

[1) $y=\pm\frac{b^2}{a^2}x$, care taie curbele în punctele reale. Tangentele sînt paralele cu bisectoarele. 2) Două soluții: $M\left(a, \sqrt{-2a^2+\sqrt{4a^4+b^4}}\right)$ și simetricul său față de Ox.]

375. Se dă parabola $y^2-2px=0$ și se cere:

1) Să se determine hiperbola echilaterală $xy=k^2$ care taie parabola sub un unghi drept.

2) Fie M punctul de intersecție a celor două curbe; tangenta în M la hiperbolă taie axa Ox în A, iar tangenta în M la parabolă taie din nou hiperbola în B. Să se arate că proiecția lui B pe Ox este simetricul lui A față de origine.

[1) $xy=p^2\sqrt{2}$; 2) $M(p, p\sqrt{2})$; $A(2p, 0)$; $B\left(-2p, -\frac{\sqrt{2}}{2}p\right)$].

376. Se cere locul geometric al punctului care are diferența distanțelor la un punct fix și la o dreaptă fixă, constantă.

[Parabolă.]

377. Se dă o parabolă, o dreaptă (Δ) perpendiculară pe axă și un punct $P\notin(\Delta)$. Prin acest punct se duce o secantă oarecare, care întîlnește parabola în punctele M, M' și se proiectează ortogonal aceste puncte în m și m' pe (Δ). Să se demonstreze că produsul $\overline{Pm}\cdot\overline{Pm'}$ este constant (G. Papelier).

[(Δ) are ecuația $x=a$; $P(a, k)$. Constanta este k^2-2ap.]

378. Fie A, B punctele de contact ale tangentelor duse dintr-un punct P la o parabolă și M mijlocul segmentului $\overline{AB}$. Să se demonstreze că PM este paralelă cu axa parabolei.

[A și B sînt intersecțiile curbei cu polara lui P.]

379. Se dă punctul fix A pe axa Ox și punctele M, N mobile pe axa Oy, astfel că $\overline{MN}=d$ (const.).

Se cere locul intersecției perpendicularelor ridicate în M și N, respectiv pe AM și AN.

[Parabola $y^2=4ax+d^2$.]

380. Fie A punctul unde directoarea unei parabole date întîlnește axa ei de simetrie. Se duce cercul cu centrul în A, tangent exterior parabolei. O secantă variabilă care trece prin vîrful parabolei taie cercul în punctul N și parabola în M. Să se afle locul geometric al intersecției tangentelor în M și N la parabolă și la cerc (S.G.M., V).

[$x+3p=0$, paralelă la Oy.]

381. 1) Să se arate că pentru ca patru puncte, așezate pe parabola $y^2-2px=0$ să fie conciclice, ordonatele lor trebuie să verifice relația

$$y_1+y_2+y_3+y_4=0.$$

2) Fie A și B două puncte fixe pe o parabolă. Un cerc variabil care trece prin A și B mai taie parabola în M și N.

Ținînd seama de relația de la (1), să se afle locul geometric al intersecției tangentelor în M și N la parabolă (S.G.M., VI).

[1) Se elimină x între ecuația parabolei și a unui cerc oarecare și se găsește o ecuație de gradul al IV-lea în y, fără termenul de gradul al III-lea. 2) Fie $A\left(\frac{a^2}{2p}, a\right)$, $B\left(\frac{b^2}{2b}, b\right)$ $M\left(\frac{\alpha^2}{2p}, \alpha\right)$, $N\left(\frac{\beta^2}{2p}, \beta\right)$.

Avem $\alpha+\beta+a+b=0$. Se găsește locul $y=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{a+b}{2}$, o paralelă la Ox.]

382. Se dă elipsa raportată la axele sale și parabola care are vîrful în centrul elipsei, iar focarul F comun cu al elipsei.

1) Să se arate că aceste două curbe se taie sub unghiul dat de relația

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{1+e}{e(1-e)}}\quad (e=\text{excentricitatea elipsei}).$$

2) Distanța de la unul din punctele de intersecție M pînă la focar este

$$\overline{MF}=\frac{a^2+c^2}{a+c}\qquad \text{(S.G.M., VII)}.$$

383. Pe o dreaptă (D) se dă segmentul $\overline{AB}=a$ și un punct variabil M. Pe perpendiculara în M pe (D) se iau segmentele $\overline{MP}=p$ și $\overline{AQ}=q$.

1) Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor AP și BQ, apoi să se construiască efectiv.

2) Să se afle locul geometric (Γ) al intersecției tangentelor duse în A și B, respectiv la cercurile AMP și BMP.

Să se reprezinte grafic locul aflat, pentru cazul $p=\frac{a}{3}$.

3) Să se studieze cu ajutorul teoremei lui Rolle în cîte puncte este tăiată curba-loc geometric (Γ) de către un cerc oarecare AMP. Se va face tabloul de discuție (se poate face discuția pentru $p=\frac{a}{3}$) (S.G.M., XII).

[A originea, AB axa Ox. 1) $(p-q)x+ay-aq=0$. 2) Parabola $y=\frac{1}{p}(x^2-ax)$. 3) Înlăturînd soluția $x=0$, rămîne ecuația $x^3-2ax^2+a^2x+(a-\lambda)p^2=0$, unde λ este abscisa lui M. Șirul lui Rolle este: $-\infty$; $\frac{4a^3}{27p^2}+a-\lambda$; $a-\lambda$; $+\infty$.]

BIBLIOGRAFIE

1. Traian Lalescu. *Tratat de geometrie analitică.* Fasciculele I, II dreapta şi planul, conicele. Institutul Matematic Român, 1938.
2. N. Abramescu. *Lecţiuni de geometrie analitică.* Cluj, Institutul de arte grafice „Ardealul", 1927.
3. El. Murgulescu, S. Flexi, O. Kreindler, O. Sacter, M. Tîrnoveanu. *Geometria analitică şi diferenţială.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1962.
4. I. Gh. Sabac. *Matematici speciale.* Vol. I (capitolele de calcul vectorial). Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1964.
5. N. E. Kocin. *Calculul vectorial* (traducere). Bucureşti, Editura tehnică, 1954.
6. I. F. Ladon. *Bazele calculului vectorial* (traducere). Vol. I, Bucureşti, Editura de stat, 1949.
7. G. Ţiţeica. *Culegere de probleme de Geometrie analitică.* Biblioteca „Gazetei matematice", ediţia a II-a, 1939.
8. * * * *Gazeta Matematică*, Suplimentul cu exerciţii. 1934—1949.
9. * * * *Gazeta Matematică*, Seria B, Societatea de ştiinţe matematice.

CUPRINS

Prefaţă 3
Introducere 5
Cap. I. Vectori pe o dreaptă 9
Exerciţii şi probleme 21
Cap. II. Vectori în plan 25
Exerciţii şi probleme 42
Cap. III. Coordonate în plan 44
Exerciţii şi probleme 49
Cap. IV. Dreapta, diferite forme ale ecuaţiei ei . . . 53
Exerciţii şi probleme 60
Cap. V. Dreapta determinată prin condiţii geometrice date 62
Exerciţii şi probleme 66
Cap. VI. Poziţiile relative ale dreptelor în plan . . . 69
Exerciţii şi probleme 81
Cap. VII. Separarea planului în regiuni 86
Exerciţii şi probleme 91
Cap. VIII. Probleme de distanţă 93
Exerciţii şi probleme 100
Cap. IX. Translaţia axelor 103
Exerciţii şi probleme 105
Cap. X. Locuri geometrice 107
Exerciţii şi probleme 113
Cap. XI. Cercul 117
Exerciţii şi probleme 124
Cap. XII. Probleme de tangenţă 127
Exerciţii şi probleme 131
Cap. XIII. Puterea punctului faţă de cerc 134
Exerciţii şi probleme 140

TRANSA III

Cap. XIV. Locuri geometrice 143
Exerciții și probleme 146
Cap. XV. Elipsa și hiperbola 150
Exerciții și probleme 162
Cap. XVI. Intersecția cu o dreaptă. Probleme de tangență 165
Exerciții și probleme 173
Cap. XVII. Proprietăți ale elipsei și hiperbolei . . . 178
Exerciții și probleme 184
Cap. XVIII. Parabola 185
Exerciții și probleme 195
Probleme de recapitulare și sinteză 199

Redactor responsabil: PANTELIMON EUGENIA
Tehnoredactor: GRUIA IANCU

Dat la cules: 24.02.1967. Bun de tipar: 09.05.1967. Apărut: 1967. Tiraj: 67.500+130 ½ pînză. Hîrtie: tip II A 63 g/m², 16/70×100. Coli editoriale: 12,771. Coli de tipar: 13,25. A.: 2780. C.Z. pentru bibliotecile mari: 516(075.3). C.Z. pentru bibliotecile mici: 51.

Tiparul executat sub comanda nr. 92/67 la Întreprinderea poligrafică „Crișana" Oradea, str. Moscovei nr. 5.

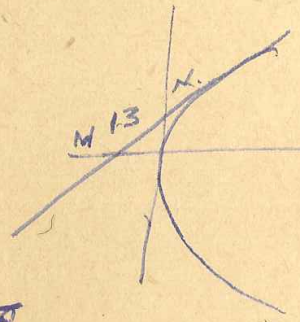
$\begin{cases} y = mx + \frac{p}{2m} \\ y = 0 \end{cases}$

$mx = -\frac{p}{2m}$ $\qquad x = -\frac{p}{2m^2}$

$\begin{cases} y = mx + \frac{p}{2m} \\ x = 0. \end{cases}$

$y = \frac{p}{2m}$

m^2



$y = mx + \frac{p}{2m}$

$\begin{cases} 5x - 12y + 4 = 0. \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}.$

$m = \frac{5}{12}.$

$n = -\frac{1}{3}.$

$\begin{cases} 5x + 12y - 4 = 0. \\ y = 0 \end{cases}$

$x = \frac{4}{5}$

3 ФР

$y = mx + \frac{p}{2m}$

$7p = 12mp + \frac{p}{2m}$

$14mp = 24m^2p + p$

$24m^2p - 14mp + p = 0.$

$m_{1,2} = \frac{14p \pm \sqrt{196p^2 - 96p^2}}{48p} = \frac{14p \pm 10p}{48p}$

$m_1 = \frac{24p}{48p} = \frac{1}{2}$

$m_2 = \frac{4p}{48p} = \frac{1}{12}.$

$y - 7p = \frac{1}{2}(x - 12p)$

$2y - 14p = x - 12p$

$\boxed{x - 2y + 2p = 0}$

$y - 7p = \frac{1}{12}(x - 12p)$

$12y - 84p = x - 12p.$

$\boxed{x - 12y + 72p = 0}$

302

$3x - 2y + 4 = 0.$

$m = \frac{3}{2} \quad n = 2.$

$p = 2mn$

$p = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = 6.$

$y^2 - 2px = 0 \iff \boxed{y^2 - 12x = 0}$

$\begin{cases} y^2 - 12x = 0 \\ 3x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$

$x = \frac{2y - 4}{3}$

$y^2 - \frac{12(2y-4)}{3} = 0.$

$y^2 - 8y + 16 = 0$

$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4$

$x = \frac{8-4}{3} = \frac{4}{3}.$

14
14

56
14

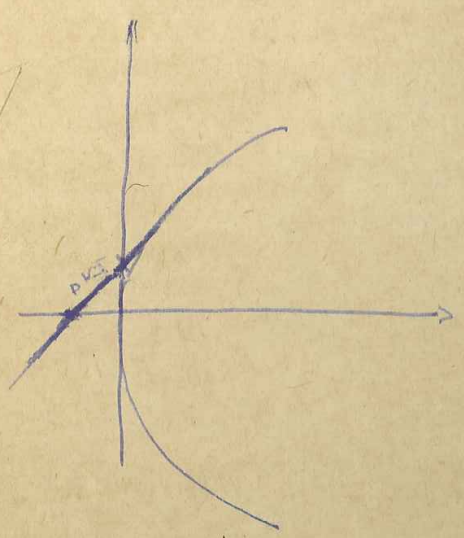
196

24
4

96

16
4

64



$(0, y_0)$

$(x_0, 0)$

$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = p\sqrt{3}.$

$m = \frac{5}{12}.$

$m = -$