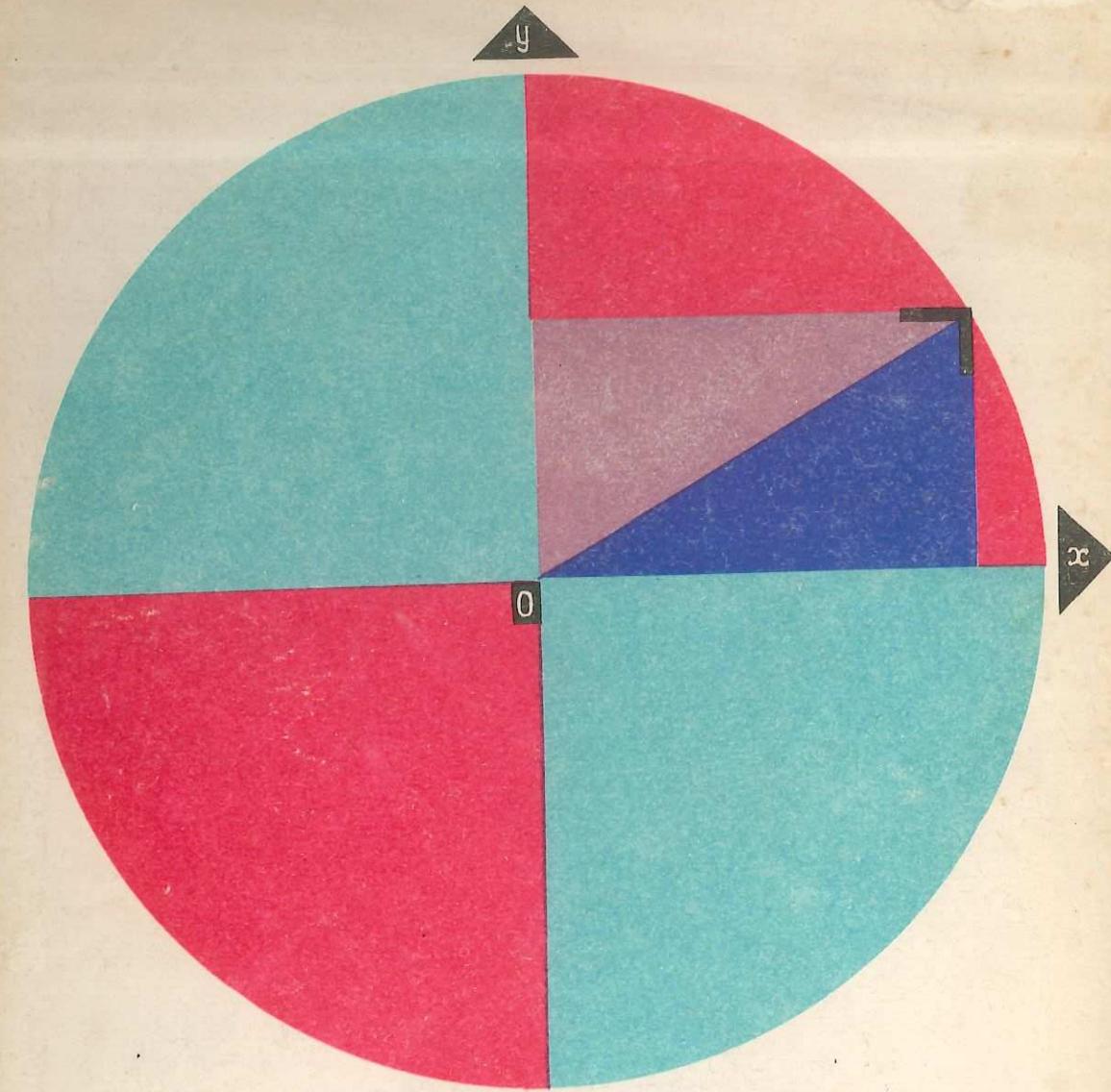


Lei 7,65



Marius Stoka

Eugen Mărgăritescu

# Trigonometrie

Manual pentru anul II licee

Dr. Marius Stoka

Eugen Mărgăritescu

# Trigonometrie

Manual pentru anul II licee



Editura didactică și pedagogică — București

## Unghiuri și arce

## § 1. Sisteme de măsură pentru unghiuri și arce

**1. Măsura unghiurilor.** A măsura un unghi înseamnă să compara cu alt unghi, ales ca unitate.

Fiecare arc îi corespunde un unghi la centru unic determinat. *Măsura arcului de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător.*

În trigonometrie se întrebuintează trei unități de unghiuri diferite, cărora le corespund trei sisteme de măsură:

a. **Măsura în grade sexagesimale.** În acest sistem unitatea de unghi este *gradul sexagesimal* ( $1^\circ$ ) definit ca a 90-a parte din unghiul drept. Subunitățile sale sunt *minutul sexagesimal* ( $1'$ ), egal cu a 60-a parte din gradul sexagesimal, și *secunda sexagesimală* ( $1''$ ), egală cu a 60-a parte din minutul sexagesimal.

Pentru a nota, de exemplu, unghiul de 15 grade sexagesimale 8 minute sexagesimale 28 secunde sexagesimale, scriem:

$$15^\circ 8' 28''$$

Din definițiile precedente rezultă relațiile:

$$1^\circ = 60'; 1' = 60''.$$

Acest sistem se folosește în aplicațiile practice ale trigonometriei, în astronomie și a.

b. **Măsura în grade centesimale.** Unitatea de unghi în acest sistem este *gradul centesimal* ( $1^g$ ) definit ca a 100-a parte din unghiul drept.

Subunitățile sale sunt *minutul centesimal* ( $1^e$ ) egal cu a 100-a parte din gradul centesimal și *secunda centesimală* ( $1^{ee}$ ), egală cu 100-a parte din minutul centesimal.

Pentru a nota, de exemplu, unghiul de 25 grade centesimale 76 minute centesimale 60 secunde centesimale, scriem:

$$25^g 76^e 60^{ee}$$

Relațiile:

$$1^g = 100^e; 1^e = 100^{ee}$$

sunt consecințe imediate ale definițiilor precedente.

Sistemul centesimal este folosit în topografie, astronomie și a.

**Observație.** În sistemul centesimal se simplifică atât notația unghiurilor cât mai ales transformările. De pildă,  $82^{\circ} 4^{\prime} 18^{\prime\prime} = 82,0418^{\circ} = 8204,18^{\circ} = 820,418^{\circ}$ .

**Exemplu.** Unghiul la centru, corespunzător unui semicerc este egal cu  $200^{\circ}$ .

c. **Măsura în radiani.** Măsura în radiani a unghiurilor, folosită în mecanică, în analiza matematică s.a., se definește pe baza următoarei teoreme: raportul dintre lungimea arcului de cerc, corespunzător unui unghi la centru, și lungimea razei cercului nu depinde de rază, ci depinde numai de acest unghi. Prin urmare, dacă într-un cerc lungimea arcului este  $l$  și lungimea razei  $r$ , pentru fiecare unghi raportul  $\frac{l}{r}$  este un număr real unic determinat. Însemnând acest raport cu  $a$ , obținem:

$$\frac{l}{r} = a. \quad (1)$$

**Definiție.** Numărul  $a$ , egal cu raportul dintre lungimea arcului de cerc, corespunzător unui unghi la centru, și lungimea razei cercului se numește măsura în radiani a unghiului respectiv.

Dacă în relația (1) facem  $a = 1$ , obținem  $l = r$ . Prin urmare, unitatea de unghi în acest sistem, numită radian, este unghiul la centru corespunzător arcului de cerc de lungime egală cu lungimea razei cercului (fig. 1).

**Exemple.** 1) Dacă lungimea arcului  $l$  este egală cu două raze, unghiul la centru este egal cu 2 radiani; dacă  $l = \frac{3}{4}r$ , unghiul la centru este egal cu  $\frac{3}{4}$  radiani.

2) **Măsura în radiani a unghiului la centru, corespunzător unui semicerc este  $\pi$ .** Într-adevăr lungimea semicercului este  $l = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r$ , de unde obținem  $\frac{l}{r} = \pi$ .

**2. Trecerea de la o măsură la alta.** Folosirea celor trei sisteme de unități de măsură în diferite domenii științifice necesită transformarea măsurii unghiurilor dintr-un sistem în altul.

Să considerăm un unghi a cărui măsură este  $\alpha$  în grade sexagesimale,  $\alpha'$  în grade centesimale și  $a$  în radiani. Unghiul la centru, corespunzător unui semicerc, are măsurile  $180^{\circ}$ ,  $200^{\circ}$ ,  $\pi$  radiani.<sup>1</sup>

Rapoartele corespunzătoare ale măsurilor acestor unghiuri sunt:

$$\frac{\alpha}{180}, \frac{\alpha'}{200}, \frac{a}{\pi}.$$

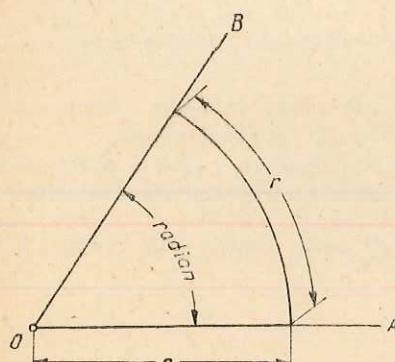


Fig. 1.

<sup>1</sup> De aici înainte, cuvîntul radian se va subînțelege. De exemplu, vom scrie  $a = 2,5$  în loc de  $a = 2,5$  radian.

Fiindcă raportul a două mărimi, măsurate cu aceeași unitate, nu depinde de unitatea aleasă, rezultă că aceste rapoarte sunt egale:

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\alpha'}{200} = \frac{a}{\pi}. \quad (2)$$

Cu ajutorul acestor formule se trece de la o măsură la alta.

**Observație.** În relațiile de transformare (2) intervin numerele iraționale  $\pi, \frac{1}{\pi}$ . Pentru o mai bună aproximatie este necesară cunoașterea valorilor aproximative  $\pi = 3,1416, \frac{1}{\pi} = 0,3183$ .

### Aplicații

1° Să se exprime în grade centesimale unghiul egal cu  $18^{\circ}20'7''$ .

**Soluție.** Din proporția formată cu primele două rapoarte ale relațiilor (2) obținem:

$$\alpha' = \frac{200}{180} \alpha = \frac{10}{9} \alpha.$$

Înlocuind în această relație pe  $\alpha$  cu  $18 + \frac{20}{60} + \frac{7}{60 \cdot 60}$ , găsim:

$\alpha' \approx 20,3725$ . Prin urmare,

$$18^{\circ}20'7'' \approx 20^{\circ}37'25''.$$

2° Două din unghiurile unui triunghi sunt de  $15^{\circ}$  și  $60^{\circ}$ . Să se exprime în radiani al treilea unghi al triunghiului.

**Soluție.** Unghiul al treilea al triunghiului este egal cu  $180^{\circ} - (15^{\circ} + 60^{\circ}) = 105^{\circ}$ . Pentru a transforma măsura sa din grade sexagesimale în radiani, considerăm proporția formată cu primul și ultimul raport din relațiile (2):

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{a}{\pi},$$

adică

$$a = \frac{105}{180} \pi = \frac{7}{12} \pi.$$

3° Să se exprime în grade sexagesimale unghiul de 1 radian.

**Soluție.** Din relațiile (2), ținând seama că  $a = 1$ , obținem:

$$a = \frac{180}{\pi}$$

sau:

$$a \approx \frac{180}{3,1416} \approx 57,2958.$$

Deci:

$$1 \text{ radian} \approx 57^{\circ}17'44'',8.$$

4° În capitolele următoare vom măsura unghiurile în grade sexagesimale și în radiani. De asemenea, măsurile unor anumite unghiuri sunt frecvent întâlnite în aplicații. De aceea este necesară memorarea tabelului de mai jos, întocmit cu ajutorul relației  $a = \frac{\alpha}{180} \pi$ :

$\alpha^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

5° Din relația (1) obținem:

$$l = ar.$$

Prin urmare, lungimea arcului de cerc este egală cu produsul dintre măsura în radiani a unghiului la centru corespunzător și lungimea razei cercului.

Observație. Pentru  $r = 1$ , relația precedentă devine  $l = a$ : lungimea arcului de cerc de rază 1 este egală cu măsura în radiani a unghiului la centru corespunzător. Simplitatea acestei relații face ca măsura în radiani a unghiurilor să fie preferată celorlalte, în special în cercetările cu caracter teoretic.

## § 2. Generalizarea noțiunii de unghi și de arc

3. Unghiuri orientate. Pînă acum am considerat unghiul definit în geometrie: figura formată de două semidrepte care au aceeași origine. Unghiul astfel definit se dovedește însă necorespunzător studiului unor mișcări, ca: strîngerea piuliței, rotația cheii, rotația elicei și.a., unde trebuie să se țină seama și de sensul rotațiilor, și de numărul lor.

În cele ce urmează vom da o nouă definiție unghiului care o va generaliza pe cea dată în geometrie.

Într-un plan se disting două sensuri pentru rotația unei semidrepte: sensul invers rotației acelor ceasornicului, numit *pozitiv*, și sensul de rotație a acelor ceasornicului, numit *negativ*. Sensul de rotație pozitiv (negativ) se înseamnă cu săgeată (fig. 2).

Planul în care s-a stabilit sensul pozitiv pentru rotații se numește *orientat*. Considerăm că unghiul orientat  $AOB$  este generat (descriș) de o semidreaptă

din planul orientat care se rotește în jurul originii sale, din poziția  $OA$  pînă în poziția  $OB$ .

Semidreapta  $OA$  se numește *latura initială* a unghiului  $AOB$ , iar semidreapta  $OB$  *latura finală*.

4. Unghiuri pozitive și negative. Convenim să numim unghiul  $AOB$ <sup>2</sup> *pozitiv* sau

<sup>1</sup> Sensul de rotație pozitiv se mai numește direct sau trigonometric, iar sensul negativ, — retrograd.

<sup>2</sup> În cele ce urmează, unde nu există posibilitatea de confuzie, nu se mai specifică că unghiul este orientat.

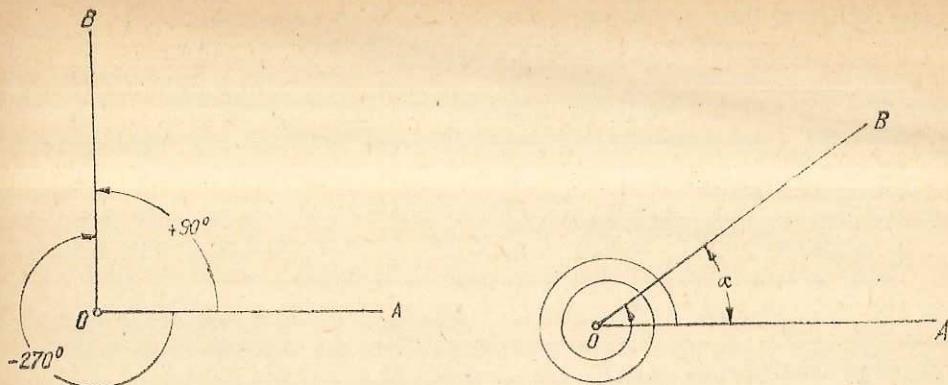


Fig. 3.

Fig. 4.

negativ, după cum sensul rotației semidreptei care îl generează este pozitiv sau negativ.

Presupunem, deocamdată, că rotația semidreptei nu depășește o rotație completă. Dacă măsura unghiului geometric  $\widehat{AOB}$  este  $\alpha$ , spunem că mărimea unghiului  $AOB$  este egală cu  $\alpha$  sau  $-\alpha$ , după cum rotația este pozitivă sau negativă și scriem respectiv  $AOB = \alpha$  sau  $AOB = -\alpha$ .<sup>1</sup>

Exemplu. În figura 3 sunt reprezentate două unghiuri cu latura inițială  $OA$  și latura finală  $OB$ . Mărimea unghiului pozitiv  $AOB$  este egală cu  $+90^\circ$ , iar mărimea unghiului negativ  $AOB$  este egală cu  $-270^\circ$ .

5. Unghiuri mai mari în valoare absolută decît  $360^\circ$ . Egalitatea și suma unghiurilor. Fie unghiul  $AOB = \alpha$  ( $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ). Să presupunem că semidreapta care îl generează, după ce descrie unghiul  $\alpha$ , efectuează  $n$  rotații complete (în figura 4,  $\alpha > 0$ ,  $n = 2$ ). Evident, semidreapta s-a rotit din poziția  $OA$  pînă în poziția  $OB$ .

Spunem că semidreapta a descris unghiul  $AOB$  de mărime egală cu  $\alpha + n \cdot 360^\circ$  dacă rotațiile sunt pozitive și unghiul  $AOB$  de mărime egală cu  $\alpha - n \cdot 360^\circ$  dacă rotațiile sunt negative.<sup>2</sup>

Prin urmare există o mulțime infinită de unghiuri  $\beta$  cu latura inițială  $OA$  și latura finală  $OB$ . Ele se exprimă prin formula:

$$\beta = \alpha \pm n \cdot 360^\circ \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

sau

$$\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Evident, pentru  $k$  ales convenabil,  $\beta > 360^\circ$ , sau  $\beta < -360^\circ$ . De aici rezultă că, în mulțimea unghiurilor cu latura inițială  $OA$  și latura finală  $OB$ , există o mulțime infinită de unghiuri mai mari în valoarea absolută decît  $360^\circ$ .

Observații. 1° În formula (3) unghiul  $\alpha$  poate fi oricare dintre unghiurile cu latura inițială  $OA$  și latura finală  $OB$ . În particular putem considera că  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ .

<sup>1</sup> Măsura unui unghi este un număr pozitiv, mărimea lui putind fi pozitivă sau negativă.

<sup>2</sup> În cele ce urmează, în loc de „unghiul de mărime egală cu...”, spunem „unghiul egal cu...“

2º Folosind măsura în radiani, formula (3) se scrie:

$$\beta = \alpha + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (3')$$

unde prin  $Z$  s-a notat mulțimea numerelor întregi  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ .

*Exemplu.* Dacă semidreapta se rotește în sensul pozitiv cu un unghi de  $120^\circ$ , în raport cu latura inițială  $OA$ , fiecarei poziții finale a semidreptei îi corespunde unul din unghiiurile:

1) pozitive:  $120^\circ, 480^\circ, 840^\circ, \dots$

2) negative:  $-240^\circ, -600^\circ, -960^\circ, \dots$

Toate aceste unghiiuri sunt cuprinse în formula:

$\beta = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) (pentru  $k = 0, 1, 2, \dots$  se obțin unghiiurile pozitive, pentru  $k = -1, -2, -3, \dots$ , unghiiurile negative) sau în formulele  $\beta = 480^\circ + k \cdot 360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );  $\beta = -240^\circ + k \cdot 360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) etc.

**Definiție.** Două unghiiuri care au aceeași mărime se numesc egale.

**Consecință.** Mărimea unui unghi fiind independentă față de poziția laturii inițiale, rezultă că orice semidreaptă din planul orientat poate fi considerată ca latură inițială a unui unghi.

**Definiție.** Suma a două unghiiuri se numește unghiul a cărui mărime este egală cu suma mărimilor celor două unghiiuri.

*Exemple*

1) În figura 5 a suma unghiiurilor  $AOB = 90^\circ$  și  $BOC = 45^\circ$  este unghiul  $AOC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ .

2) În figura 5 b suma unghiiurilor  $AOB = -270^\circ$  și  $BOC = 90^\circ$  este unghiul  $AOC = -270^\circ + 90^\circ = -180^\circ$ .

6. Corespondența biunivocă între mulțimea numerelor reale și mulțimea unghiiurilor orientate. Fie  $r_0$  un număr real arbitrar. Numerele

$$\dots, -3 \cdot 2\pi, -2 \cdot 2\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 2 \cdot 2\pi, 3 \cdot 2\pi, \dots$$

determină pe axa reală mulțimea de intervale disjuncte

$$\dots, [-3 \cdot 2\pi, -2 \cdot 2\pi], [-2 \cdot 2\pi, -2\pi], [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 2 \cdot 2\pi], [2 \cdot 2\pi, 3 \cdot 2\pi], \dots$$

a căror reuniune este egală cu mulțimea numerelor reale. Rezultă că în această mulțime există un interval, și numai unul, care conține numărul  $r_0$ ; fie  $[k_0 \cdot 2\pi, (k_0 + 1) \cdot 2\pi]$  acest interval. Atunci

$$k_0 \cdot 2\pi \leq r_0 < (k_0 + 1) \cdot 2\pi$$

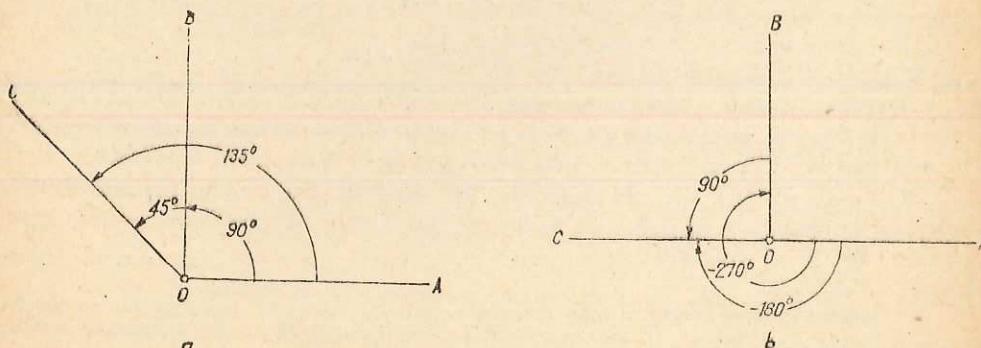


Fig. 5.

sau

$$0 \leq r_0 - k_0 \cdot 2\pi < 2\pi,$$

adică

$$r_0 - k_0 \cdot 2\pi = \alpha_0,$$

unde  $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$  este un număr determinat. Cu alte cuvinte, oricare ar fi numărul real  $r_0$ , există numărul întreg  $k_0$  și  $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$ , unic determinat, astfel încât

$$r_0 = k_0 \cdot 2\pi + \alpha_0.$$

Însă numărul  $k_0 \cdot 2\pi + \alpha_0$  este egal cu unghiul descris de o semidreaptă care, după ce descrie unghiul  $\alpha_0$ , efectuează  $k_0$  rotații complete (pozitive sau negative, după cum  $k_0 > 0$  sau  $k_0 < 0$ ). Prin urmare fiecărui număr real putem face să-i corespundă un unghi orientat, și numai unul, anume unghiul egal cu acest număr. În această corespondență fiecare unghi orientat este corespondență stabilită se numește *biunivocă*. În acest fel *intre mulțimea numerelor reale și mulțimea unghiiurilor orientate există o corespondență biunivocă*.

**Observație.** În această corespondență sumei a două numere reale îi corespunde suma unghiiurilor respective. Se poate arăta că, în acest caz, orice proprietate a sumei numerelor reale este valabilă și pentru suma unghiiurilor. Unele precizări vor fi făcute în § 26, cu ocazia introducerii operațiilor de adunare a numerelor complexe.

7. Corespondența între mulțimea numerelor reale și poziția laturii finale a unui unghi din planul orientat. Vom arăta că fiecărui număr real putem face să-i corespundă, printr-un anumit procedeu, poziția laturii finale a unui unghi unic determinat. Pentru aceasta considerăm mulțimea unghiiurilor din planul orientat a căror latură inițială este semidreapta  $OA$ . Fie  $r = k \cdot 2\pi + \alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) un număr real. El este egal cu unghiul pentru care  $OA$  este latura inițială și a cărui latură finală coincide cu latura finală a unghiului  $\alpha$ . De aici rezultă că fiecărui număr real  $r = k \cdot 2\pi + \alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) putem face să-i corespundă, în mod unic, poziția laturii finale a unghiului  $\alpha$ .

**Observație.** Corespondența stabilită nu este biunivocă. Întradevar, dacă  $OB$  este poziția laturii finale a unui unghi, există o mulțime infinită de unghiiuri cu latura inițială  $OA$  și latura finală  $OB$ , ale căror mărimi sunt numere reale distincte. Așadar, fiecare poziție a laturii finale a unui unghi este corespondătoare unei mulțimi infinite de numere reale distincte.

8. Generalizarea noțiunii de arc. Să considerăm o semidreaptă din planul orientat care se rotește în jurul originii sale, din poziția  $OA$  pînă în poziția  $OB$ . Un punct al semidreptei, diferit de origine, descrie un drum numit *arc*. Poziția punctului  $OA$  se numește *originea arcului*, iar poziția sa pe  $OB$  *extremitatea arcului*.

Arcul cu originea și extremitatea, respectiv, în punctele  $M$  și  $N$  se notează  $\widehat{MN}$ . Convenim să numim *arcul pozitiv* sau *negativ*, după cum rotația

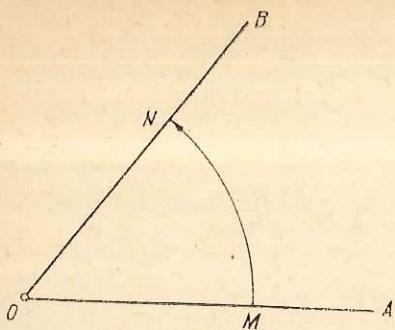


Fig. 6.

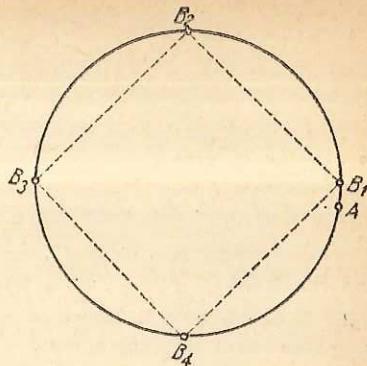


Fig. 7.

semidreptei este pozitivă sau negativă. În acest fel, arcului i se atribuie sensul rotației și se înseamnă cu săgeată (fig. 6).

Fiecare arc  $\widehat{MN}$  îi corespunde un unghi unic determinat: unghiul cu latura inițială  $OM$  și latura finală  $ON$ .

Prin mărimea arcului  $MN$  înțelegem mărimea unghiului corespunzător. Așadar, fiecare arc de mărime  $\alpha$  îi corespunde unghiul de mărime  $\alpha$  și reciproc. De aici rezultă că tot ce s-a spus despre mărimea unghiului este valabil și pentru mărimea arcului. De aceea putem spune arc în loc de unghi și invers.

**Aplicație.** Fie  $B_1, B_2, \dots, B_n (n \geq 3)$  vîrfurile unui poligon regulat și  $A$  un punct arbitrar aparținând cercului circumscris poligonului (în figura 7,  $n = 4$ ). Evident, există o mulțime infinită de arce cu originea în punctul  $A$  și extremitățile în vîrfurile poligonului dat. Dacă  $\beta$  și  $\alpha$  sunt două din aceste arce, diferența lor este un multiplu de  $\frac{360^\circ}{n}$ :

$$\beta - \alpha = k \cdot \frac{360^\circ}{n},$$

de unde:

$$\beta = \alpha + k \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Presupunând arcul  $\alpha$  fixat, rezultă că mulțimea arcelor cu originea în  $A$  și extremitățile în vîrfurile poligonului considerat se exprimă prin formula:

$$\beta = \alpha + k \cdot \frac{360^\circ}{n} (k \in \mathbb{Z}). \quad (4)$$

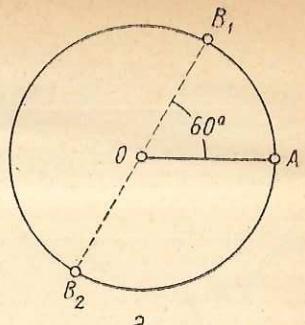
**Observație.** Se constată ușor că formula este valabilă și pentru arcele ale căror extremități sunt simetrice față de centrul cercului corespunzător (în acest caz  $n = 2$ ).

**Exemplu 1)** Mulțimea arcelor cu originea în  $A$  și extremitatea în  $B_1$  sau  $B_2$  (fig. 8, a) este  $\beta = 60^\circ + k \cdot \frac{360^\circ}{2} = 60^\circ + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

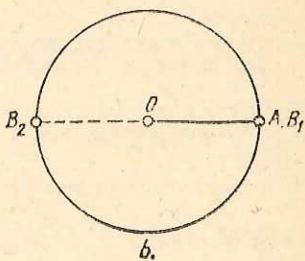
2) Mulțimea arcelor cu originea în  $A$  și extremitatea în  $B_1 (B_1 \equiv A)$  sau  $B_2$  (fig. 8, b) este  $\beta = 0^\circ + k \cdot \frac{360^\circ}{2} = k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

3) Mulțimea arcelor cu originea în  $A$  și extremitatea într-unul din punctele  $B_1, B_2, B_3, B_4$  (fig. 8, c) este  $\beta = 45^\circ + k \cdot \frac{360^\circ}{4} = 45^\circ + k \cdot 90^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

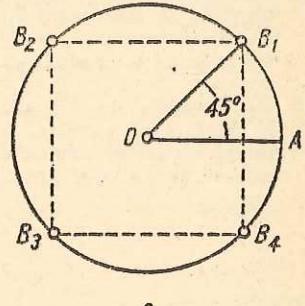
4) În figura 8, d,  $\beta = 0^\circ + k \cdot \frac{360^\circ}{6} = k \cdot 60^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .



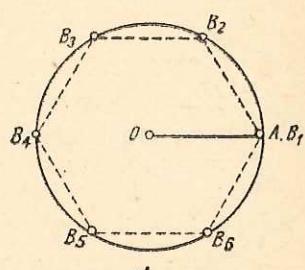
a.



b.



c.



d.

Fig. 8.

6. Să se măsoare în grade sexagesimale și în radiani unghiul rotației unui volant, dacă execută:

a) 2 rotații complete; b) 2,3 rotații complete; c)  $\frac{5}{8}$  rotații complete.<sup>1</sup>

7. Să se exprime în grade sexagesimale unghiul egal cu:

$$a) \frac{\pi}{5}; \quad b) -5\frac{\pi}{4}; \quad c) \frac{13\pi}{6}.$$

<sup>1</sup> În exercițiile 6, 11, 12 sensul rotației se consideră pozitiv.

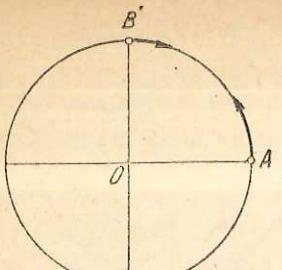


Fig. 9.

8. Să se exprime în grade sexagesimale unghiul egal cu:  
a) 0,6; b) 1,7; c) -4; d) -2,6.
9. Să se afle lungimea arcului de cerc, cu raza de 3,2 m, dacă arcul este egal cu  $117^\circ$ .
10. Lungimea arcului de cerc, a cărui rază este egală cu 2,4 m, este de 4 m. Să se exprime în grade sexagesimale acest arc.
11. O roată dințată are 90 de dinți. Să se exprime în radiani unghiul de rotație al roții, dacă ea se rotește cu:  
a) 30 de dinți; b) 25 de dinți; c) 40 de dinți;  
d) 200 de dinți.
12. Un disc execută într-un minut 300 de rotații complete. Să se calculeze viteza sa unghiulară în radiani pe secundă.
13. Viteza unghiulară a unui valț este de 42,3 rad/s. Să se calculeze numărul rotațiilor efectuate într-un minut.
14. O roată de transmisie se rotește cu viteza unghiulară  $\omega = \frac{2\pi}{9}$  rad/s. În cît timp execută o rotație completă?
15. Două mobile *A* și *B*, începând din același moment se deplasează în același sens pe un cerc. În momentul initial pozițiile lor sunt diametral opuse. Mobilul *A* descrie în fiecare minut un arc de  $30^\circ$ , iar mobilul *B* un arc de  $45^\circ$ . După cît timp de la începutul mișcării se produce prima, a patra și a *n*-a întâlnire a mobilelor?
16. Două mobile *A* și *B*, situate în extremitățile a doi diametri perpendiculari (fig. 9), se deplasează pe cerc, începând din același moment. Mobilul *A* descrie în fiecare minut un arc de  $20^\circ$ ; mobilul *B* descrie în fiecare minut un arc de  $-10^\circ$ . După cîte minute se produce prima, a treia, a *n*-a întâlnire a mobilelor?

## Capitolul II

### Funcții trigonometrice

#### § 3. Funcțiile trigonometrice ale unghiului ascuțit

**9. Definiția funcțiilor trigonometrice.** Fie  $\alpha$  un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic și *a* lungimea ipotenuzei, *b* lungimea catetei alăturate unghiului  $\alpha$ , *c* lungimea catetei opuse unghiului  $\alpha$  (fig. 10).

Reamintim că funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă ale unghiului  $\alpha$  se definesc ca rapoarte între laturile triunghiului, și anume:<sup>1</sup>

$$\sin \alpha = \frac{c}{a},$$

adică *sinusul unghiului ascuțit se numește raportul dintre cateta opusă unghiului și ipotenuză*;

$$\cos \alpha = \frac{b}{a},$$

adică *cosinusul unghiului ascuțit se numește raportul dintre cateta alăturată unghiului și ipotenuză*;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{b},$$

adică *tangenta unghiului ascuțit se numește raportul dintre cateta opusă unghiului și cateta alăturată*;

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{c},$$

adică *cotangenta unghiului ascuțit se numește raportul dintre cateta alăturată unghiului și cateta opusă*.

**10. Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ .**

*Unghiul de  $30^\circ$ .* Să considerăm triunghiul dreptunghic cu un unghi de  $30^\circ$

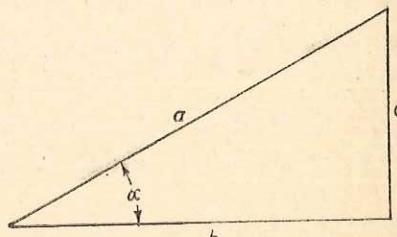


Fig. 10.

<sup>1</sup> Pentru prescurtare, în loc de *lungimea laturii*, spunem *latura*.

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiiurile  $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  se pot memora din tabelul următor:

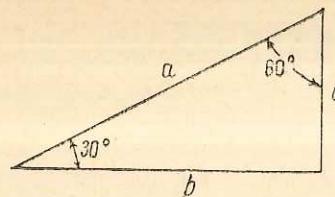


Fig. 11.

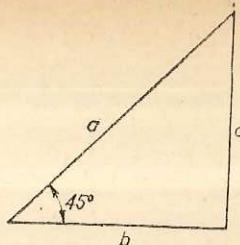


Fig. 12.

și ipotenuza egală cu  $a$  (fig. 11). În acest caz, cateta opusă unghiului de  $30^\circ$  este egală cu jumătatea ipotenuzei:  $c = \frac{a}{2}$ . Mai departe, din teorema lui Pitagora ( $b^2 = a^2 - c^2$ ) găsim că  $b = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Prin urmare:

$$\sin 30^\circ = \frac{c}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{c}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

*Unghiul de  $60^\circ$ .* Observăm că:

$$\sin 60^\circ = \frac{b}{a} = \cos 30^\circ; \quad \cos 60^\circ = \frac{c}{a} = \sin 30^\circ;$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{b}{c} = \operatorname{ctg} 30^\circ; \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} 30^\circ$$

și folosim rezultatele precedente.

*Unghiul de  $45^\circ$ .* Dacă un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este de  $45^\circ$ , triunghiul este și isoscel (fig. 12). Din teorema lui Pitagora rezultă că  $b = c = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Prin urmare:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

$\alpha$	$30^\circ$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

#### 11. Relațiile dintre funcțiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite complementare.

Dacă unghiul  $\alpha$  este ascuțit, unghiul  $90^\circ - \alpha$  este, de asemenea, ascuțit; unghiurile  $\alpha$  și  $90^\circ - \alpha$  se numesc *complementare*.

Între funcțiile trigonometrice ale unghiurilor complementare există relații:

$$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha; \quad \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Într-adevăr, notind cu  $\alpha$  un unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic (fig. 10), celălalt unghi ascuțit al său este  $90^\circ - \alpha$ . Cateta  $b$ , opusă unghiului  $90^\circ - \alpha$ , este alăturată unghiului  $\alpha$ ; cateta  $c$ , alăturată unghiului  $90^\circ - \alpha$ , este opusă unghiului  $\alpha$ .

Deci:

$$\sin (90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \cos \alpha; \quad \cos (90^\circ - \alpha) = \frac{c}{a} = \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \operatorname{ctg} \alpha; \quad \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha) = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} \alpha.$$

*Exemplu*

$$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ; \quad \cos 45^\circ = \sin 45^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10}.$$

#### § 4. Elemente de algebră vectorială

**12. Scalari și vectori.** Mărimile care se întâlnesc în mecanică, fizică și în alte științe aplicate sunt de două feluri. Pe de o parte, mărimi ca timpul, temperatura, masa, densitatea, lungimea, aria, volumul și.a. care sunt caracterizate printr-o anumită valoare numerică. Pe de altă parte, mărimi ca forță, viteza, accelerarea și.a. care sunt determinate numai atunci când li se cunosc valoarea numerică și sensul. Mărimile de primul fel se numesc *scalare sau, pe scurt, scalari* și se reprezintă prin numere reale. Mărimile de al doilea fel se numesc *vectoriale*. Orice mărime vectorială poate fi reprezentată printr-un segment de lungime și sens determinat. Anume, lungimea segmentului se ia egală cu valoarea numerică a mărimii vectoriale, iar sensul segmentului coincide cu sensul ei. Pentru a caracteriza sensul unui segment unul din cele două puncte care îl mărginesc se ia ca origine a segmentului, iar celălalt ca extremitate; sensul segmentului se consideră sensul de la origine la extremitate. Segmentul căruia îl s-a precizat sensul (adică s-a spus care dintre cele două extremități se consideră origine și care extremitate) se numește *vector*. În acest fel vectorul servește la reprezentarea geometrică a mărimilor vectoriale. De obicei, vectorul se înseamnă prin două litere cu săgeată deasupra, plasând, pe primul loc litera care indică originea segmentului. De exemplu, vectorul pentru care punctul  $A$  este origine și  $B$  extremitate îl înseamnă  $\vec{AB}$ . În desen, vectorul se reprezintă printr-un segment de lungime egală cu modulul vectorului și al cărui sens se indică prin săgeată (fig. 13).

Vectorul a cărui origine coincide cu extremitatea sa se numește *vectorul nul* și se notează cu simbolul  $\vec{0}$ . Sensul vectorului nul se consideră nedeterminat.

*Modulul* sau măsura vectorului  $\vec{AB}$  se numește lungimea segmentului  $AB$  și se notează  $|\vec{AB}|$ .

Vectorul al cărui modul este egal cu unitatea de măsură se numește *vector unitar*.

**13. Egalitatea vectorilor.** Pe o dreaptă se pot defini două sensuri. Convențional, unul dintre ele se numește *pozitiv*, iar celălalt *negativ*. Dreapta pe care s-a ales sensul pozitiv se numește *axă*. Sensul pozitiv pe o axă se înseamnă prin săgeată.

Se consideră că doi vectori au același sens dacă sunt situați:

1) ori pe aceeași dreaptă și sensurile lor coincid cu unul dintre cele două sensuri ale dreptei (fig. 14);

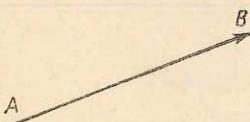


Fig. 13.

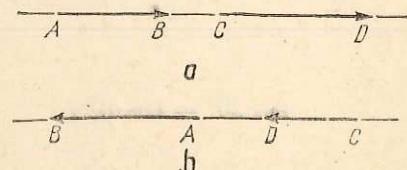


Fig. 14.

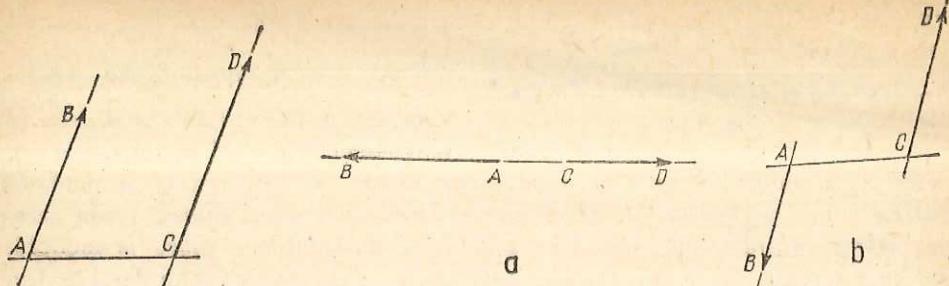


Fig. 15.

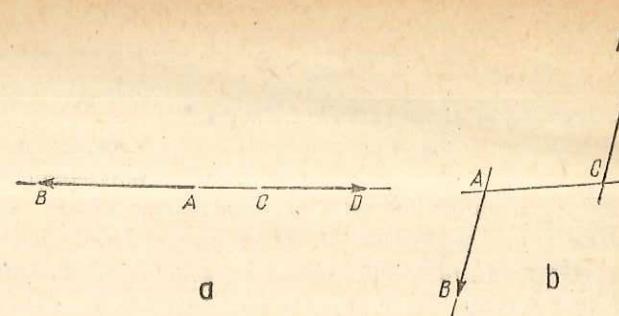


Fig. 16.

2) ori pe drepte paralele și de aceeași parte a dreptei care unește originile lor (fig. 15).

Dacă doi vectori sunt situați pe aceeași dreaptă, sau pe drepte paralele, și nu au același sens, se spune că au *sensuri opuse* (fig. 16).

Doi vectori  $\vec{AB}$  și  $\vec{CD}$  care au același sens și modulele egale se numesc *egali* și scriem  $\vec{AB} = \vec{CD}$ . Se verifică imediat că egalitatea vectorilor astfel definită este *reflexivă*, *simetrică* și *tranzițivă*, adică satisfac axiomele unei relații de echivalență.

Din definiția egalității vectorilor rezultă că un vector se poate deplasa paralel cu el însuși. Nefiind legat de originea sa, vectorul poate fi notat și printr-o singură literă cu săgeată deasupra. În afară de aceasta, orice punct  $O$  poate fi ales ca origine a unui vector. Fixând punctul  $O$ , mulțimea vectorilor egali cu un vector  $\vec{a}$  (clasa de echivalență a vectorului  $a$ ) este reprezentată printr-un vector unic cu originea în  $O$ .

##### Exemple

1) Vectorii  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , (fig. 17) sunt egali.

2) Vectorii  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  (fig. 18) au modulele egale, dar nu au același sens; prin urmare nu sunt, doi cîte doi, egali.

**14. Adunarea vectorilor.** Fie date vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  (fig. 19). Alegem un punct arbitrar  $O$  și construim vectorii  $\vec{OA} = \vec{a}$  și  $\vec{AB} = \vec{b}$  (originea celui de-al

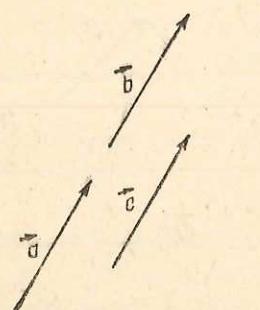


Fig. 17.

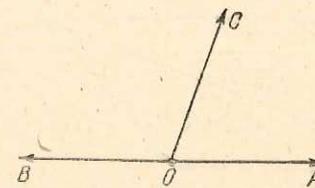


Fig. 18.

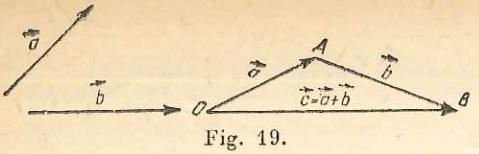


Fig. 19.

doilea vector coincide cu extremitatea primului). Prin definiție, vectorul  $\vec{OB} = \vec{c}$  se numește suma vectorilor  $a, b$  și se notează  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . În particular, dacă cei doi vectori au

același sens, suma lor este vectorul având sensul vectorilor dați și modulul egal cu suma modulelor lor. Dacă însă vectorii au sensuri opuse, suma acestora este vectorul având sensul vectorului cu modulul mai mare și modulul egal cu diferența dintre modulul primului vector și modulul celui de-al doilea. În cazul egalității modulelor celor doi vectori care au sensuri opuse, suma lor este vectorul nul.

**O b s e r v a t i e.** Definiția sumei a doi vectori are drept suport regula paralelogramului folosită în mecanică pentru determinarea rezultantei a două forțe concurente. Ea poartă denumirea de *regula triunghiului*.

Adunarea vectorilor, definită mai sus, se bucură de două proprietăți importante, întâlnite și la adunarea numerelor:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}: \text{comutativitatea} \quad (1)$$

și

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}: \text{asociativitatea.} \quad (2)$$

Demonstrațiile acestor proprietăți se fac cu ușurință urmărind figura 20 și figura 21, respectiv. De aici rezultă următoarea regulă de adunare a vectorilor, numită *regula poligonului*:

Pentru a construi suma oricărui număr de vectori se construiesc vectori egali cu cei dați, astfel încât originea uneia să coincidă cu extremitatea celui precedent din sumă. Vectorul  $a$  căruia origine coincide cu originea primului termen, iar extremitatea cu a ultimului, reprezintă suma vectorilor considerați.

*Exemplu*

În figura 22 este reprezentat vectorul  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ .

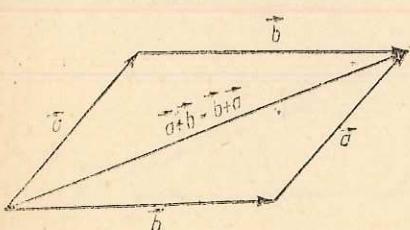


Fig. 20.

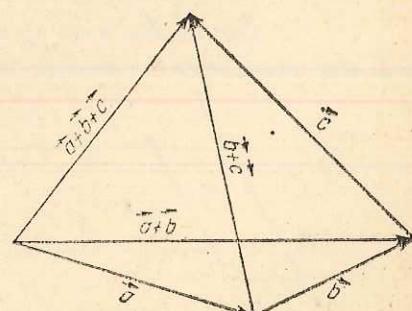


Fig. 21.

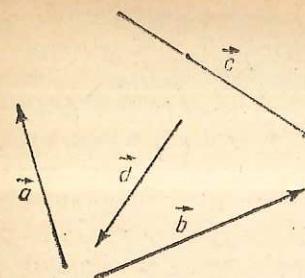


Fig. 22.

**15. Scăderea vectorilor.** Pentru orice vector  $\vec{a}$  se poate defini în mod unic vectorul care are sensul opus și modulul egal cu modulul vectorului  $\vec{a}$ . Vectorul astfel definit se numește *opusul* vectorului  $\vec{a}$  și se notează  $-\vec{a}$ .

Fie  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  doi vectori arbitrați. Prin diferența dintre vectorul  $\vec{a}$  și vectorul  $\vec{b}$ , notată  $\vec{a} - \vec{b}$ , se înțelege suma dintre vectorul  $\vec{a}$  și opusul vectorului  $\vec{b}$ , adică  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ . În particular, diferența a doi vectori egali este vectorul nul.

**16. Înmulțirea vectorului cu un număr.** Prin produsul dintre un vector  $\vec{a}$  și un număr real  $\lambda$  se înțelege vectorul care are modulul egal cu produsul dintre modulul numărului  $\lambda$  și modulul vectorului  $\vec{a}$  și sensul lui  $\vec{a}$  sau  $-\vec{a}$ , după cum  $\lambda > 0$  sau  $\lambda < 0$  (pentru  $\lambda = 0$  produsul respectiv este vectorul nul). Produsul dintre  $\vec{a}$  și  $\lambda$  se notează  $\lambda\vec{a}$ . Numărul  $\lambda$  se mai numește și *scalar*. În particular,  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$  și  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ .

Produsul astfel definit este *distributiv în raport cu adunarea vectorilor*:

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}. \quad (3)$$

Ne convingem ușor de justețea acestei egalități dacă observăm că vectorii  $\vec{a}, \vec{b}$  și  $\vec{a} + \vec{b}$  formează laturile unui triunghi și deci, după înmulțirea fiecărui dintre ei cu  $\lambda$ , obținem din nou un triunghi (asemenea cu primul).

Observăm, de asemenea, că produsul dintre un vector și un număr este *distributiv în raport cu adunarea scalarilor*:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a} \quad (4)$$

și *asociativ în raport cu înmulțirea scalarilor*

$$\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = \lambda_2(\lambda_1\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}.$$

**Aplicație.** Să demonstrăm cu ajutorul algebrei vectoriale următoarea teoremă, cunoscută din geometrie:

*Medianele unui triunghi se intersectează într-un punct și sunt împărțite de acest punct în raportul 2 : 1.*

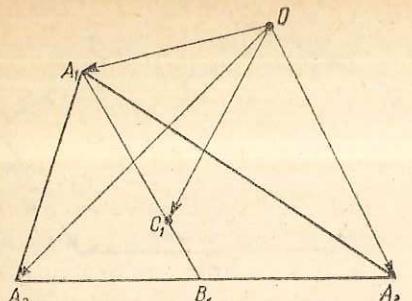


Fig. 23.

*Demonstrări.* Fie  $A_1B_1$  mediana corespunzătoare laturii  $A_2A_3$  în triunghiul  $A_1A_2A_3$  (fig. 23). Notăm cu  $C_1$  punctul care împarte această mediană în raportul  $A_1C_1 : C_1B_1 = 2 : 1$ . Alegem un punct arbitrar  $O$  (poate să nu aparțină planului triunghiului) și introducem notațiile:

$$\overrightarrow{OA_1} = \vec{r}_1, \overrightarrow{OA_2} = \vec{r}_2, \overrightarrow{OA_3} = \vec{r}_3.$$

Adunând, membru cu membru, egalitățile evidente

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_1}, \quad \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3B_1}$$

și ținind seama că  $\overrightarrow{A_2B_1} + \overrightarrow{A_3B_1} = \overrightarrow{A_2B_1} - \overrightarrow{B_1A_3} = \vec{0}$ , obținem:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}). \quad (5)$$

Dar

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_2} = -\vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

și

$$\overrightarrow{A_1A_3} = -\vec{r}_1 + \vec{r}_3.$$

În acest fel (5) devine:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = -\vec{r}_1 + \frac{1}{2} (\vec{r}_2 + \vec{r}_3)$$

și deci

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A_1B_1} = -\frac{2}{3} \vec{r}_1 + \frac{1}{3} (\vec{r}_2 + \vec{r}_3). \quad (6)$$

În sfîrșit

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$$

sau, ținind seama de (6):

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3).$$

Simetria acestei relații ne arată că vectorii cu originea în  $O$  și extremitățile în punctele  $C_2, C_3$ , care împart celelalte două mediane  $A_2B_2, A_3B_3$  în raportul  $2 : 1$ , au aceeași expresie. De aici rezultă că punctele  $C_1, C_2$  și  $C_3$  coincid.

**17. Proiecția vectorului pe o axă.** Pentru vectorul situat pe o axă introducem o noțiune importantă, care îl caracterizează: mărimea vectorului. Prin mărimea unui vector situat pe o axă se înțelege modulul vectorului luat



Fig. 24.

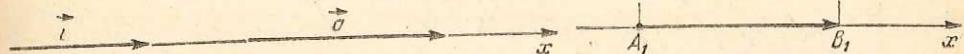


Fig. 25.

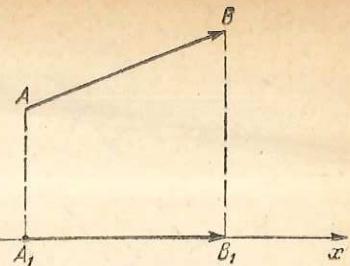


Fig. 26.

cu semnul plus, sau cu semnul minus, după cum sensul vectorului coincide, sau nu, cu sensul pozitiv al axei. Mărimea vectorului  $AB$  se notează  $AB$ .

#### Exemplu

În figura 24,  $AB = |AB| = 2$ ;  $CD = -|CD| = -3$ .

Fie acum vectorul  $\vec{a}$  situat pe o axă  $x$  (fig. 25). Se numește *versor* al axei  $x$  vectorul unitar  $\vec{i}$  care are același sens cu axa. Ținind seama de cele spuse mai sus, rezultă relația  $\vec{a} = \vec{ai}$  adică *un vector situat pe o axă este egal cu produsul dintre mărimea sa și versorul axei*.

Reamintim că proiecția unui punct pe o dreaptă se numește piciorul perpendicularării construite din acel punct pe dreapta dată.

Fie un vector  $AB$  și o axă  $x$  (fig. 26). Să notăm cu  $\overrightarrow{A_1B_1}$  vectorul ale cărui origine și extremitate sunt, respectiv, proiecția originii și extremității vectorului  $AB$  pe axa  $x$ . *Proiecția vectorului  $AB$  pe axa  $x$  se numește mărimea vectorului  $A_1B_1$  și se notează  $\text{pr}_x AB = A_1B_1$ .* În acest fel  $\text{pr}_x AB = A_1B_1$ . Evident, dacă vectorul este situat pe axa de proiecție, atunci mărimea și proiecția sa pe axă coincid.

#### Exemplu

Proiecțiile vectorilor  $AB$ ,  $CD$  și  $EF$  pe axa  $x$  (fig. 27) sunt egale, respectiv, cu  $A_1B_1 = 2$ ,  $C_1D_1 = -3$ , și  $E_1F_1 = 0$ .

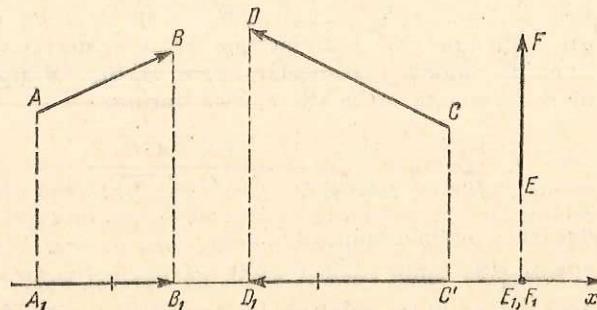


Fig. 27.

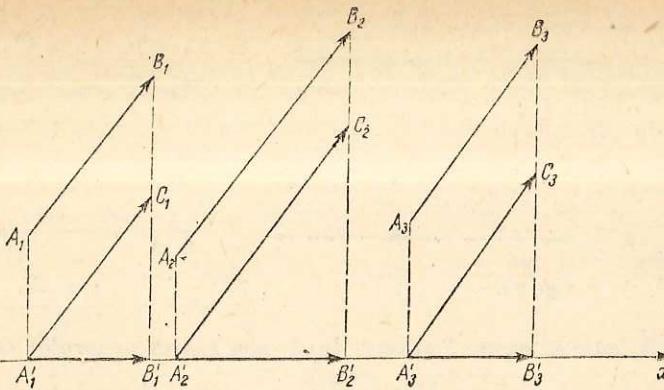


Fig. 28.

Să considerăm vectorii  $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \dots, \overrightarrow{A_nB_n}$  ( $n > 1$ ) care au același sens și  $\overrightarrow{A'_1B'_1}, \overrightarrow{A'_2B'_2}, \dots, \overrightarrow{A'_nB'_n}$  — proiecțiile lor pe o axă  $x$  (în figura 28 sunt reprezentate trei vectori).

#### Teorema I

*Proiecțiile unor vectori care au același sens, pe aceeași axă, sunt proporționale cu modulele lor.*

*Demonstrație.* Paralele la dreptele  $(A_1B_1), (A_2B_2), \dots, (A_nB_n)$ , duse prin punctele  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ , intersectează dreptele  $(B'_1B_1), (B'_2B_2), \dots, (B'_nB_n)$  în punctele  $C_1, C_2, \dots, C_n$  respectiv. Conform definiției egalității vectorilor, avem:

$$\overrightarrow{A'_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1}, \quad \overrightarrow{A'_2C_2} = \overrightarrow{A_2B_2}, \dots, \overrightarrow{A'_nC_n} = \overrightarrow{A_nB_n}. \quad (7)$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice  $A'_1B'_1C_1, A'_2B'_2C_2, \dots, A'_nB'_nC_n$  rezultă egalitatea:

$$\frac{|\overrightarrow{A'_1B'_1}|}{|\overrightarrow{A'_1C_1}|} = \frac{|\overrightarrow{A'_2B'_2}|}{|\overrightarrow{A'_2C_2}|} = \dots = \frac{|\overrightarrow{A'_nB'_n}|}{|\overrightarrow{A'_nC_n}|}. \quad (8)$$

Tinând seama de (7), deducem că numitorii rapoartelor din relațiile (8) pot fi înlocuiți prin  $|\overrightarrow{A_1B_1}|, |\overrightarrow{A_2B_2}|, \dots, |\overrightarrow{A_nB_n}|$  respectiv. Pe de altă parte, proiecțiile vectorilor dați pe axa  $x$  au același semn și deci numărătorii acestora și rapoarte pot fi înlocuiți respectiv prin  $|\overrightarrow{A'_1B'_1}|, |\overrightarrow{A'_2B'_2}|, \dots, |\overrightarrow{A'_nB'_n}|$ . În acest fel sirul de rapoarte egale (8) capătă forma:

$$\frac{|\overrightarrow{A'_1B'_1}|}{|\overrightarrow{A_1B_1}|} = \frac{|\overrightarrow{A'_2B'_2}|}{|\overrightarrow{A_2B_2}|} = \dots = \frac{|\overrightarrow{A'_nB'_n}|}{|\overrightarrow{A_nB_n}|},$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată.

**Consecință.** Proiecțiile unor vectori egali, pe aceeași axă, sunt egale.

O altă teoremă importantă, relativă la proiecțiile vectorilor pe o axă, va fi dată la punctul 49.

#### 18. Descompunerea vectorilor din plan.

Considerăm sistemul ortogonal de axe de coordinate  $xOy$  și un vector arbitrar  $\vec{a}$  situat în planul  $xOy$  (fig. 29). Există un vector unic, cu originea în  $O$ , egal cu  $\vec{a}$  (v. pet. 13); fie  $A(x, y)$  extremitatea sa. Numind rază vectoare a punctului  $A$  vectorul cu originea în originea axelor de coordinate și cu extremitatea în punctul  $A$ , putem spune că *coordonatele  $x$  și  $y$  ale punctului  $A$  sunt proiecțiile razei vectoare  $\overrightarrow{OA}$  (sau ale vectorului  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ) pe axele de coordonate.*

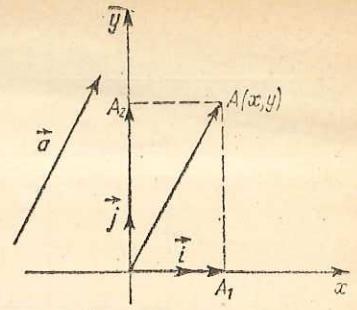


Fig. 29.

Să notăm cu  $A_1$  și  $A_2$  proiecțiile extremității vectorului  $\overrightarrow{OA}$  pe axele de coordonate. Evident, are loc egalitatea

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}, \quad (9)$$

care arată că orice vector se poate descompune în doi termeni situați pe axe de coordonate. Vectorii termeni  $\overrightarrow{OA_1}$  și  $\overrightarrow{OA_2}$  se numesc *componentele vectorului*  $\vec{a}$  față de sistemul de coordonate  $xOy$ .

Dacă  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$  sunt versorii axelor  $Ox$  și  $Oy$  respectiv, atunci  $\overrightarrow{OA_1} = xi$ ,  $\overrightarrow{OA_2} = yj$  (v. pet. 17) și deci egalitatea (9) capătă forma:

$$\vec{a} = xi + yj.$$

*Această egalitate dă descompunerea vectorului după versorii axelor prin proiecțiile sale pe axe<sup>1</sup>.* Astfel se stabilește legătura între teoria geometrică a vectorilor și cea algebrică.

#### 19. Operații cu vectori date prin proiecțiile lor.

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Să calculăm mai întâi suma lor. Tinând seama că operația de adunare a vectorilor este comutativă și asociativă (formulele (1) și (2), pet. 14), avem:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} + x_2\vec{i}) + (y_1\vec{j} + y_2\vec{j})$$

sau încă, deoarece produsul dintre un vector și un număr este distributiv față de adunarea scalarilor (formula (4), pet. 16):

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Această egalitate arată că *proiecțiile vectorului sumă pe axe de coordonate sunt egale cu sumele proiecțiilor de același nume ale vectorilor termeni*. Observăm că proprietatea stabilită este adeverată independent de axa de proiecție. Pentru aceasta este suficient să se aleagă un sistem ortogonal de axe de coor-

<sup>1</sup> Proiecțiile  $x, y$  ale vectorului  $\vec{a}$  pe axe de coordonate se mai numesc și *coordonatele vectorului* dat față de sistemul  $xOy$ .

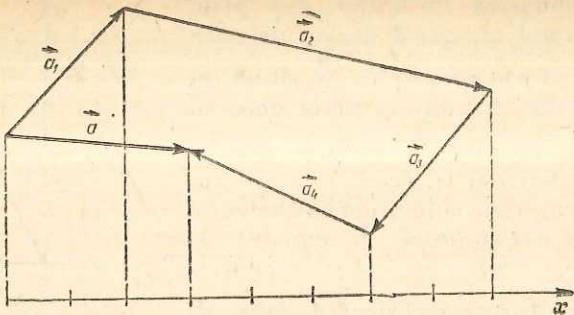


Fig. 30.

donate a cărui axă a absciselor să coincidă cu axa considerată și să se repete raționamentul făcut mai sus. De asemenea, ea se poate extinde ușor la un număr oarecare de vectori. În acest fel este valabilă.

### Teorema II

*Proiecția vectorului sumă pe o axă este egală cu suma proiecțiilor vectorilor termeni pe aceeași axă.*

#### Exemplu

În figura 30 sunt reprezentăți vectorii  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ , și  $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$ ;  $pr_x \vec{a}_1 + pr_x \vec{a}_2 + pr_x \vec{a}_3 + pr_x \vec{a}_4 = 2 + 6 + (-2) + (-3) = 3 = pr_x \vec{a}$ .

Pentru a calcula diferența  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$  este suficient să observăm că  $-\vec{b} = -x_2 \vec{i} - y_2 \vec{j}$  și deci

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j},$$

adică proiecțiile vectorului diferență sunt egale cu diferențele corespunzătoare ale proiecțiilor vectorilor termeni.

Regula de înmulțire a unui vector cu un număr se obține prin înmulțirea ambilor membri ai egalității  $\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j}$  cu  $\lambda$ . Folosind proprietățile de distributivitate în raport cu adunarea vectorilor și de asociativitate în raport cu înmulțirea scalarilor, obținem:

$$\lambda \vec{a} = \lambda x_1 \vec{i} + \lambda y_1 \vec{j}.$$

În acest fel proiecțiile produsului dintre un vector și un număr sunt egale cu produsul dintre numărul dat și proiecțiile respective ale vectorului.

### § 5. Funcțiile trigonometrice ale unghiului orientat

20. **Unghiul format de doi vectori și de un vector cu o axă.** Dându-se vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , dintr-un punct arbitrar  $O$  se construiesc vectorii  $\vec{OA} = \vec{a}$  și  $\vec{OB} = \vec{b}$  (fig. 31). Prin definiție, oricare dintre unghiurile cu latura inițială  $OA$

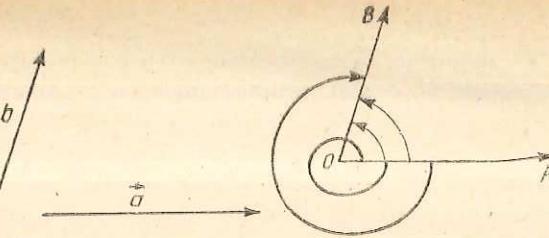


Fig. 31.

și latura finală  $OB$  se numește unghiul format de vectorul  $\vec{b}$  cu vectorul  $\vec{a}$  și se notează  $\widehat{(a, b)}$ . Prin urmare, trebuie să se facă distincție între unghiul  $\widehat{(a, b)}$  și  $\widehat{(b, a)}$ . Dacă dreptele  $(OA)$  și  $(OB)$  sunt perpendiculare, atunci vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se numesc perpendiculari sau ortogonali, notându-se  $\vec{a} \perp \vec{b}$  (sau  $\vec{b} \perp \vec{a}$ ).

*Unghiul format de un vector  $\vec{a}$  cu o axă  $x$  se definește ca unghiul format de vector cu versorul axei și se notează  $\widehat{(x, a)}$ .*

21. **Definiția funcțiilor trigonometrice.** Fie  $xOy$  un sistem ortogonal de axe de coordonate în planul orientat și  $\alpha$  un unghi situat în acest plan. Fără să restrângem generalitatea, putem presupune că latura inițială a unghiului  $\alpha$  este semidreapta  $Ox$  (v. consecința de la pct. 5). Să notăm cu  $OM$  latura sa finală. În acest fel se poate considera că  $\alpha$  este unghiul format de raza vectoare  $\vec{OM}$  cu axa  $Ox$  (fig. 32). Dacă  $a$  și  $b$  reprezintă proiecțiile razei vectoare pe axa absciselor și axa ordonatelor respectiv, iar  $r$  modulul său atunci este valabilă următoarea

#### Teoremă. Rapoartele:

$$\frac{b}{r}, \frac{a}{r}, \frac{b}{a}, \frac{a}{b},$$

dacă există, nu depind de modulul razei vectoare, ci depind numai de unghiul  $\alpha$ .

**Demonstrație.** Fiindcă  $r \neq 0$ , rapoartele  $\frac{b}{r}, \frac{a}{r}$  există pentru orice unghi  $\alpha$ . În schimb, dacă raza vectoare este situată pe una din axele de coordonate, ori  $a = 0$ , ori  $b = 0$ , și prin urmare, unul din rapoartele  $\frac{b}{a}, \frac{a}{b}$  nu există.

Presupunem, deocamdată, că toate cele patru rapoarte există. Fie  $\vec{OM}'$  o altă rază vectoare care formează unghiul  $\alpha$  cu

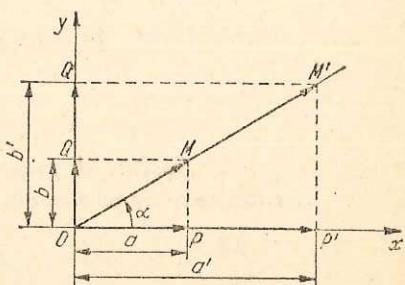


Fig. 32.

axa absciselor și  $a'$ ,  $b'$  proiecțiile sale, respectiv, pe axa absciselor și axa ordonatelor<sup>1</sup>, iar  $r'$  modulul său. Deoarece razele vectoriale  $\overrightarrow{OM'}$  și  $\overrightarrow{OM}$  au același sens, proiecțiile  $b'$ ,  $b$  sunt proporționale cu modulele  $r'$ ,  $r$  (teorema I, pct. 17):

$$\frac{b'}{r'} = \frac{b}{r}.$$

Analog:

$$\frac{a'}{r'} = \frac{a}{r}.$$

Împărțind membru cu membru aceste egalități, obținem, de asemenea, proporțiile:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}; \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b},$$

ceea ce demonstrează teorema.

Dacă raza vectorială  $\overrightarrow{OM}$  este situată pe una din axele de coordonate, de exemplu pe axa absciselor, fiindcă  $b = 0$ , există numai rapoartele:

$$\frac{b}{r}, \quad \frac{a}{r}, \quad \frac{b}{a}; \quad \frac{b'}{r'}, \quad \frac{a'}{r'}, \quad \frac{b'}{a'}.$$

Repetând raționamentul anterior, obținem:

$$\frac{b'}{r'} = \frac{b}{r}; \quad \frac{a'}{r'} = \frac{a}{r}; \quad \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}.$$

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

**Observație.** Dacă unghiul  $\alpha$  este așeunțit rapoartele  $\frac{b}{r}$ ,  $\frac{a}{r}$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{a}{b}$  sunt, respectiv, sinusul, cosinusul, tangentă și cotangentă unghiului  $\alpha$ .

Această observație ne dă posibilitatea să definim funcțiile trigonometrice ale unui unghi orientat. Fie  $\alpha$  unghiul format de o rază vectorială cu axa absciselor.

**Definiție.**

1) *Sinusul unghiului  $\alpha$  se numește raportul dintre proiecția razei vectoriale pe axa ordonatelor și modulul său:*

$$\sin \alpha = \frac{b}{r}. \quad (1)$$

2) *Cosinusul unghiului  $\alpha$  se numește raportul dintre proiecția razei vectoriale pe axa absciselor și modulul său:*

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> De aici înainte vom nota cu  $Ox$  axa absciselor și cu  $Oy$  axa ordonatelor.

3) *Tangentă unghiului  $\alpha$  se numește raportul dintre proiecția razei vectoriale pe axa ordonatelor și proiecția sa pe axa absciselor:*

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}. \quad (3)$$

4) *Cotangentă unghiului  $\alpha$  se numește raportul dintre proiecția razei vectoriale pe axa absciselor și proiecția sa pe axa ordonatelor:*

$$\cotan \alpha = \frac{a}{b}. \quad (4)$$

### Observații

1° În mod analog se definesc încă două funcții trigonometrice, mai puțin folosite:

$$\text{secantă unghiului } \alpha: \sec \alpha = \frac{r}{a}$$

și

$$\text{cosecantă unghiului } \alpha: \csc \alpha = \frac{r}{b}.$$

2°  $a$  și  $b$  sunt coordonatele extremității razei vectoriale  $\overrightarrow{OM}$  față de sistemul de axe considerat. De aceea, în loc de *proiecția razei vectoriale pe axa absciselor și proiecția razei vectoriale pe axa ordonatelor* putem spune, respectiv, *abscisa extremității razei vectoriale și ordinata extremității razei vectoriale*.

3° Fiindcă rapoartele  $\frac{b}{r}$ ,  $\frac{a}{r}$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{a}{b}$  nu depind de modulul razei vectoriale, ci depind numai de unghiul  $\alpha$ , notările  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cotan \alpha$  sunt justificate.

4° Pentru fiecare unghi  $\alpha$ , rapoartele  $\frac{b}{r}$ ,  $\frac{a}{r}$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{a}{b}$ , dacă există, sunt numere reale unic determinate. De aceea, *aceste rapoarte sunt funcții de unghiul  $\alpha$* . Se spune că  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cotan \alpha$  sunt *funcții trigonometrice ale unghiului  $\alpha$* . Unghiul  $\alpha$  se numește *argumentul* funcției trigonometrice, iar valorile rapoartelor  $\frac{b}{r}$ ,  $\frac{a}{r}$ ,  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{a}{b}$  se numesc, respectiv, *valorile* funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă ale unghiului  $\alpha$ .

*Exemplu.* Să se calculeze *valorile* funcțiilor trigonometrice pentru  $\alpha = -60^\circ$ .

*Soluție.* În figura 33 unghiul dintre raza vectorială  $\overrightarrow{OM}$  și axa absciselor este egal cu  $-60^\circ$ . Proiectând raza vectorială pe axele de coordonate, obținem:

$$a = \frac{r}{2}, \quad b = -r\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

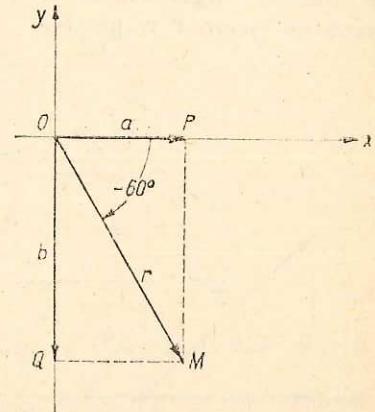


Fig. 33.

Prin urmare:

$$\sin(-60^\circ) = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \cos(-60^\circ) = \frac{a}{r} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-60^\circ) = \frac{b}{a} = -\sqrt{3}; \operatorname{ctg}(-60^\circ) = \frac{a}{b} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Aplicație.** Să arătăm că proiecția unui vector pe o axă este egală cu produsul dintre modulul vectorului și cosinusul unghiului format de vector cu axa.

Fără să restrîngem generalitatea, putem considera drept axă de proiecție axa  $Ox$  și originea vectorului situată în originea axelor de coordonate. Dacă vectorul dat  $a$  formează cu axa  $Ox$  unghiul  $\alpha$  (fig. 34) atunci, conform definiției cosinusului unui unghi, avem:

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{pr}_{Ox} \vec{a}}{|\vec{a}|},$$

de unde

$$\operatorname{pr}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha,$$

ceea ce demonstrează propoziția enunțată.

**22. Semnele funcțiilor trigonometrice.** Sistemul rectangular de axe de coordonate  $xOy$  împarte planul orientat în patru părți, numite *cadrane* și numerotate ca în figura 35. Se consideră că semiaxele de coordonate nu aparțin nici unui cadran. Despre unghiul cu latura finală, de exemplu, în cadrul II spunem că este unghi din cadrul II.

*Exemplu.* În figurile 36, a, b, c, d, unghiurile  $\alpha$  sunt, respectiv, unghiuri din cadranele I, II, III, IV.

Prin semnul unei funcții trigonometrice se înțelege semnul valorilor sale. În cele ce urmează vom arăta că, pentru unghiurile din același cadrans, în funcție de cadrans, nu-și schimbă semnul și, totodată, vom determina semnul respectiv.

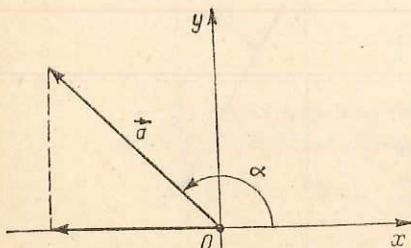


Fig. 34.

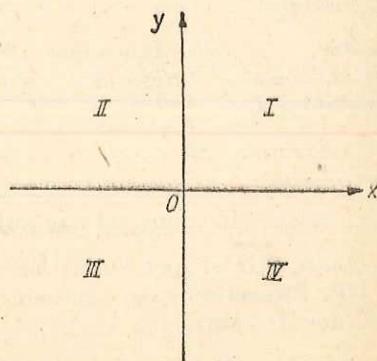
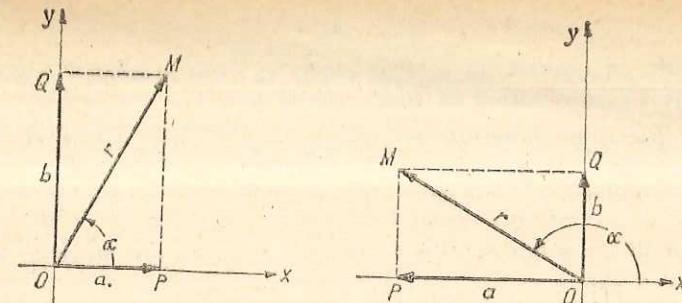
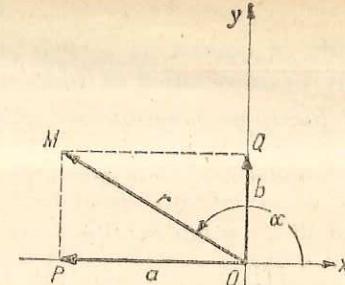


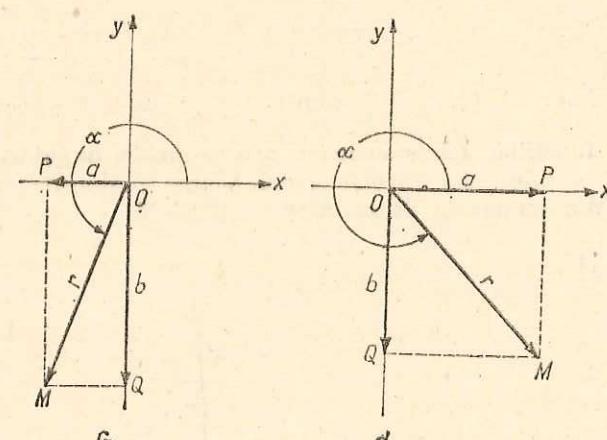
Fig. 35.



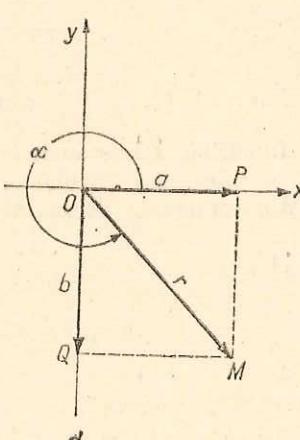
a.



b.



c.



d.

Fig. 36.

Din definiția funcțiilor trigonometrice rezultă că semnele lor depind de semnele proiecțiilor  $a$  și  $b$ , date de tabelul următor (v. fig. 36):

$\alpha$	Cadrul I	Cadrul II	Cadrul III	Cadrul IV
$a$	+	-	-	+
$b$	+	+	-	-

*Semnul funcției sinus.* Conform definiției,  $\sin \alpha = \frac{b}{r}$ . Deoarece  $r > 0$  semnul raportului  $\frac{b}{r}$  coincide cu semnul lui  $b$ . Deci, *funcția sinus este pozitivă în cadranele I și II și negativă în cadranele III și IV.*

**Semnul funcției cosinus.** Conform definiției,  $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ . Semnul acestui raport coincide cu semnul lui  $a$ . Prin urmare, *funcția cosinus este pozitivă în cadranele I și IV și negativă în cadranele II și III*.

**Semnele funcțiilor tangentă și cotangentă.** Conform definiției  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$ . Înțînd seama de semnele proiecțiilor  $a$  și  $b$  și de faptul că rapoartele  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{a}{b}$  au același semn, rezultă că *funcțiile tangentă și cotangentă sunt pozitive în cadranele I și III și negative în cadranele II și IV*<sup>1</sup>.

**Observație.** Semnele funcțiilor trigonometrice se rețin ușor din schema următoare:

$+ \begin{array}{ c c } \hline & + \\ \hline - & - \\ \hline \end{array}$ sinus	$- \begin{array}{ c c } \hline & + \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$ cosinus	$- \begin{array}{ c c } \hline & + \\ \hline + & - \\ \hline \end{array}$ tangentă și cotangentă
--	--	---

**23. Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unele unghiuri particulare.** Vom calcula valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghurile a căror latură finală este una din semiaxele de coordonate (fig. 37).

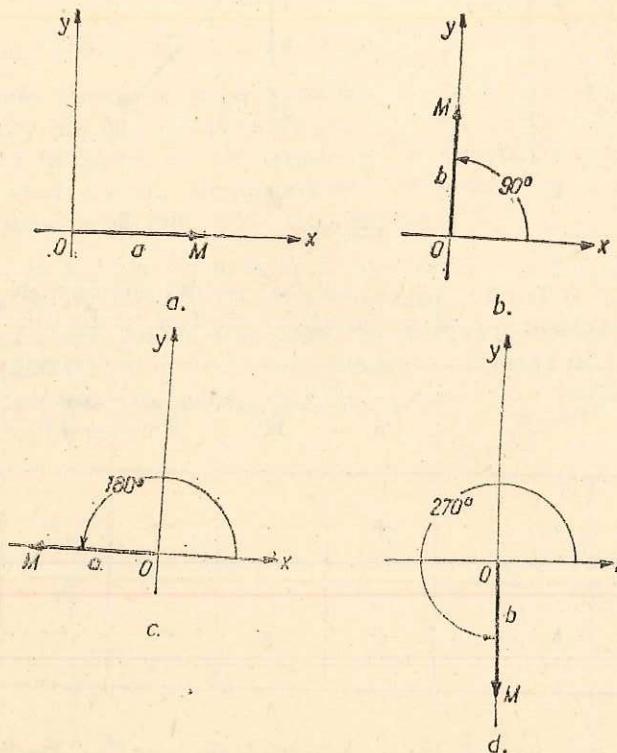


Fig. 37.

<sup>1</sup> Pentru prescurtare, de exemplu, în loc de „funcția sinus este pozitivă pentru unghiurile din cadranele I și II” spunem „funcția sinus este pozitivă în cadranele I și II”.

**Unghiul de  $0^\circ$  (fig. 37, a).** În acest caz,  $a = r$ ,  $b = 0$ . Deci,  $\sin 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$ ;  $\cos 0^\circ = \frac{r}{r} = 1$ ;  $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$ ;  $\operatorname{ctg} 0^\circ$  nu există.

**Unghiul de  $90^\circ$  (fig. 37, b).** În acest caz,  $a = 0$ ,  $b = r$ . Deci,  $\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1$ ;  $\cos 90^\circ = \frac{0}{r} = 0$ ;  $\operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{0}{r} = 0$ ;  $\operatorname{tg} 90^\circ$  nu există.

**Unghiul de  $180^\circ$  (fig. 37, c).** În acest caz,  $a = -r$ ,  $b = 0$ . Deci,  $\sin 180^\circ = \frac{0}{r} = 0$ ;  $\cos 180^\circ = \frac{-r}{r} = -1$ ;  $\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-r} = 0$ ;  $\operatorname{ctg} 180^\circ$  nu există.

**Unghiul de  $270^\circ$  (fig. 37, d).** În acest caz,  $a = 0$ ,  $b = -r$ . Deci,  $\sin 270^\circ = \frac{-r}{r} = -1$ ;  $\cos 270^\circ = \frac{0}{r} = 0$ ;  $\operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{0}{-r} = 0$ ;  $\operatorname{tg} 270^\circ$  nu există.

Tinând seama și de valorile funcțiilor trigonometrice pentru  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  (v. tabelul de la pct. 10) alcătuim tabelul următor:

	$0^\circ$ (0)	$30^\circ$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^\circ$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180^\circ$ ( $\pi$ )	$270^\circ$ $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu există	0	nu există
$\operatorname{ctg} \alpha$	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nu există	0

**24. Construcția valorilor funcțiilor trigonometrice.** Fie  $\alpha$  unghiul format de raza vectoare  $\vec{OM}$  cu axa absciselor. Valorile funcțiilor trigonometrice ale acestui unghi nu depind de modulul razei vectoare (teorema de la pct. 21).

În particular putem presupune că *raza vectoare  $\vec{OM}$  este un vector unitar ( $|OM| = 1$ )*. În acest caz extremitatea sa aparține cercului cu centrul în originea axelor și de rază egală cu unitatea — *cercul unitate* — și formulele (1), (2), (3), (4) capătă o formă mai simplă.

**Funcția sinus.** Dacă  $|\vec{OM}| = 1$ , atunci  $\sin \alpha = \frac{OQ}{1} = OQ$  (fig. 38):

*sinusul unui unghi este egal cu proiecția razei vectoare unitară pe axa ordonatelor.*

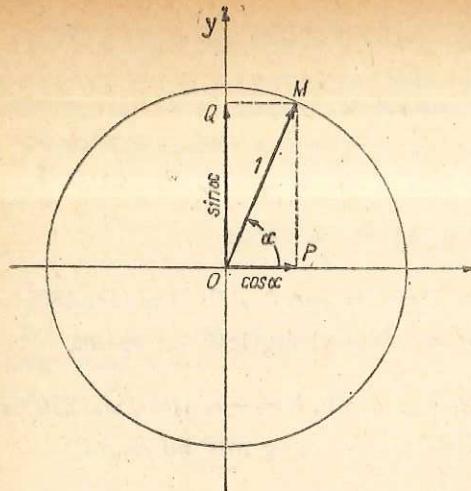


Fig. 38.

*Funcția cosinus,*  $\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP$  (fig. 38):

*cosinusal unui unghi este egal cu proiecția razei vectoare unitară pe axa absciselor.*

*Funcția tangentă.* Fie  $A$  punctul de intersecție a semiaxei pozitive  $Ox$  cu cercul unitate (fig. 39). Axa  $AT$ , tangentă cercului unitate și al cărei sens pozitiv este același cu sensul pozitiv al axei ordonatelor, se numește *axa tangentelor*. Să notăm cu  $R$  punctul de intersecție a laturii finale a unghiului  $\alpha$  (sau a prelungirii ei) cu axa tangentelor. Distingem următoarele cazuri:

a) Raza vectoare  $\vec{OM}$  aparține semiplanului din dreapta (fig. 39, a).

Tinând seama că vectorii  $\vec{OM}$  și  $\vec{OR}$  au același sens, și de definiția tangentei unui unghi, deducem:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OS}{OA}$ . Însă  $OS = AR$  și  $OA = 1$ .

Prin urmare,

$$\operatorname{tg} \alpha = AR.$$

b) Raza vectoare  $\vec{OM}$  aparține semiplanului din stânga (fig. 39, b). În acest caz, vectorii  $\vec{OM}$  și  $\vec{RO}$  au același sens. Conform definiției,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{SO}{AO}$ . Însă  $SO = -AR$  și  $AO = -OA = -1$ .

Prin urmare,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-AR}{-1} = AR.$$

c) Dacă raza vectoare  $\vec{OM}$  este situată pe axa ordonatelor, ea este paralelă cu axa tangentelor, deci punctul  $R$  nu există. Cu alte cuvinte, în acest caz  $\operatorname{tg} \alpha$  nu există.

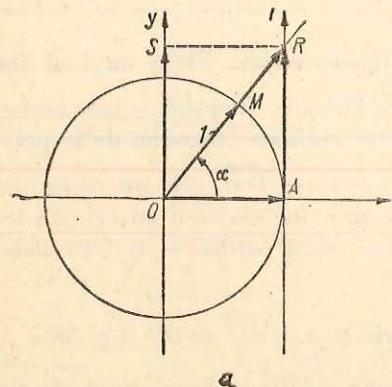
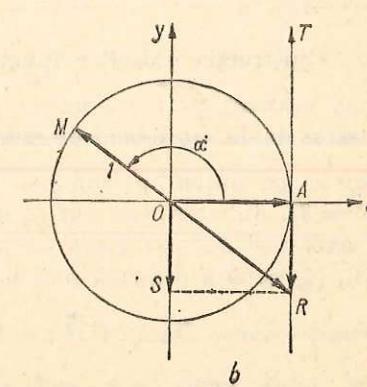


Fig. 39.



In concluzie, tangenta unui unghi, dacă există, este egală cu proiecția razei vectoare  $\vec{OR}$  pe axa tangentelor.

*Funcția cotangentă.* Fie  $B$  punctul de intersecție a semiaxei pozitive  $Oy$  cu cercul unitate (fig. 40). Axa  $BC$ , tangentă cercului unitate și al cărei sens pozitiv este același cu sensul pozitiv al axei absciselor, se numește *axa cotangentelor*. Dacă  $D$  este punctul de intersecție a laturii finale a unghiului  $\alpha$  (sau a prelungirii ei) cu axa cotangentelor, urmând o cale analoga celei folosite la construcția tangentei unghiurilor  $\alpha$ , se obțin următoarele rezultate:

$\operatorname{ctg} \alpha = BD$ : cotangenta unui unghi, dacă există, este egală cu proiecția razei vectoare  $\vec{OD}$  pe axa cotangentelor;

dacă raza vectoare  $\vec{OM}$  aparține axei absciselor,  $\operatorname{ctg} \alpha$  nu există.

### Aplicații

1° Multimea unghiurilor  $\beta$  formate de raza vectoare unitară  $\vec{OM}$  cu axa  $Ox$  (fig. 38) este dată de formula (v. relația (3) de la pct. 5):

$$\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Pe de altă parte, aceste unghiuri au același sinus:  $OS$ . Prin urmare,

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha (k \in \mathbb{Z}). \quad (5)$$

Analog (fig. 38):

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha (k \in \mathbb{Z}). \quad (6)$$

2° Fie razele vectoare unitare  $\vec{OM}$  și  $\vec{OM}'$ , ale căror extremități sunt simetrice față de originea axelor (fig. 41). Conform relației (4) de la pct. 8, multimea unghiurilor  $\beta$ , formate de aceste raze vectoare cu axa  $Ox$ , este dată de formula:

$$\beta = \alpha + k \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Pe de altă parte, aceste unghiuri au aceeași tangentă:  $AR$ . Deci:

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha (k \in \mathbb{Z}).$$

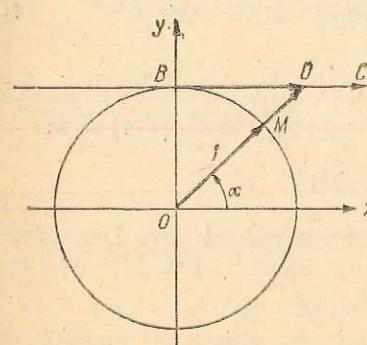


Fig. 40.

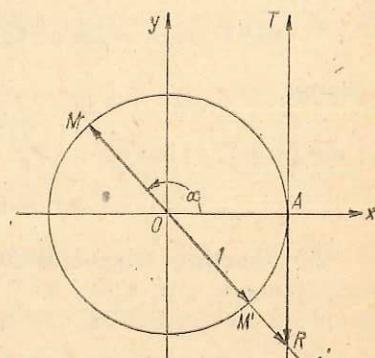


Fig. 41.

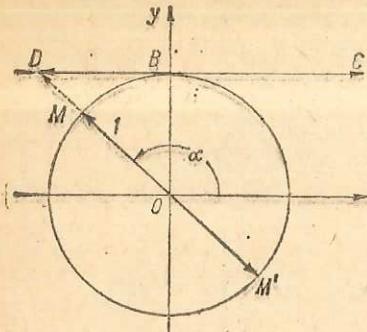


Fig. 42.

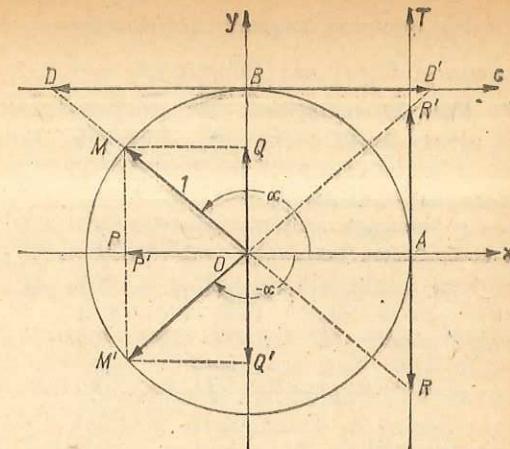


Fig. 43.

Analog (fig. 42):

$$\operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (8)$$

## § 6. Relații între funcțiile trigonometrice

**25. Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor care au mărimi opuse.**  
Fie unghiurile  $\alpha$  și  $-\alpha$  care au mărimi opuse (fig. 43).

Razele vectoare unitare  $\overrightarrow{OM'}$  și  $\overrightarrow{OM}$  formând, respectiv, unghiurile  $-\alpha$  și  $\alpha$  cu axa absciselor sunt simetrice față de această axă. Deci, proiecțiile lor pe axa  $Ox$  sunt egale:  $OP' = OP$ . Înțînd seama că  $OP' = \cos(-\alpha)$ ,  $OP = \cos \alpha$ , obținem:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha. \quad (1)$$

Analog:

$$OQ' = -OQ; \quad AR' = -AR; \quad BD' = -BD,$$

de unde:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha. \quad (2)$$

*Exemple*

$$\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin(-270^\circ) = -\sin 270^\circ = -(-1) = 1;$$

$$\operatorname{tg}(-180^\circ) = -\operatorname{tg} 180^\circ = 0.$$

**26. Funcțiile trigonometrice ale unghiurilor complementare.** Unghiurile a căror sumă este egală cu  $90^\circ$  se numesc *complementare* (v. pct. 11). Așadar, complementul unghiului  $\alpha$  este unghiul  $90^\circ - \alpha$ .

Dacă raza vectoare unitară  $\overrightarrow{OM}$  formează cu axa absciselor unghiul  $\alpha$ , cu axa ordonatelor ea formează unghiul  $\alpha - 90^\circ$  (fig. 44). Conform definițiilor

funcțiilor sinus și cosinus, proiecția vectorului  $\overrightarrow{OM}$  pe axa ordonatelor se poate exprima în două moduri:

$$OQ = \sin \alpha; \quad OQ = \cos(\alpha - 90^\circ).$$

De aici deducem:

$$\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha.$$

Însă  $\cos(\alpha - 90^\circ) = \cos(-\alpha + 90^\circ)$ . Prin urmare, relația precedentă devine:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \quad (3)$$

Înlocuind în această relație unghiul  $\alpha$  prin unghiul  $90^\circ - \alpha$ , obținem:

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha). \quad (4)$$

Din definițiile funcțiilor tangentă și cotangentă, obținem (fig. 44),

$$BD = \operatorname{ctg} \alpha; \quad -BD = \operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ)$$

de unde:

$$-\operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Însă  $-\operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ) = \operatorname{tg}(-\alpha + 90^\circ)$  și, prin urmare, relația precedentă devine:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha. \quad (5)$$

Înlocuind în această relație unghiul  $\alpha$  prin unghiul  $90^\circ - \alpha$ , obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha). \quad (6)$$

**Observație.** Dacă funcția cosinus o numim, cofuncția funcției sinus, și invers, iar funcția cotangentă o numim cofuncția funcției tangentă, și invers, formulele (3), (4), (5), (6) se enunță astfel: *funcția trigonometrică a unui unghi este egală cu cofuncția unghiului complementar*. Această proprietate justifică denumirile funcțiilor cosinus și cotangentă.

**Aplicație.** Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile de  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ .

**Unghiul de  $120^\circ$ .** Observând că unghiurile de  $120^\circ$  și  $-30^\circ$  sunt complementare, obținem:

$$\sin 120^\circ = \cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^\circ = \sin(-30^\circ) = \sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{ctg}(-30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 120^\circ = \operatorname{tg}(-30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

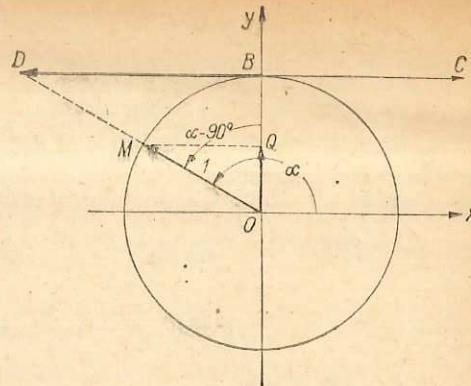


Fig. 44.

*Unghiul de  $135^\circ$ . Complementul său este unghiul de  $-45^\circ$ . Procedind ca și în exemplul precedent, obținem:*

$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{ctg} 135^\circ = -1.$$

*Unghiul de  $150^\circ$ . Complementul său este unghiul de  $-60^\circ$ . Prin urmare:*

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \operatorname{ctg} 150^\circ = -\sqrt{3}.$$

## § 7. Funcții trigonometrice de argument numeric

**27. Definiția funcțiilor trigonometrice de argument numeric.** Dependența dintre diverse mărimi se studiază în matematică cu ajutorul funcțiilor de argument numeric. De exemplu, viteza în mișcarea uniform accelerată:  $v = v_0 + at$ , spațiu în mișcare uniformă:  $s = s_0 + vt$ , lungimea unei bare metalice în dilatarea liniară:  $l = l_0 + l_0 \alpha t^0$ , ale căror argumente sunt timpul sau temperatura, se studiază cu ajutorul funcției liniare  $y = ax + b$ , al cărei argument este numărul  $x$ .

Până acum am considerat că argumentul funcțiilor trigonometrice este unghi sau arc. În diverse domenii însă se folosesc funcții trigonometrice al căror argument este timp, temperatură, lungimea și.a. De aici rezultă necesitatea definirii funcțiilor trigonometrice de argument numeric.

Am arătat că între mulțimea numerelor reale și mulțimea unghiurilor din planul orientat există o corespondență biunivocă (pct. 6). În această corespondență, fiecărui număr real  $x$  îi corespunde unghiul egal cu  $x$  radiani.

**Definiție.** Funcția trigonometrică de argument numeric  $x$  se numește funcția trigonometrică de același nume a unghiului exprimat în  $x$  radiani.

### 28. Domenile de definiție ale funcțiilor trigonometrice

Prin domeniul de definiție<sup>1</sup> al unei funcții trigonometrice se înțelege mulțimea valorilor argumentului pentru care această funcție există (are sens).

Fie  $\alpha$  unghiul format de raza vectoare unitară  $\overrightarrow{OM}$  cu axa absciselor și  $x$  mărimea sa în radiani.

$\sin x$  și  $\cos x$ . La punctul 24 s-a arătat că

$$\sin \alpha = OQ; \cos \alpha = OP;$$

$OQ$  și  $OP$  fiind, respectiv, proiecțiile vectorului  $\overrightarrow{OM}$  pe axele  $Oy$  și  $Ox$ . Evident, oricare ar fi unghiul  $\alpha$ , aceste proiecții există. Prin urmare, domeniul de definiție al funcțiilor  $\sin x$  și  $\cos x$  este mulțimea numerelor reale (axa reală).

$\operatorname{tg} x$ . Tangenta unui unghi nu există dacă raza vectoare este situată pe axa  $Oy$ , și numai în acest caz (pct. 24), ceea ce revine la a spune că extremitățile razelor vectoare unitare  $\overrightarrow{OM}$  și  $\overrightarrow{OM'}$  aparțin axei  $Oy$  și sunt simetrice față de originea coordonatelor. Prin urmare (v. aplicația de la pct. 8), funcția

<sup>1</sup> Este mai indicat să se spună mulțimea de definiție. Totuși, prin tradiție, se folosește denumirea din text.

tangentă nu există pentru unghiurile  $90^\circ + k \cdot 180^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) sau: domeniul de definiție al funcției  $\operatorname{tg} x$  este axa reală, mai puțin punctele  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$\operatorname{ctg} x$ . Cetangenta unui unghi nu există dacă raza vectoare este situată pe axa  $Ox$ , și numai în acest caz (pct. 24). Raționând ca mai sus, obținem: domeniul de definiție al funcției  $\operatorname{ctg} x$  este axa reală, mai puțin punctele  $k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Observație.** Dacă se notează cu  $R$  mulțimea numerelor reale, domeniile de definiție ale funcțiilor  $\operatorname{tg} x$  și  $\operatorname{ctg} x$  se pot scrie, respectiv, sub forma:

$$R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}; \quad R - \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

**Aplicație.** Să se determine domeniile de definiție ale funcțiilor:

$$a) \sin \frac{x}{2}; \quad b) \operatorname{tg} 3x.$$

**Soluție.** a) Oricare ar fi numărul real  $x$ ,  $\frac{x}{2}$  este, de asemenea, număr real. Deci, domeniul de definiție al funcției  $\sin \frac{x}{2}$  este  $R$ .

b) Funcția  $\operatorname{tg} 3x$  nu există pentru acele valori ale argumentului pentru care este îndeplinită egalitatea  $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Deci, domeniul său de definiție este  $R - \left\{ \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

## § 8. Funcții periodice

### 29. Definiția și trasarea graficului funcției periodice

**Definiție.** Funcția  $f(x)$  se numește periodică dacă există un număr  $T$ , diferit de zero, astfel încât pentru orice  $x$  aparținând domeniului său de definiție, valorile funcției în punctele  $x + T$  și  $x$  să fie egale:

$$f(x + T) = f(x).$$

Numărul  $T$  se cheamă perioadă a funcției  $f(x)$ .

**Teoremă.** Dacă numărul  $T$  este perioadă a funcției  $f(x)$ , atunci și numerele  $kT$  ( $k = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) sunt perioade ale funcției date.

Intr-adevăr, ținind seama de definiția funcției periodice și raționind din aproape în aproape, obținem:

$$\begin{aligned} f(x + 2T) &= f[(x + T) + T] = f(x + T) = f(x); \\ f(x + 3T) &= f[x + 2T + T] = f(x + 2T) = f(x) \text{ etc.} \\ \text{și } f(x - T) &= f[(x - T) + T] = f(x); f(x - 2T) = f[(x - T) - T] = \\ &= f(x - T) = f(x) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Teorema demonstrată arată că, odată cu perioada  $T$ , funcția admite și perioadele  $-T$ ,  $+2T$ ,  $\pm 3T, \dots, \pm nT, \dots$  Concentrat, putem scrie

$$f(x + kT) = f(x) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

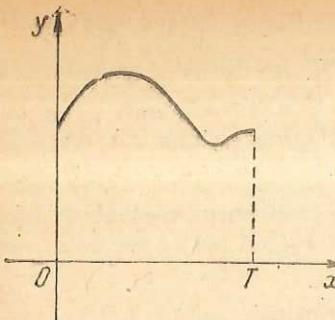


Fig. 45.

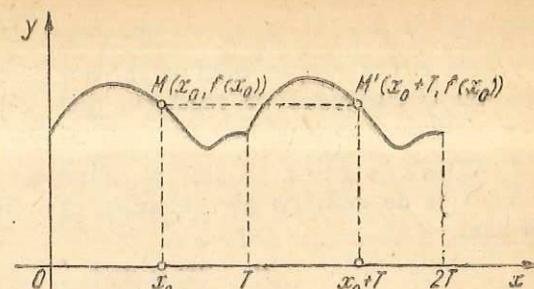


Fig. 46.

Cea mai mică perioadă pozitivă a unei funcții periodice se numește *perioada principală*<sup>1</sup>.

Fie  $f(x)$  o funcție periodică, cu perioada  $T$ . În figura 45 este trasat graficul acestei funcții în intervalul  $[0, T]$ , de lungime egală cu perioada sa.<sup>2</sup>

Ne propunem să construim graficul său în intervalul  $[T, 2T]$ , de asemenea, de lungime  $T$ . Observăm că intervalul  $[T, 2T]$  se obține prin deplasarea intervalului  $[0, T]$  de-a lungul semiaxei pozitive  $Ox$ . În acest fel, punctul  $x_0 \in [0, T]$  se deplasează în punctul  $x_0 + T$ , aparținând intervalului  $[T, 2T]$ . Deoarece  $f(x_0 + T) = f(x)$ , deducem că punctul graficului de abscisă  $x_0 + T$  este

$$M'(x_0 + T, f(x_0)).$$

Prin urmare, punctul  $M'$  se obține prin deplasarea punctului  $M(x_0, f(x_0))$  pe un segment paralel cu axa absciselor. De aici rezultă că graficul funcției în intervalul  $[T, 2T]$  se obține prin deplasarea graficului său din intervalul  $[0, T]$ , paralel cu axa absciselor (fig. 46).

Se spune că graficul funcției din intervalul  $[0, T]$  se repetă în intervalul  $[T, 2T]$ .

**Consecință.** Pentru a construi graficul unei funcții periodice, este suficientă trăsarea sa într-un interval de lungime egală cu perioada, de exemplu în intervalul  $[0, T]$ , după care se repetă graficul în intervalele  $[T, 2T], [2T, 3T], [3T, 4T] \dots, [-T, 0], [-2T, -T], [-3T, -2T], \dots$  (fig. 47).

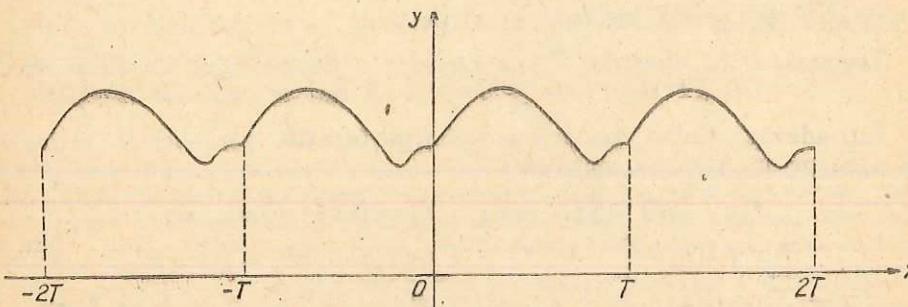


Fig. 47.

<sup>1</sup> Adesea în loc de *perioada principală* se spune, pe scurt, *perioada*.

<sup>2</sup> Dacă funcția nu are sens în extremitățile intervalului, se consideră intervalul deschis  $(0, T)$ .

**30. Periodicitatea funcțiilor trigonometrice.** Periodicitatea funcțiilor  $\sin x$  și  $\cos x$ . Relațiile (5) și (6) din § 5 dovedesc că funcțiile  $\sin x$  și  $\cos x$  sunt periodice. În afară de *perioada principală*  $2\pi$ , ele admit și perioadele  $-2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots, \pm n \cdot 2\pi, \dots$ <sup>1</sup>

Periodicitatea funcțiilor  $\operatorname{tg} x$  și  $\operatorname{ctg} x$ . Relațiile (7) și (8) din § 5 arată că funcțiile  $\operatorname{tg} x$  și  $\operatorname{ctg} x$  sunt periodice. În afară de *perioada principală*  $\pi$ , ele admit și perioadele  $-\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm n\pi \dots$ <sup>1</sup>

**Exemple.** 1) Să se verifice că funcțiile  $f(x) = \sin x + \cos x$  și  $g(x) = |\sin x|$  admit perioada  $2\pi$ .

Într-adevăr:

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$$

și

$$g(x + 2\pi) = |\sin(x + 2\pi)| = |\sin x| = g(x).$$

$$2) \text{ Funcția } f(x) = a \operatorname{tg} 2x (a \neq 0) \text{ admite perioada } \frac{\pi}{2}.$$

Într-adevăr:

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = a \operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = a \operatorname{tg}(2x + \pi) = a \operatorname{tg} 2x = f(x).$$

3) Să se determine perioada principală a funcției  $f(x) = a \sin(\omega x + \varphi)$ , unde  $a$  și  $\omega$  sunt constante nenule.<sup>2</sup>

**Soluție.** Dacă numărul  $T$  este perioadă a funcției, atunci:

$$f(x + T) = f(x)$$

sau:

$$a \sin[\omega(x + T) + \varphi] = a \sin(\omega x + \varphi).$$

Notind  $\omega x + \varphi = x'$ , relația precedentă devine:

$$\sin(x' + \omega T) = \sin x'.$$

Deoarece funcția  $\sin x'$  admite *numai* perioadele  $k \cdot 2\pi$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ), deducem:

$$\omega T = k \cdot 2\pi,$$

de unde:

$$T = k \cdot \frac{2\pi}{\omega}.$$

Perioada principală se obține din ultima relație pentru  $k = 1$  și este egală cu  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

4) Să se determine perioada principală a funcției  $\sin 20x + \cos 30x$ .

<sup>1</sup> Se poate arăta că funcțiile  $\sin x$  și  $\cos x$  admit numai perioadele  $k \cdot 2\pi$ , iar funcțiile  $\operatorname{tg} x$  și  $\operatorname{ctg} x$  admit numai perioadele  $k\pi$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ).

<sup>2</sup> Această funcție definește mișcarea cunoscută în fizică sub numele de *oscilație armonică simplă*. Constantele  $|a|$ ,  $\omega$  și  $\varphi$  se numesc, respectiv, amplitudinea, pulsuația și diferența de fază a oscilației.

*Soluție.* Perioadele funcțiilor sunt  $20x$  și  $\cos 30x$  sunt, respectiv, numerele  $k \cdot \frac{2\pi}{20}$  și  $k' \cdot \frac{2\pi}{30}$ , unde  $k$  și  $k'$  sunt numere întregi nenule.

Perioadele funcției date se află printre acele numere care satisfac egalitatea:

$$k \cdot \frac{2\pi}{20} = k' \cdot \frac{2\pi}{30},$$

de unde:

$$3k = 2k'.$$

Deci, pentru  $k = 2$  (sau  $k' = 3$ ) se obține perioada principală  $T = \frac{\pi}{5}$ .

### § 9. Funcții pare și impare

#### 31. Definițiiile și graficul funcției pare și impare

**Definiții:**

1) *Funcția  $f(x)$  se numește pară dacă pentru fiecare  $x$ , aparținând domeniului său de definiție, este satisfăcută egalitatea:*

$$f(-x) = f(x).$$

2) *Funcția  $f(x)$  se numește impară dacă pentru fiecare  $x$ , aparținând domeniului său de definiție, este satisfăcută egalitatea:*

$$f(-x) = -f(x).$$

Construcția graficelor funcțiilor pare și impare se simplifică dacă se ține seama de următoarea

**Teoremă.** *Graficul unei funcții pare este simetric față de axa ordonatelor; graficul unei funcții impare este simetric față de originea coordonatelor.*

*Demonstrație.* Dacă  $f(x)$  este funcție pară, atunci  $f(-x_0) = f(x_0)$ . Prin urmare, odată cu punctul  $M(x_0, f(x_0))$ , și punctul  $M'(-x_0, f(x_0))$  aparțin graficului funcției (fig. 48). Însă punctele  $M$  și  $M'$  fiind simetrice față de axa  $Oy$ , înseamnă că punctele graficului aparținând semiplanului din stînga sunt simetricele față de axa  $Oy$  ale punctelor corespunzătoare aparținând semiplanului din dreapta.

În figura 48, punctul  $M(x_0, f(x_0))$  este un punct arbitrar din graficul funcției pară. Punctul  $M'$  este simetric cu punctul  $M$  față de axa  $Oy$ . Dacă funcția este impară, odată cu punctul  $M(x_0, f(x_0))$ , și punctul  $M'(-x_0, -f(x_0))$  aparțin

graficului său (fig. 49). Însă punctele  $M$  și  $M'$  fiind simetrice față de originea coordonatelor, rezultă că punctele graficului aparținând semiplanului din stînga sunt simetricele față de originea coordonatelor ale punctelor corespunzătoare aparținând semiplanului din dreapta.

#### 32. Paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice

**Teoremă.** *Funcția cosinus este pară; funcțiile sinus, tangentă și cotangentă sunt impare:*

$$\cos(-x) = \cos x;$$

$$\sin(-x) = -\sin x;$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Demonstrația este imediată dacă se ține seama de relațiile (1), (2) din § 6 și de definiția funcției pare și impare.

*Exemple*

1) *Funcția  $f(x) = x^2 + \cos x$  este pară.*

Într-adevăr,

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x).$$

2) *Funcția  $f(x) = -\sin x$  este impară.*

Într-adevăr,

$$f(-x) = -\sin(-x) = -(-\sin x) = -f(x).$$

3) *Funcția  $f(x) = \cos x - \operatorname{tg} x$  nu este nici pară, nici impară.*

Într-adevăr,

$$f(-x) = \cos(-x) - \operatorname{tg}(-x) = \cos x + \operatorname{tg} x$$

și

$$-f(x) = -\cos x + \operatorname{tg} x.$$

Prin urmare

$$f(-x) \neq f(x) \text{ (funcția nu este pară)}$$

și

$$f(-x) \neq -f(x) \text{ (funcția nu este impară)}.$$

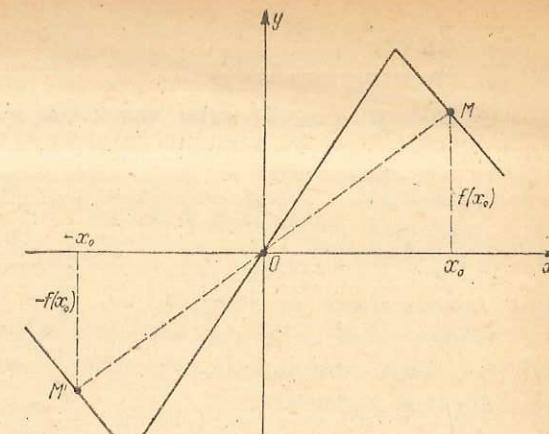


Fig. 49.

## § 10. Funcții strict monotone

33. Definiția funcției strict monotonă. Fie funcția  $f(x)$  definită pe intervalul  $[a, b]$  și  $x_1, x_2$  două puncte arbitrară aparținând acestui interval.

1) Dacă  $f(x_1) < f(x_2)$ , oricare ar fi punctele  $x_1 < x_2$ , funcția se numește strict crescătoare pe intervalul  $[a, b]$ .

2) Dacă  $f(x_1) > f(x_2)$ , oricare ar fi punctele  $x_1 < x_2$ , funcția se numește strict descrescătoare pe intervalul  $[a, b]$ .

Așadar, dacă  $x$  crește, valorile corespunzătoare ale funcției cresc sau descrez, după cum funcția este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe intervalul respectiv.

3) O funcție strict crescătoare sau strict descrescătoare pe un interval se numește strict monotonă pe acel interval.

Intervalle pe care o funcție este strict monotonă se cheamă *intervale de monotonie ale funcției*.

*Exemple*

1) Funcția  $f(x)$  (fig. 50) este strict crescătoare pe intervalul  $[a, b]$ , strict descrescătoare pe intervalul  $[b, c]$ , dar nu este strict monotonă pe intervalul  $[a, c]$ .

2) Funcția  $f(x)$  (fig. 51) este strict crescătoare pe fiecare din intervalele  $[a, 0]$ ,  $[0, b]$ , dar nu este strict monotonă pe intervalul  $[a, b]$ .

34. Intervalele de monotonie ale funcțiilor trigonometrice. Funcțiilor trigonometrice, ca funcții periodice, este suficient să li se studieze variația pe un interval de lungime egală cu perioada. Pentru alegere, funcțiile  $\sin x$  și  $\cos x$  le studiem în intervalul  $[0, 2\pi]$ , iar funcțiile  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  în intervalul  $[0, \pi]$ .

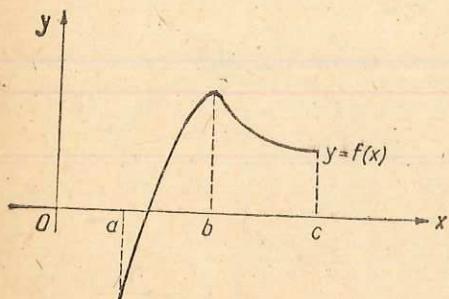


Fig. 50.

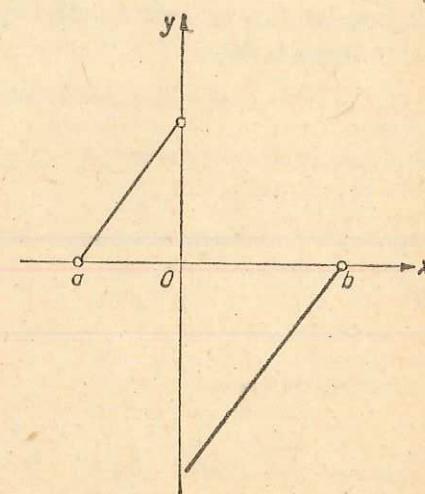


Fig. 51.

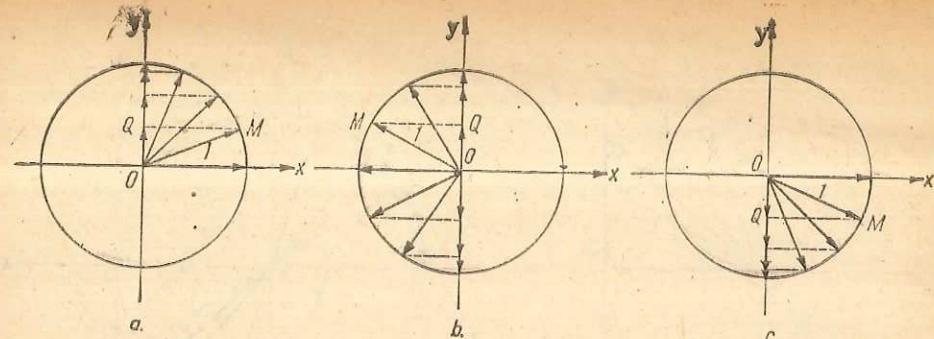


Fig. 52.

*Funcția sin x.* Cînd  $x$  crește de la zero la  $\frac{\pi}{2}$  (fig. 52, a),  $OQ$ , proiecția razei vectoare unitară  $\overrightarrow{OM}$  pe axa ordonatelor crește (de la zero la +1): pe intervalul  $[0, \frac{\pi}{2}]$  funcția  $x$  este strict crescătoare; cînd  $x$  crește de la  $\frac{\pi}{2}$  la  $\frac{3\pi}{2}$  (fig. 52, b),  $OQ$  descrește (de la +1 la -1): pe intervalul  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  funcția  $\sin x$  este strict descrescătoare; cînd  $x$  crește de la  $\frac{3\pi}{2}$  la  $2\pi$  (fig. 52, c),  $OQ$  crește (de la -1 la zero); pe intervalul  $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  funcția  $\sin x$  este strict crescătoare.

*Funcția cos x.* Cînd crește de la zero la  $\pi$  (fig. 53, a),  $OP$ , proiecția razei vectoare unitară  $\overrightarrow{OM}$  pe axa absciselor, descrește (de la +1 la -1): pe intervalul  $[0, \pi]$  funcția  $\cos x$  este strict descrescătoare; cînd  $x$  crește de la  $\pi$  la  $2\pi$  (fig. 53, b)  $OP$  crește de la -1 la +1: pe intervalul  $[\pi, 2\pi]$  funcția  $\cos x$  este strict crescătoare.

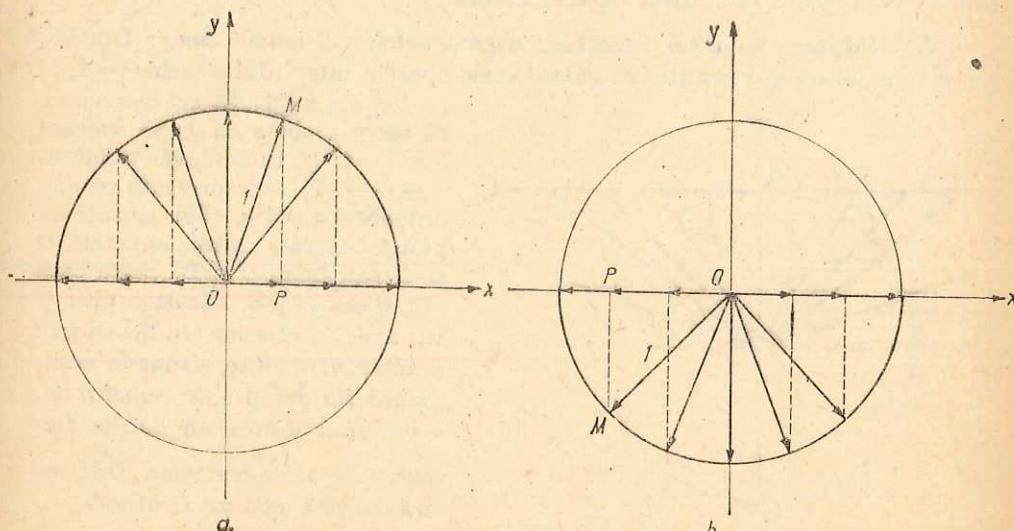


Fig. 53.

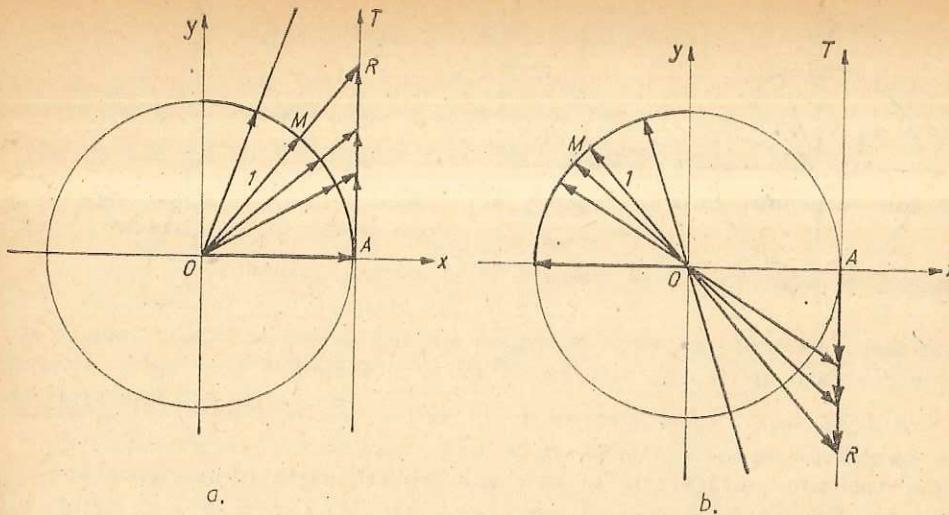


Fig. 54.

*Funcția*  $\operatorname{tg} x$ . Cînd  $x$  crește în intervalul  $[0, \frac{\pi}{2})$  (fig. 54, a),  $AR$ , proiecția razei vectoare  $\overrightarrow{OR}$  pe axa tangentelor, crește: pe intervalul  $[0, \frac{\pi}{2})$  funcția  $\operatorname{tg} x$  este strict crescătoare; cînd  $x$  crește în intervalul  $(\frac{\pi}{2}, \pi]$  (fig. 54, b),  $AR$  crește: pe intervalul  $(\frac{\pi}{2}, \pi]$  funcția tangentă este strict crescătoare.

*Funcția*  $\operatorname{ctg} x$ . Cînd  $x$  crește în intervalul  $(0, \pi)$  (fig. 55),  $BD$ , proiecția razei vectoare  $\overrightarrow{OD}$  pe axa cotangentelor, descrește: pe intervalul  $(0, \pi)$ , funcția cotangentă este strict descrescătoare.

**35. Multimea valorilor funcțiilor trigonometrice.** *Funcția sinus.* Din variația funcției  $\sin x$  a rezultat că valorile sale aparțin intervalului închis  $[-1, 1]$  ( $-1 \leq \sin x \leq 1$ ). Să arătăm acum, că funcția  $\sin x$  ia orice valoare  $b \in [-1, 1]$ . Într-adevăr numărul  $b \in [-1, 1]$  se reprezintă pe axa ordonatelor (fig. 56) printr-un punct  $Q$  situat între punctele  $O$  și  $B$  sau între  $O$  și  $B'$ , după cum  $b \geq 0$  sau  $b \leq 0$ . Paralela prin  $Q$  la axa absciselor intersectează semicercul unitate, situat în semiplanul din dreapta, în punctul  $M$ . Dacă unul dintre unghiiurile formate de raza vectoare  $\overrightarrow{OM}$  cu axa  $Ox$  este egal cu  $x$ , atunci

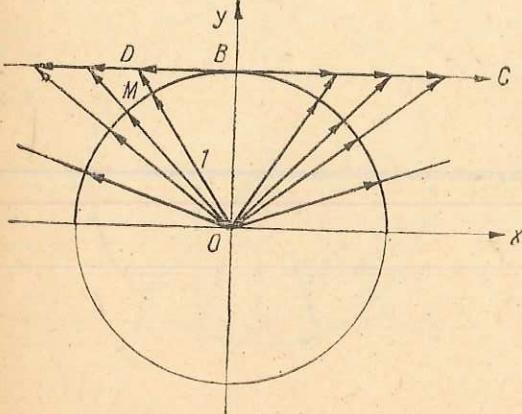


Fig. 55.

$$b = OQ = \sin x.$$

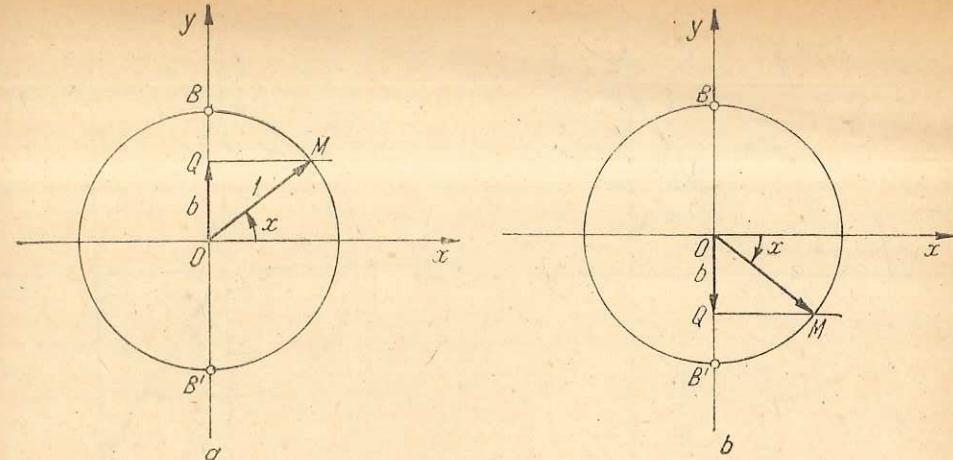


Fig. 56.

Prin urmare, multimea valorilor funcției sinus este intervalul închis  $[-1, 1]$ .

*Funcția cosinus.* Din variația funcției  $\cos x$  deducem că valorile sale aparțin intervalului închis  $[-1, 1]$  ( $-1 \leq \cos x \leq 1$ ). Să arătăm acum că funcția  $\cos x$  ia orice valoare  $a \in [-1, 1]$ . Într-adevăr, numărul  $a \in [-1, 1]$  se reprezintă pe axa absciselor (fig. 57) printr-un punct  $P$  situat între punctele  $O$  și  $A$  sau între  $O$  și  $A'$ , după cum  $a \geq 0$  sau  $a \leq 0$ . Paralela prin  $P$  la axa ordonatelor intersectează semicercul unitate, situat în semiplanul superior, în punctul  $M$ . Dacă unul dintre unghiiurile formate de raza vectoare  $\overrightarrow{OM}$  cu axa  $Ox$  este egal cu  $x$ , atunci

$$a = OP = \cos x.$$

Prin urmare, multimea valorilor funcției cosinus este intervalul închis  $[-1, 1]$ .

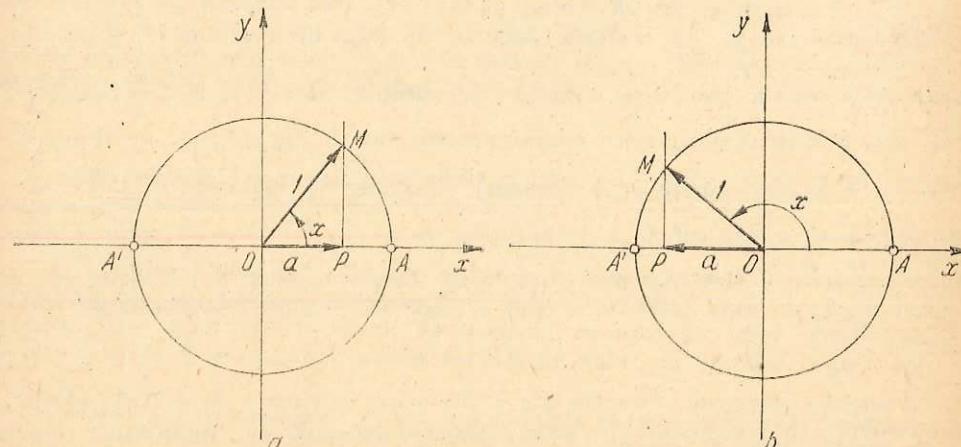


Fig. 57.

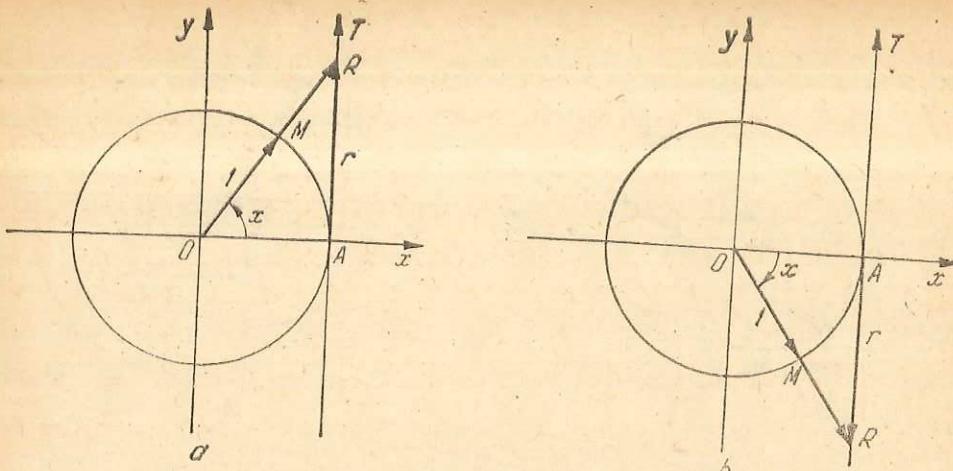


Fig. 58.

*Funcția tangentă.* Să arătăm că funcția  $\operatorname{tg} x$  ia orice valoare  $r$  dată. Într-adevăr, numărului  $r$  îi corespunde pe axa tangentelor (fig. 58), punctul  $R$ . Raza vectoare  $\overrightarrow{OR}$  intersectează semicercul unitate, situat în semiplanul din dreapta, în punctul  $M$ . Dacă unul dintre unghiurile formate de raza vectoare  $\overrightarrow{OM}$  cu axa  $Ox$  este egal cu  $x$ , atunci

$$r = AR = \operatorname{tg} x.$$

Prin urmare, mulțimea valorilor funcției tangentă este axa reală.

#### Observația 1

Funcția  $\operatorname{tg} x$  este pozitivă și strict crescătoare pe intervalul  $[0, \frac{\pi}{2})$ , negativă pe intervalul  $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ , iar mulțimea valorilor sale este axa reală. Deci, dacă  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ , valorile funcției aparțin intervalului  $[0, +\infty)$ . În afara de aceasta, pentru  $x$  suficient de apropiat de zero și  $x > 0$ , valorile sale sunt mai mari decât orice număr pozitiv dat (v. fig. 54, a). Se spune că funcția  $\operatorname{tg} x$  tinde către  $+\infty$  cînd  $x$  tinde prin valori crescătoare către  $\frac{\pi}{2}$ . Analog, dacă  $x$  este suficient de apropiat de  $-\frac{\pi}{2}$  și  $x > -\frac{\pi}{2}$ , atunci valorile funcției  $\operatorname{tg} x$  sunt mai mici decât orice număr negativ dat și vom spune că funcția  $\operatorname{tg} x$  tinde către  $-\infty$  cînd  $x$  tinde prin valori descrescătoare către  $-\frac{\pi}{2}$ .

*Funcția cotangentă.* Funcția  $\operatorname{ctg} x$  ia orice valoare  $r$  dată. Într-adevăr, numărului  $r$  îi corespunde pe axa cotangentelor (fig. 59) punctul  $D$ . Raza

<sup>1</sup> Studiul complet al acestei chestiuni se face la analiza matematică, în cap. „Limită de funcții“.

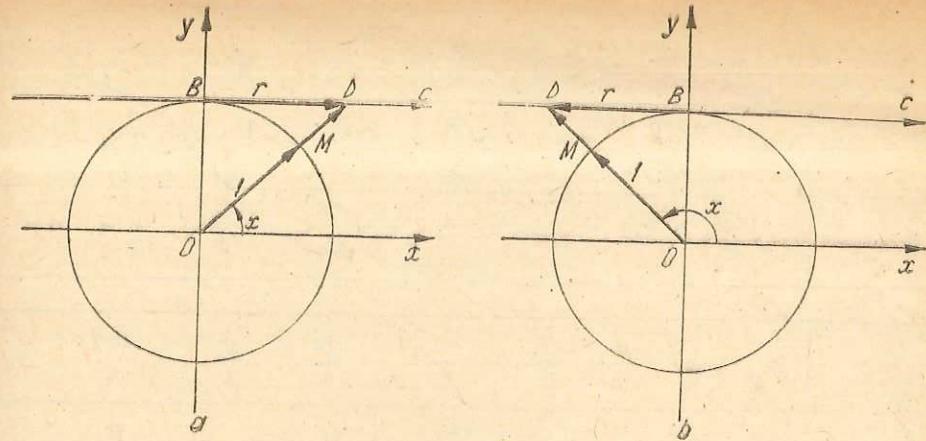


Fig. 59.

vectora  $\overrightarrow{OD}$  intersectează semicercul unitate, situat în semiplanul superior, în punctul  $M$ . Dacă unul din unghiurile formate de raza vectoare  $\overrightarrow{OM}$  cu axa  $Ox$  este egal cu  $x$ , atunci

$$r = BD = \operatorname{ctg} x.$$

Prin urmare, mulțimea valorilor funcției cotangentă este axa reală.

#### Observația 2

Funcția  $\operatorname{ctg} x$  este pozitivă și strict descrescătoare pe intervalul  $(0, \frac{\pi}{2})$ , negativă pe intervalul  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ , iar mulțimea valorilor sale este axa reală. Deci, dacă  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , funcția ia valori în intervalul  $[0, +\infty)$ . În afara de aceasta, pentru  $x$  suficient de apropiat de zero și  $x > 0$ , valorile sale sunt mai mari decât orice număr pozitiv dat (v. fig. 55). Se spune că funcția  $\operatorname{ctg} x$  tinde către  $+\infty$  cînd  $x$  tinde prin valori descrescătoare către zero.

Analog, dacă  $x$  este suficient de apropiat de  $\pi$  și  $x < \pi$ , atunci valorile funcției  $\operatorname{ctg} x$  sunt mai mici decât orice număr negativ dat și vom spune că funcția  $\operatorname{ctg} x$  tinde către  $-\infty$  cînd  $x$  tinde prin valori crescătoare către  $\pi$ .

### § 11. Variația și graficul funcțiilor trigonometrice

**36. Variația funcțiilor trigonometrice.** La punctul 34 s-au determinat intervalele de monotonie ale funcțiilor trigonometrice. Variația funcțiilor trigonometrice pe aceste intervale se studiază cu ajutorul unor valori particolare dispuse într-un tabel, numit tabelul de valori al funcției respective<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> În tabele următoare, săgețile  $\nearrow$ ,  $\searrow$  indică, respectiv, că funcția este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe intervalul corespunzător. În punctele în dreptul căror se trăsări verticală funcțiile nu au sens. Pentru alcătuirea tabelelor s-au folosit rezultatele de la punctele 23 și 26.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = \sin x$	0 ↗ $\frac{1}{2}$ ↗ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗ 1 ↘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↘ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘ $\frac{1}{2}$ ↘ 0 ↘ -1 ↗ 0										
$y = \cos x$	1 ↘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↘ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘ $\frac{1}{2}$ ↘ 0 ↘ - $\frac{1}{2}$ ↘ - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↘ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↘ -1 ↗ 0 ↗ 1										

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$y = \operatorname{tg} x$	0 ↗ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↗ 1 ↗ $\sqrt{3}$ ↗ $+\infty$ ↘ $-\sqrt{3}$ ↘ -1 ↘ - $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↘ 0								
$y = \operatorname{ctg} x$	$+\infty$ ↘ $\sqrt{3}$ ↘ 1 ↘ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↘ 0 ↘ - $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ↘ -1 ↘ - $\sqrt{3}$ ↘ $-\infty$								

37. **Graficul funcțiilor trigonometrice.** Dacă tabelul de valori al unei funcții conține un număr suficient de puncte, judicios alese, se consideră că graficul său este curba care unește aceste puncte.

*Graficul funcției sin x.* Tabelul de valori conține punctele  $(0, 0)$ ;  $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ ...;  $(2\pi, 0)$  cu ajutorul căror i se construiește graficul pe intervalul  $[0, 2\pi]$  (fig. 60, a). Prin repetarea acestui grafic în intervalele  $[2\pi, 4\pi]$ ;  $[4\pi, 6\pi]$ ; ...

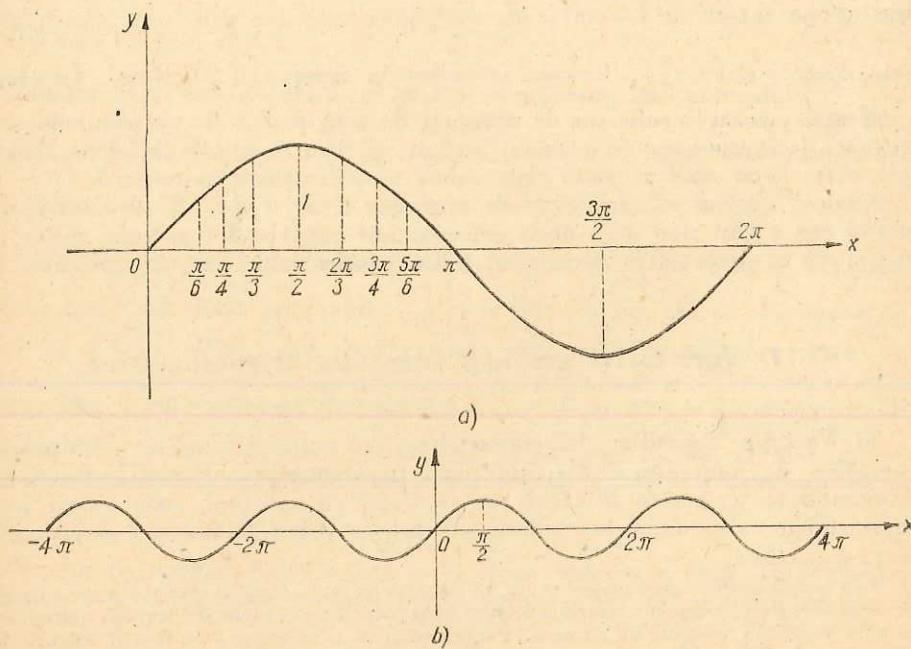


Fig. 60.

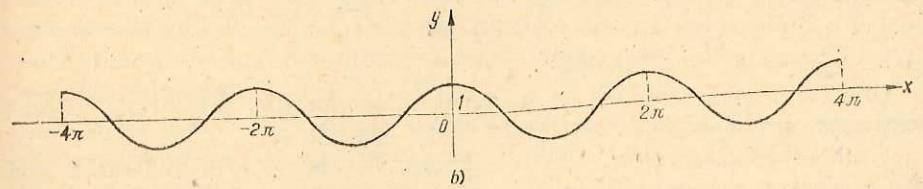
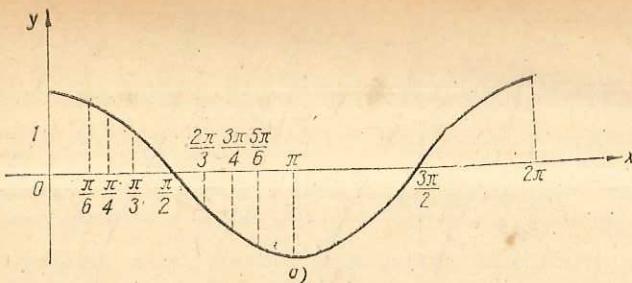


Fig. 61.

și  $[-2\pi, 0]$ ;  $[-4\pi, -2\pi]$ ; ... se obține graficul funcției  $\sin x$  pe domeniul său de definiție (fig. 60, b).

*Graficul funcției cos x.* Folosind punctele ale căror coordonate sunt inserate în tabelul de valori, se obține graficul său pe intervalul  $[0, 2\pi]$  (fig. 61, a). Graficul funcției  $\cos x$  pe domeniul de definiție se obține prin repetarea graficului precedent în intervalele  $[2\pi, 4\pi]$ ;  $[4\pi, 6\pi]$ ; ... și  $[-2\pi, 0]$ ;  $[-4\pi, -2\pi]$ ; ... (fig. 61, b).

Grafcilele funcțiilor  $\sin x$  și  $\cos x$  pe  $R$  se numesc *sinusoide*.

*Graficul funcției tg x.* Punctele din tabelul său de valori ne permit să-i construim graficul în intervalul  $[0, \pi]$  (fig. 62, a). Graficul funcției  $\operatorname{tg} x$  pe  $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  se obține prin repetarea graficului precedent în intervalele  $[\pi, 2\pi]$ ;  $[2\pi, 3\pi]$ ; ... și  $[-\pi, 0]$ ;  $[-2\pi, -\pi]$ ; ... (fig. 62, b).

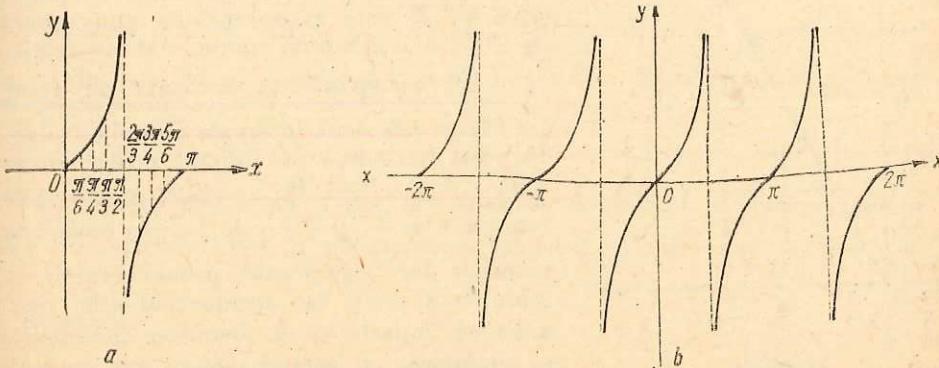


Fig. 62.

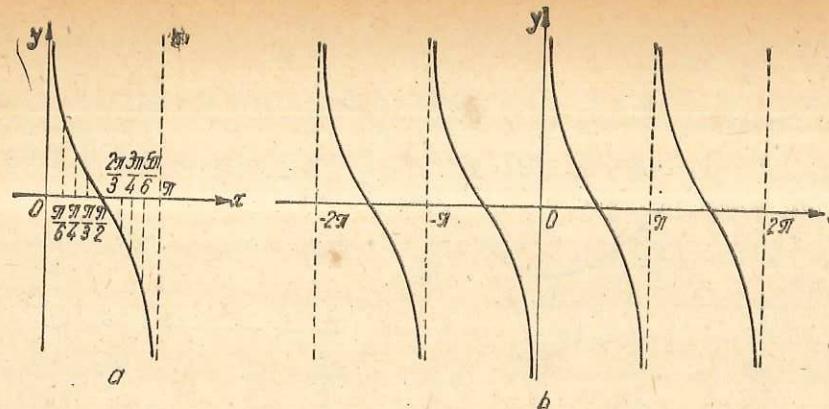


Fig. 63.

Graficul funcției  $\operatorname{etg} x$ . Cu ajutorul punctelor din tabelul de valori se construiește graficul său în intervalul  $(0, \pi)$  (fig. 63, a).

Graficul funcției  $\operatorname{etg} x$  pe  $R - \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$  se obține prin repetarea graficului precedent în intervalele  $[\pi, 2\pi]$ ;  $[2\pi, 3\pi]$ ; ... și  $[-\pi, 0]$ ;  $[-2\pi, -\pi]$ ; ... (fig. 63, b).

## § 12. Funcții trigonometrice inverse

**38. Noțiunea de funcție inversă.** Fie funcția strict crescătoare  $f(x) = 2x$ , definită pe intervalul  $[0, 1]$ . Dacă introducem notația  $f(x) = y$ , funcția considerată poate fi scrisă astfel:

$$y = 2x, \quad x \in [0, 1].$$

Tinând seama de faptul că funcția este strict crescătoare și de valorile  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 2$ , rezultă că mulțimea valorilor sale este intervalul  $[0, 2]$ .

Conform definiției funcției, fiecărui punct  $x_0 \in [0, 1]$  îi corespunde, în mod unic, punctul  $y_0 = 2x_0$  aparținând intervalului  $[0, 2]$  (fig. 64). Mai mult, aici fiecare punct  $y_0 \in [0, 2]$  este corespunzător unui punct  $x_0 \in [0, 1]$ , și numai unuia, dat de relația  $x_0 = \frac{y_0}{2}$  (corespondența realizată de funcția  $f$  între cele două intervale este biunivocă). În acest fel, odată cu funcția strict monotonă  $y = 2x$ ,  $x \in [0, 1]$ , se poate defini și funcția  $x = \frac{y}{2}$ ,  $y \in [0, 2]$ . Pentru obținerea valorilor lor argumentul primei funcții se înmulțește cu 2, iar argumentul celei de-a doua se împarte cu 2. Deoarece înmulțirea și împărțirea cu același număr sunt operații

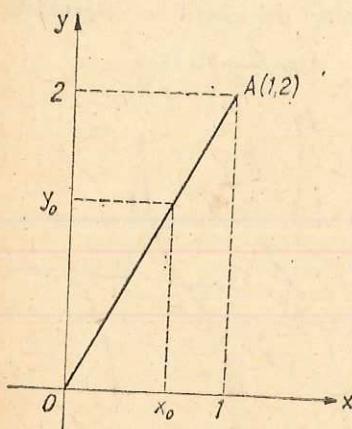


Fig. 64.

inverse, se spune că funcția  $x = \frac{y}{2}$ ,  $y \in [0, 2]$  s-a obținut prin inversarea funcției  $y = 2x$ ,  $x \in [0, 1]$  și se numește funcția inversă acesteia.

### Observații

1° Argumentul funcției inverse  $x = \frac{y}{2}$ ,  $y \in [0, 2]$  este  $y$ , iar valoarea corespunzătoare  $x$ . De obicei, argumentul unei funcții se notează cu  $x$  și valoarea sa cu  $y$ . De aceea, această funcție se scrie  $y = \frac{x}{2}$ ,  $x \in [0, 2]$ .

2° În exemplul considerat s-a inversat o funcție strict crescătoare; mai general, după cum se constată ușor, orice funcție strict monotonă pe un interval se poate inversa pe acel interval. Dacă  $x$  și  $y$  sunt respectiv argumentul și valoarea unei funcții strict monotone, atunci argumentul și valoarea funcției inverse sunt respectiv  $y$  și  $x$ .

Așadar, domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției inverse sunt respectiv mulțimea valorilor și domeniul de definiție ale funcției date.

3° Conform definiției funcției strict crescătoare, dacă  $x_1 < x_2$  (argumentul crește), atunci  $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$  (valoarea funcției crește). Invers, dacă valoarea unei funcții strict crescătoare crește, se arată imediat că argumentul său crește. Un raționament analog se poate face și pentru funcția strict descrescătoare. De aici deducem: dacă o funcție este strict crescătoare (strict descrescătoare), atunci și funcția inversă este strict crescătoare (strict descrescătoare).

**39. Definiția funcțiilor trigonometrice inverse.** Pe anumite intervale funcțiile trigonometrice sunt strict monotone și deci, pe fiecare din aceste intervale, ele pot fi inverseate.

**Funcția arcsin.** Funcția  $\sin x$  este strict crescătoare pe intervalul  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (v. fig. 60, b); așadar, se poate inversa pe acest interval. Prin definiție, funcția inversă funcției  $\sin x$ ,  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  se numește **arcsin** și se notează **arcsin**.

Din această definiție deducem:

Dacă valoarea funcției  $\sin x$ ,  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  într-un punct  $x_0$  este egală cu  $y_0$  ( $y_0 = \sin x_0$ ), atunci valoarea funcției **arcsin** în punctul  $y_0$  este egală cu  $x_0$  ( $x_0 = \arcsin y_0$ ).

Mulțimea valorilor funcției  $\sin x$ ,  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  este intervalul  $[-1, 1]$ . Prin urmare (v. obs. 2° de la pct. 38) domeniul de definiție al funcției inverse **arcsin** este intervalul  $[-1, 1]$ , iar mulțimea valorilor este intervalul  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

### Exemplu

Să se calculeze valorile funcției **arcsin**  $x$  pentru  $x = \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -1, 0$ .

*Soluție.*  $\arcsin \frac{1}{2}$  este egal cu numărul, aparținând intervalului  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , al cărui sinus este egal cu  $\frac{1}{2}$ ; astădat  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ . Analog:  $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ ,  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\arcsin 0 = 0$ .

*Funcția arccos.* Funcția  $\cos x$  este strict descrescătoare pe intervalul  $[0, \pi]$  (v. fig. 61, b); astădat se poate inversa pe acest interval. Prin definiție, *funcția inversă funcției*  $\cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$  se numește *arccosinus* și se notează *arccos*.

Din această definiție deducem:

*Dacă valoarea funcției*  $\cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$  *într-un punct*  $x_0$  *este egală cu*  $y_0$  ( $y_0 = \cos x_0$ ), atunci *valoarea funcției arccos în punctul*  $y_0$  *este egală cu*  $x_0$  ( $x_0 = \arccos y_0$ ).

Mulțimea valorilor funcției  $\cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$  este intervalul  $[-1, 1]$ . Prin urmare, *domeniul de definiție al funcției inverse arccos este intervalul*  $[-1, 1]$ , *iar mulțimea valorilor este intervalul*  $[0, \pi]$ .

*Exemplu*

*Să se calculeze valorile funcției arccos*  $x$  *pentru*  $x = -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -1, 1$ .

*Soluție.*  $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$  este egal cu numărul, aparținând intervalului  $[0, \pi]$ , al cărui cosinus este egal cu  $-\frac{1}{2}$ , astădat  $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \frac{\pi}{3}$ . Analog:  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ ,  $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\arccos (-1) = \pi$ ,  $\arccos 1 = 0$ .

*Funcția arctg.* Funcția  $\tg x$  este strict crescătoare pe intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  (v. fig. 62, b); astădat, se poate inversa pe acest interval. Prin definiție, *funcția inversă funcției*  $\tg x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  se numește *arctangentă* și se notează *arctg*.

Din această definiție deducem:

*Dacă valoarea funcției*  $\tg x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  *într-un punct*  $x_0$  *este egală cu*  $y_0$  ( $y_0 = \tg x_0$ ), atunci *valoarea funcției arctg în punctul*  $y_0$  *este egală cu*  $x_0$  ( $x_0 = \arctg y_0$ ).

Mulțimea valorilor funcției  $\tg x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  este axa reală. Prin urmare, *domeniul de definiție al funcției inverse arctg este axa reală, iar mulțimea valorilor este intervalul deschis*  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

*Exemplu*

*Să se calculeze valorile funcției arctg*  $x$  *pentru*  $x = 1, -1, 0$ .

*Soluție.*  $\arctg 1$  este egală cu numărul, aparținând intervalului  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , al cărui tangentă este egală cu 1; astădat  $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ . Analog:

$$\arctg (-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \arctg 0 = 0.$$

*Funcția arcctg.* Funcția  $\ctg x$  este strict descreșcătoare pe intervalul  $(0, \pi)$  (v. fig. 63, b); astădat se poate inversa pe acest interval. Prin definiție, *funcția inversă funcției*  $\ctg x$ ,  $x \in (0, \pi)$  se numește *arcotangentă* și se notează *arcctg*.

Din această definiție deducem:

*Dacă valoarea funcției*  $\ctg x$ ,  $x \in (0, \pi)$  *într-un punct*  $x_0$  *este egală cu*  $y_0$  ( $y_0 = \ctg x_0$ ), atunci *valoarea funcției arcctg în punctul*  $y_0$  *este egală cu*  $x_0$  ( $x_0 = \arctg y_0$ ).

Mulțimea valorilor funcției  $\ctg x$ ,  $x \in (0, \pi)$  este axa reală. Prin urmare, *domeniul de definiție al funcției arcctg este axa reală, iar mulțimea valorilor este intervalul deschis*  $(0, \pi)$ .

*Exemplu*

*Să se calculeze valorile funcției arcctg*  $x$  *pentru*  $x = -1, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

*Soluție.*  $\arctg (-1)$  este egală cu numărul, aparținând intervalului  $(0, \pi)$ , al cărui cotangentă este egală cu  $-1$ ; astădat  $\arctg (-1) = 3 \frac{\pi}{4}$ .

Analog,

$$\arctg 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

#### 40. Variația și graficul funcțiilor trigonometrice inverse

*Funcția arcsin*, ca funcție inversă unei funcții strict crescătoare (v. obs. 3<sup>o</sup> de la pct. 38) este, de asemenea, strict crescătoare pe mulțimea sa de definiție (intervalul  $[-1, 1]$ ). Calculând valorile sale în cîteva puncte particolare, alcătuim următorul tabel de valori:

$x$	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1$
$y = \arcsin x$	$-\frac{\pi}{2} \nearrow$	$-\frac{\pi}{3} \nearrow$	$-\frac{\pi}{4} \nearrow$	$-\frac{\pi}{6} \nearrow$	$0 \nearrow$	$\frac{\pi}{6} \nearrow$	$\frac{\pi}{4} \nearrow$	$\frac{\pi}{3} \nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

cu ajutorul căruia i se construiește graficul (fig. 65).

*Funcția arccos*, ca funcție inversă unei funcții strict descrescătoare este, de asemenea, strict descrescătoare pe mulțimea sa de definiție (intervalul  $[-1, 1]$ ). Calculând valorile sale în cîteva puncte particolare, alcătuim următorul tabel de valori:

$x$	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1$
$y = \arccos x$	$\pi \searrow$	$5 \frac{\pi}{6} \searrow$	$3 \frac{\pi}{4} \searrow$	$2 \frac{\pi}{3} \searrow$	$\frac{\pi}{2} \searrow$	$\frac{\pi}{3} \searrow$	$\frac{\pi}{4} \searrow$	$\frac{\pi}{6} \searrow$	$0$

cu ajutorul căruia i se construiește graficul (fig. 66).

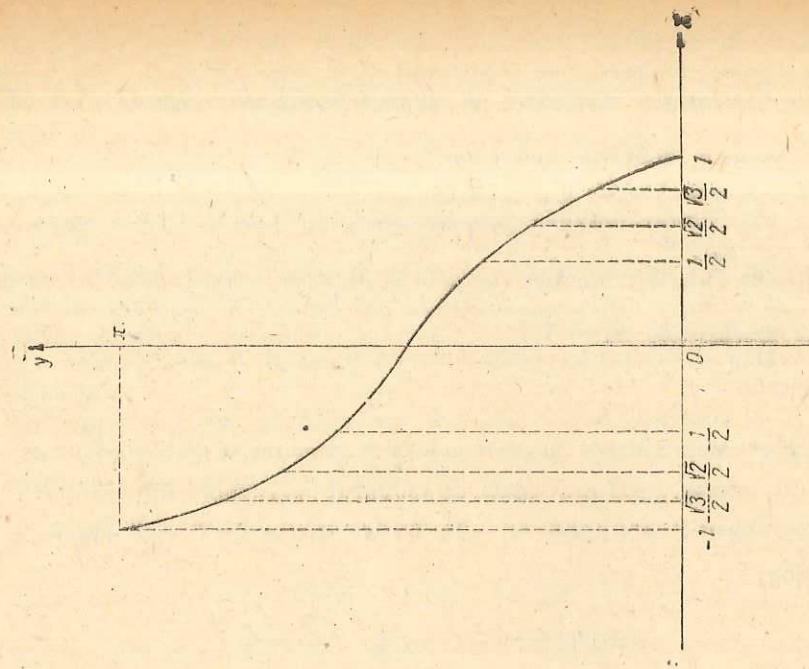


Fig. 66.

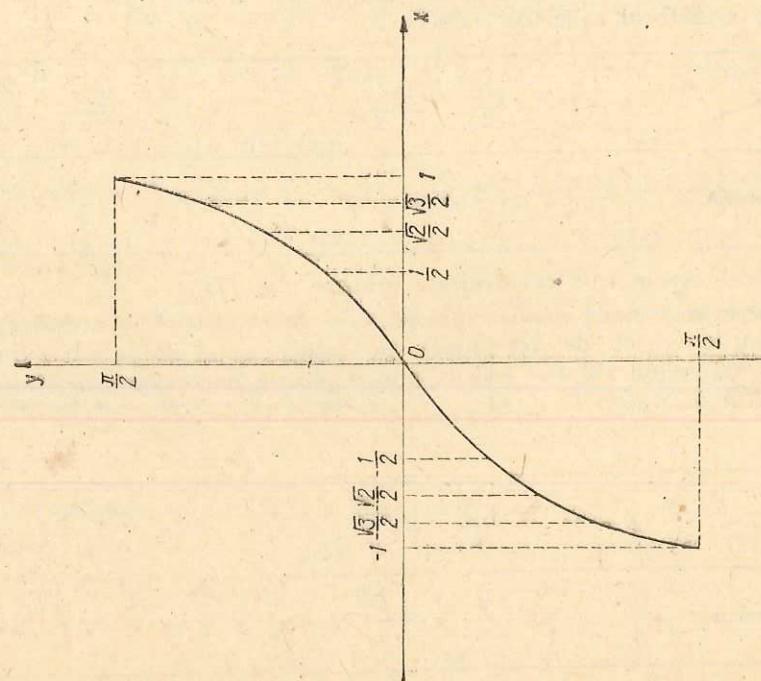


Fig. 65.

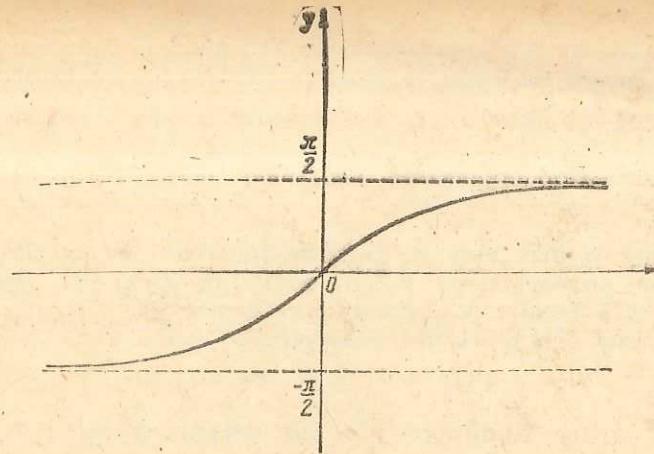


Fig. 67.

*Funcția arctg este strict crescătoare pe mulțimea sa de definiție (axa reală). Cu ajutorul următorului tabel de valori:*

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$1$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$y = \operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

graficul său se trasează cu ușurință (fig. 67).

*Funcția arctg este strict descrescătoare pe mulțimea sa de definiție (axa reală). Cu ajutorul următorului tabel de valori:*

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$1$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$y = \operatorname{arctg} x$	$\pi$	$5\frac{\pi}{6}$	$3\frac{\pi}{4}$	$2\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$0$

graficul său se trasează cu ușurință (fig. 68).

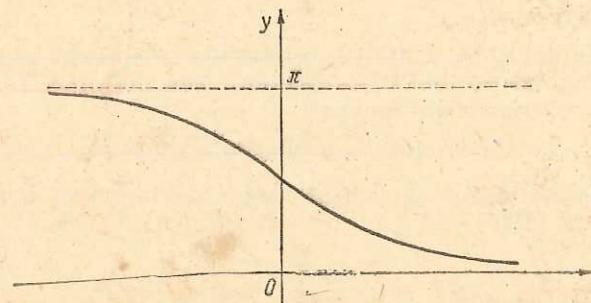


Fig. 68.

## Observații

1°  $\pm\infty$  nu sunt numere, deci nu are sens să vorbim de valoarea unei funcții pentru  $\pm\infty$ . Totuși, de exemplu, sub simbolul  $+\infty$  din tabelul de valori al funcției  $\text{arctg}$  s-a trecut  $\frac{\pi}{2}$ . Prin această notație înțelegem că funcția  $\text{arctg}$  tinde către  $\frac{\pi}{2}$  cînd argumentul său tinde către  $+\infty$  (v. obs. 1° de la pct. 35).

2° Se poate verifica ușor că graficele funcțiilor trigonometrice și graficele funcțiilor trigonometrice invers corespunzătoare sunt simetrice față de bisectoare intăi. Această proprietate se va demonstra (pentru funcții strict monotone) în anul III, la analiza matematică.

## § 13. Reducerea la un unghi ascuțit

În acest paragraf vom arăta că funcțiile trigonometrice ale oricărui unghi se pot exprima prin funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit, adică funcțiile trigonometrice se pot reduce la un unghi ascuțit.

Această proprietate a funcțiilor trigonometrice, după cum se va vedea mai departe, este deosebit de utilă pentru aducerea la o formă mai simplă a unor expresii trigonometrice, construcția tabelelor trigonometrice și.a.

**41. Reducerea la un unghi mai mic decît  $360^\circ$ .** Să considerăm un unghi arbitrar  $|\beta| > 360^\circ$ . El poate fi reprezentat, în mod unic, sub forma (v. pct. 6)

$$\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha' (0^\circ \leqslant \alpha' < 360^\circ)$$

unde  $k$  este un număr întreg determinat.

De aici, ținând seama de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, obținem:

$$\sin \beta = \sin \alpha'; \cos \beta = \cos \alpha'; \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha'; \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha'.$$

În acest fel, funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\beta$  s-au redus, deocamdată, la funcțiile trigonometrice ale unghiului  $0^\circ \leqslant \alpha' < 360^\circ$ .

### Observații

1° Dacă unghiul  $\beta$  este negativ, pentru comoditate, se folosește mai întăi proprietatea de paritate sau imparitate a funcțiilor trigonometrice după care se scrie unghiul  $-\beta$  sub forma:

$$-\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha' (0^\circ \leqslant \alpha' < 360^\circ),$$

$k$  fiind un număr întreg.

2° Pentru funcțiile tangentă și cotangentă reducerea se poate face la un unghi mai mic decît  $180^\circ$ . Într-adevăr, este suficient să observăm că unghiul  $\beta$  poate fi scris sub forma:

$$\beta = k \cdot 180^\circ + \alpha' (0^\circ \leqslant \alpha' < 180^\circ),$$

$k$  fiind un număr întreg, și să se țină seama de faptul că aceste funcții au perioada egală cu  $180^\circ$ .

### Exemple

$$1) \sin 1900^\circ = \sin (5 \cdot 360^\circ + 100^\circ) = \sin 100^\circ.$$

$$2) \cos (-940^\circ) = \cos 940^\circ = \cos (2 \cdot 360^\circ + 220^\circ) = \cos 220^\circ \text{ (v. obs. 1°).}$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{117\pi}{10} = \operatorname{tg} \left(5 \cdot 2\pi + \frac{17\pi}{10}\right) = \operatorname{tg} \frac{17\pi}{10} \text{ sau (v. obs. 2°)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{117\pi}{10} = \operatorname{tg} \left(11\pi + \frac{7\pi}{10}\right) = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{10}.$$

$$4) \operatorname{ctg} \left(-\frac{22\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{22\pi}{3} = -\operatorname{ctg} \left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

(aici a fost posibil să se facă direct reducerea la un unghi ascuțit).

**42. Reducerea la un unghi ascuțit.** Fie unghiul  $90^\circ \leqslant \alpha' < 360^\circ$

Dacă  $90^\circ \leqslant \alpha' \leqslant 180^\circ$  (fig. 69, a), putem scrie relațiile:

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha_1, \alpha' = 90^\circ + \alpha_2;$$

dacă  $180^\circ \leqslant \alpha' \leqslant 270^\circ$  (fig. 69, b), putem scrie:

$$\alpha' = 180^\circ + \alpha_1, \alpha' = 270^\circ - \alpha_2;$$

dacă  $270^\circ \leqslant \alpha' < 360^\circ$  (fig. 69, c), atunci

$$\alpha' = 360^\circ - \alpha_1, \alpha' = 270^\circ + \alpha_2,$$

unde  $0^\circ \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 90^\circ$ .

În concluzie, orice unghi  $90^\circ \leqslant \alpha' < 360^\circ$  poate fi scris sub forma:

$$\alpha' = k \cdot 90^\circ \pm \alpha (k = 1, 2, 3, 4),$$

unde  $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$ .

Funcțiile trigonometrice ale acestui unghi se exprimă prin funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\alpha$  cu ajutorul unor formule numite *formule de reducere la un unghi ascuțit*.

Pentru a deduce aceste formule, observăm mai întăi că unghiurile considerate se pot scrie sub forma:

$$90^\circ + \alpha = 90^\circ - (-\alpha); 180^\circ - \alpha = 90^\circ + (90^\circ - \alpha);$$

$$180^\circ + \alpha = 90^\circ + (90^\circ + \alpha);$$

$$270^\circ - \alpha = 180^\circ + (90^\circ - \alpha); 270^\circ + \alpha = 180^\circ + (90^\circ + \alpha).$$

$$360^\circ - \alpha = 360^\circ + (-\alpha).$$

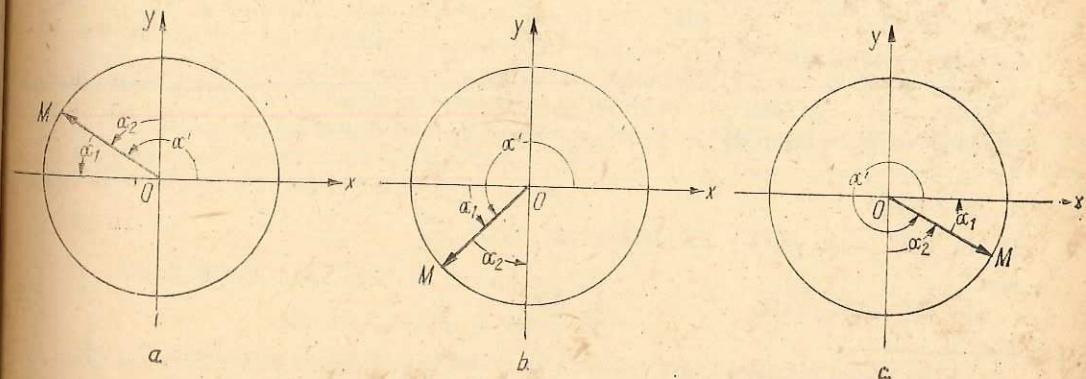


Fig. 69.

Unghiul  $90^\circ - \alpha$ . Formulele (3), (4), (5), (6) din § 6 rezolvă problema propusă.

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha; \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha; \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Unghiul  $90^\circ + \alpha$ . Obținem:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ + \alpha) &= \sin[90^\circ - (-\alpha)] = \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= \cos[90^\circ - (-\alpha)] = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg}[90^\circ - (-\alpha)] = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg}[90^\circ - (-\alpha)] = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Unghiul  $180^\circ - \alpha$ . Obținem:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin[90^\circ + (90^\circ - \alpha)] = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= \cos[90^\circ + (90^\circ - \alpha)] = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg}[90^\circ + (90^\circ - \alpha)] = -\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg}[90^\circ + (90^\circ - \alpha)] = -\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

Unghiul  $180^\circ + \alpha$ . Obținem:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ + \alpha) &= \sin[90^\circ + (90^\circ + \alpha)] = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha; \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= \cos[90^\circ + (90^\circ + \alpha)] = -\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg}[90^\circ + (90^\circ + \alpha)] = -\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg}[90^\circ + (90^\circ + \alpha)] = -\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

Unghiul  $270^\circ - \alpha$ . Obținem:

$$\begin{aligned}\sin(270^\circ - \alpha) &= \sin[180^\circ + (90^\circ - \alpha)] = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha; \\ \cos(270^\circ - \alpha) &= \cos[180^\circ + (90^\circ - \alpha)] = -\cos(90^\circ - \alpha) = -\sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg}[180^\circ + (90^\circ - \alpha)] = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg}[180^\circ + (90^\circ - \alpha)] = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Unghiul  $270^\circ + \alpha$ . Obținem:

$$\begin{aligned}\sin(270^\circ + \alpha) &= \sin[180^\circ + (90^\circ + \alpha)] = -\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha; \\ \cos(270^\circ + \alpha) &= \cos[180^\circ + (90^\circ + \alpha)] = -\cos(90^\circ + \alpha) = \sin \alpha; \\ \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg}[180^\circ + (90^\circ + \alpha)] = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) &= \operatorname{ctg}[180^\circ + (90^\circ + \alpha)] = \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Unghiul  $360^\circ - \alpha$ . Obținem:

$$\begin{aligned}\sin(360^\circ - \alpha) &= \sin[360^\circ + (-\alpha)] = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= \cos[360^\circ + (-\alpha)] = \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \\ \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg}[360^\circ + (-\alpha)] = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \\ \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg}[360^\circ + (-\alpha)] = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha^1.\end{aligned}$$

Exemple

$$1) \sin 115^\circ = \sin(90^\circ + 25^\circ) = \cos 25^\circ$$

sau

$$\sin 115^\circ = \sin(180^\circ - 65^\circ) = \sin 65^\circ.$$

<sup>1</sup> Din modul în care au fost deduse, este evident că formulele precedente sunt aderante pentru orice unghi  $\alpha$ .

$$2) \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ \left( = -\frac{1}{2} \right)$$

sau

$$\cos 240^\circ = \cos(270^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ \left( = -\frac{1}{2} \right).$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{9\pi}{5} = \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{10} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{10}$$

și

$$\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{5} = \operatorname{ctg} \left( 2\pi - \frac{\pi}{5} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}.$$

### Observație

Cercetarea atență a formulelor de reducere la un unghi ascuțit, stabilite mai sus, ne permite să tragem următoarele concluzii:

a) Orice funcție trigonometrică a unghiului  $\alpha' = k \cdot 90^\circ \pm \alpha$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) se exprimă prin funcția trigonometrică de același nume a unghiului  $\alpha$  pentru  $k$  număr par, și prin cofuncția corespunzătoare a unghiului  $\alpha$  pentru  $k$  număr impar.

b) După reducere, semnul funcției trigonometrice a unghiului  $\alpha$  coincide cu semnul funcției trigonometrice considerate a unghiului  $\alpha'$ .

Prin urmare, memorarea formulelor de reducere la unghi ascuțit nu este necesară, fiindcă se poate determina direct atât funcția trigonometrică a unghiului  $\alpha$  cît și semnul ei.

Mai mult, ținând seama de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, se arată imediat că aceste considerații rămân valabile și în cazul în care unghiul  $\alpha$  și numărul întreg  $k$  sint arbitraze.

### Exemple

1) Să se reducă  $\cos 310^\circ$  la un unghi ascuțit. Ținând seama de observația de mai sus, putem raționa astfel: unghiul  $310^\circ$  este egal cu  $3 \cdot 90^\circ + 40^\circ$  ( $k$  este număr impar), deci în membrul drept al formulei de reducere la un unghi ascuțit vom da lui  $\sin 40^\circ$  semnul plus, sau minus; fiindcă unghiul  $310^\circ$  este din cadranul IV, și în acest cadran funcția cosinus este pozitivă,  $\sin 40^\circ$  se ia cu semnul plus. Deci  $\cos 310^\circ = +\sin 40^\circ$ .

2) Regăsirea formulei  $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ . Unghiul  $180^\circ + \alpha$  este egal cu  $2 \cdot 90^\circ + \alpha$  ( $k = 2$ ), deci membrul drept al formulei de reducere la un unghi ascuțit conține sau funcția  $\sin \alpha$ , sau funcția  $-\sin \alpha$ ; presupunând unghiul  $\alpha$  ascuțit, atunci unghiul  $180^\circ + \alpha$  este din cadranul III, și în acest cadran funcția sinus este negativă. Deci  $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ .

3) Să se reducă  $\sin 3080^\circ$  la unghi ascuțit. Fiindcă unghiul  $3080^\circ > 360^\circ$ , îl scriem sub forma  $3080^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 200^\circ$ , de unde folosind proprietatea de periodicitate a funcției sinus:

$$\sin 3080^\circ = \sin 200^\circ.$$

După aceea, raționând ca în exemplele 1) și 2), obținem:

$$\sin 200^\circ = \sin(3 \cdot 90^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ,$$

adică  $\sin 3080^\circ = -\cos 70^\circ$ .

4) Să se calculeze  $\operatorname{tg}\left(-\frac{71\pi}{4}\right)$ . Tinem seama mai întii de proprietățile de imparitate și periodicitate ale funcției tangentă:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{71\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{71\pi}{4} = -\left(17\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}.$$

Mai departe,  $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$ .

$$\text{Deci } \operatorname{tg}\left(-\frac{71\pi}{4}\right) = -(-1) = 1.$$

### Exerciții

1. Să se arate că numerele:

$$a) 17, 15, 8; b) \sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1, \sqrt{6}$$

pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic și să afle valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului ascuțit mai mare.

2. Să se construiască unghiul ascuțit al căruia sinus este egal cu:

$$a) \frac{3}{5}; b) 0,8.$$

3. Să se construiască unghiul ascuțit al căruia cosinus este egal cu:

$$a) \frac{1}{4}; b) 0,3.$$

4. Să se construiască unghiul ascuțit a cărui tangentă este egală cu:

$$a) \frac{5}{2}; b) 0,5.$$

5. Să se construiască unghiul ascuțit a cărui cotangentă este egală cu:

$$a) \frac{2}{3}; b) 4.$$

6. Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic, dacă laturile sale sunt proporționale cu numerele:

$$a) 21, 20, 29; b) 125, 44, 117.$$

7. Ipothenusa unui triunghi dreptunghic este egală cu 50 cm. Cosinusul unuia din unghiurile ascuțite ale triunghiului este egal cu 0,28. Să se determine catetele sale.

8. Cotangenta unuia din unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este egală cu  $\frac{2}{5}$ , iar cateta mai mare este egală cu 25 cm. Să se determine ipotenuza.

9. Să se calculeze suma sinusurilor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic cu perimetrul egal cu 45 cm și ipotenuza egală cu 20 cm.

10. Suma catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu 17 cm, iar ipotenuza este egală cu 13 cm. Să se calculeze produsul cosinusurilor unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

11. Să se calculeze valorile numerice ale expresiilor:

- a)  $2 \sin 30^\circ + 3 \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$ ;
- b)  $2 \cos 30^\circ - 4 \cos 45^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$ ;
- c)  $5 \operatorname{tg} 30^\circ + 2 \sin 60^\circ - 2 \cos 30^\circ$ ;
- d)  $3 \operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ - 2 \operatorname{tg} 45^\circ + 2 \cos 60^\circ$ ;
- e)  $\frac{\cos 60^\circ}{1 + \sin 60^\circ} + \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ}$ .



Fig. 70.

12. Să se calculeze valoarea sumei

$$\sin \alpha + \cos \alpha \text{ pentru } \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}.$$

13. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\cos \alpha - \cos \frac{\alpha}{2} \text{ pentru } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

14. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{\sin(\alpha + 15^\circ) - \sin \alpha}{\sin 2\alpha} \text{ pentru } \alpha = 30^\circ.$$

15. Pe axa  $x'x$  (fig. 70) se dau vectorii  $\vec{AB}$  și  $\vec{CD}$ .

Să se calculeze modulul și mărimea fiecărui din acești vectori.

16. Să se determine suma mărimilor și suma modulelor vectorilor  $\vec{AB}$  și  $\vec{BA}$  situați pe axa  $x'x$ , dacă  $|\vec{AB}| = 2$ .

17. Patrulaterul  $ABCD$  este un romb. Sint egali vectorii:

$$a) \vec{AB} \text{ și } \vec{BC}; b) \vec{AB} \text{ și } \vec{CD}; c) \vec{BC} \text{ și } \vec{AD}?$$

18. Să se calculeze suma proiecțiilor vectorilor  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  și  $\vec{CD}$ , trei laturi ale paralelogramului  $ABCD$ , pe axa  $\vec{AD}$ , dacă  $|\vec{AD}| = d$ .

19. Să se calculeze suma proiecțiilor  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  și  $\vec{CD}$ , laturi ale rombului  $ABCD$ , pe axa  $\vec{CA}$ , dacă  $|\vec{AC}| = d$ .

20. Se consideră patratul  $ABCD$  și axa  $x$  al cărei versor este  $\vec{AC}$ .

Să se verifice egalitatea:

$$pr_x(\vec{BA} + \vec{BC}) = pr_x \vec{BA} + pr_x \vec{BC}.$$

$$\text{Ind. } \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}; pr_x \vec{BD} = 0, pr_x \vec{BA} = -\frac{1}{2} |\vec{AC}| = -\frac{1}{2}, pr_x \vec{BC} = \frac{1}{2}.$$

21. Fie  $ABCD$  un patrulater oarecare și  $E, F$  mijloacele diagonalelor  $AC$ ,  $BD$  respectiv.

Să se demonstreze relațiile:

$$2\vec{EF} = \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}.$$

*Ind.* Se adună membru cu membru egalitățile evidente  $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AD} + \vec{DF}$ ,  $\vec{EF} = \vec{EC} + \vec{CD} + \vec{DF}$  și se ține seama de relațiile  $\vec{EA} + \vec{EC} = 0$ ,  $2\vec{DF} = \vec{DB}$ ,  $\vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AB}$ .

22. Într-un patrulater  $ABCD$  se notează cu  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor  $AD$  și  $BC$  respectiv. Să se demonstreze relația

$$\vec{EF} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{DC}),$$

apoi să se edună pentru cazul particular cind patrulaterul este un trapez cu bazele  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{DC}$ .

*Ind.* Se adună membru cu membru egalitățile  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ ,  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$  și se ține seama că  $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{EA}$ ,  $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{BF}$ .

În cazul particular se obțin două proprietăți constante ale liniei mijlocii din trapez.

23. Fie  $ABCDEF$  un exagon, ale cărui virfuri pot să fie situate în același plan,  $M, N, P$  mijloacele laturilor  $AB, CD, EF$  și  $Q, R, S$  mijloacele laturilor  $BC, DE, FA$ . Să se demonstreze că triunghiurile  $MNP, QRS$  au același centru de greutate.

*Ind.* Dacă  $G_1, G_2$  sunt centrele de greutate ale triunghiurilor  $MNP, QRS$  respectiv, iar  $O$  un punct arbitrar, atunci (v. aplicația de la pct. 16):

$$\overrightarrow{OG}_1 = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OQ}), \quad \overrightarrow{OG}_2 = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}).$$

Mai departe, folosind relațiile

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}), \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

și cele analoge, se stabilește imediat egalitatea  $\overrightarrow{OG}_1 = \overrightarrow{OG}_2$ .

24. Să se stabilească cadranele în care sunt situate unghiurile

$$a) 730^\circ; \quad b) -500^\circ; \quad c) \frac{47\pi}{7}; \quad d) -\frac{42\pi}{5}$$

apoi să se determine semnele funcțiilor trigonometrice ale acestor unghiuri.

25. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2} - \cos \pi + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{3\pi}{2}}$$

26. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\frac{3 \sin 2x + 2 \cos x}{2 \sin x - 3 \cos 2x}$$

pentru  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \pi$ .

27. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) - \operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)}$$

pentru  $x = \frac{\pi}{2}$ .

28. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$\frac{\pi(\sin x + \cos x) - 1}{\pi \operatorname{ctg} x + 1}$$

pentru  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .

29. Să se înlocuiască prin sinusul unghiului complementar:  
a)  $\cos 52^\circ$ ; b)  $\cos 14^\circ$ ; c)  $\cos (60^\circ - \alpha)$ ; d)  $\cos (\alpha - 10^\circ)$ .

30. Să se înlocuiască prin cosinusul unghiului complementar:

$$a) \sin 38^\circ; \quad b) \sin 1^\circ; \quad c) \sin (30^\circ - 2\alpha); \quad d) \sin \frac{\alpha - 60^\circ}{2}.$$

31. Să se înlocuiască prin tangentă unghiului complementar:

$$a) \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{11}; \quad b) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right); \quad c) \operatorname{ctg} \left( \frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{2} \right).$$

32. Să se înlocuiască prin cotangentă unghiului complementar:

$$a) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{11}; \quad b) \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{10} \right); \quad c) \operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

33. Să se dovedească egalitățile:

$$a) \sin 45^\circ 30' = \cos 44^\circ 30'; \quad b) \cos (60^\circ + \alpha) = \sin (30^\circ - \alpha); \\ c) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right).$$

34. Să se determine domeniile de definiție ale funcțiilor:

$$a) f(x) = \sin x + \cos x; \quad b) f(x) = 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x; \\ c) f(x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

35. Să se verifice că funcțiile:

$$a) f(x) = \cos 2x; \quad b) f(x) = a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x; \\ c) f(x) = \sin x \cos x$$

admit perioada  $\pi$ .

36. Să se arate că funcțiile:

$$a) f(x) = x + \sin x; \quad b) f(x) = x - \cos^2 x$$

nu sunt periodice.

*Ind.* a) Dacă funcția dată ar admite perioada  $T$ , atunci  $T + \sin(x + T) = \sin x$ , de unde, pentru  $x = 0$  și  $x = \pi$ , ar rezulta că  $T + \sin T = T - \sin T = 0$ , adică  $T = 0$ .

37. Să se determine perioadele principale ale funcțiilor:

$$a) f(x) = |\cos x|; \quad b) f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg} x; \quad c) f(x) = \sin 6x - \sin 4x.$$

38. Să se cerceteze paritatea și imparitatea funcțiilor:

$$a) f(x) = |\sin x|; \quad b) f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x; \\ c) f(x) = \sin x - \cos x; \\ d) f(x) = \operatorname{ctg}(-x); \quad e) f(x) = x^2 + \sin x; \\ f) f(x) = x \operatorname{tg} x.$$

39. Să se cerceteze care dintre funcțiile:

$$a) f(x) = x^2 - \cos x, \quad x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]; \\ b) f(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{tg} x, \quad x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right); \\ c) f(x) = x \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

sunt strict monotone pe intervalele considerate.

40. Să se determine mulțimea valorilor funcțiilor:

$$\begin{aligned} a) & y = 1 + 2 \sin x; \\ b) & y = 4 - 3 \cos x; \\ c) & y = 3 - 2 |\sin x|. \end{aligned}$$

41. Pentru ce valori ale lui  $x$  au sens funcțiile:

$$a) \arcsin \frac{x}{2}; \quad b) \arccos 3x; \quad c) \arcsin(2x-1); \quad d) \arccos \frac{1-x}{2}; \quad e) \arctg \frac{x-1}{x+1}?$$

*Ind.* a) Se determină mulțimea soluțiilor inegalității  $\left| \frac{x}{2} \right| \leqslant 1$ .

42. Să se calculeze valorile funcției  $\arcsin x$  pentru  $x = -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ .

43. Să se calculeze valorile funcției  $\arccos x - \arctg 2x$  pentru  $x = 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

44. Să se determine mulțimea valorilor funcțiilor:

$$\begin{aligned} a) & y = x \arcsin x, \quad x \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]; \\ b) & y = \arccos x + x^2, \quad x \in \left[ -\frac{1}{2}, 0 \right]. \end{aligned}$$

*Ind.* Funcțiile considerate sunt monotone (produs, respectiv sumă, de funcții strict monotone și de același sens).

45. Folosind graficele funcțiilor  $\arcsin$  și  $\arccos$ , să se determine semnele numerelor:

$$\begin{aligned} a) & \arccos 0,7 - \arccos 0,5; \\ b) & \frac{\arcsin 0,85 - \arcsin 0,3}{\arccos 0,8 - \arccos 0,85}; \\ c) & \frac{\pi - 2 \arcsin 0,9}{\pi - 2 \arccos (-0,1)}. \end{aligned}$$

46. Să se demonstreze egalitățile:

$$\begin{aligned} a) & \frac{1}{3} \arctg 1 + \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \arctg \sqrt{3}; \\ b) & \arccos \left( -\frac{1}{2} \right) + 2 \arcsin \frac{1}{2} = 2 \arctg 1 + 3 \arctg \sqrt{3}; \\ c) & \frac{\sin \left( \arcsin \frac{1}{2} \right) - \cos (\arcsin (-1))}{\operatorname{ctg} (\arccos 0) - \operatorname{tg} (\arctg (-1))} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

47. Folosind graficele funcțiilor trigonometrice, să se determine semnele numerelor:

$$\begin{aligned} a) & \sin \frac{2\pi}{3}; \quad b) \sin 5; \quad c) \cos 2; \quad d) \cos \left( -\frac{\pi}{10} \right); \\ e) & \operatorname{tg} 1,5; \quad f) \operatorname{tg} (-3, 1). \end{aligned}$$

48. Să se indice semnele diferențelor:

$$\begin{aligned} a) & \sin(-2) - \sin(-2, 1); \quad b) \cos 5,1 - \cos 5; \\ c) & \operatorname{tg} \left( -\frac{10}{20} \right) - \operatorname{tg} \left( -\frac{11}{23} \right); \quad d) \operatorname{ctg} 0,583 - \operatorname{ctg} 0,582; \\ e) & \operatorname{tg} 1,6 - \operatorname{tg} 1,5; \quad f) \operatorname{ctg} 6,3 - \operatorname{ctg} 6,2. \end{aligned}$$

49. Să se arate că dacă  $x \in \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$ , atunci  $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$ .

50. Pentru ce valori ale segmentului, din intervalul  $[0, 2\pi]$ , este satisfăcută inegalitatea  $\cos x < \frac{1}{2}$ ?

51. Să se construiască graficul funcției  $y = |\operatorname{tg} x|$  și, folosind graficul, să se indice pentru care valori ale lui  $x \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$  este satisfăcută inegalitatea:  $|\operatorname{tg} x| < 1$ .

52. Să se construiască graficul funcției  $y = |\sin x|$  și, folosind graficul, să se determine valorile argumentului  $x \in [0, 2\pi]$  pentru care este satisfăcută inegalitatea  $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

53. Pentru care valori ale argumentului  $x \in (\pi, 2\pi)$  este îndeplinită inegalitatea  $\operatorname{ctg}^2 x > 1$ ?

54. Să se construiască graficele funcțiilor:

$$a) y = \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad b) y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

55. Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiul egal cu:

$$a) 120^\circ; \quad b) 225^\circ; \quad c) 330^\circ; \quad d) -210^\circ.$$

56. Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiul egal cu:

$$a) 450^\circ; \quad b) 855^\circ; \quad c) 600^\circ; \quad d) -1230^\circ; \quad e) -585^\circ.$$

57. Să se calculeze valorile expresiei:

$$\sin(\alpha + 45^\circ) + 2 \sin(\alpha - 45^\circ) + 4 \cos 2\alpha + 2 \cos(\alpha + 135^\circ) \text{ pentru } \alpha = 45^\circ, 135^\circ.$$

58. Să se calculeze expresiile:

$$\begin{aligned} a) & \frac{\cos(-120^\circ)}{\cos 300^\circ} - \frac{\operatorname{tg} 210^\circ \sin 315^\circ}{\cos 180^\circ}; \\ b) & 2 \sin^2 \frac{17\pi}{4} + \operatorname{tg}^2 \frac{33\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}; \\ c) & \frac{\operatorname{tg}(-150^\circ) \cos(-210^\circ) \cos(-60^\circ)}{\operatorname{ctg}(-240^\circ) \sin(-330^\circ)}; \\ d) & \frac{\sin^2(-212^\circ) \cos 302^\circ + \cos^3(-148^\circ)}{\sin(-58^\circ) \cos(-32^\circ) + \sin 392^\circ \sin(-148^\circ) - \sin 58^\circ \sin 148^\circ}. \end{aligned}$$

59. Să se demonstreze egalitățile:

$$a) \frac{\sin(180^\circ - \alpha) \sin(270^\circ - \alpha) \cos(360^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \sin(360^\circ - \alpha) \cos(180^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)} = 1;$$

$$b) \sin(\alpha - \pi) + \operatorname{tg}(\alpha - \pi) - \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \operatorname{tg} \alpha.$$

60. Să se demonstreze că pentru orice  $n$  număr natural este îndeplinită egalitatea:

$$\cos \left( \frac{1}{n} \cdot 180^\circ \right) + \cos \left( \frac{2}{n} \cdot 180^\circ \right) + \dots + \cos \left( \frac{n-1}{n} \cdot 180^\circ \right) = 0.$$

*Ind.* Se ține seama că

$$\cos \left( \frac{n-k}{n} \cdot 180^\circ \right) = -\cos \frac{k \cdot 180^\circ}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

și se grupează, doi cîte doi, termenii din membrul stîng.

## Formule fundamentale

## § 14. Relații între funcțiile trigonometrice ale aceluiași unghi

**43. Relații de bază.** Fie  $\alpha$  unghi în planul orientat și  $M$  un punct diferit de originea axelor de coordonate, astfel încât raza vectoare  $\vec{OM}$  să formeze cu axa  $Ox$  unghiul  $\alpha$ . Dacă notăm cu  $a, b, r$ , respectiv, proiecțiile vectorului  $\vec{OM}$  pe axele de coordonate și modulul vectorului, atunci avem următoarea

**Teoremă.** Oricare ar fi unghiul  $\alpha$  avem:

$$a^2 + b^2 = r^2. \quad (1)$$

**Demonstrație.** Să notăm cu  $A$  proiecția punctului  $M$  pe axa  $Ox$ . Atunci avem  $OA = a$ ,  $AM = b$  și  $OM = r$ . APLICIND, în triunghiul dreptunghic  $OAM$ , teorema lui Pitagora, rezultă:

$$a^2 + b^2 = r^2.$$

Tinând seama că  $r \neq 0$  (pentru că  $\vec{OM} \neq 0$ ), putem împărți cu  $r^2$  ambii membri ai egalității (1). Obținem:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1.$$

Dar  $\frac{a}{r} = \cos \alpha$  și  $\frac{b}{r} = \sin \alpha$ , deci această relație devine:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (2)$$

În § 5 am definit funcțiile  $\operatorname{tg} \alpha$  și  $\operatorname{ctg} \alpha$  prin relațiile

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \text{ și } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Având în vedere că  $\sin \alpha = \frac{b}{r}$  și  $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ , rezultă formulele:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Relațiile (2) și (3) se numesc *relații de bază*.

**44. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul uneia din ele.** Vom determina acum, plecind de la relațiile de bază, o serie de formule prin care putem exprima funcțiile trigonometrice cu ajutorul uneia din ele.

Din formula (2) deducem:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (4)$$

Care înlocuită în (3) ne dă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}. \quad (4')$$

Formulele (4) și (4') ne dă funcțiile trigonometrice  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  în funcție de  $\sin \alpha$ .

Analog avem:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}. \quad (5)$$

Ridicând la patrat prima relație (3), găsim:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

de unde:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1$$

sau, tinând seama de relația (2):

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Care ne dă:

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (6)$$

Dar  $\sin \alpha = \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$ , deci:

$$\sin \alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (6')$$

Din relațiile (3) deducem:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (6'')$$

Formulele (6), (6') și (6'') ne dă funcțiile trigonometrice  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  în funcție de  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Analog găsim:

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \pm \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \quad (7)$$

Formulele (4), (4'), (5), (6), (6'), (6'') și (7) se numesc *formule corelatice*.

**O b s e r v a t i o n e.** Pentru fiecare unghi  $\alpha$  numărul  $\cos \alpha$  este unic determinat. Așadar în formula  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$  este valabil numai unul dintre semnele din fața radicalului, anume semnul numărului  $\cos \alpha$ . Alegerea

semnului corespunzător nu prezintă nici o dificultate în cazul cînd se cunoaște cadranul în care este situat unghiul. Altininteri, pentru a se evita erorile posibile, este preferabil ca formula dată să fie folosită sub forma  $|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ .<sup>1</sup>

Considerații analoge se pot face și relativ la celelalte formule în care apare dublul semn  $\pm$ .

### Aplicații

1° Fiind dat  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  și știind că  $\alpha$  este un unghi din cadranul II, să se determine valorile celorlalte funcții trigonometrice.

Avgind în vedere că  $\alpha$  este un unghi din cadranul II, rezultă că valorile funcțiilor  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  sunt negative, și din formulele (4) și (4') deducem:

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}.$$

2° Să se calculeze expresia:

$$E = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha)}} \right].$$

Avem:

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) &= 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \cos^4 \alpha, \\ 1 - \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha) &= \sin^4 \alpha. \end{aligned}$$

Deci:

$$E = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1$$

## § 15. Formule trigonometrice de calcul

45. **Produsul scalar a doi vectori.** În mecanică se studiază problema următoare: să se găsească lucru mecanic al forței  $\vec{F}$ , dacă punctul asupra căruia acționează forță efectuează deplasarea  $\vec{OA} = \vec{a}$ .

Dacă punctul se deplacează în sensul forței atunci, prin definiție, lucru mecanic al forței este egal cu produsul dintre mărimea forței și lungimea deplasării.

Dacă însă punctul se deplacează sub un unghi  $\alpha$  față de forță (fig. 71), atunci lucrează numai componenta forței situată pe dreapta  $OA$  deoarece componenta perpendiculară pe  $OA$  este echilibrată de rezistență. Proiecțind forță pe direcția deplasării, obținem:

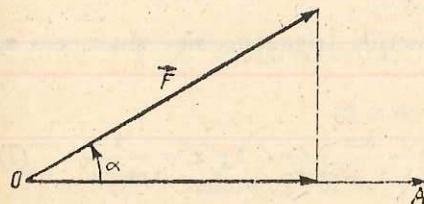


Fig. 71.

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{F} = |\vec{F}| \cos \alpha.$$

<sup>1</sup>  $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{dacă } a \geq 0, \\ -a & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$

Prin urmare, lucru mecanic al forței  $\vec{F}$  are expresia:

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{F} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \alpha.$$

În acest fel perechii ordonate de vectori  $(\vec{F}, \vec{a})$  i se poate atașa scalarul  $|\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cos \alpha$ , numit produsul scalar al vectorilor  $\vec{F}$  și  $\vec{a}$ . În general, se numește produs scalar a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  numărul egal cu produsul dintre modulele vectorilor și cosinusul unghiului format de vectorul  $\vec{a}$  cu vectorul  $\vec{b}$ . Produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se înseamnă prin  $\vec{ab}$  sau  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Așadar

$$\vec{ab} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos (\vec{b}, \vec{a}). \quad (1)$$

De aici se deduce ușor că produsul scalar este egal cu zero în acel și numai în acel caz cînd cel puțin unul dintre vectori este nul, sau dacă vectorii sunt ortogonali.

Într-adevăr membrul drept al relației (1) se anulează dacă și numai dacă măcar unul dintre numerele  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$  sau  $\cos (\vec{b}, \vec{a})$  este nul. Însă

$$|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0, \quad |\vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \vec{b} = 0$$

și

$$\cos (\vec{b}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b},$$

ceea ce demonstrează proprietatea enunțată.

În particular, pentru  $\vec{b} = \vec{a}$ , produsul scalar devine  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = = |\vec{a}|^2$ , adică produsul scalar a doi vectori egali este egal cu pătratul modulului unuia dintre ei.

### 46. Proprietățile fundamentale ale produsului scalar

#### 1) Comutativitatea

$$\vec{ab} = \vec{ba}.$$

Această proprietate rezultă nemijlocit din (1). Este suficient numai să observăm egalitatea  $\cos (\vec{b}, \vec{a}) = \cos (\vec{a}, \vec{b})$ .

Dacă numim proiecție a vectorului  $\vec{a}$  pe vectorul  $\vec{b}$  proiecția vectorului  $\vec{a}$  pe o axă care are același sens cu  $\vec{b}$ , atunci proprietatea de comutativitate conduce la formularea echivalentă: produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unui vector și proiecția celuilalt pe el.

#### 2) Distributivitatea față de adunarea vectorilor:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{ac} + \vec{bc}.$$

Folosind definiția echivalentă a produsului scalar de mai sus, avem:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Aplicând acum teorema II din § 4 relativă la proiecția sumei, obținem

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{c}| (\operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{a} + \operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{b}) = |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{a} + |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \text{ c.e.t.d.}$$

3) Asociativitatea față de înmulțirea cu un număr:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Fie  $\lambda \geq 0$ . Folosind relația (1), avem:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \cos(\lambda \vec{a}, \vec{b}).$$

Însă

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| = \lambda |\vec{a}|$$

și

$$\widehat{(\lambda \vec{a}, \vec{b})} = \lambda \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Prin urmare

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

adică membrul drept al relației date.

În mod analog se tratează și cazul  $\lambda < 0$ .

#### 47. Produsul scalar al vectorilor dați prin proiecții.

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} \text{ și } \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}.$$

Înțînd seama de proprietățile fundamentale ale produsului scalar, avem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j},$$

însă vesorii  $\vec{i}, \vec{j}$  sunt vectori unitari ortogonali. De aici rezultă relațiile:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

și deci (1) devine:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Astfel produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor proiecțiilor de același nume.

**Aplicație.** În paralelogramul  $ABCD$  se construiesc din vîrful  $B$  perpendicularele  $BE$  pe latura  $CD$  și  $BF$  pe diagonala  $AC$  (fig. 72).

Să se demonstreze relația:

$$CA \cdot CF = BC^2 + CD \cdot CE.$$

**Soluție.** Deoarece vectorii  $\vec{CA}$  și  $\vec{CF}$  au același sens, putem scrie:

$$CA \cdot CF = \vec{CA} \cdot \vec{CF}$$

sau, înțînd seama de relațiile  $\vec{CF} = \vec{CB} + \vec{BF}$ ,  $\vec{CA} \cdot \vec{BF} = 0$ :

$$CA \cdot CF = \vec{CA} \cdot \vec{CB}$$

sau încă, deoarece  $\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{CD}$  și  $\vec{CB} \cdot \vec{CB} = CB^2$ :

$$CA \cdot CF = CB^2 + \vec{CD} \cdot \vec{CB}.$$

În sfîrșit, folosind în ultima egalitate relația  $\vec{CB} = \vec{CE} + \vec{EB}$  și observînd că  $\vec{CD} \cdot \vec{CE} = CD \cdot CE$ ,  $\vec{CD} \cdot \vec{EB} = 0$ , se obține relația dată.

**48. Funcțiile trigonometrice ale unei sume de unghiuri.** În § 13 s-a arătat că funcțiile trigonometrice ale unghiurilor  $k \frac{\pi}{2} \pm \alpha$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) se exprimă prin funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\alpha$ . Acum vom arăta că, și în cazul general a două unghiuri arbitrale, funcțiile trigonometrice ale sumei se exprimă prin funcțiile trigonometrice ale termenilor.

Fie vectorii nenuli  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , care formează cu axa  $Ox$  unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  respective (fig. 73). Observînd că  $\widehat{(\vec{b}, \vec{a})} = \alpha - \beta$ , rezultă următoarea expresie pentru produsul scalar al celor doi vectori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha - \beta). \quad (2)$$

Pe de altă parte, dacă  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$  sunt vesorii axelor  $Ox$  și  $Oy$  respectiv, atunci  $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$ , unde  $x_1$  și  $y_1$  reprezintă proiecțiile vectorului  $\vec{a}$  pe axele de coordinate (v. pct. 18). Mai departe, înțînd seama de definiția funcțiilor cosinus și sinus, avem:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= |\vec{a}| \left( \frac{x_1}{|\vec{a}|} \vec{i} + \frac{y_1}{|\vec{a}|} \vec{j} \right) = \\ &= |\vec{a}| (\cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j}), \end{aligned} \quad (3)$$

În mod analog:

$$\vec{b} = |\vec{b}| (\cos \beta \cdot \vec{i} + \sin \beta \cdot \vec{j}). \quad (4)$$

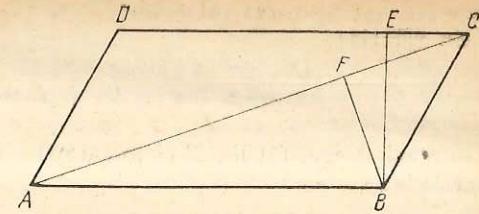


Fig. 72.

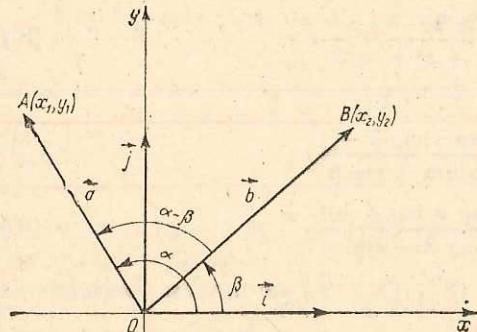


Fig. 73.

Așadar, cu ajutorul relațiilor (3) și (4), produsul scalar poate fi exprimat și prin relația:

$$\vec{ab} = |\vec{a}| |\vec{b}| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta). \quad (5)$$

Comparind egalitățile (2) și (5), după simplificarea factorului  $|\vec{a}| |\vec{b}|$ , rezultă formula:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (6)$$

Dacă în această formulă înlocuim pe  $\beta$  cu  $-\beta$  și avem în vedere relațiile  $\cos(-\beta) = \cos \beta$ ,  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ , obținem:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (6')$$

Să scriem acum formula (6) punând în loc de  $\alpha$  unghiul  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ :

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta.$$

Dar:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \sin(\alpha + \beta), \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$

deci:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha. \quad (7)$$

Înlocuind aici pe  $\beta$  cu  $-\beta$  găsim:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha. \quad (7')$$

Să împărțim acum, membru cu membru, egalitățile (7) și (6'). Avem

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Având în vedere aici că  $\sin \alpha = \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\sin \beta = \cos \beta \operatorname{tg} \beta$  și simplificând cu  $\cos \alpha \cos \beta$ , obținem:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (8)$$

Împărțind relația (7') la (6), găsim:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (8')$$

În mod analog obținem:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad (9)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (9')$$

Formulele (6), (6'), (7), (7'), (8), (8'), (9), (9') se numesc *formulele de adunare a unghiurilor*.

Cu ajutorul acestor formule putem deduce expresiile funcțiilor trigonometrice ale unei sume de trei unghiuri.

### Aplicații

$$1^{\circ} \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \sin[(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3] = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_3 + \sin \alpha_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \\ = (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1) \cos \alpha_3 + \sin \alpha_3 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) = \\ = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \\ - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3.$$

Analog găsim:

$$2^{\circ} \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \cos \alpha_3 - \\ - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1.$$

$$3^{\circ} \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_3},$$

$$4^{\circ} \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \alpha_3 - \operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \alpha_2 - \operatorname{ctg} \alpha_3}{\operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_3 + \operatorname{ctg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \alpha_3 - 1}.$$

*Exemple*

- 1) Să se calculeze  $\cos(\alpha + \beta)$  și  $\cos(\alpha - \beta)$ , știind că  $\sin \alpha = -\frac{8}{17}$  și  $\cos \beta = \frac{24}{25}$ , unghiul  $\alpha$  fiind în cadrul III, iar  $\beta$  în cadrul IV.

Tinând seama de cadranele în care se află unghiurile, deducem:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{8^2}{17^2}} = -\frac{15}{17}, \quad \sin \beta = -\sqrt{1 - \frac{24^2}{25^2}} = -\frac{7}{25},$$

deci:

$$\cos(\alpha + \beta) = \left(-\frac{15}{17}\right)\left(\frac{24}{25}\right) - \left(-\frac{8}{17}\right)\left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{416}{425},$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \left(-\frac{15}{17}\right)\left(\frac{24}{25}\right) + \left(-\frac{8}{17}\right)\left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{304}{425}.$$

- 2) Știind că  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_3 = 2 - \sqrt{3}$ , să se calculeze  $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$  și să se deducă de aici valoarea sumei  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

Din formula care ne dă tangenta unei sume de trei unghiuri deducem:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2 - \sqrt{3} - \frac{2 - \sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{1}{6} - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - \frac{2 - \sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Având în vedere că  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ , rezultă (v. pct. 58):

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

- 3) Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului de  $15^\circ$ .

Avem:

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Analog:

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 2 - \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

#### 49. Funcțiile trigonometrice ale multiplilor unui unghi

Să scriem acum formula (7) pentru  $\beta = \alpha$ . Avem:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha,$$

adică:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (10)$$

Din formula (6') deducem:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (11)$$

care se mai poate scrie, ținând seama de (2) din § 14, sub una din formele:

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (11')$$

sau

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha. \quad (11'')$$

Făcind în formulele (8) și (9)  $\beta = \alpha$ , obținem respectiv

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (12)$$

și

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \quad (13)$$

Formulele (10), (11), (11'), (11''), (12), (13) ne dă funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu.

În aplicațiile care urmează vom deduce formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului triplu.

#### Aplicații

1°  $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha$ , sau, având în vedere relațiile (10) și (11),

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

care se mai poate scrie:

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha). \quad (14)$$

Analog obținem:

$$2^\circ \cos 3\alpha = \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3), \quad (15)$$

$$3^\circ \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (16)$$

$$4^\circ \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}. \quad (17)$$

Formulele (14), (15), (16), (17) ne dă funcțiile trigonometrice ale unghiului triplu.

În capitolul VI vom da formule generale pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului  $n\alpha$ .

#### Exemple

Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului  $2\alpha$  știind că  $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ ,  $\alpha$  fiind un unghi din cadrul II.

Avem:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{7^2}{25^2}} = -\frac{24}{25},$$

deci:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{24}{7}.$$

Cu aceste valori, formulele (10)–(13) ne dău:

$$\sin 2\alpha = -\frac{336}{625}, \quad \cos 2\alpha = \frac{527}{625}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{336}{527}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{527}{336}.$$

Având în vedere că  $\sin 2\alpha < 0$ ,  $\cos 2\alpha > 0$ , deducem că unghiul  $2\alpha$  este în cadrul IV.

2) Să se determine funcțiile trigonometrice ale unghiului  $4\alpha$  știind că  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ , unghiul fiind în cadrul I.

Din formulele (6) și (6') § 14 deducem:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Cu aceste valori, din (10) și (11) rezultă:

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$$

și deci unghiul  $2\alpha$  se află în cadrul II. Avem:

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = -\frac{24}{25}$$

și

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = -\frac{7}{25}.$$

De aici rezultă:

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{24}{7}, \quad \operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{7}{24}.$$

**50. Funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi.** Să deducem acum funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale unghiului întreg.

Tinând seama de formula (11''), putem scrie:

$$\cos \alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

de unde:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

adică:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad (18)$$

semnul radicalului fiind determinat în funcție de cadrul în care se află unghiul  $\frac{\alpha}{2}$ .

Din (11') deducem:

$$\cos \alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1,$$

deci:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

de unde rezultă:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \quad (19)$$

Împărțind membru cu membru relațiile (18) și (19), găsim:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (20)$$

și

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}. \quad (21)$$

Pentru funcțiile  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  și  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$  putem da și alte formule. Într-adevăr avem:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (20')$$

și

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (20'')$$

De aici rezultă:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (21')$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (21'')$$

Formulele (18), (19), (20), (20'), (20''), (21), (21'), (21'') ne dău *funcțiile trigonometrice ale jumătății unghiului*.

### Aplicații

1° Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului  $22^\circ 30'$ .

Aveam:

$$\sin 22^\circ 30' = \sin \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Analog găsim:

$$\cos 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \quad \operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1, \quad \operatorname{ctg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} + 1.$$

2° Stiind că  $\cos \alpha = -\frac{527}{625}$  și că  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\frac{\alpha}{2}$ .

Tinând seama de inegalitatea de definiție a unghiului  $\alpha$ , rezultă că  $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$  și  $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{3\pi}{8}$ ; deci unghiul  $\frac{\alpha}{2}$  este în cadrul II, iar unghiul  $\frac{\alpha}{4}$  în cadrul I. Aveam:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{527}{625}}{2}} = -\sqrt{\frac{49}{625}} = -\frac{7}{25}.$$

De aici rezultă că:

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Analog găsim:

$$\cos \frac{\alpha}{4} = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} = \frac{3}{4}.$$

51. Exprimarea funcțiilor trigonometrice ale unghiului  $\alpha$  cu ajutorul lui  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

Avgind în vedere că  $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ , din formula (12) deducem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (22)$$

De aici rezultă:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \quad (23)$$

Tinând seama de exprimarea de mai sus a unghiului  $\alpha$ , putem scrie relația (10) sub forma:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

sau:

$$\sin \alpha = 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Dar:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

deci:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (24)$$

Din formula (11) rezultă:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

sau:

$$\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

de unde, tinând seama de expresia de mai sus a lui  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$  deducem:

$$\cos \alpha = \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

deci:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (25)$$

Formulele (22)–(25) ne dă funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\alpha$  cu ajutorul lui  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . Aceste formule prezintă marele avantaj că ne dă expri- mări *rationale* ale funcțiilor trigonometrice  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ , cu ajutorul funcției  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

*Exemplu.* Să se calculeze expresia  $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}$ , știind că  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ .

Aveam:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

deci:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{5}}{\frac{4}{3} + \frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

52. Formule pentru transformarea unor sume de funcții trigonometrice în produse. În multe cazuri ne apare necesitatea de a transforma anumite sume de funcții trigonometrice în produse. Vom deduce acum formule care să efectueze aceste transformări.

Să considerăm relațiile:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \quad (7)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha. \quad (7')$$

Adunând membru cu membru aceste egalități, obținem:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta.$$

Notând:

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha - \beta = q,$$

deducem:

$$\alpha = \frac{p+q}{2}, \quad \beta = \frac{p-q}{2}$$

și deci formula de mai sus se scrie:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}. \quad (26)$$

Scăzând membru cu membru egalitățile (7) și (7'), găsim:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha,$$

de unde rezultă:

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}. \quad (26')$$

Relațiile (26) și (26') reprezintă *formule de transformare în produs a unei sume, respectiv diferențe, de două sinusuri*.

Fie acum relațiile:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (6)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (6)$$

Adunându-le membru cu membru, obținem:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

adică:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}. \quad (27)$$

Scăzând membru cu membru relațiile (6') și (6), găsim:

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}. \quad (27')$$

formulă care se mai poate scrie, ținând seama că  $\sin \frac{p-q}{2} = -\sin \frac{q-p}{2}$ , sub forma:

$$\cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2}. \quad (27'')$$

Formulele (27), (27'), și (27'') sunt *formule de transformare în produs a unei sume, respectiv diferențe, de cosinusuri*.

Vom determina acum formule pentru transformarea în produs și cît a unei sume sau diferențe de tangente și cotangente.

Avem:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \sin q \cos p}{\cos p \cos q},$$

de unde, având în vedere formula (7), rezultă

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}. \quad (28)$$

Analog găsim:

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}. \quad (28')$$

$$\operatorname{ctg} p + \operatorname{ctg} q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}, \quad (29)$$

$$\operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}. \quad (29')$$

Formulele (28), (28'), (29), (29') sunt *formule de transformare în produs și cît a unei sume, respectiv diferențe, de tangente sau cotangente*.

### Aplicații

1° Să se transforme în produs expresia  $\sin 72^\circ + \sin 48^\circ$ . Avem:

$$\begin{aligned} \sin 72^\circ + \sin 48^\circ &= 2 \sin \frac{72^\circ + 48^\circ}{2} \cos \frac{72^\circ - 48^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin 60^\circ \cos 12^\circ = \sqrt{3} \cos 12^\circ. \end{aligned}$$

2° Să se transforme în produs expresia  $\sin 80^\circ + \sin 70^\circ + \sin 50^\circ + \sin 40^\circ$ .

Putem scrie:

$$\begin{aligned} \sin 80^\circ + \sin 70^\circ + \sin 50^\circ + \sin 40^\circ &= (\sin 80^\circ + \sin 40^\circ) + (\sin 70^\circ + \sin 50^\circ) = \\ &= 2 \sin 60^\circ \cos 20^\circ + 2 \sin 60^\circ \cos 10^\circ = 2 \sin 60^\circ (\cos 20^\circ + \cos 10^\circ) = \\ &= 2 \sin 60^\circ \cdot 2 \cos 15^\circ \cdot \cos 5^\circ = 2\sqrt{3} \cos 15^\circ \cdot \cos 5^\circ. \end{aligned}$$

3° Să se transforme în produs și cît diferența  $\operatorname{tg} 68^\circ - \operatorname{ctg} 67^\circ$ .

Tinând seama că unghiurile de  $67^\circ$  și  $23^\circ$  sunt complementare, rezultă că  $\operatorname{ctg} 67^\circ = \operatorname{tg} 23^\circ$  și deci putem scrie:

$$\operatorname{tg} 68^\circ - \operatorname{ctg} 67^\circ = \operatorname{tg} 68^\circ - \operatorname{tg} 23^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 68^\circ \cos 23^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\cos 68^\circ \cos 23^\circ}.$$

4° Să se transforme în produs expresia:

$$E = \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta + \gamma).$$

Avem:

$$\begin{aligned} E &= (\cos \alpha + \cos \beta) - [\cos \gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma)] = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \\ &\quad - 2 \cos \frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} = \\ &= 4 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2}. \end{aligned}$$

5° Să se transforme în produs expresia  $3 \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha$ .

Avem:

$$3 \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha = 3 \left( \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \alpha \right).$$

Tinând seama că  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , putem scrie:

$$3 \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha = 3 \left( \sin \alpha - \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cos \alpha \right) = \frac{3}{\cos 30^\circ} (\sin \alpha \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos \alpha) = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin(\alpha - 30^\circ) = 2\sqrt{3} \sin(\alpha - 30^\circ).$$

**53. Formule pentru transformarea unor produse trigonometrice în sume.**  
Vom da acum o serie de formule cu ajutorul cărora vom transforma anumite produse de funcții trigonometrice în sume.

Să considerăm formulele:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \quad (7)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha, \quad (7')$$

Adunând membru cu membru aceste egalități, obținem:

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta),$$

de unde:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}. \quad (30)$$

Această formulă ne servește pentru a transforma un produs dintre un sinus și un cosinus în sumă de sinusuri.

Fie acum relațiile:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (6')$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (6)$$

Dacă le adunăm membru cu membru, găsim:

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta),$$

adică:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}. \quad (31)$$

Scăzând egalitățile (6') și (6) membru cu membru, obținem

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

deci:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}, \quad (32)$$

formulă care transformă un produs de sinusuri într-o diferență de cosinusuri.

### Aplicații

1° Să se calculeze expresia  $\sin(\alpha - 30^\circ) \cos(\alpha + 30^\circ)$ .

Tinând seama de relația (30), deducem:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - 30^\circ) \cos(\alpha + 30^\circ) &= \\ &= \frac{\sin[(\alpha - 30^\circ) + (\alpha + 30^\circ)] + \sin[(\alpha - 30^\circ) - (\alpha + 30^\circ)]}{2} = \frac{\sin 2\alpha + \sin(-60^\circ)}{2}. \end{aligned}$$

Dar

$$\sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ deci:}$$

$$\sin(\alpha - 30^\circ) \cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{2 \sin 2\alpha - \sqrt{3}}{4}.$$

2° Să se calculeze expresia:

$$E = \cos \alpha + 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right).$$

Din formula (32) rezultă:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right) &= \\ &= \frac{\cos\left[\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) - \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\right] - \cos\left[\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) + \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\right]}{2} = \\ &= \frac{\cos 30^\circ - \cos \alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \alpha}{2}. \end{aligned}$$

deci:

$$E = \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### § 16. Identități trigonometrice

**54. Identități care se demonstrează cu ajutorul formulelor fundamentale**

**Definiție.** Egalitatea care conține funcțiile trigonometrice ale unui sau a mai multor unghiuri și este satisfăcută pentru toate valorile admisibile ale acestora se numește identitate trigonometrică.

Expresiile din membrul stîng și membrul drept al egalității se numesc *identice*.

Înlocuirea unei expresii prin alta identică se numește *transformare identică* a acestei expresii.

#### Exemplu

Expresiile:

a)  $\sin^2 \alpha$  și  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ; b)  $\operatorname{tg} \alpha$  și  $\operatorname{ctg} \alpha$  și  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  sunt identice.

Identitatea  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  are sens pentru orice unghi  $\alpha$ ; identitatea  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  are sens numai pentru  $\alpha \neq k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) (pentru  $\alpha = k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) una din funcțiile  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  nu are sens).

Adesea se cere să se demonstreze o identitate trigonometrică, adică să se arate că expresiile din membrul stîng și membrul drept al egalității sunt identice.

Pentru aceasta se ajunge la o identitate cunoscută cu ajutorul formulelor fundamentale și al transformărilor algebrice identice, sau, pornind de la o identitate cunoscută, cu ajutorul transformărilor algebrice identice și al formulelor fundamentale se ajunge la egalitatea dată.

Prin transformările identice succesive, o expresie trigonometrică poate căpăta o formă mai simplă, se pot rezolva inegalități trigonometrice, probleme de maxim și minim și.a.

*Exemplu. 1) Să se demonstreze identitatea*

$$\frac{1 - (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)}{1 - (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha)} = \frac{2}{3}.$$

*Soluție.* Înțînd seama de identitatea  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , obținem:  
 $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ ;  
 $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

Prin urmare

$$\frac{1 - (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)}{1 - (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha)} = \frac{2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}.$$

În acest fel, prin transformări identice succesive ale membrului stîng al egalității date s-a ajuns la egalitatea evidentă  $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ .

**Observație.** Funcția din membrul stîng nu are sens pentru unghiurile  $\alpha = k\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), în timp ce funcția  $\frac{2}{3}$  are sens pentru orice unghi  $\alpha$ .

Așadar, egalitatea dată este identitate pentru orice unghi  $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

*2) Să se demonstreze inegalitatea*

$$\left| \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right| \leq \sqrt{2}.$$

*Soluție.* Folosind identitățile  $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ,  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$  și

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \text{ obținem:}$$

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\cos \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Însă  $\left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right| \leq 1$ . Prin urmare,

$$\left| \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right| = \sqrt{2} \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right| \leq \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}.$$

c.e.t.d.

*3) Să se aducă la o formă mai simplă expresia*

$$E(\alpha) = \left( \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} \right) \left( \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \right).$$

*Soluție.* Deoarece  $|\sin \alpha| \leq 1$  și  $|\cos \alpha| \leq 1$ , expresiile de sub radicali sunt pozitive; prin urmare se pot aplica regulile de operații cu radicali și obținem:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} &= \frac{\sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha}} - \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha}}{\sqrt{1 - \sin \alpha}} = \\ &= \frac{(\sqrt{1 - \sin \alpha})^2 - (\sqrt{1 + \sin \alpha})^2}{\sqrt{1 + \sin \alpha} \sqrt{1 - \sin \alpha}} = \frac{1 - \sin \alpha - (1 + \sin \alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{-2 \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} = \frac{-2 \sin \alpha}{|\cos \alpha|}. \end{aligned}$$

Analog:

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{-2 \cos \alpha}{|\sin \alpha|}.$$

Deci:

$$E(\alpha) = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{|\sin \alpha \cos \alpha|} = \frac{2 \sin 2\alpha}{\frac{1}{2} |\sin 2\alpha|} = \frac{4 \sin 2\alpha}{|\sin 2\alpha|} = \begin{cases} 4 \text{ pentru } \sin 2\alpha > 0, \\ -4 \text{ pentru } \sin 2\alpha < 0 \end{cases}$$

sau încă, înțînd seama de semnul funcției sinus,

$$E(\alpha) = \begin{cases} 4 \text{ pentru } k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ -4 \text{ pentru } \frac{\pi}{2} + k\pi < \alpha < \pi + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**55. Identități conditionate.** Două expresii trigonometrice care nu sunt egale pe multimea valorilor admisibile ale unghiului pot fi egale pe o submulțime a acesteia, definită printr-o relație care conține unghiul respectiv.

Aștfel spus, dacă unghiul satisfacă o anumită relație, cele două funcții considerate sunt identice.

O astfel de identitate se numește condiționată de relația pe care o satisfac unghiul sau, pe scurt, *condiționată*.

*Exemplu*

*1) Dacă  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt unghiurile unui triunghi, atunci este satisfăcută identitatea*

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

*Soluție.* Dacă  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt unghiurile unui triunghi, atunci ele satisfac relația:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

sau:

$$\alpha + \beta = \pi - \gamma.$$

<sup>1</sup> Considerațile făcute rămân valabile și în cazul în care expresiile conțin mai multe unghiuri.

Unghurile  $\alpha + \beta$  și  $\pi - \gamma$  fiind egale, și tangentele lor sunt egale:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\pi - \gamma)$$

sau:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \gamma,$$

de unde după eliminarea numitorului și separarea termenilor:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

### Observații:

1° Identitatea dată nu are sens dacă triunghiul este dreptunghic.

2° Identitatea este adevărată și în cazul mai general  $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

2) Dacă  $\frac{\sin^4 a}{a} + \frac{\cos^4 a}{b} = \frac{1}{a+b}$  ( $a > 0, b > 0$ ), atunci

$$\frac{\sin^8 a}{a^3} + \frac{\cos^8 a}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

*Soluție.* Relația pe care o satisface unghiu  $\alpha$  poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{a+b}{a} \sin^4 \alpha + \frac{a+b}{b} \cos^4 \alpha = 1$$

sau:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \frac{b}{a} \sin^4 \alpha + \frac{a}{b} \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2$$

sau, după transformări:

$$\left( \sqrt{\frac{b}{a}} \sin^2 \alpha + \sqrt{\frac{a}{b}} \cos^2 \alpha \right)^2 = 0,$$

dе unde

$$\frac{\sin^2 \alpha}{a} = \frac{\cos^2 \alpha}{b}.$$

Folosind o proprietate a rapoartelor egale, deducem:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{a} = \frac{\cos^2 \alpha}{b} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{a+b} = \frac{1}{a+b}.$$

Așadar:

$$\sin^2 a = \frac{a}{a+b}; \cos^2 a = \frac{b}{a+b}$$

și deci:

$$\frac{\sin^3 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^3 \alpha}{b^3} = \frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^4}{a^3} + \frac{\left(\frac{b}{a+b}\right)^4}{b^3} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3},$$

56. Relații între funcțiile trigonometrice și arcfunctii. În cele ce urmează vom demonstra cîteva relații simple între funcțiile trigonometrice și arcfunctii.

1) Să se demonstreze identitățile:

- a)  $\sin(\arcsin x) = x$ ; b)  $\cos(\arccos x) = x$ ;
- c)  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ ; d)  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ .

Vom demonstra identitatea a), pentru celelalte procedindu-se în mod analog. Observăm mai întîi că funcția  $\arcsin x$  este definită pentru  $|x| \leq 1$  și deci egalitatea are sens numai pentru aceste valori ale lui  $x$ . Fie  $x_0 \in [-1, 1]$  o astfel de valoare. Conform definiției,  $\arcsin x_0$  este numărul, aparținând intervalului  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , al căruia sinus este egal cu  $x_0$ , ceea ce demonstrează identitatea.

Observație. Identitatea b) are sens, de asemenea, numai pentru  $|x| \leq 1$ .

2) Să se demonstreze identitățile:

- a)  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ ; b)  $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$ ;
- c)  $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

*Soluție.* a) Se constată ușor că egalitatea are sens pentru  $|x| \leq 1$ . Dacă se introduce notația  $\alpha = \arccos x$ , atunci  $0 \leq \alpha \leq \pi$  și deci  $\sin \alpha \geq 0$ . Însă  $|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  (v. obs. de la pct. 44) sau, avînd în vedere cele ce precedă:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2},$$

adică

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Observație. În mod analog se demonstrează și identitatea  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

b) Egalitatea are sens dacă  $x \neq 0$ . Pentru  $\alpha = \operatorname{arcctg} x$ , formula  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$  devine:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)} = \frac{1}{x},$$

c) Egalitatea are sens pentru orice  $x$ . Dacă se introduce notația  $\alpha = \operatorname{arcctg} x$ , atunci  $0 < \alpha < \pi$ . Rezultă că numerele  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{ctg} \alpha$  au același semn și deci formula  $|\cos \alpha| = \frac{|\operatorname{ctg} \alpha|}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$  se poate scrie sub forma echivalentă

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} \text{ sau încă, avînd în vedere notația folosită:}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

### Aplicație

Să se demonstreze egalitatea:

$$\sin\left(3 \arcsin \frac{1}{4}\right) + \cos\left(2 \arccos \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16}.$$

*Soluție.* Introducem notările:  $\alpha = \arcsin \frac{1}{4}$ ,  $\beta = \arccos \frac{1}{4}$ . În acest fel membrul stâng al egalității devine  $\sin 3\alpha + \cos 2\beta$ . Însă

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 3 \sin\left(\arcsin \frac{1}{4}\right) - 4 \sin^3\left(\arcsin \frac{1}{4}\right) = \\ &= 3 \cdot \frac{1}{4} - 4 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{11}{16}\end{aligned}$$

și

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{14}{16}.$$

Așadar

$$\sin 3\alpha + \cos 2\beta = \frac{11}{16} - \frac{14}{16} = -\frac{3}{16},$$

ceea ce demonstrează egalitatea.

57. Relații între arcfuncții. 1) Să se demonstreze identitatea:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

*Soluție.* Este evident că egalitatea are sens pentru  $|x| \leq 1$ .

Fie

$$\alpha = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = x, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Însă

$$\sin \alpha = x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x$$

și

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \pi.$$

Așadar

$$\alpha = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x, \\ 0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x,$$

ceea ce demonstrează identitatea.

**Observație.** În mod analog se demonstrează și identitatea:

$$\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

2) Să se demonstreze identitatea

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

*Soluție.* Pornim de la identitatea  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$  în care luăm  $\alpha = \arcsin x$ ,  $\beta = \arcsin y$ .

Însă

$$\alpha = \arcsin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = x, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \beta = \arcsin y \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \beta = y, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

și

$$\cos \alpha = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}; \quad \cos \beta = \cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}.$$

Prin urmare

$$\sin(\alpha + \beta) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Dacă  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$ , ultima relație se poate scrie sub formă echivalentă:

$$\alpha + \beta = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

adică

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

**Observație.** Dacă  $-\pi \leq \alpha + \beta < -\frac{\pi}{2}$  sau  $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta \leq \pi$  egalitatea nu mai este satisfăcută. De exemplu, pentru  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  și  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , obținem:

$$\arcsin x + \arcsin y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{3},$$

și

$$\arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

3) Să se demonstreze identitatea:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

*Soluție.* Pornim de la identitatea  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ . Dacă

$-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ , această identitate poate fi scrisă sub formă echivalentă:

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Pentru  $\alpha = \arctg x$ ,  $\beta = \arctg y$ , ultima identitate capătă forma:

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{\tg(\arctg x) + \tg(\arctg y)}{1 - \tg(\arctg x)\tg(\arctg y)},$$

adică

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy}.$$

**Aplicație.** Să se demonstreze egalitatea:

$$2 \arctg \frac{1}{3} \arctg \frac{1}{4} = \arctg \frac{16}{43}.$$

**Soluție.** Deoarece  $0 < \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $0 < \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{3}}{3}$  și funcția arctg este strict crescătoare, rezultă inegalitățile:

$\arctg 0 < \arctg \frac{1}{3} < \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\arctg 0 < \arctg \frac{1}{4} < \arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$  sau, ținind seama că  $\arctg 0 = 0$  și  $\arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$ ,

$$0 < 2 \arctg \frac{1}{3} < 2 \frac{\pi}{6}, \quad 0 < \arctg \frac{1}{4} < \frac{\pi}{3},$$

de unde

$$0 < 2 \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{4} < \frac{\pi}{3}.$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} \tg\left(2 \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{4}\right) &= \frac{\tg\left(2 \arctg \frac{1}{3}\right) + \tg\left(\arctg \frac{1}{4}\right)}{1 - \tg\left(2 \arctg \frac{1}{3}\right)\tg\left(\arctg \frac{1}{4}\right)} = \\ &= \frac{\frac{2 \tg\left(\arctg \frac{1}{3}\right)}{1 - \tg^2\left(\arctg \frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{4}} = \frac{16}{43}. \end{aligned}$$

Cu aceasta demonstrația este terminată deoarece

$$\begin{cases} \tg\left(2 \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{4}\right) = \frac{16}{43}, \\ 0 < 2 \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{4} < \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 \arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{4} = \arctg \frac{16}{43}.$$

### Exerciții

1. Să se calculeze  $\sin(\alpha + \beta)$  și  $\sin(\alpha - \beta)$  știind că  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  și  $\sin \beta = -\frac{8}{17}$ ,  $\alpha$  fiind un unghi din cadranul IV, iar  $\beta$  un unghi din cadranul III.

2. Să se calculeze  $\sin(\alpha + \beta)$  și  $\cos(\alpha - \beta)$  dacă  $\tg \alpha = -\frac{3}{4}$ , iar  $\ctg \beta = \frac{7}{24}$ ,  $\alpha$  fiind un unghi din cadranul II, iar  $\beta$  un unghi din cadranul III.

3. Știind că  $\sin \alpha = \frac{15}{17}$  și  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ , unde  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ , să se calculeze  $\tg(\alpha + \beta)$ .

4. Să se determine  $\tg \alpha$  știind că  $\tg(45^\circ + \alpha) = a$ .

5. Să se calculeze  $\sin \alpha$  știind că  $\cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha$  fiind un unghi din cadranul II.

6. Să se calculeze  $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$  știind că  $\sin \alpha_1 = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \alpha_3 = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ , unde  $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi < \alpha_2 < \frac{3\pi}{2} < \alpha_3 < 2\pi$ .

7. Să se pună sub o formă mai simplă expresia:

$$\cos \alpha - \cos \beta \cos(\alpha + \beta).$$

8. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)} = \tg 2\alpha.$$

9. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)}{2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \tg^2 \alpha + \tg^2 \beta.$$

10. Să se arate că:

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \tg(\alpha + \beta).$$

11. Să se arate că:

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha \cos \beta} = -\ctg \alpha \ctg \beta.$$

12. Să se demonstreze că:

$$\sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta).$$

13. Știind că  $\cos \alpha = \frac{7}{25}$  și că  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ , să se calculeze  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\tg 2\alpha$ .

14. Să se calculeze  $\sin(2\alpha + \beta)$  și  $\cos(2\alpha - \beta)$ , dacă  $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$  și  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ ,  $\alpha$  fiind un unghi din cadranul III, iar  $\beta$  un unghi din cadranul II.

15. Dacă  $\tg \alpha = \frac{1}{3}$  și  $\tg \beta = \frac{1}{4}$ , să se calculeze  $\tg(2\alpha + \beta)$ .

16. Să se calculeze  $\sin 4\alpha$  știind că  $\tg \alpha = 2$ , unghiul  $\alpha$  fiind în cadranul I.

17. Să se arate că:

$$\operatorname{tg}(30^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(30^\circ - \alpha) = \frac{2 \cos 2\alpha - 1}{2 \cos 2\alpha + 1}.$$

18. Să se arate că:

$$\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

19. Să se arate că:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \left( \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} \right)^2.$$

20. Să se demonstreze că:

$$\frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3.$$

21. Să se demonstreze că:

$$\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha - 4 \operatorname{ctg} 4\alpha.$$

22. Știind că  $\cos \alpha = \frac{119}{169}$  să se calculeze  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ,  $\alpha$  fiind un unghi din cadrul IV.

23. Să se calculeze  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , știind că  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ ,  $\alpha$  fiind un unghi în cadrul IV.

24. Să se determine  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ , știind că  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$ .

25. Să se arate că:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 1 - \sin \alpha.$$

26. Să se transforme în produse expresiile:

a)  $\sin 44^\circ + \sin 16^\circ$ ; b)  $\cos 23^\circ + \cos 37^\circ$ ;

c)  $\sin \frac{7\pi}{24} - \sin \frac{\pi}{24}$ ; d)  $\cos \frac{5\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8}$ ;

e)  $\sin 54^\circ + \cos 69^\circ$ ; f)  $\cos 34^\circ - \sin 64^\circ$ .

27. Să se transforme în produse și cături expresiile:

a)  $\operatorname{tg} 34^\circ + \operatorname{tg} 26^\circ$ ; b)  $\operatorname{ctg} 31^\circ + \operatorname{ctg} 19^\circ$ ;

c)  $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$ ; d)  $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{9} - \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{9}$ .

28. Să se simplifice fracțiile:

a)  $\frac{\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$ ;

b)  $\frac{\sin 8\alpha + \sin 6\alpha + \sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 6\alpha + \cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$ .

29. Să se scrie sub o formă mai simplă expresia:

$$\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 3x + \cos 5x} - \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x}.$$

30. Să se transforme în produs expresia:

$$\sin^2 \alpha - \frac{1}{3} \cos^2 \alpha.$$

31. Să se arate că:

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\sin 4x - \sin 2x} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} 3\alpha.$$

32. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sin 6x + \sin 2x}{\cos 6x + \cos 2x} = \operatorname{tg} 4\alpha.$$

33. Să se transforme în sumă următorul produs:

$$8 \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ.$$

34. Să se transforme în sumă următorul produs:

$$4 \sin(\alpha - b) \sin(b - c) \sin(c - \alpha).$$

35. Să se demonstreze că:

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

*Ind.* Se înmulțesc ambii membri ai egalității cu  $2 \sin \frac{2\pi}{7}$ , apoi se transformă produsele în sume.

Să se demonstreze identitățile:

36. a)  $\cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0$ ;

b)  $\sin 3\alpha = 4 \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha)$ ;

c)  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 3\alpha =$

$$= 4\sqrt{2} \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( 2\alpha - \frac{\pi}{4} \right).$$

37. a)  $2(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2 = \sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha + 1$ ;

b)  $\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) = -\sin^2 \beta$ .

38. a)  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) =$

$$= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2},$$

b)  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma =$

$$= 4 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2};$$

Să se demonstreze că pentru toate valorile admisibile ale unghiului  $x$  au loc identitățile:

39. a)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x$ ; b)  $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$ .

40.  $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + 8 \operatorname{ctg} 8x = \operatorname{ctg} x.$

41. Să se demonstreze că dacă  $\cos(\alpha + \beta) = 0$ , atunci are loc identitatea:

$$\sin(\alpha + 2\beta) = \sin \alpha.$$

*Ind.* Se înmulțește prima relație cu  $2 \sin \beta$ , apoi se transformă produsul în sumă.

42. Să se demonstreze că dacă  $\alpha + \beta = \gamma$ , atunci are loc identitatea:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

*Ind.* Se folosește relația  $\cos^2(\alpha + \beta) = \cos^2 \gamma$  (consecință a relației  $\alpha + \beta = \gamma$ ).

43. Să se demonstreze că dacă  $\cos x \cos y \cos z \neq 0$ , atunci are loc identitatea:

$$\cos(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x).$$

*Ind.* Se dezvoltă  $\cos(x + y + z)$ .

44. Să se demonstreze că dacă  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , atunci:

$$a) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$b) \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cos \frac{\pi - \alpha}{4} \cos \frac{\pi - \beta}{4} \cos \frac{\pi - \gamma}{4}.$$

45. Să se demonstreze că dacă  $\alpha, \beta, \gamma$  sunt unghiurile unui triunghi, atunci:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1.$$

46. Să se demonstreze că pentru orice  $k \in \mathbb{Z}$  și  $x + y + z = \pi$  are loc identitatea:

$$\sin 2kx + \sin 2ky + \sin 2kz = (-1)^{k+1} 4 \sin kx \sin ky \sin kz.$$

*Ind.* În identitatea 38, a) luăm  $\alpha = 2kx$ ,  $\beta = 2ky$ ,  $\gamma = 2kz$ .

47. Dacă  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$  atunci:

$$a) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta =$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \delta}{2};$$

$$b) \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma - \cos \delta =$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \delta}{2}.$$

48. Să se demonstreze egalitățile:

$$a) \arcsin \frac{15}{17} = \arccos \frac{8}{17}; \quad b) \arccos \frac{8}{17} = \operatorname{arctg} \frac{15}{8};$$

$$c) \arcsin \left( -\frac{7}{25} \right) = -\operatorname{arctg} \frac{7}{24}; \quad d) \arccos \left( -\frac{9}{41} \right) = \pi - \arcsin \frac{40}{41}.$$

*Ind. a)* Se introduce notația  $\alpha = \arcsin \frac{15}{17}$  și se ține seama că  $\sin \alpha = \frac{15}{17}$

$$\text{și } \alpha \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Să se calculeze:

$$49. a) \sin \left( 2 \arcsin \frac{1}{5} \right); \quad b) \sin \left( 2 \operatorname{arctg} 3 \right); \quad c) \cos \left( 2 \arccos \frac{3}{5} \right); \quad d) \operatorname{ctg} \left( 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right).$$

*Ind. a)* Se introduce notația  $\alpha = \arcsin \frac{1}{5}$  și se folosește identitatea  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

$$50. a) \cos \left( \arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{5}{13} \right); \quad b) \operatorname{tg} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{4} - \operatorname{arctg} 5 \right);$$

$$c) \sin \left( \operatorname{arctg} \frac{8}{15} - \arcsin \frac{8}{17} \right).$$

*Ind. a)* Se introduc notările  $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$ ,  $\beta = \arccos \frac{5}{13}$  și se folosește identitatea:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Să se demonstreze identitățile:

$$51. a) \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$b) \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$c) \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

*Ind. a)* În identitatea  $|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  se ia  $\alpha = \arccos x$ . Identitatea are sens pentru  $x \in [-1, 1]$ .

$$52. a) \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$b) \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$c) \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

*Ind. b)* În identitatea  $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$  se ia  $\alpha = \operatorname{arctg} x$  și se ține seama că  $\alpha \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ ,

$$53. a) \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$b) \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x};$$

$$c) \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

*Ind. b)* În identitatea  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  se ia  $\alpha = \arccos x$ , observându-se că  $\alpha \in [0, \pi]$ . Identitatea are sens pentru  $x \in [-1, 0] \cup (0, 1]$ .

$$54. a) \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x};$$

$$b) \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$c) \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

## Ecuații trigonometrice

Să se demonstreze egalitățile:

55. a)  $\arcsin \frac{8}{17} + \arcsin \frac{15}{17} = \frac{\pi}{2}$ ;

b)  $\arccos 0,8 + \arccos 0,6 = \frac{\pi}{2}$ .

Ind. a)  $\arcsin \frac{15}{17} = \arccos \frac{8}{17}$ .

56. a)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ ;

b)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ .

Ind. b) Grupând doi cîte doi termenii din membrul stîng al egalității, se aplică de cîteva ori formula (3) de la pct. 57.

57. a)  $\arcsin \frac{12}{13} - \arcsin \frac{3}{5} = \arcsin \frac{33}{65}$ ;

b)  $\arccos \frac{4}{5} - \arccos \frac{15}{17} = \arccos \frac{84}{85}$ ;

c)  $\operatorname{arctg} \frac{5}{2} - \operatorname{arctg} 3 = \operatorname{arctg} 17$ .

58. a)  $\operatorname{arctg} \frac{2}{11} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ ;

b)  $\arcsin \frac{7}{25} + \frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25} = \arccos \frac{3}{5}$ ;

Să se demonstreze identitățile:

59. a)  $2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x$ ;

b)  $2 \arcsin x = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$ .

Ind. a) În identitatea  $\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}$  se ia  $\alpha = \arccos x$ .

Identitatea are sens pentru  $x \in [-1, 1]$ .

60. a)  $2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$ ;

b)  $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$ .

Ind. a) Dacă  $0 \leq \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$  atunci  $\cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1$  și  $0 \leq 2 \arccos x \leq \pi$ .

Identitatea are loc pentru  $x \in [0, 1]$ .

§ 17. Mulțimea unghiurilor care corespund unei valori date a unei funcții trigonometrice

58. Determinarea unghiurilor pentru o valoare dată a funcției trigonometricc. Ne propunem să determinăm mulțimea unghiurilor (arcelor) pentru care valoarea unei anumite funcții trigonometrice este un număr dat  $a$ .

Arcsin  $a$ . Numărul  $a$  se reprezintă pe axa  $Oy$  prin punctul  $Q$  (fig. 74). Paralela la axa  $Ox$ , dusă prin acest punct, intersectează cercul unitate în două puncte distincte, într-un punct, sau nu-l intersectează după cum

$|a| < 1$  ( $-1 < a < 1$ ),  $|a| = 1$  ( $a = \pm 1$ ), sau  $|a| > 1$  ( $a < -1$  ori  $a > 1$ ).

Dacă  $|a| < 1$  (fig. 75, a), sinusurile unghiurilor  $\alpha + k\cdot 2\pi$  și  $\pi - \alpha + k\cdot 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), și numai ale acestor unghiuri, sunt egale cu  $a$ ; dacă  $|a| = 1$  (fig. 75, b) sinusurile unghiurilor  $\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$  și  $\frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), și numai ale acestora, sunt egale, respectiv, cu  $1$  și  $-1$ ; dacă  $|a| > 1$  (fig. 75, c), nu există nici un unghi al cărui sinus să fie egal cu  $a$ .

În concluzie, oricare ar fi numărul  $|a| \leq 1$ , există o mulțime infinită de unghiuri (arce) al căror sinus este egal cu  $a$ ; ele sunt date de formulele

$$\alpha + k \cdot 2\pi \text{ și } \pi - \alpha + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

și se notează Arcsin  $a$ .

Observație. Avînd în vedere egalitatea

$$\begin{aligned} &\{\alpha + k \cdot 2\pi\} \cup \{\pi - \alpha + k \cdot 2\pi\} = \\ &= \{\alpha + 2k \cdot \pi\} \cup \{-\alpha + (2k+1)\pi\} = \\ &= (-1)^k \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

putem scrie concentrat:

$$\text{Arcsin } a = (-1)^k \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (1)$$

$\alpha$  fiind unul dintre unghiurile al căror sinus este egal cu  $a$ .

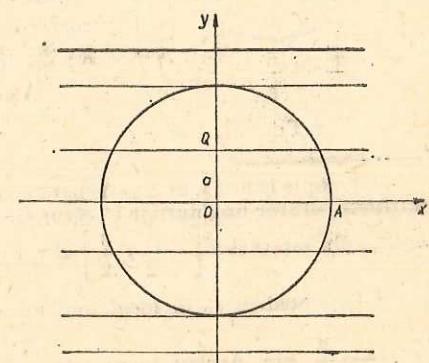


Fig. 74.

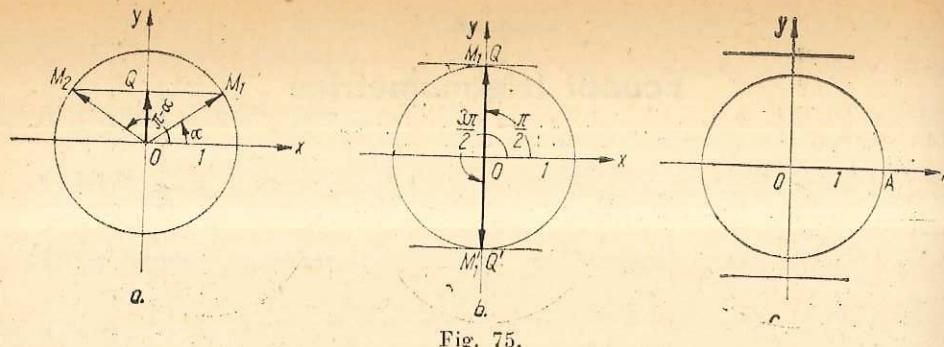


Fig. 75.

Pe de altă parte, observând că putem lua  $\alpha = \arcsin a$  (v. pct. 39), formula precedentă capătă forma definită:

$$\text{Arcsin } a = (-1)^k \arcsin a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})^1 \quad (1')$$

*Exemple*

$$1) \text{ Arcsin } \frac{\sqrt{3}}{2} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),^2$$

$$2) \text{ Arcsin } 1 = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Arcos a.** Numărul  $a$  se reprezintă pe axa  $Ox$  prin punctul  $P$  (fig. 76). Paralela la axa  $Oy$ , dusă prin acest punct, intersectează cercul unitate în două puncte distincte într-un punct sau nu-l intersectează după cum  $|a| < 1$ ,  $|a| = 1$ , sau  $|a| > 1$ .

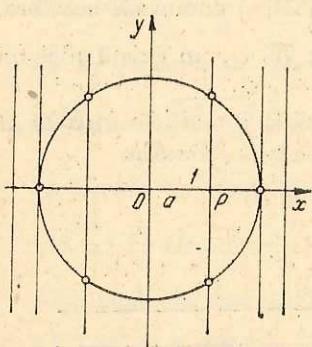


Fig. 76.

Dacă  $|a| < 1$  (fig. 77, a), cosinusurile unghiurilor  $\pm\alpha + k \cdot 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), și numai ale acestora, sunt egale cu  $a$ ; dacă  $|a| = 1$  (fig. 77, b) cosinusurile unghiurilor  $k \cdot 2\pi$  și  $\pi \pm k \cdot 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), și numai ale acestor unghiuri, sunt egale, respectiv, cu 1 și -1; dacă  $|a| > 1$  (fig. 77, c) nu există nici un unghi al cărui cosinus să fie egal cu  $a$ .

În concluzie, oricare ar fi numărul  $|a| \leqslant 1$ , există o mulțime infinită de unghiuri (arce) al căror cosinus este egal cu  $a$ ; ele sunt date de formula  $\pm\alpha + k \cdot 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) și se notează Arccos  $a$ .

Așadar:

$$\text{Arccos } a = \pm\alpha + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (2)$$

<sup>1</sup> Trebuie făcută o distincție netă între mulțimile Arcsin  $a$  și arcsin  $a$ . Prima reprezintă mulțimea tuturor unghiurilor al căror sinus este egal cu  $a$ , pe cind a doua conține numai unghiul din intervalul  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  al căruia sinus este egal cu  $a$ . Așadar arcsin  $a \subset$  Arcsin  $a$ .

<sup>2</sup> Este evident că în locul unghiului  $\frac{\pi}{3}$  poate fi luat oricare dintre unghiurile  $2\frac{\pi}{3}$ ,  $7\frac{\pi}{3}$ ,  $-5\frac{\pi}{3}$  etc. Același lucru este valabil și pentru mulțimile de unghiuri Arccos  $a$ , Arctg  $a$  și Arctg  $a$ , considerate în cele ce urmează.

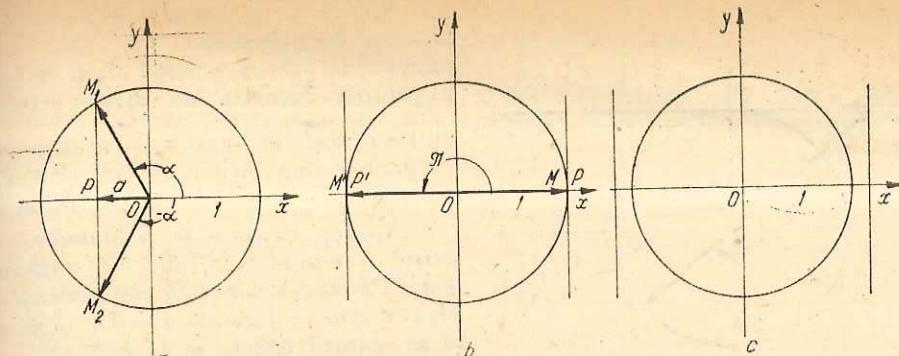


Fig. 77.

$\alpha$  fiind unul dintre unghiurile al căror cosinus este egal cu  $a$  sau încă, dacă luăm  $\alpha = \arccos a$ :

$$\text{Arccos } a = \pm\arccos a + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (2')$$

*Exemple*

$$1) \text{ Arccos } \left(-\frac{1}{2}\right) = \pm\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) + k \cdot 2\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$$

2) Arccos 2 nu există.

**Arctg a.** Numărul  $a$  se reprezintă pe axa tangentelor (fig. 78) prin punctul  $R$ .

Dacă  $\alpha$  este unul dintre unghiurile formate de raza vectoare unitară  $OM$  cu axa  $Ox$ , atunci este evident că tangentele unghiurilor  $\alpha + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), și numai ale acestor unghiuri, sunt egale cu  $a$ .

Prin urmare, oricare ar fi numărul  $|a| \leqslant 1$ , există o mulțime infinită de unghiuri (arce) al căror tangentă este egală cu  $a$ ; ele sunt date de formula

$$\alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

și se notează Arctg  $a$ . În concluzie,

$$\text{Arctg } a = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (3)$$

$\alpha$  fiind unul dintre unghiurile a căror tangentă este egală cu  $a$  sau încă, dacă fixăm acest unghi:

$$\text{Arctg } a = \text{arctg } a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (3')$$

*Exemple*

$$1) \text{ Arctg } 1 = \text{arctg } 1 + k\pi =$$

$$= \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$2) \text{ Arctg } (-1) = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

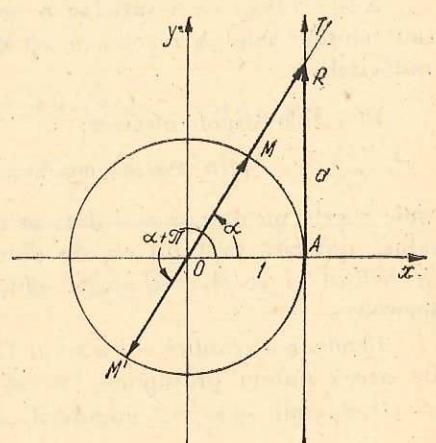


Fig. 78.

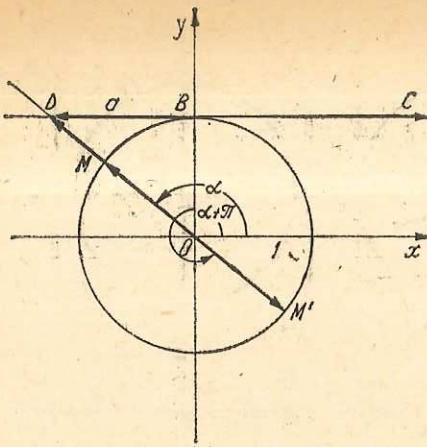


Fig. 79.

**Arcctg  $a$ .** Numărul  $a$  se reprezintă pe axa cotangentelor (fig. 79) prin punctul  $D$ . Dacă  $\alpha$  este unul dintre unghiurile formate de raza vectoare unitară  $OM$  cu axa  $Ox$ , atunci cotangentele unghiurilor  $\alpha + k\pi$  ( $k \in Z$ ), și numai ale acestora, sunt egale cu  $a$ .

Așadar, oricare ar fi numărul  $a$ , există o mulțime infinită de unghiuri (arce) a căror cotangentă este egală cu  $a$ ; ele sunt date de formula  $\alpha + k\pi$  ( $k \in Z$ ) și se notează Arcctg  $a$ .

În concluzie,

$$\text{Arcctg } a = \alpha + k\pi \quad (k \in Z), \quad (4)$$

$\alpha$  fiind unul dintre unghiurile a căror cotangentă este egală cu  $a$ .

La fel ca mai sus, dacă fixăm unghiul  $\alpha$  luând  $\alpha = \text{arcctg } a$ , formula precedentă devine:

$$\text{Arcctg } a = \text{arcctg } a + k\pi \quad (k \in Z), \quad (4')$$

**Exemple**

$$1) \text{ Arcctg } 1 = \text{arcctg } 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z);$$

$$2) \text{ Arcctg } (-\sqrt{3}) = 150^\circ + k \cdot 180^\circ \quad (k \in Z).$$

### 59. Ecuăriile trigonometrice elementare

**Definiție.** Egalitatea care conține necunoscuta numai sub semnul funcției trigonometrice și este satisfăcută numai pentru anumite valori date necunoscutei se numește ecuație trigonometrică.

Acele valori care satisfac o ecuație trigonometrică se numesc rădăcinile sau soluțiile sale. A rezolva o ecuație trigonometrică înseamnă a-i determina rădăcinile.

Ecuăriile trigonometrice:

$$\sin x = a; \cos x = a; \operatorname{tg} x = a; \operatorname{ctg} x = a;$$

unde  $a$  este un număr real dat, se numesc elementare și au o importanță deosebită datorită faptului că, de obicei, rezolvarea unei ecuații trigonometrice se reduce la rezolvarea uneia sau a mai multor ecuații trigonometrice elementare.

**Rezolvarea ecuației  $\sin x = a$ .** Dacă  $|a| > 1$ , ecuația nu admite rădăcini. De aceea putem presupune  $|a| \leq 1$ .

Rădăcinile sale sunt unghiurile al căror sinus este egal cu  $a$  și deci

$$x = \text{Arcsin } a = (-1)^k \arcsin a + k\pi \quad (k \in Z).$$

**Exemple**

Să se rezolve ecuațiile:

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Obținem: } x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z).$$

$$2) \sin x = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Obținem: } x &= \text{Arcsin} \left( -\frac{1}{2} \right) = (-1)^k \arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) + k\pi = \\ &= (-1)^k \left( -\frac{\pi}{6} \right) + k\pi = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in Z). \end{aligned}$$

$$3) \sin x = 0.$$

$$\text{Obținem: } x = \text{Arcsin } 0 = (-1)^k \arcsin 0 + k\pi = k\pi \quad (k \in Z).$$

Se spune că funcția  $\sin x$  se anulează pentru valorile  $k\pi$  ( $k \in Z$ ).<sup>1</sup>

**Rezolvarea ecuației  $\cos x = a$ .** Ca și în cazul precedent, ecuația are rădăcini numai pentru  $|a| \leq 1$  și acestea sunt unghiurile al căror cosinus este egal cu  $a$ , adică

$$x = \text{Arccos } a = \pm \arccos a + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z).$$

**Exemple**

Să se rezolve ecuațiile: 1)  $\cos x + 1 = 0$ .

$$\text{Obținem: } x = \text{Arccos } (-1) = \pm \arccos (-1) + k \cdot 2\pi = \pm \pi + k \cdot 2\pi = \pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z).$$

$$2) 2 \cos x - \sqrt{3} = 0.$$

$$\text{Obținem: } x = \text{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + k \cdot 2\pi = \pm \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z).$$

$$3) \cos x = 0.$$

$$\text{Obținem: } x = \text{Arccos } 0 = \pm \arccos 0 + k \cdot 2\pi = \pm \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z) \quad (\text{pentru ultima egalitate vezi aplicația de la pct. 8}).$$

Prin urmare funcția  $\cos x$  se anulează pentru valorile  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in Z$ ).

**Rezolvarea ecuației  $\operatorname{tg} x = a$ .** Rădăcinile sale sunt unghiurile a căror tangentă este egală cu  $a$ , adică

$$x = \text{Arctg } a = \text{arcctg } a + k\pi \quad (k \in Z).$$

**Exemple**

Să se rezolve ecuațiile: 1)  $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ .

<sup>1</sup> În general, prin valorile care anulează o funcție dată  $f(x)$  (sau zerourile acestei funcții) se înțelege mulțimea rădăcinilor ecuației  $f(x) = 0$ .

Obținem:  $x = \text{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi = \frac{\pi}{6} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$2) \quad \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

Obținem:  $x = \text{Arctg}(-\sqrt{3}) = \text{arctg}(-\sqrt{3}) + k\pi = -\frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$3) \quad \operatorname{tg} x = 0.$$

Obținem:  $x = \text{Arctg} 0 = \text{arctg} 0 + k\pi = +k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Prin urmare funcțiile  $\sin x$  și  $\operatorname{tg} x$  se anulează pentru aceleasi valori.

*Rezolvarea ecuației*  $\operatorname{ctg} x = a$ . Rădăcinile sale sunt unghiurile a căror cotangentă este egală cu  $a$ , adică

$$x = \text{Arctg} a = \text{arcctg} a + k\pi$$
 ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

*Exemplu.* Să se rezolve ecuațiile. 1)  $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1 = 0$ .

Obținem:  $x = \text{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$2) \quad \operatorname{ctg} x + 1 = 0.$$

Obținem:  $x = \text{Arctg}(-1) = \text{arcctg}(-1) + k\pi = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$3) \quad \operatorname{ctg} x = 0.$$

Obținem:  $x = \text{Arctg} 0 = \text{arcctg} 0 + k\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Prin urmare funcțiile  $\cos x$  și  $\operatorname{ctg} x$  se anulează pentru aceleasi valori.

*Aplicație.* Să se rezolve ecuația:

$$\sin(ax + b) = c,$$

unde  $a \neq 0$  și  $|c| \leq 1$ .

*Soluție.* Obținem:

$$ax + b = (-1)^k \operatorname{aresin} c + k\pi$$
 ( $k \in \mathbb{Z}$ ),

de unde

$$x = \frac{1}{a}[-b + (-1)^k \operatorname{aresin} c + k\pi]$$
 ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

## § 18. Funcții trigonometrice de același nume egale

60. **Egalitatea a două funcții trigonometrice de același nume.** Fie unghiurile  $u$  și  $v$ . Ne propunem să stabilim relațiile dintre ele, în ipoteza că funcțiile trigonometrice de același nume ale acestor unghiuri sunt egale. Pentru aceasta folosim relațiile:

$$\operatorname{Aresin}(\sin x) = (-1)^k x + k\pi; \quad \operatorname{Arccos}(\cos x) = \pm v + k \cdot 2\pi;$$

$$\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) = x + k\pi; \quad \operatorname{Arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x + k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

<sup>1</sup> În ultimele două relații trebuie ca funcțiile  $\operatorname{tg} x$  și  $\operatorname{ctg} x$  să aibă sens în punctul  $x$ .

Demonstrațiile acestor formule fiind analoge, ne ocupăm de prima dintre ele. Notăm  $\sin x = y$ . Conform formulei (1) din § 17:

$$\operatorname{Aresin}(\sin x) = \operatorname{Aresin} y = (-1)^k x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$\alpha$  fiind un unghi din unghiurile al căror sinus este egal cu  $y$ . Evident,  $x$  este un astfel de unghi. Prin urmare, înlocuind în relația precedentă pe  $\alpha$  cu  $x$ , obținem:

$$\operatorname{Aresin}(\sin x) = (-1)^k x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

c.e.t.d.

$\sin u = \sin v$ . Unghiurile  $u$ , al căror sinus este egal cu  $\sin v$ , sunt date de relația:

$$u = \operatorname{Aresin}(\sin v) = (-1)^k v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Reciproc, dacă  $u = (-1)^k v + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), putem scrie:

$$u = \begin{cases} v + 2k\pi & \text{pentru } k \text{ par,} \\ x - v + 2k\pi & \text{pentru } k \text{ impar,} \end{cases}$$

de unde:

$$\sin u = \sin(v + 2k\pi) = \sin v \quad (\text{pentru } k \text{ par}),$$

$$\sin u = \sin(\pi - v + 2k\pi) = \sin(\pi - v) = \sin v \quad (\text{pentru } k \text{ impar}),$$

adică:

$$\sin u = \sin v.$$

Așadar, sinusurile unghiurilor  $u$  și  $v$  sunt egale atunci, și numai atunci, cind:

$$u = (-1)^k v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\cos u = \cos v$ . Unghiurile  $u$  al căror cosinus este egal cu  $\cos v$  sunt date de relația:

$$u = \operatorname{Arccos}(\cos v) = \pm v + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Reciproc, dacă  $u = \pm v + k \cdot 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), obținem:

$$\cos u = \cos(\pm v + k \cdot 2\pi) = \cos(\pm v) = \cos v.$$

Așadar, tangentele unghiurilor  $u$  și  $v$  sunt egale atunci, și numai atunci, cind:

$$u = \pm v + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$ . Unghiurile  $u$  a căror tangentă este egală cu  $\operatorname{tg} v$  sunt date de relația:

$$u = \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} v) = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Reciproc, dacă  $u = v + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) și unul din unghiurile  $u, v$  este diferit de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), obținem:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(v + k\pi) = \operatorname{tg} v.$$

Așadar, tangentele unghiurilor  $u$  și  $v$  sunt egale atunci, și numai atunci, cind:

$$u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

unul din aceste unghiuri fiind diferit de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ . Unghiurile  $u$  și  $v$  a căror cotangentă este egală cu  $\operatorname{ctg} v$  sunt date de relația:

$$u = \operatorname{Arctg}(\operatorname{ctg} v) = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Reciproc, dacă  $u = v + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) și unul din unghiurile  $u, v$  este diferit de  $k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), obținem:

$$\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg}(v + k\pi) = \operatorname{ctg} v.$$

Așadar, cotangentele unghiurilor  $u$  și  $v$  sunt egale atunci, și numai atunci, cind:

$$u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

unul din aceste unghiuri fiind diferit de  $k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

61. **Ecuății de forma  $\sin f(x) = \sin g(x)$  etc.** Ecuăția  $\sin f(x) = \sin g(x)$ , exprimând egalitatea sinusurilor a două funcții, conform celor spuse mai înainte, este echivalentă cu ecuația:

$$f(x) = (-1)^k g(x) + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

*Exemplu.* Să se rezolve ecuația:

$$\sin 4x + \sin 2x = 0.$$

*Soluție:*

Ecuăția poate fi scrisă sub formă echivalentă:

$$\sin 4x = -\sin 2x$$

sau:

$$\sin 4x = \sin(-2x),$$

de unde:

$$4x = (-1)^k(-2x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pentru  $k$  par obținem:

$$4x = -2x + 2k\pi,$$

adică

$$x = k \frac{\pi}{3},$$

pentru  $k$  impar:

$$4x = \pi + 2x + 2k\pi,$$

adică

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Prin urmare, ecuația dată este satisfăcută pentru

$$x \in \left\{ k \frac{\pi}{3} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Ecuăția  $\cos f(x) = \cos g(x)$ , exprimând egalitatea cosinusurilor a două funcții, este echivalentă cu ecuația:

$$f(x) = \pm g(x) + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

*Exemplu:* Să se rezolve ecuația:

$$\sin 5x \sin x = \sin 4x \sin 2x.$$

*Soluție.* Transformând produsele de sinusuri în diferențe, obținem:

$$\frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 6x) = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 6x)$$

sau:

$$\cos 4x = \cos 2x,$$

de unde:

$$4x = \pm 2x + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ecuăția dată are rădăcinile:

$$x = k \frac{\pi}{3} \text{ și } x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

sau, cu altă notație:

$$x \in \left\{ k \frac{\pi}{3} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} = \left\{ k \frac{\pi}{3} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Ecuăția  $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$ , exprimând egalitatea tangentelor a două funcții, este echivalentă cu ecuația:

$$f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

cu condiția ca, pentru rădăcinile ultimei ecuații, valorile uneia din funcțiile

$$f(x), g(x) să fie diferite de \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

*Exemplu.* Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} x^2 = \operatorname{tg} 2x.$$

*Soluție.* Obținem ecuația de gradul al doilea în  $x$ :

$$x^2 = 2x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

ale cărei rădăcini sunt reale dacă, și numai dacă, realizantul

$$\Delta = 1 + k\pi \geq 0.$$

adică pentru  $k = 0, 1, 2, \dots$

Rezolvând ultima ecuație, obținem:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + k\pi} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Pentru aceste valori:

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 2(1 \pm \sqrt{1 + k\pi}) \text{ există.}$$

Prin urmare, ecuația dată are rădăcinile:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + k\pi} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ecuăția  $\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$  exprimând egalitatea cotangentelor a două funcții, este echivalentă cu ecuația:

$$f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

cu condiția ca, pentru rădăcinile ultimei ecuații, valorile uneia din funcțiile  $f(x)$ ,  $g(x)$  să fie diferite de  $k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

*Exemplu.* Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x = 0.$$

*Soluție.* Obținem:

$$\operatorname{ctg} 2x = -\operatorname{tg} x$$

sau:

$$\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

adică

$$2x = \frac{\pi}{2} + x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

sau:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Însă pentru aceste unghiuri funcția  $\operatorname{tg} x$  (sau  $\operatorname{ctg} 2x$ ) nu are sens. Prin urmare, ecuația dată nu are nici o rădăcină.

*Observație.* Ecuările de acest tip se pot rezolva și altfel, și anume, transformindu-se în produs suma sau diferența funcțiilor trigonometrice de același nume.

De exemplu, pentru ecuația:

$$\sin 4x + \sin 2x = 0$$

obținem:

$$2 \sin 3x \cos x = 0.$$

Ultima ecuație este echivalentă cu ecuațiile:

$$a) \sin 3x = 0; b) \cos x = 0 \text{ s.a.m.d.}$$

## § 19. Ecuările trigonometrice reductibile la ecuații elementare și sisteme de ecuații trigonometrice

**62. Ecuările trigonometrice reductibile la ecuații care contin aceeași funcție a aceluiași unghi.** Unele ecuații trigonometrice se transformă cu ajutorul identităților trigonometrice în ecuații care contin aceeași funcție a aceluiași unghi. În consecință, rezolvarea lor se reduce, în general, la rezolvarea unei ecuații algebrice în care necunoscuta este o funcție trigonometrică a unghiului ce trebuie determinat.

*Exemplu.* 1) Să se rezolve ecuația:

$$2 \cos^2 x - 2 \sin x + \sqrt{3} \sin x = 2 - \sqrt{3}.$$

*Soluție.* Trecind toți termenii în membrul stâng și înălțind seama de identitatea  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , obținem o ecuație de gradul al doilea în  $\sin x$ :

$$2 \sin^2 x + (2 - \sqrt{3}) \sin x - \sqrt{3} = 0,$$

de unde:

$$\sin x = \frac{-2 + \sqrt{3} \pm \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3}}{4} = \frac{-2 + \sqrt{3} \pm (2 + \sqrt{3})}{4}.$$

Prin urmare, ecuația dată este echivalentă cu ecuațiile:

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad b) \sin x = -1,$$

ale căror rădăcini sunt, respectiv:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi; \quad x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{2}\right) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Așadar:

$$x \in \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}^2} \cup \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}^2}.$$

2) Să se rezolve ecuația:

$$1 - \sin x = \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right).$$

*Soluție.* Membrul stâng se poate scrie sub formă:

$$1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

Prin urmare, după reducere, ecuația devine:

$$\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})^1.$$

3) Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}$$

*Soluție.* Aplicând formulele pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului triplu:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

<sup>1</sup>  $k$ , fiind un număr întreg arbitrar, a putut fi înlocuit cu  $-k$ .

după transformări, obținem:

$$3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{8}.$$

Tinând seama de identitățile:

$2 \sin x \cos x = \sin 2x; \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$   
ultima ecuație devine:

$$\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{8}$$

sau, aplicind din nou formula pentru sinusul unghiului dublu:

$$\sin 4x = \frac{1}{2},$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$x = \frac{1}{4} \left[ (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + k\pi \right] = (-1)^k \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sin(x+3^\circ)}{\sin(x+5^\circ)} = \frac{3}{5}.$$

Soluție. Formăm proporția derivată:

$$\frac{\sin(x+3^\circ) + \sin(x+5^\circ)}{\sin(x+5^\circ) - \sin(x+3^\circ)} = \frac{3+5}{5-3}.$$

Transformind suma și diferența de sinusuri în produs, obținem:

$$\frac{\sin(x+4^\circ) \cos 1^\circ}{\cos(x+4^\circ) \sin 1^\circ} = 4$$

sau:

$$\operatorname{tg}(x+4^\circ) = 4 \operatorname{tg} 1^\circ,$$

de unde:

$$x = -4^\circ + \operatorname{arctg}(4 \operatorname{tg} 1^\circ) + k \cdot 180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

### 63. Ecuații omogene în $\sin x$ și $\cos x$ . Ecuația

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \dots + a_n \cos^n x = 0,$$

unde cel puțin unul din numerele  $a_0, a_1, \dots, a_n$  este nenul, se numește ecuație trigonometrică omogenă în  $\sin x$  și  $\cos x$ .

Considerăm  $a_0 \neq 0$ . Împărțind ambii membri ai ecuației cu  $\cos^n x$ , obținem ecuația de gradul  $n$  în  $\operatorname{tg} x$ :

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_n = 0$$

care, rezolvată în raport cu  $\operatorname{tg} x$ , ne conduce la cel mult  $n$  ecuații elementare de forma  $\operatorname{tg} x = a$  ( $a$  real).

Dacă  $a_0 = 0$ , ecuația dată se descompune în ecuația  $\cos x = 0$  și o ecuație omogenă.

**O b s e r v a t i e:** Prin împărțirea ambilor membri ai unei ecuații cu  $\cos^n x$  se pot pierde rădăcini (acele rădăcini ale ecuației care sunt, totodată, rădăcini ale ecuației  $\cos^n x = 0$ ). În cazul de față nu se pierd însă rădăcini. Într-adevăr, fie  $x_0$  o rădăcină a ecuației  $\cos^n x = 0$ . Deducem:

$$\cos x_0 = \cos^2 x_0 = \dots = \cos^n x_0 = 0.$$

Dacă  $x_0$  ar fi rădăcină și a ecuației date, ar trebui ca  $a_0 \sin^n x_0 = 0$ , adică  $\sin x_0 = 0$ , ceea ce este imposibil, fiindcă funcțiile sinus și cosinus nu se anulează pentru aceeași valoare  $x_0$  a argumentului.

**Exemplu. 1)** Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0.$$

**Soluție.** Împărțind ambii membri cu  $\cos x$  și separând termenii, obținem ecuația echivalentă:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

de unde:

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**2)** Să se rezolve ecuația:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$$

**Soluție.** Ecuația se poate omogeniza folosind identitatea:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Obținem:

$$\sin^6 x + \cos^6 x - \frac{1}{4}(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 0$$

sau:

$$\sin^6 x - \sin^4 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x = 0.$$

Împărțind ambii membri ai ecuației omogene cu  $\cos^6 x$ , obținem o ecuație în  $\operatorname{tg} x$ :

$$\operatorname{tg}^6 x - \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$$

sau, grupând termenii:

$$\operatorname{tg}^4 x (\operatorname{tg}^2 x - 1) - (\operatorname{tg}^2 x - 1) = 0,$$

adică:

$$(\operatorname{tg}^2 x - 1)^2 (\operatorname{tg}^2 x + 1) = 0,$$

de unde se obțin ecuațiile elementare:

$$\operatorname{tg} x = \pm 1,$$

ale căror rădăcini sunt:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

și

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

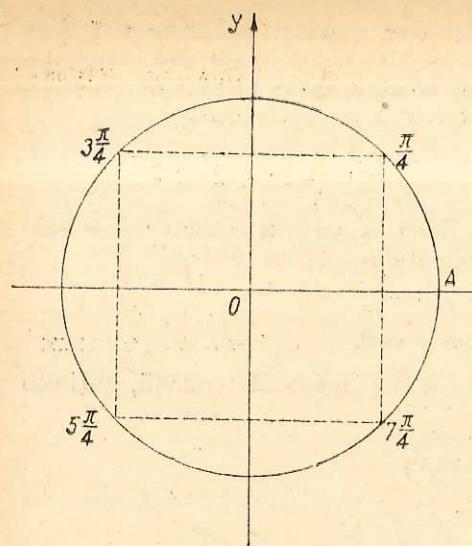


Fig. 80.

Așadar ecuația dată are rădăcinile:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Observație.** Arcele  $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  au extremitățile în punctele  $\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}$  aparținând cercului unitate (fig. 80), iar arcele  $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$  au extremitățile în punctele  $3\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4}$ . Prin urmare, rădăcinile ecuației date și numai ele, sunt arcele cu originea în punctul  $A$  și extremitatea într-unul din aceste puncte. Însă punctele  $\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4}$  fiind vîrfurile unui pătrat (v. aplicația de la pct. 8), putem scrie rădăcinile ecuației sub forma concentrată:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

#### 64. Ecuația liniară în $\sin x$ și $\cos x$ . Ecuația

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

unde numerele  $a, b$  nu sunt nule în același timp, se numește ecuația liniară în  $\sin x$  și  $\cos x$ . Pentru alegere considerăm  $a \neq 0$ .

**Metoda unghiului auxiliar.** Împărțind ambii membri cu  $a$  și notând  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem, pe rînd (v. pct. 48):

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a},$$

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{a} \cos \varphi,$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

$$\text{Însă } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Deci, ultima ecuație devine:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c |a|}{a \sqrt{a^2 + b^2}},$$

sau:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}},$$

unde se ia semnul + sau -, după  $a > 0$  sau  $a < 0$ .

Această ecuație are rădăcini dacă  $\left|\frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1$ , adică  $c^2 \leq a^2 + b^2$ .

Presupunind această condiție îndeplinită și ținind seama de relația  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ , se determină rădăcinile ecuației:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} + k\pi - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Exemplu.** Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2 = 0.$$

**Soluție.** Împărțind ambii membri cu  $\sqrt{3}$  și trecînd termenul constant în membrul drept, obținem:

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

Scriind  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ , ecuația precedentă devine:

$$\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{6}$$

sau:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

de unde:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Metoda substituției.** Ecuația liniară este rațională în  $\sin x$  și  $\cos x$ . Pe de altă parte, aceste funcții se exprimă rațional prin  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ :

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

Notind  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , se obține ecuația rațională:

$$a \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

sau:

$$(c+b)t^2 - 2at + c - b = 0$$

Presupunind  $c+b \neq 0$  și  $\Delta = a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$ , obținem:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c},$$

de unde:

$$x = 2 \left( \operatorname{arctg} \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + k\pi \right) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Observații.** 1º Funcția  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  nu are sens pentru  $x = \pi + k \cdot 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). În consecință, rădăcinile ecuației date de forma  $\pi + k \cdot 2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), nu se află printre rădăcinile obținute anterior. În acest caz:

$$a \sin(\pi + k \cdot 2\pi) + b \cos(\pi + k \cdot 2\pi) = c$$

sau:

$$c + b = 0,$$

deci ecuația de gradul al doilea în  $t$  degenerază în ecuația de gradul întâi:

$$-2at - 2b = 0.$$

În concluzie, ecuația  $a \sin x + b \cos x = -b$  este satisfăcută pentru:

$$x \in (\pi + k \cdot 2\pi)_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left( -\frac{b}{a} \right) + k \cdot 2\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

2º În principiu, orice ecuație care conține funcțiile trigonometrice ale unghiului  $x$  se poate rezolva prin substituție  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . De cele mai multe ori se obțin însă ecuații algebrice în  $t$  de grad superior, a căror rezolvare este dificilă. În afară de aceasta trebuie să se cerceteze dacă unghiiurile pentru care funcția  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  nu are sens verifică ecuația respectivă.

*Exemplu.* Să se rezolve ecuația:

$$\sin x - 4 \cos x - 4 = 0.$$

*Soluție.* Făcând substituția  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , obținem ecuația ratională:

$$\frac{2t}{1+t^2} - 4 \frac{1-t^2}{1+t^2} - 4 = 0$$

sau:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4,$$

de unde:

$$x = 2(\operatorname{arctg} 4 + k\pi), \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Unghiiurile precedente nu sunt însă singurele rădăcini ale ecuației date.

Într-adevăr și unghiiurile  $\{\pi + k \cdot 2\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$  (pentru aceste valori  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  nu are sens) verifică ecuația inițială;

$$\sin(\pi + k \cdot 2\pi) - 4 \cos(\pi + k \cdot 2\pi) - 4 = \sin \pi - 4 \cos \pi - 4 = 4 - 4 = 0.$$

În consecință, ecuația dată are rădăcinile:

$$x \in \{\pi + k \cdot 2\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{2 \operatorname{arctg} 4 + k \cdot 2\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

### 65. Exemple de ecuații care se rezolvă prin descompunere în factori

1) Să se rezolve ecuația:

$$\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0.$$

*Soluție.* Grupând termenii, obținem:

$$(\sin x \cos x - \sin^2 x) - (\cos x - \sin x) = 0$$

sau:

$$\sin x (\cos x - \sin x) - (\cos x - \sin x) = 0,$$

sau încă:

$$(\sin x - 1) (\cos x - \sin x) = 0.$$

Așadar ecuația dată se descompune în ecuațiile:

$$a) \sin x = 1; \quad b) \cos x - \sin x = 0.$$

Ecuția *a*) are rădăcinile  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\} k \in \mathbb{Z}$ . Ecuția *b*) este omogenă în  $\sin x$  și  $\cos x$  și se transformă în ecuația echivalentă  $1 - \operatorname{tg} x = 0$ , ale cărei rădăcini sunt unghiiurile  $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . În consecință, ecuația dată are rădăcinile:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

2) Să se rezolve ecuația:

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x - 1 = 0.$$

*Soluție.* Scriem ecuația sub forma:

$$\sin x + \cos x = 1 - \sin x \cos x.$$

Ridicând la patrat ambele membri ai ultimei ecuații și ținând seama de identitățile  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ , obținem:

$$1 + \sin 2x = 1 - \sin 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

sau:

$$\sin 2x (\sin 2x - 8) = 0.$$

Fiindcă al doilea factor este negativ, atunci:

$$\sin 2x = 0,$$

de unde:

$$x = k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Însă prin ridicarea la patrat a membrilor unei ecuații se pot introduce rădăcini străine. Eliminarea acestora se poate face cercetând dacă toate rădăcinile ultimei ecuații verifică, sau nu, ecuația inițială.

Scriind unghiiurile  $x = k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) sub forma:

$$x = \begin{cases} k'2\pi \text{ pentru } k = 4k', \\ k'2\pi + \frac{\pi}{2} \text{ pentru } k = 4k' + 1, \\ k'2\pi + 2\frac{\pi}{2} \text{ pentru } k = 4k' + 2, \\ k'2\pi + 3\frac{\pi}{2} \text{ pentru } k = 4k' + 3, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

primul membru al ecuației inițiale are valorile:

$$\sin k'2\pi + \cos k'2\pi + \sin k'2\pi \cos k'2\pi - 1 = 1 - 1 = 0$$

pentru unghiiurile  $k'2\pi$ :

$$\sin\left(k'2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(k'2\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k'2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k'2\pi + \frac{\pi}{2}\right) - 1 =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ pentru unghiiurile}$$

$$\begin{aligned} & k'2\pi + \frac{\pi}{2}; \sin(k'2\pi + \pi) + \cos(k'2\pi + \pi) + \sin(k'2\pi + \pi)\cos(k'2\pi + \pi) - 1 = \\ & = \sin\pi + \cos\pi + \sin\pi\cos\pi - 1 = -1 - 1 = -2 \text{ pentru unghiiurile } k'2\pi + \pi; \\ & \sin\left(k'2\pi + 3\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(k'2\pi + 3\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k'2\pi + 3\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(k'2\pi + 3\frac{\pi}{2}\right) - 1 = \\ & = \sin 3\frac{\pi}{2} + \cos 3\frac{\pi}{2} + \sin 3\frac{\pi}{2}\cos 3\frac{\pi}{2} - 1 = -1 - 1 = -2 \text{ pentru unghiiurile } k'2\pi + 3\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Așadar, numai unghiiurile  $\{k'2\pi\}_{k' \in \mathbb{Z}}$ , și  $\left\{k'2\pi + \frac{\pi}{2}\right\}_{k' \in \mathbb{Z}}$  sunt rădăcini ale ecuației date.

**O b s e r v a t i e.** Rădăcinile străine se puteau elimina și folosind faptul că primul membru al ecuației date este o funcție periodică, cu perioada  $2\pi$ . Într-adevăr este suficient să se verifice numai unghiiile  $0 \leq k \frac{\pi}{2} < 2\pi$  adică

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}$ . Se constată ușor că, dintre aceste unghiiuri,  $0$  și  $\frac{\pi}{2}$  verifică ecuația inițială. Prin urmare, rădăcinile sale se obțin adăugind la unghiiile  $0$  și  $\frac{\pi}{2}$  perioada funcției:

$$x \in \{k2\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

rezultat obținut și mai înainte.

3) Să se rezolve ecuația:

$$\sin 7x + \sin x + \cos 8x - 1 = 0.$$

**Soluție:** Grupind termenii, obținem:

$$(\sin 7x + \sin x) - (1 - \cos 8x) = 0$$

sau, transformând funcțiile din paranteze în produse:

$$2 \sin 4x \cos 3x - 2 \sin^2 4x = 0.$$

Ultima ecuație este echivalentă cu ecuațiile:

$$a) \sin 4x = 0; \quad b) \cos 3x - \sin 4x = 0.$$

Ecuția  $a)$  are rădăcinile  $x = k \frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Pentru a rezolva ecuația  $b)$ , scriem sub formă:

$$\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right),$$

de unde:

$$3x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Așadar, rădăcinile ecuației date sunt:

$$x \in \left\{k \frac{\pi}{4}\right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

sau, ținând seama de incluziunea  $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \left\{k \frac{\pi}{4}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ :

$$x \in \left\{k \frac{\pi}{4}\right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

4) Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$$

**Soluție.** Ecuția dată se poate scrie sub formă:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = 2$$

sau:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Grupind în ultima ecuație primul termen cu al patrulea, al doilea cu al treilea și transformând sumele în produse, obținem:

$$2 \cos 5x \cos 3x + 2 \cos 5x \cos x = 0$$

sau:

$$\cos 5x (\cos 3x + \cos x) = 0,$$

sau, transformând suma din paranteză în produs:

$$\cos 5x \cos 2x \cos x = 0$$

de unde:

$$5x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Așadar, ecuația dată de rădăcinile:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{10} + k \frac{\pi}{5}\right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}\right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

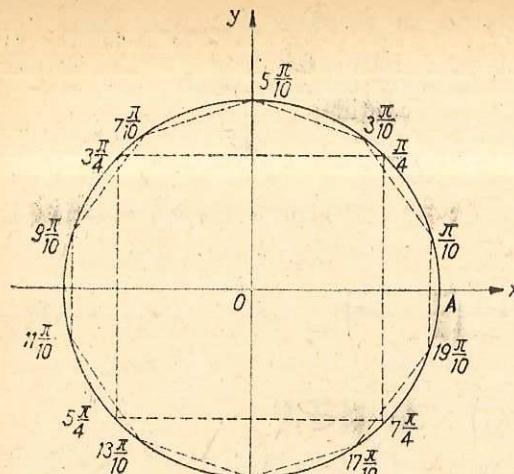


Fig. 81.

**O b s e r v a ᄀ i e.** Rădăcinile ecuației sunt arcele și numai acele, cu originea în punctul  $A$  și extremitățile în punctele din figura 81, aparținând cercului unitate. Însă punctele  $\frac{\pi}{10}, 3\frac{\pi}{10}, \dots, 19\frac{\pi}{10}$  fiind virfurile unui decagon regulat, iar  $\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4}$  virfurile unui patrat, rădăcinile ecuației se pot scrie sub forma concisă:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{10} + k \frac{2\pi}{10} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{4} \right\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

$$\text{adică: } x \in \left\{ \frac{\pi}{10} + k \frac{\pi}{5} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Rezultatul precedent se putea obține observînd inclusiunea

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \left\{ \frac{\pi}{10} + k \frac{\pi}{5} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

**66. Sisteme de ecuații trigonometrice.** Găsirea căii de rezolvare a unui sistem trigonometric este, în cele mai multe cazuri, dificilă. De aceea ne limităm la cîteva exemple simple:

1) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

$$\text{Caz particular: } a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{\pi}{3},$$

**Soluție.** Transformăm în produs membrul stîng al primei ecuații:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a.$$

Folosind a doua ecuație, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

În ipoteza că  $\sin \frac{b}{2} \neq 0$  și  $\left| \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} \right| \leqslant 1$ , soluțiile sistemului dat se obțin rezolvînd sistemul liniar:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pm \arccos \frac{a}{2 \sin \frac{b}{2}} + k \cdot 2\pi, \\ \frac{x+y}{2} = \frac{b}{2}. \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

În cazul particular se obține sistemul liniar:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pm \arccos \frac{1}{2} + k \cdot 2\pi, \\ \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

sau:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pm \frac{\pi}{3} k \cdot 2\pi, \\ \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \\ y = -\frac{\pi}{6} - k \cdot 2\pi \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \\ y = \frac{\pi}{2} - k \cdot 2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

**Soluție.** Transformăm în sumă membrul stîng al primei ecuații:

$$\frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] = a.$$

Folosind a doua ecuație, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos b] = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

În ipoteza că  $|2a - \cos b| \leqslant 1$ , se obține sistemul liniar:

$$\begin{cases} x + y = \pm \arccos(2a - \cos b) + k \cdot 2\pi, \\ x - y = b \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ale cărui soluții sunt soluțiile sistemului dat.

3) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = b. \end{cases}$$

Caz particular:  $a = 1 - \sqrt{3}$ ,  $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

*Soluție.* Introducind noile necunoscute:

$$u = \operatorname{tg} x; v = \operatorname{tg} y,$$

se obține sistemul algebric:

$$\begin{cases} u + v = a, \\ \frac{1}{uv} = b, \end{cases}$$

sau, dacă  $b \neq 0$ :

$$\begin{cases} u + v = a, \\ uv = \frac{1}{b}, \end{cases}$$

de unde rezultă că  $u$  și  $v$  sunt rădăcinile ecuației de gradul al doilea:

$$z^2 - az + \frac{1}{b} = 0 \text{ s.a.m.d.}$$

În cazul particular se obține sistemul algebric:

$$\begin{cases} u + v = 1 - \sqrt{3}, \\ uv = -\sqrt{3}, \end{cases}$$

de unde rezultă că  $u$  și  $v$  sunt rădăcinile ecuației:

$$z^2 - (1 - \sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0.$$

Obținem:

$$u = z_1 = 1, \quad v = z_2 = -\sqrt{3},$$

și

$$u = z_2 = -\sqrt{3}, \quad v = z_1 = 1$$

sau, revenind la variabilele initiale:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} y = -\sqrt{3}, \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} y = 1, \end{cases}$$

de unde se obțin soluțiile sistemului dat:

$$\begin{cases} x = 45^\circ + k_1 \cdot 180^\circ, \\ y = -60^\circ + k_2 \cdot 180^\circ, \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = -60^\circ + k_2 \cdot 180^\circ, \\ y = 45^\circ + k_1 \cdot 180^\circ, \end{cases}$$

$k_1$  și  $k_2$  fiind numere întregi arbitrară.

4) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b. \end{cases}$$

*Soluție.* Transformind primii membri ai ecuațiilor în produse, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = a, \\ 2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = b. \end{cases}$$

În ipoteza că  $b \neq 0$ , ecuațiile ultimului sistem se pot împărți membru cu membru și se obține ecuația:

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{a}{b}$$

sau:

$$\frac{x-y}{2} = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Substituind valoarea raportului  $\frac{x-y}{2}$  intr-o din ecuațiile sistemului precedent, se obține un sistem liniar în  $x$  și  $y$  s.a.m.d.

### Exerciții

Să se determine forma generală a unghiurilor  $\alpha$ , fiind date valorile funcțiilor trigonometric:

1. a)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; b)  $\sin \alpha = 1$ ; c)  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ ; d)  $\sin \alpha = 0$ .

2. a)  $\cos \alpha = 0$ ; b)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ; c)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; d)  $\cos \alpha = -1$ .

3. a)  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ ; b)  $\operatorname{ctg} \alpha = 1$ ; c)  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$ ; d)  $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ .

Întrebuițind formulele generale, să se determine următoarele mulțimi de unghiuri:

4. a)  $\operatorname{Arcsin} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ; b)  $\operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; c)  $\operatorname{Arcsin} (-1)$ .

5. a)  $\operatorname{Arccos} \left( -\frac{1}{2} \right)$ ; b)  $\operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; c)  $\operatorname{Arccos} 1$ .

6. a)  $\operatorname{Arctg} 0$ ; b)  $\operatorname{Arcctg} \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ ; c)  $\operatorname{Arctg} \sqrt{3}$ .

7. Să se găsească toate numerele  $\operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2}$  aparținând intervalului  $[0, 4\pi]$ .

8. Să se găsească toate numerele  $\operatorname{Arccos} \left( -\frac{1}{2} \right)$  aparținând intervalului  $[-2\pi, 2\pi]$ .

9. Să se găsească toate numerele  $\operatorname{Arctg} (-1)$  aparținând intervalului  $[-\pi, \pi]$ .

10. Să se arate că:

a)  $\operatorname{Arcsin} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cup \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{2}}{2} \subset \operatorname{Arctg} 1 \cup \operatorname{Arcctg} (-1)$ .

b)  $\operatorname{Arcsin} 1 \cup \operatorname{Arcsin} (-1) = \operatorname{Arccos} 0 \cup \operatorname{Arccos} 2$ ;

c)  $(\operatorname{Arctg} 0 \cup \operatorname{Arcctg} 0) \cap (\operatorname{Arcsin} 0 \cup \operatorname{Arccos} 1) = \operatorname{Arccos} (-1)$ .

11. Să se arate că numerele din dreapta sunt rădăcini ale ecuațiilor corespunzătoare:

a)  $2 \sin^3 x = 3 \sin^3 x - \sin x; -\frac{\pi}{2}, \pi;$

b)  $\sin(3x + 4) + \cos 3x = 0; -\frac{\pi + 2}{12}, \frac{3\pi - 2}{12}.$

12. Este numărul  $\frac{\pi}{2}$  rădăcină a ecuației  $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$ ?

13. Este numărul  $\frac{\pi}{4}$  rădăcină a ecuației  $\cos 2x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ?

14. Sunt echivalente ecuațiile:

a)  $\cos^2 x = 0$  și  $\cos 2x = -1$ ;

b)  $(1 - 2 \sin x) \operatorname{tg} x = 0$  și  $(1 - 2 \sin x) \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = 0$ ;

c)  $|\sin x| - |\cos x| = 0$  și  $\operatorname{tg}^2 x = 1$ ?

Să se rezolve ecuațiile:

15. a)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 = 0$ ; b)  $2 \cos\frac{x+1}{3} + 1 = 0$ ;

c)  $\operatorname{tg} 4x = 0$ ; d)  $\sqrt{3} \operatorname{ctg}(3x + 15^\circ) + 3 = 0$ ;

e)  $|\sin x| - \sin x = 2$ .

16. a)  $\cos^2(x + 30^\circ) - \sin^2(x + 30^\circ) = -\frac{1}{2}$ ;

b)  $\sin(24^\circ - x) \sin(66^\circ + x) = \frac{1}{4}$ ;

c)  $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$ ; d)  $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 2 \cos x} = \frac{3}{1}$ ;

e)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos 2x + \sin(2x - \pi) \sin x = 0$ ;

f)  $\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = 0,25$ .

17. a)  $\sin 2x = \sin 5x$ ; b)  $\sin 3x = -\sin\frac{x}{3}$ ;

c)  $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = 0$ .

18. a)  $\cos(2x + 10^\circ) = \cos(6x - 10^\circ)$ ;

b)  $\cos(x + 1) + \cos(x - 1) = 0$ ;

c)  $2 \cos^2 x - 1 = \sin 4x$ .

19. a)  $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 30^\circ\right) = \operatorname{tg}(2x + 60^\circ)$ ;

b)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$ .

20. a)  $\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2} \cos x$ .

b)  $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$ ;

c)  $\sin(x + 15^\circ) \sin(x - 30^\circ) = \sin(50^\circ + x) \cos(85^\circ - x)$ ;

d)  $\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1$ .

21. a)  $2 \cos^2 2x = \cos 2x$ ; b)  $3 \operatorname{tg}^2 4x = 1$ .

22. a)  $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ ; b)  $2 \cos 2x = 7 \sin x$ ;

c)  $3 \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ ; d)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$ ; e)  $\cos^2 x - |\sin x| = \frac{1}{4}$ .

Ind. e) Se scrie ecuația sub forma echivalentă  $|\sin x|^2 + 4|\sin x| - 3 = 0$ .

23. a)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$ ; b)  $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0$ ;

d)  $9 \sin^2 x + 15 \sin 2x + 25 \cos^2 x = 25$ ;

e)  $\sin^4 x + 5 \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 2$ .

24. a)  $\cos x - |\operatorname{tg} x| = 1$ ; b)  $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin x + 5$ .

Ind. a) Scriind ecuația dată sub forma echivalentă  $|\operatorname{tg} x| + |1 - \cos x| = 0$ , rezultă că rădăcinile sale sunt rădăcinile comune ale ecuațiilor  $\operatorname{tg} x = 1 - \cos x = 0$ ; b) Din inegalitățile  $|\cos 4x - \cos 2x| \leqslant |\cos 4x| + |\cos 2x| \leqslant 2$  și  $|\sin x + 5| = |\sin x + 5| \geqslant 4$ , rezultă că cei doi membri ai ecuației sunt egali dacă și numai dacă  $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4$  și  $\sin x + 5 = 4$ .

25. a)  $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$ ; b)  $4 \sin x + 3 \cos x = 2$ ;

c)  $\sin 3x + 2 \cos 3x = 1$ .

26. a)  $5 \cos(2x + 18^\circ) - 12 \sin(2x + 18^\circ) = 13$ ;

b)  $(4 \sin x - 5 \cos x)^2 - 13(4 \sin x - 5 \cos x) + 42 = 0$ ;

c)  $|\sin x| - |\cos x| = 1$ .

Ind. c) Funcția  $|\sin x| - |\cos x| - 1$  admite perioada  $\pi$ . În intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ecuația dată este echivalentă cu ecuația  $\sin x - \cos x = 1$ , iar în intervalul  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  cu ecuația  $\sin x + \cos x = 1$ .

27. Să se determine unghiurile unui romb, dacă raportul dintre perimetrul său și suma diagonalelor este egal cu  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

Ind. Se exprimă diagonalele rombului în funcție de latura și unul din semiunghiurile sale.

Să se rezolve ecuațiile:

28. a)  $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$ ; b)  $1 - \cos 2x = 4 \sin x$ ;

c)  $\cos 8x - \cos 6x = \sqrt{3} \cos x$ ; d)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \sin 3x \cos x$ .

29. a)  $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$ ;

b)  $\sin 2x + 2 \sin x = \sin\frac{x}{2}$ ;

c)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$ ; d)  $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ ;

e)  $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = -3$ .

Ind. Ecuația d) este echivalentă cu ecuația:

$\cos x - \cos 3x = 2 \sin^2 x$ .

30. a)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ ;

b)  $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$ ;

c)  $1 + \cos 2x + \sin x = 2 \cos^2\frac{x}{2}$ .

Ind. Ecuația b) se poate scrie sub forma  $\sin^2 x = \cos x \sin^2 x$ .

31. a)  $\sin^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$

b)  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

c)  $\sin^4 x + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$

*Ind.* Se folosesc identitățile:  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ;  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ .

32. Să se verifice că perechile de numere din dreapta sunt soluții ale sistemelor:

$$\begin{cases} x + y = 120^\circ, \\ \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (x = 90^\circ, y = 30^\circ) \text{ și } (x = 390^\circ, y = -270^\circ)$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \end{cases} \quad \left( x = \frac{\pi}{2} + (k_1 + k_2)\pi, y = \frac{\pi}{4} + (k_1 - k_2)\pi \right)$$

$k_1$  și  $k_2$  fiind numere întregi arbitrare.

33. Să se rezolve sistemele:

a)  $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2}, \\ x - y = 60^\circ; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} \cos 2x - \cos 2y = -\frac{1}{2}, \\ \sin x \cos y = -\frac{1}{2}; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x + y = a, \\ \sin x \sin y = b. \end{cases}$

34. Să se determine  $\cos(x + y)$ , dacă  $x$  și  $y$  satisfac sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b, \end{cases} \quad \text{și } a^2 + b^2 = 0.$$

*Ind.* Se calculează  $b^2 - a^2$  și  $b^2 + a^2$  sau se transformă în produse și se deduce  $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}$ .

35. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 y, \\ \sin x = \cos 2y. \end{cases}$$

*Ind.* Se scrie ultima ecuație sub forma  $\sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)$ , de unde

$$x = \frac{\pi}{2} - 2y + k \cdot 2\pi \quad \text{și} \quad x = 2y - \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi.$$

36. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x + y), \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$$

*Ind.* Se scrie prima ecuație sub forma:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \left( \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = 0 \text{ și se ține seama de faptul că inegalitatea } |x| + |y| \geq |k| \cdot 2\pi \text{ este satisfăcută numai pentru } k = 0.$$

37. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\sin(x-y)}{a-b}.$$

*Ind.* Aplicând o proprietate a rapoartelor egale, sistemul se scrie sub forma  $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\sin(x-y)}{a-b}$ , de unde  $\cos x - \cos y = \sin(x-y)$  sau, după transformări,  $\sin \frac{x-y}{2} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

## Aplicațiile trigonometriei în geometrie

## § 20. Relații trigonometrice într-un triunghi dreptunghic

**67. Relații trigonometrice între elementele unui triunghi dreptunghic.**  
Să considerăm un triunghi  $ABC$ , dreptunghic în  $A$  și să notăm cu  $a$ ,  $b$ ,  $c$  lungimile laturilor lui. Între cele trei laturi ale triunghiului avem o relație exprimată de teorema lui Pitagora, și anume:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Din definițiile funcțiilor trigonometrice ale unui unghi oarecare, date în capitolul II, rezultă că în triunghi  $ABC$  avem:

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \sin C = \frac{c}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a}, \quad \cos C = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}.$$

Din aceste relații deducem că putem exprima cateta  $b$  prin una din următoarele relații:

$$b = a \sin B; \quad (1)$$

$$b = c \operatorname{tg} B; \quad (2)$$

$$b = a \cos C; \quad (1')$$

$$b = c \operatorname{ctg} C. \quad (2')$$

Relațiile (1) și (1') se pot exprima în felul următor:

*Intr-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este egală cu lungimea ipotenuzei înmulțită cu sinusul unghiului opus sau cu cosinusul unghiului alăturat.*

Relațiile (2) și (2') se exprimă prin:

*Intr-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este egală cu lungimea celeilalte catete înmulțită cu tangentă unghiului opus sau cu cotangentă unghiului alăturat.*

**Aplicații.** 1° Știind că  $a = 4$  cm și  $B = 15^\circ$ , să se determine celelalte laturi și unghiuri ale triunghiului dreptunghic.

Tinând seama că  $B + C = 90^\circ$ , rezultă că  $C = 75^\circ$ .

Din formula (1) deducem:

$$b = 4 \sin 15^\circ.$$

$$\text{Dar } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \text{ deci:}$$

$$b = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1,035 \text{ cm.}$$

Analog avem:

$$c = 4 \sin 75^\circ = 4 \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \approx 3,863 \text{ cm.}$$

2° Să se demonstreze, că dacă  $ABC$  este un triunghi dreptunghic, atunci:

$$\operatorname{tg} 2C = \frac{2b}{b^2 + c^2}.$$

Aveam:

$$\operatorname{tg} 2C = \frac{2 \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg}^2 C} = \frac{\frac{2e}{b}}{1 - \frac{e^2}{b^2}} = \frac{2bc}{b^2 - c^2}.$$

3° Să se arate că, dacă între elementele unui triunghi avem relația

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C},$$

atunci triunghiul este dreptunghic.

Tinând seama de formulele de transformare în produs a unei sume de sinusuri și de cosinusuri, deducem:

$$\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Dar:

$$\sin A = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}},$$

deci relația dată devine:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

de unde:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = 1.$$

Dar  $A$  este unghiul unui triunghi, deci  $0 < \frac{A}{2} < 90^\circ$ , adică  $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$  este un număr pozitiv. Rezultă:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

deci  $\hat{A} = 90^\circ$ .

## § 24: Relații trigonometrice într-un triunghi oarecare

**68. Teorema sinusurilor.** Fie  $ABC$  un triunghi oarecare, ale cărui laturi au lungimile  $a, b, c$ . Notăm cu  $O$  centrul cercului circumscris triunghiului. Vom presupune întâi că toate unghurile triunghiului sunt unghuri ascuțite. De aici rezultă că centrul  $O$  al cercului circumscris este în interiorul triunghiului (fig. 82, a). Duceem prin  $B$  diametrul  $BA'$ . Triunghiul  $A'BC$  este un triunghi dreptunghic, fiind inseris într-un semicerc. Atunci ținând seama de relația (1) din § 20 și notând cu raza  $R$  raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , deducem:

$$a = 2R \sin A'.$$

Dar  $A' = A$ , având ca măsură jumătatea arcului  $BC$ , deci

$$a = 2R \sin A,$$

de unde rezultă:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Analog avem:

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Deci:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \quad (1)$$

Să presupunem acum că unul dintre unghurile triunghiului  $ABC$ , de exemplu unghiul  $A$ , este obtuz. În acest caz, centrul  $O$  al cercului circumscris este situat în exteriorul triunghiului (fig. 82, b). Prin vîrful  $B$  ducem diametrul  $BA'$ . Triunghiul  $BCA'$  este dreptunghic, fiind inseris într-un semicerc, și deci:

$$a = 2R \sin A'.$$

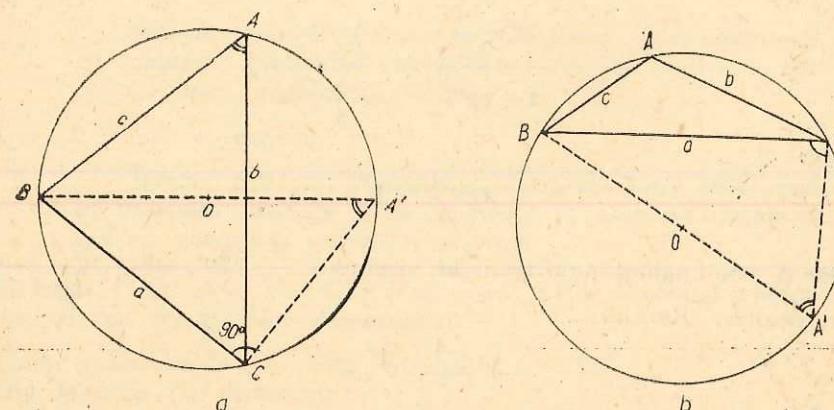


Fig. 82.

Dar unghurile  $A$  și  $A'$  sunt suplementare, ca fiind unghuri opuse într-un patrulater inscrisibil, deci  $\sin A' = \sin A$ , adică

$$a = 2R \sin A,$$

de unde

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Celelalte relații se demonstrează ca în cazul precedent. Rezultă că și în acest caz sunt satisfăcute relațiile (1).

Relațiile (1) reprezintă teorema sinusurilor:

*Intr-un triunghi raportul dintre o latură și sinusul unghiuului opus este egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului.*

**69. Teorema cosinusului.** Fie  $ABC$  un triunghi oarecare. Să demonstrăm mai întâi că între elementele triunghiului avem relația:

$$a = b \cos C + c \cos B. \quad (2)$$

Să presupunem întâi că unghurile  $B$  și  $C$  sunt ascuțite, deci că piciorul  $A'$  al înălțimii coborîte din  $A$  este situat între punctele  $B$  și  $C$  (fig. 83, a). Din triunghiurile dreptunghice  $AA'B$  și  $AA'C$  deducem:

$$BA' = c \cos B; \quad A'C = b \cos C,$$

deci ținând seama că  $a = BA' + A'C$ , rezultă relația (2).

Dacă unghiul  $B$  este obtuz, piciorul  $A'$  al înălțimii coborîte din  $A$  este situat în exteriorul segmentului  $BC$  (fig. 83, b). Din triunghiurile dreptunghice  $AA'B$  și  $AA'C$  rezultă:

$$A'B = c \cos(180^\circ - B); \quad A'C = b \cos C.$$

Dar  $\cos(180^\circ - B) = -\cos B$  și ținând seama că  $a = A'C - A'B$  găsim aceeași relație (2).

Analog se demonstrează relațiile:

$$b = c \cos A + a \cos C, \quad (2')$$

$$c = a \cos B + b \cos A. \quad (2'')$$

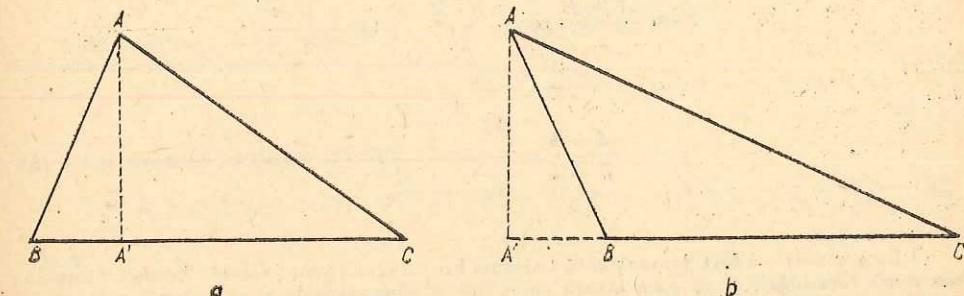


Fig. 83.

Să înmulțim acum relația (2') cu  $b$  și relația (2'') cu  $c$  și să le adunăm.  
Deducem:

$$b^2 + c^2 = a(b \cos C + c \cos B) + 2bc \cos A$$

sau, având în vedere relația (2):

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cos A,$$

adică:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad (3)$$

Această relație poartă numele de *teorema cosinusului*:

*Pătratul lungimii unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi minus de două ori produsul lor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ele.*

Relația (3) se mai numește *forma trigonometrică a teoremei lui Pitagora generalizată*.<sup>1</sup>

**Observație.** Formula (3) se poate deduce și cu ajutorul produsului scalar. Pentru aceasta este suficient să se observe relația  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$  și să se facă înlocuirile corespunzătoare în ambii membri ai egalității:

$$\vec{BC} \cdot \vec{BC} = |\vec{AC}|^2 + |\vec{AB}|^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB}.$$

**70. Teorema tangentelor.** Să demonstrăm următoarea teoremă, numită *teorema tangentelor*:

*Raportul dintre diferența lungimilor laturilor unui triunghi și suma lor este egal cu raportul dintre tangenta semidiferenței și tangentă semisumei unghiurilor opuse.*

Intr-adevăr, din teorema sinusurilor rezultă:

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad \text{deci:}$$

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} &= \frac{2R(\sin A - \sin B)}{2R(\sin A + \sin B)} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}, \end{aligned}$$

adică:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}. \quad (4)$$

<sup>1</sup> La geometrie a fost demonstrată teorema lui Pitagora generalizată. Această teoremă avea două formulări, după cum latura calculată se opunea unui unghi ascuțit sau unui unghi obtuz. Exprimarea trigonometrică unifică cele două formulări.

Analog avem:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}, \quad (4')$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C-A}{2}}{\operatorname{tg} \frac{C+A}{2}}. \quad (4'')$$

Având în vedere că  $\frac{A+B+C}{2} = 90^\circ$ , rezultă că  $\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$  și deci relația (4) se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}}$$

de unde deducem:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Analog:

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

**71. Exprimarea funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi cu ajutorul laturilor.** Din formula (3) deducem:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Cu această valoare a lui  $\cos A$  să calculăm expresiile  $1 - \cos A$  și  $1 + \cos A$ , care intervin în funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\frac{A}{2}$ . Avem:

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}.$$

Să notăm cu  $p$  semiperimetru triunghiului  $ABC$ , adică

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Cu această notație avem:

$$a - b + c = 2(p - b), \quad a + b - c = 2(p - c), \quad b + c - a = 2(p - a),$$

deci:

$$1 - \cos A = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}; \quad 1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc}.$$

Având în vedere că  $0 < \frac{A}{2} < 90^\circ$ , avem:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

deci:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad (5)$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \quad (5')$$

Din aceste formule rezultă:

$$\tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \quad (6)$$

Analog avem:

$$\tg \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}. \quad (6')$$

$$\tg \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \quad (6'')$$

**72. Formule pentru aria unui triunghi.** Vom determina acum o serie de formule pentru calculul ariei unui triunghi. Dacă notăm cu  $A'$  piciorul înălțimii coperite din  $A$  pe latura  $BC$ , avem:

$$S = \frac{BC \cdot AA'}{2}. \quad (7)$$

Dacă unghiul  $B$  este ascuțit, atunci avem (fig. 83, a):

$$AA' = c \sin B. \quad (8)$$

Dacă unghiul  $B$  este obtuz, atunci (fig. 83, b):

$$AA' = c \sin (180^\circ - B)$$

și ținind seama că  $\sin (180^\circ - B) = \sin B$ , rezultă că înălțimea  $AA'$  a triunghiului este dată totdeauna de formula (8). Înlocuind această formulă în (7), obținem

$$S = \frac{ac \sin B}{2}. \quad (9)$$

Analog:

$$S = \frac{bc \sin A}{2}, \quad S = \frac{ab \sin C}{2}, \quad (9')$$

adică aria unui triunghi este egală cu semiprodușul lungimilor a două laturi înmulțit cu sinusul unghiului dintre ele.

Din teorema sinusurilor deducem:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

care, înlocuită în (9), ne dă:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$$

Dar unghile  $B + C$  și  $A$  sunt suplementare, deci  $\sin A = \sin(B + C)$ , adică:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B + C)}. \quad (10)$$

### Aplicații

1° Să se determine unghiul și laturile necunoscute ale unui triunghi știind că  $a = 4$ ,  $A = 60^\circ$ ,  $B = 45^\circ$ .

Tinind seama că  $A + B + C = 180^\circ$  rezultă că  $C = 75^\circ$  și teorema sinusurilor se scrie:

$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ},$$

de unde deducem:

$$b = \frac{4 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}, \quad c = \frac{4 \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ},$$

$$\text{Dar } \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

deci:

$$b = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \quad c = \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}} = \frac{2(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{3}.$$

2° Știind că într-un triunghi avem  $b = 2$ ,  $c = 3$  și  $A = 60^\circ$ , să se determine latura  $a$ .

Din teorema cosinusului rezultă:

$$a^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 60^\circ = 7,$$

deci

$$a = \sqrt{7}.$$

3° Să se arate că triunghiul în care

$$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$$

este dreptunghic.

Tinind seama de teorema sinusurilor, deducem

$$\frac{a+c}{b} = \frac{2R(\sin A + \sin C)}{2R \sin B} = \frac{\frac{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}{2}}{\frac{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}{2}}.$$

Dar:

$$\cos \frac{B}{2} = \sin \frac{A+C}{2},$$

deci:

$$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2}},$$

care, înlocuită în relația dată, ne dă:

$$\frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\sin \frac{B}{2}},$$

de unde:

$$\cos \frac{B}{2} = \cos \frac{A-C}{2}$$

care are soluțiile:

$$B = A - C,$$

$$B = C - A,$$

adică:

$$B + C = A = 90^\circ,$$

sau:

$$A + B = C = 90^\circ.$$

Triunghiul este deci dreptunghic în  $A$  sau în  $C$ .

4° Să se arate că triunghiul în care

$$\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \text{ și } \sin B \sin C = \frac{3}{4}$$

este echilateral.

Din prima relație deducem:

$$b^3 + c^3 = (b + c)a^2$$

sau, având în vedere că  $b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 - bc + c^2)$ :

$$b^2 + c^2 - bc = a^2.$$

Dar teorema cosinusului ne dă  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ , deci relația de mai sus devine:

$$\cos A = \frac{1}{2},$$

adică:

$$A = 60^\circ$$

și deci:

$$B + C = 120^\circ.$$

Tinând seama de formula de transformare în sumă a unui produs de sinusuri, a două relație dată se scrie:

$$\cos(B - C) - \cos(B + C) = \frac{3}{2},$$

de unde, având în vedere că  $\cos(B + C) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ,

$$\cos(B - C) = 1,$$

adică:

$$B - C = 0$$

și deci:

$$B = C = 60^\circ.$$

5° Să se arate că un triunghi în care

$$a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = (a + b) \operatorname{tg} \frac{A + B}{2}$$

este isoscel.

Relația dată se mai poate scrie:

$$a \left( \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \right) = b \left( \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} - \operatorname{tg} B \right),$$

de unde, aplicând formula de transformare în produs și căt, găsim:

$$a \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos A \cos \frac{A+B}{2}} = b \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos B \cos \frac{A+B}{2}}$$

sau, tinând seama că  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ :

$$\operatorname{tg} A \sin \frac{A-B}{2} = \operatorname{tg} B \sin \frac{A-B}{2}.$$

Rezultă:

$$\sin \frac{A-B}{2} (\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B) = 0.$$

Anulind primul factor, găsim:

$$\frac{A-B}{2} = k\pi,$$

de unde, având în vedere că  $A$  și  $B$  sunt unghiiurile unui triunghi:

$$A = B.$$

Același rezultat îl găsim anulind al doilea factor.

6° Să se demonstreze că în orice triunghi avem:

$$b \cos B + c \cos C = a \cos(B - C).$$

Din teorema sinusurilor deducem:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

și deci:

$$\begin{aligned} b \cos B + c \cos C &= \frac{a(\sin B \cos B + \sin C \cos C)}{\sin A} = \\ &= \frac{a(\sin 2B + \sin 2C)}{2 \sin A} = \frac{a 2 \sin(B+C) \cos(B-C)}{2 \sin(B+C)} = a \cos(B-C). \end{aligned}$$

## § 22. Tabele trigonometrice

**73. Tabele trigonometrice.** Am văzut în capitolele anterioare cum se pot calcula valorile funcțiilor trigonometrice în cazul unor unghiuri particulare, cum ar fi  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 15^\circ, 75^\circ, 22^\circ 30'$ . În calcule intervin însă și valorile funcțiilor trigonometrice ale altor unghiuri. S-a ivit astfel necesitatea de a calcula valorile funcțiilor trigonometrice ale unui unghi oarecare, de a se construi tabele cu aceste valori. Cu ajutorul anumitor formule stabilite în matematica superioară s-au putut determina valorile funcțiilor trigonometrice ale tuturor unghiurilor de la  $0^\circ$  la  $90^\circ$  din minut în minut. Aceste tabele poartă numele de *tabele de valori naturale*. De asemenea, s-au construit *tabele de logaritmi ai funcțiilor trigonometrice*.

Au fost editate o serie de astfel de tabele în care valorile funcțiilor trigonometrice sau logaritmii lor sunt calculați cu 3, 4, 5, 6 sau 7 zecimale. Există de asemenea, tabele cu mai multe zecimale.

În cele ce urmează vom folosi cartea *Tabele și formule de matematică, fizică și chimie*, editată de Editura didactică și pedagogică în 1964.

**74. Tabele de valori naturale ale funcțiilor trigonometrice.** În paginile 100—103 este dată Tabela 4: Valorile naturale ale funcțiilor trigonometrice ale arcelor măsurate în grade sexagesimale. Aici sunt date valorile funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă de la  $0^\circ$  la  $90^\circ$  din  $10'$  în  $10'$ .

Cu ajutorul acestor tabele se determină direct valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor care se află în tabele sau cu ajutorul unei operații numită *interpolare*, în cazul unghiurilor care nu se găsesc în tabele.

Astfel în tabele găsim  $\sin 41^\circ 50' = 0,66697$ ,  $\sin 72^\circ 10' = 0,95195$ ,  $\cos 24^\circ 20' = 0,91116$ ,  $\cos 58^\circ 30' = 0,52250$ ,  $\tg 11^\circ 40' = 0,20648$ ,  $\tg 64^\circ 20' = 2,08094$ ,  $\ctg 37^\circ 10' = 1,31904$ ,  $\ctg 85^\circ 40' = 0,07578^1$ .

Pentru a se putea calcula valorile funcțiilor trigonometrice ale căror unghiuri nu se găsesc în tabele, se face presupunerea că variația funcțiilor trigonometrice în intervalul de  $10'$  este proporțională cu variația unghiului.

Să calculăm  $\sin 34^\circ 22'$ .

Avem:

$$\sin 34^\circ 20' < \sin 34^\circ 22' < \sin 34^\circ 30',$$

deci îninind seama că:

$$\sin 34^\circ 20' = 0,56401, \quad \sin 34^\circ 30' = 0,56641,$$

<sup>1</sup> În tot acest paragraf = reprezentă propriu-zis *zis*.

rezultă:

$$0,56401 < \sin 34^\circ 22' < 0,56641.$$

În baza presupunerii putem face următorul raționament:  
dacă unghiul crește cu  $10'$  sinusul crește cu  $0,00240$   
(de la  $34^\circ 20'$  la  $34^\circ 30'$ ) (de la  $0,56401$  la  $0,56641$ );  
dacă unghiul crește cu 2 sinusul crește cu

$$(de la  $34^\circ 20'$  la  $34^\circ 22')$  x = \frac{2 \cdot 0,00240}{10} = 0,00048.$$

De aici rezultă că:

$$\sin 34^\circ 22' = 0,56401 + 0,00048 = 0,56449.$$

Analog se deduc calculele în cazul funcției tangentă.  
Să calculăm  $\cos 59^\circ 47'$ .

Având în vedere că în intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  funcția cosinus este descrescătoare, rezultă:

$$\cos 59^\circ 40' > \cos 59^\circ 47' > \cos 59^\circ 50'$$

sau, deoarece  $\cos 59^\circ 40' = 0,50503$  și  $\cos 59^\circ 50' = 0,50252$ ,  
 $0,50503 > \cos 59^\circ 47' > 0,50252$ .

Descreșterea valorii cosinusului fiind presupusă proporțională cu creșterea unghiului, rezultă:

dacă unghiul crește cu  $10'$  cosinusul descrește cu  $0,00251$   
(de la  $59^\circ 40'$  la  $59^\circ 50'$ ) (de la  $0,50503$  la  $0,50252$ )  
dacă unghiul crește cu  $7'$  cosinusul descrește cu  
(de la  $59^\circ 40'$  la  $59^\circ 47')$  x = \frac{7 \cdot 0,00251}{10} = 0,00176.

Deci:

$$\cos 59^\circ 47' = 0,50503 - 0,00176 = 0,50327.$$

În cazul funcției cotangentă calculele sunt analoage.

Să rezolvăm acum problema inversă, și anume: fiind dată valoarea unei funcții trigonometrice, să se găsească unghiul din cadranul I a cărui funcție trigonometrică respectivă are valoarea dată.

Să calculăm unghiul  $\alpha$  din cadranul I pentru care

$$\tg \alpha = 0,36529.$$

Căutând în tabela funcției tangentă, găsim că:

$$\tg 20^\circ = 0,36397, \quad \tg 20^\circ 10' = 0,36727$$

și îninind seama că în cadranul I funcția tangentă este crescătoare, rezultă:  
 $20^\circ < \alpha < 20^\circ 10'$ .

Vom urma acum raționamentul făcut la determinarea valoarii funcției trigonometrice, dar în ordine inversă:

dacă tangenta crește cu  $0,00330$  unghiul crește cu  $10'$   
(de la  $0,36397$  la  $0,36727$ ) (de la  $20^\circ$  la  $20^\circ 10'$ );  
dacă tangenta crește cu  $0,00132$  unghiul crește cu  
(de la  $0,39397$  la  $0,36529$ ) x = \frac{0,00132 \cdot 10'}{0,00330} = 4'.

Deci:

$$\alpha = 20^\circ + 4' = 20^\circ 4'.$$

Analog se conduc calculele în cazul funcției sinus.  
Să calculăm unghiul  $\alpha$  din cadranul I știind că:

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1,46138.$$

În tabela funcției cotangentă găsim:

$$\operatorname{ctg} 34^\circ 20' = 1,46411, \operatorname{ctg} 34^\circ 30' = 1,45501.$$

Având în vedere că funcția cotangentă este descrescătoare în cadranul I rezultă:

$$34^\circ 20' < \alpha < 34^\circ 30'.$$

Deci:

dacă cotangenta descrește cu 0,00910  
(de la 1,46411 la 1,45501)  
dacă cotangenta descrește cu 0,00273

(de la 1,46411 la 1,46138)

unghiul crește cu 10'  
(de la 34°20' la 34°30')  
unghiul crește cu

$$x = \frac{0,00273 \cdot 10'}{0,00910} = 3'.$$

Rezultă:

$$\alpha = 34^\circ 20' + 3' = 34^\circ 23'.$$

Analog în cazul funcției cosinus.

**75. Tabela de logaritmi ai funcțiilor trigonometrice.** În paginile 106–203 este dată Tabela 5: Logaritmii cu cinci zecimale ai funcțiilor trigonometrice ale acelor de la  $0^\circ$  pînă la  $90^\circ$  din minut în minut. Ca și în cazul tabelelor de valori naturale, în cazul unghiurilor care se găsesc în tabele, logaritmul funcției se găsește direct, iar în cazul unghiurilor care nu se găsesc în tabele se vor calcula cu ajutorul unei interpolări.

Astfel găsim:  $\lg \sin 17^\circ 34' = 1,47974$ ,  $\lg \cos 54^\circ 21' = 1,76554$ ,  $\lg \operatorname{tg} 38^\circ 52' = 1,90630$ ,  $\lg \operatorname{ctg} 79^\circ 18' = 1,27635$ .

Să arătăm acum cum se determină logaritmii funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor care nu se află în tabele.

Să se calculeze  $\lg \sin 21^\circ 45' 17''$ .

În tabele găsim:

$$\lg \sin 21^\circ 45' = 1,56886, \lg \sin 21^\circ 46' = 1,56917.$$

Având în vedere că în cadranul I funcția sinus este crescătoare, iar funcția logaritmul este și ea crescătoare în cazul în care baza este mai mare decit 1, rezultă:

$$1,56886 < \lg \sin 21^\circ 45' 17'' < 1,56917.$$

Deci:

dacă unghiul crește cu 1'  
(de la 21°45' la 21°46')  
dacă unghiul crește cu 17''

(de la 21°45' la 21°45' 17'')

logaritmul crește cu 0,00031  
(de la 1,56886 la 1,56917);  
logaritmul crește cu

$$x = \frac{17 \cdot 0,00031}{60} = 0,00009.$$

Rezultă că:

$$\lg \sin 21^\circ 45' 17'' = 1,56886 + 0,00009 = 1,56895.$$

Analog se fac calculele în cazul funcției tangență.  
Să se calculeze  $\lg \operatorname{ctg} 37^\circ 24' 11''$ .

În tabele găsim:

$$\lg \operatorname{ctg} 37^\circ 24' = 0,11659, \lg \operatorname{ctg} 37^\circ 25' = 0,11633.$$

Deci:

dacă unghiul crește cu 1'  
(de la 37°24' la 37°25')  
dacă unghiul crește cu 11''

(de la 37°24' la 37°24' 11'')

logaritmul descrește cu 0,00026  
(de la 0,11659 la 0,11633);  
logaritmul descrește cu

$$x = \frac{11 \cdot 0,00026}{60} = 0,00005.$$

Rezultă că:

$$\lg \operatorname{ctg} 37^\circ 24' 11'' = 0,11659 - 0,00005 = 0,11654.$$

În cazul funcției cosinus calculele sunt analoage.  
Să ne ocupăm acum de determinarea unghiului din cadranul I pentru care logaritmul unei funcții trigonometrice are o valoare dată.  
Să calculăm unghiul  $\alpha$  din cadranul I pentru care

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = 1,61942.$$

În tabele găsim:

$$\lg \operatorname{tg} 22^\circ 36' = 1,61936, \lg \operatorname{tg} 22^\circ 37' = 1,61972.$$

Avem:

$$22^\circ 36' < \alpha < 22^\circ 37'$$

Dacă logaritmul crește cu 0,00036

(de la 1,61936 la 1,61972)

dacă logaritmul crește cu 0,00006

(de la 1,61936 la 1,61942)

unghiul crește cu 1'

(de la 22°36' la 22°37');

unghiul crește cu

$$x = \frac{0,00006 \cdot 60''}{0,00036} = 10''.$$

Deci:

$$\alpha = 22^\circ 36' + 10'' = 22^\circ 36' 10''.$$

Calcule analoage se fac în cazul funcției sinus.

Să calculăm unghiul  $\alpha$  din cadranul I știind că:

$$\lg \cos \alpha = 1,93244.$$

În tabele găsim:

$$\log \cos 31^\circ 8' = 1,93246, \lg \cos 31^\circ 9' = 1,93238,$$

de unde deducem:

$$31^\circ 8' < \alpha < 31^\circ 9'.$$

Dacă logaritmul descrește cu 0,00008  
(de la 1,93246 la 1,93238)  
dacă logaritmul descrește cu 0,00002  
(de la 1,93246 la 1,93244)

unghiul crește cu 1'.  
(de la 31°8' la 31°9');  
unghiul crește cu  
 $x = \frac{0,00002 \cdot 60''}{0,00008} = 15''$ .

Rezultă:

$$\alpha = 31^\circ 8' + 15'' = 31^\circ 8'15''.$$

**Aplicații.** 1º Să se determine valoarea expresiei:

$$E = \frac{\sin 52^\circ 34' - \sin 18^\circ 11'}{\cos 43^\circ 52' + \cos 31^\circ 37'}.$$

Avem:

$$\begin{aligned}\sin 52^\circ 34' - \sin 18^\circ 11' &= 2 \sin 17^\circ 11'30'' \cos 35^\circ 22'30'', \\ \cos 43^\circ 52' + \cos 31^\circ 37' &= 2 \cos 37^\circ 44'30'' \cos 6^\circ 7'30'',\end{aligned}$$

deci:

$$E = \frac{\sin 17^\circ 11'30'' \cos 35^\circ 22'30''}{\cos 37^\circ 44'30'' \cos 6^\circ 7'30''}.$$

Apliind acestei egalități logaritmii, găsim:

$$\lg E = \lg \sin 17^\circ 11'30'' + \lg \cos 35^\circ 22'30'' - \lg \cos 37^\circ 44'30'' - \lg \cos 6^\circ 7'30''.$$

Din tabele deducem prin interpolări:

$$\begin{aligned}\lg \sin 17^\circ 11'30'' &= 1,47065, \\ \lg \cos 35^\circ 22'30'' &= 1,91137, \\ \lg \cos 37^\circ 44'30'' &= 1,89806, \\ \lg \cos 6^\circ 7'30'' &= 1,99752.\end{aligned}$$

Rezultă:

$$\lg E = 1,48644,$$

de unde<sup>1</sup>:

$$E \approx 0,3065.$$

2º Să se determine unghiul  $\alpha$  din cadranul I pentru care

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg} 57^\circ 21'10'' + \operatorname{tg} 15^\circ 35'20''.$$

Avem:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin 72^\circ 56'30''}{\cos 57^\circ 21'10'' \cos 15^\circ 35'20''}.$$

Apliind logaritmii, găsim:

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (\lg \sin 72^\circ 56'30'' - \lg \cos 57^\circ 21'10'' - \lg \cos 15^\circ 35'20'').$$

<sup>1</sup> În locul scăderii ultimilor doi logaritmi se vor folosi cologaritmii acestora.

Din tabele deducem:

$$\begin{aligned}\lg \sin 72^\circ 56'30'' &= 1,98046 \\ \lg \cos 57^\circ 21'10'' &= 1,73197 \\ \lg \cos 15^\circ 35'20'' &= 1,98372\end{aligned}$$

deci:

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \cdot 0,26477 = 0,13238.$$

De aici rezultă că:

$$\alpha = 53^\circ 26'.$$

### § 23. Rezolvarea triunghiurilor

76. **Rezolvarea triunghiului dreptunghic.** În § 20 am dedus diverse formule între elementele unui triunghi dreptunghic. Să aplicăm acum aceste formule pentru a determina toate elementele unui triunghi dreptunghic cînd cunoaștem unele dintre ele, operație care se numește *rezolvarea triunghiului dreptunghic*.

**Cazul I.** Se dă ipotenuza  $a$  și unghiul ascuțit  $B$ .

Celelalte elemente sunt date de relațiile:

$$b = a \sin B; c = a \cos B, C = 90^\circ - B.$$

**Cazul II.** Se dă o catetă  $b$  și un unghi ascuțit, de exemplu  $C$ .

Avem:

$$B = 90^\circ - C, c = b \operatorname{tg} C, a = \frac{b}{\cos C}.$$

**Cazul III.** Se dă ipotenuza  $a$  și o catetă, de exemplu  $b$ .

Avem:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \sin B = \frac{b}{a}, C = 90^\circ - B.$$

**Cazul IV.** Se dau catetele  $b$  și  $c$ .

Celelalte elemente sunt date de formulele:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}, \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, C = 90^\circ - B.$$

**Exemple**

1) Să se rezolve triunghiul dreptunghic în care ni se dă  $a = 2$  și  $B = 22^\circ 30'$ .

Avem:

$$b = 2 \sin 22^\circ 30' = 2 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0,765;$$

$$c = 2 \cos 22^\circ 30' = 2 \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1,553;$$

$$C = 90^\circ - B = 67^\circ 30'.$$

2) Să se rezolve triunghiul dreptunghic în care  $b = 3$ ,  $C = 15^\circ$ .  
Avem:

$$B = 75^\circ;$$

$$c = 3 \operatorname{tg} 45^\circ = 3(2 - \sqrt{3}) \approx 0,804; ;$$

$$a = \frac{3}{\cos 45^\circ} = \frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 2} = \\ = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 1,035.$$

3) Să se rezolve triunghiul dreptunghic în care  $a = 3,852$  și  $b = 1,547$ .  
Avem:

$$c = \sqrt{3,852^2 - 1,547^2} = \sqrt{(3,852 + 1,547)(3,852 - 1,547)} = \sqrt{5,399 \cdot 2,305}, \\ \text{deci:}$$

$$\lg c = \frac{1}{2} (\lg 5,399 + \lg 2,305) = \frac{1}{2} (0,73231 + 0,36267) = 0,54749.$$

De aici deducem:

$$c = 3,5279.$$

Din formula  $\sin B = \frac{b}{a}$  rezultă:

$$\sin B = \frac{1,547}{3,852},$$

de unde

$$\lg \sin B = \lg 1,547 - 3,852 = 1,60380.$$

Deci,

$$B = 23^\circ 40' 43''$$

și

$$C = 90^\circ - 23^\circ 40' 43'' = 66^\circ 19' 17''.$$

**77. Rezolvarea triunghiului oarecare.** Să ne ocupăm acum de *rezolvarea triunghiului oarecare*. Pentru a putea determina toate elementele unui triunghi oarecare cu ajutorul formulelor deduse în § 21, trebuie să ni se dea trei elemente ale triunghiului, printre care să se afle cel puțin o lungime sau o relație între lungimi. Laturile și unghiurile unui triunghi se numesc *elementele principale* ale acestuia, iar cazurile de rezolvare ale triunghiului în care ni se dau numai elemente principale se numesc *cazuri de rezolvare principale*.

Cazurile principale de rezolvare ale triunghiurilor oarecare sunt în număr de patru și anume:

**Cazul I.** Se dă două unghiuri și o latură, de exemplu  $A$ ,  $B$  și  $a$ .

Avem  $C = 180^\circ - (A + B)$ .

Din teorema sinusurilor deducem:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin (A + B)}{\sin A}.$$

Problema are soluție oricare ar fi valorile celor trei elemente.

**Cazul II.** Se dă două laturi și unghiul cuprins între ele, de exemplu,  $a$  și  $C$ .

Din teorema tangentei rezultă:

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

De aici deducem unghiul  $A - B$  și ținând seama că  $A + B = 180^\circ - C$  găsim unghiurile  $A$  și  $B$ . Latura  $c$  rezultă din teorema sinusurilor:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Problema are soluție pentru orice valori ale elementelor, ceea ce se poate vedea din construcția triunghiului.

**Cazul III.** Se dă două laturi și unghiul opus uneia dintre ele, de exemplu  $a$ ,  $b$  și  $A$ .

Din teorema sinusurilor deducem:

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A,$$

de unde rezultă unghiul  $B$ . Unghiul  $C$  rezultă din relația  $C = 180^\circ - (A + B)$ , iar latura  $c$  din:

$$c = \frac{a \sin A}{\sin C}.$$

Pentru ca problema să aibă soluție trebuie ca:

$$\frac{b}{a} \sin A < 1,^1$$

adică:

$$\sin A < \frac{a}{b}.$$

Să presupunem că această relație este satisfăcută și să notăm cu  $\alpha$  unghiul din cadrul I pentru care  $\sin \alpha = \frac{b}{a} \sin A$ . Atunci avem două unghiuri care satisfac problema, și anume:

$$B_1 = \alpha, \quad B_2 = 180^\circ - \alpha.$$

Valorile corespunzătoare ale unghiului  $C$  sunt:

$$C_1 = 180^\circ - (A + \alpha), \quad C_2 = \alpha - A.$$

Dacă  $b < a$ , atunci avem  $\frac{b}{a} < 1$  și ținând seama că  $\sin A < 1$ , rezultă că

$$\frac{b}{a} \sin A < 1, \quad \text{deci problema are soluție.}$$

Din  $b < a$  rezultă  $B_1 < A$  și deci  $B_1 < 90^\circ$ . De aici deducem:  $B_1 < 180^\circ - A$ , adică  $A + \alpha < 180^\circ$  și deci  $C_1 > 0$ . Valorile  $B_1$  și  $C_1$  satisfac problema.

<sup>1</sup> Ținând seama că  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\sin A > 0$ , rezultă  $\frac{b}{a} \sin A > 0$ .

A doua soluție nu satisface problema fiindcă  $\alpha - A < 0$ .

Deci problema are o singură soluție acceptabilă.

Dacă  $b = a$ ,  $A < 90^\circ$ , avem  $\sin B = \sin A$  și deci  $B_1 = A$ ,  $B_2 = 180^\circ - A$ .

De aici deducem  $C_1 = 180^\circ - 2A > 0$  și  $C_2 = 180^\circ - (180^\circ - A + A) = 0$ , deci problema are o singură soluție acceptabilă.

Dacă  $b = a$ ,  $A \geq 90^\circ$ , problema nu are soluții.

Dacă  $b \sin A < a < b$  și  $A < 90^\circ$ , relația (11) este satisfăcută. Avem  $A < B_1 < 90^\circ$ , adică  $A + B_1 < 180^\circ$  și  $C_1 = 180^\circ - (A + B_1) > 0$ . Din  $B_2 = 180^\circ - B_1$  rezultă  $C_2 = 180^\circ - (A + B_2) = B_1 - A > 0$ . Problema are două soluții.

Dacă  $b \sin A < a < b$  și  $A \geq 90^\circ$ , problema nu are soluții.

Dacă  $b \sin A = a$  și  $A < 90^\circ$ , avem  $\sin B = 1$ , deci  $B_1 = B_2 = 90^\circ$  și  $C_1 = C_2 = 90^\circ - A$ . Problema are două soluții confundate, triunghiul fiind dreptunghic.

Dacă  $b \sin A = a$  și  $A \geq 90^\circ$  problema nu are soluții.

Dacă  $b \sin A > a$ , relația (11) nu este satisfăcută și deci problema nu are soluție.

#### Cazul IV. Se dau toate laturile triunghiului.

Unghiiurile triunghiului date de relațiile:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \\ C &= 180^\circ - (A+B). \end{aligned}$$

Să analizăm acum cîteva cazuri speciale de rezolvare.

1) Se dau elementele  $c$  și  $A$  și relația  $a^2 - b^2 = k^2$ .

Avem:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{c^2} &= \frac{4R^2 \sin^2 A - 4R^2 \sin^2 B}{4R^2 \sin^2 C} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{\sin^2 C} = \\ &= \frac{(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)}{\sin^2 C} = \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 C}. \end{aligned}$$

Dar  $\sin(A+B) = \sin C$ , deci:

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{k^2}{c^2},$$

sau:

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{k^2}{c^2}$$

De aici deducem:

$$\frac{\sin(A-B) - \sin(A+B)}{\sin(A-B) + \sin(A+B)} = \frac{c^2 - k^2}{c^2 + k^2},$$

adică:

$$\frac{\cos A \sin B}{\sin A \cos B} = \frac{c^2 - k^2}{c^2 + k^2},$$

de unde:

$$\operatorname{tg} B = \frac{c^2 - k^2}{c^2 + k^2} \operatorname{tg} A.$$

De aici rezultă valoarea unghiului  $B$  și problema se reduce la cazul principal I.

2) Să se rezolve un triunghi oarecare cunoscind unghiiurile  $A$  și  $B$  și semiperimetru  $p$ .

Avem  $C = 180^\circ - (A+B)$ .

Din teorema sinusurilor avem:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a-b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

Dar:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Deci:

$$a = \frac{2p \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2p \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Analog avem:

$$b = \frac{p \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}}, \quad c = \frac{p \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}.$$

3) Să se rezolve un triunghi cunoscind latura  $a$ , unghiul  $A$  și înălțimea  $h_a$  corespunzătoare laturii  $a$ .

Avind în vedere formulele (7) și (10) care ne dă aria unui triunghi, deducem:

$$\frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A} = a h_a,$$

de unde:

$$\sin B \sin C = \frac{h_a \sin A}{a}.$$

Tinând seama de formula de transformare a unui produs de sinusuri în sumă rezultă:

$$\cos(B-C) - \cos(B+C) = \frac{2h_a \sin A}{a}.$$

Dar  $\cos(B+C) = -\cos A$ , deci:

$$\cos(B-C) = \frac{2h_a \sin A - a \cos A}{a}.$$

Dacă:

$$\frac{2h_a \sin A - a \cos A}{a} < 1,$$

din această relație deducem valoarea diferenței  $B - C$ , de unde, având în vedere că  $B + C = 180^\circ - A$ , rezultă unghurile  $B$  și  $C$ . Problema se reduce la cazul principal de rezolvare I.

### Aplicații.

1° Să se rezolve triunghiul  $ABC$  știind că  $a = 20$ ,  $A = 69^\circ$ ,  $B = 82^\circ$ .

Avem  $C = 180^\circ - (A + B) = 29^\circ$ .

Din teorema sinusurilor rezultă:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{20 \sin 82^\circ}{\sin 69^\circ}.$$

Logaritând deducem:

$$\begin{aligned} \lg b &= \lg 20 + \lg \sin 82^\circ - \lg \sin 69^\circ = \\ &= 1,30103 + 1,99575 - 1,97015 = 1,32663, \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$b = 21,21.$$

Analog găsim:

$$c = 10,39.$$

2° Să se rezolve un triunghi în care  $a = 20,21$ ,  $b = 15,76$ ,  $A = 100^\circ 3'$ .

Din teorema sinusurilor deducem:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{15,76 \sin 100^\circ 3'}{20,21} = \frac{15,76 \sin 79^\circ 57'}{20,21}.$$

Logaritând, găsim:

$$\begin{aligned} \lg \sin B &= \lg 15,76 + \lg \sin 79^\circ 57' - \lg 20,21 = \\ &= 1,19756 + 1,99328 - 1,30557 = 1,88527. \end{aligned}$$

Deci:

$$B = 50^\circ 9' 36''.^1$$

De aici rezultă:

$$C = 180^\circ - (A + B) = 29^\circ 47' 24''.$$

Cu această valoare putem scrie:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{20,21 \sin 29^\circ 47' 24''}{\sin 100^\circ 3'} = \frac{20,21 \sin 29^\circ 47' 24''}{\sin 79^\circ 57'},$$

adică:

$$\begin{aligned} \lg c &= \lg 20,21 + \lg \sin 29^\circ 47' 24'' - \lg \sin 79^\circ 57' = \\ &= 1,30557 + 1,69620 - 1,99328 = 1,00849, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Valoarea  $B = 180^\circ - 50^\circ 9' 36'' = 129^\circ 50' 24''$  nu este acceptabilă pentru că în acest caz avem  $A + B = 229^\circ 53' 24'' > 180^\circ$ . De altfel, construcția geometrică arată că totdeauna pentru  $a > b$  avem soluție unică.

de unde rezultă:

$$c = 10,20.$$

3° Să se rezolve triunghiul  $ABC$  știind că  $a = 75$ ,  $b = 92$ ,  $c = 107$ .

Avem  $p = 137$ , deci:

$$\tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{45 \cdot 30}{137 \cdot 62}},$$

de unde:

$$\begin{aligned} \lg \tg \frac{A}{2} &= \frac{1}{2} (\lg 45 + \lg 30 - \lg 137 - \lg 62) = \\ &= \frac{1}{2} (1,65321 + 1,47712 - 2,13672 - 1,79239) = \bar{1},60061. \end{aligned}$$

Rezultă că:

$$\frac{A}{2} = 21^\circ 44' 8'',$$

adică:

$$A = 43^\circ 28' 16''.$$

Analog găsim:

$$B = 57^\circ 33' 28''.$$

Deci:

$$C = 180^\circ - (A + B) = 78^\circ 58' 16''.$$

4° Să se rezolve triunghiul  $ABC$  știind că  $A = 123^\circ$ ,  $a = 181,60$ ,  $b - c = 29,54$ .

Din teorema sinusurilor deducem:

$$\frac{b - c}{\sin B - \sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

sau:

$$\frac{b - c}{2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}.$$

Dar  $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$ , deci:

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{(b-c) \cos \frac{A}{2}}{a} = \frac{29,54 \cos 61^\circ 30'}{181,60}.$$

Logaritând, găsim:

$$\begin{aligned} \lg \sin \frac{B-C}{2} &= \lg 29,54 + \lg \cos 61^\circ 30' - \lg 181,60 = \\ &= 1,47041 + 1,67866 - 2,25912 = \bar{2},88995. \end{aligned}$$

De aici rezultă:

$$\frac{B - C}{2} = 4^\circ 27',$$

adică:

$$B - C = 8^\circ 54'.$$

Având în vedere că  $B + C = 180^\circ - A = 57^\circ$ , găsim:

$$B = 32^\circ 57', \quad C = 24^\circ 3'.$$

Cu aceste valori din teorema sinusurilor deducem:

$$b = 117,80, \quad c = 88,26.$$

5° Să se rezolve triunghiul  $ABC$  știind că  $a = 32,41$ ,  $b = 25,17$ , iar unghiul  $A$  este dublul unghiului  $B$ .

Având în vedere că  $A = 2B$ , teorema sinusurilor se scrie:

$$\frac{a}{2 \sin B \cos B} = \frac{b}{\sin B},$$

de unde:

$$\cos B = \frac{a}{2b} = \frac{32,41}{50,34},$$

adică

$$\lg \cos B = \lg 32,41 - \lg 50,34 = 1,51068 - 1,70191 = -1,80877.$$

Găsim:

$$B = 49^\circ 54' 40'',$$

deci:

$$A = 99^\circ 49' 20''$$

De aici deducem:

$$C = 180^\circ - (A + B) = 30^\circ 16'$$

și din teorema sinusurilor:

$$c = 16,58.$$

## § 24. Aplicații în geometrie, fizică și topografie

78. **Aplicații în geometrie.** 1° Să se calculeze lungimea bisectoarelor unui triunghi în funcție de elementele principale ale triunghiului.

Fie  $l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$  lungimile acestor bisectoare. Notând cu  $D$  piciorul bisectoarei unghiului  $A$  și aplicând teorema sinusurilor în triunghiul  $ABD$ , deducem:

$$\frac{l_a}{\sin B} = \frac{c}{\sin \widehat{ADB}}.$$

<sup>1</sup> Soluția  $\frac{B - C}{2} = 180^\circ - 4^\circ 27'$  nu este acceptabilă.

$$\begin{aligned} \text{Dar } \widehat{ADB} &= 180^\circ - \left( B + \frac{A}{2} \right) = \\ &= 180^\circ - B - \frac{180^\circ - B - C}{2} = \\ &= 90^\circ - \frac{B - C}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{deci } \sin \widehat{ADB} = \cos \frac{B - C}{2}$$

și relația de mai sus ne dă:

$$l_a = \frac{c \cdot \sin B}{\cos \frac{B - C}{2}}.$$

$$\text{Analog avem: } l_b = \frac{a \sin C}{\cos \frac{C - A}{2}}, \quad l_c = \frac{b \sin A}{\cos \frac{A - B}{2}}.$$

2° Să se calculeze aria unui patrulater cunoscând diagonalele sale și unghiul dintre ele.

Fie  $ABCD$  un patrulater oarecare. Dacă notăm cu  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor și cu  $\varphi$  unghiul diagonalelor, atunci avem (fig. 84):

$$S_{(ABCD)} = S_{(AOB)} + S_{(BOC)} + S_{(COD)} + S_{(ODA)},$$

adică

$$S = \frac{OA \cdot OB \sin \varphi}{2} + \frac{OB \cdot OC \sin (180^\circ - \varphi)}{2} + \frac{OC \cdot OD \sin \varphi}{2} + \frac{OD \cdot OA \sin (180^\circ - \varphi)}{2}$$

sau, ținând seama că  $\sin (180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ , rezultă:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sin \varphi (OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA)}{2} = \frac{\sin \varphi (OA + OC)(OB + OD)}{2} = \\ &= \frac{AC \cdot BD \sin \varphi}{2}, \end{aligned}$$

deci aria unui patrulater este egală cu semiprodușul diagonalelor înmulțit cu sinusul unghiului dintre ele.

3° Să se determine unghiul format de diagonalele unui paralelogram în funcție de laturile paralelogramului și de unghiiurile dintre ele.

Fie  $ABCD$  un paralelogram și  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor (fig. 85). Notând  $a = AB$ ,  $b = AD$ ,  $d_1 = BD$ ,  $d_2 = AC$ ,  $\varphi = \widehat{AOB}$ , și aplicând teorema cosinusului în triunghiurile  $ABD$  și  $ABC$ , deducem:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos A.$$

Fig. 84.

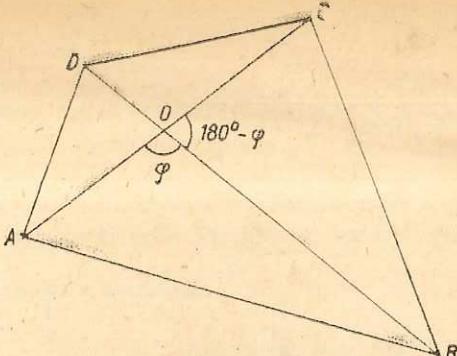


Fig. 84.

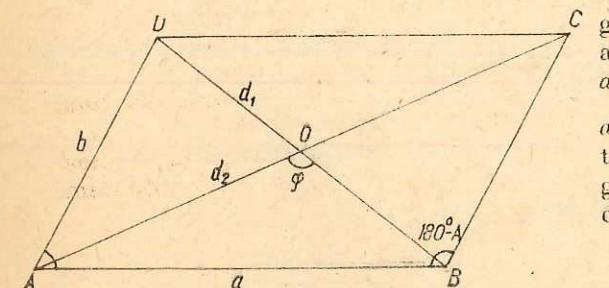


Fig. 85.

În triunghiul  $OAB$  teorema cosinusurilor ne dă:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos \varphi,$$

de unde:

$$\cos \varphi = \frac{d_1^2 + d_2^2 - 4a^2}{2d_1 d_2}$$

sau, ținând seama de relațiile de mai sus:

$$\cos \varphi = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha}}.$$

De aici deducem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{2ab \sin A}{b^2 - a^2}.$$

4° Să se determine volumul și aria laterală a unei piramide hexagonale regulate a cărei înălțime este  $h$ , iar unghiul plan de la vîrf  $\alpha$ .

Fie  $SABCDEF$  piramida și  $O$  centrul cercului circumscris hexagonului  $ABCDEF$  (fig. 86). Avem  $SO = h$ ,  $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSD} = \widehat{DSE} = \widehat{ESF} = \widehat{FSA} = \alpha$ .

Dacă notăm cu  $S$  aria hexagonului  $ABCDEF$ , atunci volumul piramidei este:

$$V = \frac{Sh}{3}.$$

Notind cu  $a$  latura hexagonului, rezultă că  $OA = a$ , ca fiind raza cercului circumscris hexagonului, iar  $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , ca fiind apotema hexagonului. Deçi:

$$S = \frac{6a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Din triunghiul dreptunghic  $SAM$  deducem:

$$SM = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Seriind teorema lui Pitagora în triunghiul  $SOM$ , găsim:

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

De aici rezultă:

$$a^2 = \frac{4h^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 3}$$

și deci:

$$S = \frac{6\sqrt{3}h^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 3},$$

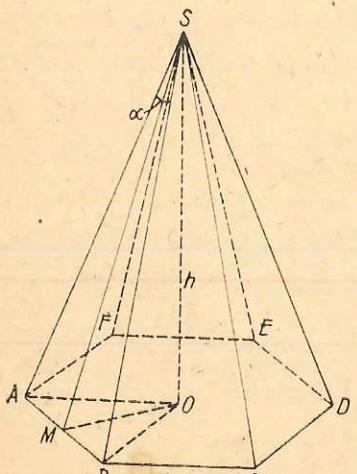


Fig. 86.

adică:

$$V = \frac{2\sqrt{3}h^3}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 3}.$$

Aria laterală a piramidei este

$$S' = 6S_{(SAB)} = 6 \frac{SM \cdot AB}{2} = \frac{3a^2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

deci:

$$S' = \frac{\frac{6h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 3}}{.$$

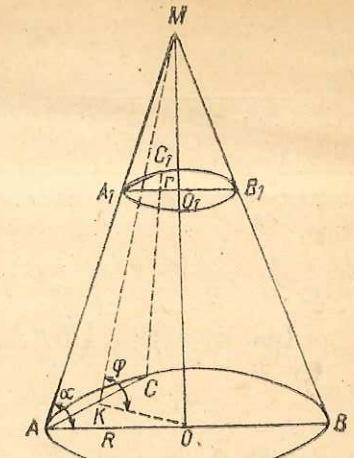


Fig. 87.

5° Se dă un trunchi de con cu razele bazelor  $R$  și  $r$ . Prin două generatoare ale trunchiului se duce un plan care face cu planul bazei un unghi  $\varphi$ . Să se determine aria secțiunii știind că generatoarea trunchiului face cu planul bazei unghiul  $\alpha$  (fig. 87).

Prelungim generatoarele  $AA_1$  și  $BB_1$  pînă în punctul  $M$ . Notind cu  $S$  aria secțiunii, avem:

$$S = S_{AMC} - S_{A_1MC_1}.$$

Triunghiurile  $AMC$  și  $A_1MC_1$  fiind asemenea, avem:

$$\frac{S_{A_1MC_1}}{S_{AMC}} = \frac{A_1M^2}{AM^2}.$$

Analog, din asemănarea triunghiurilor  $AOM$  și  $A_1O_1M$  rezultă:

$$\frac{A_1M}{AM} = \frac{r}{R},$$

deci:

$$\frac{S_{A_1MC_1}}{S_{AMC}} = \frac{r^2}{R^2},$$

de unde:

$$\frac{S_{AMC} - S_{A_1MC_1}}{S_{AMC}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2},$$

adică:

$$S = \frac{R^2 - r^2}{R^2} S_{AMC}.$$

Aria triunghiului  $AMC$  este:

$$S_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot MK = AK \cdot MK.$$

Din triunghiul  $AOK$  rezultă:

$$AK = \sqrt{R^2 - OK^2}.$$

Dar  $OK = MO \operatorname{ctg} \varphi$  (triunghiul  $MOK$ ), iar  $MO = R \operatorname{tg} \alpha$  (triunghiul  $MOA$ ), deci

$$\begin{aligned} AK &= \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} \sqrt{(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi \cos \alpha} \cdot \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos \varphi \cos \alpha}} = \\ &= \frac{R}{\sin \varphi \cos \alpha} \sqrt{\sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi + \alpha)}. \end{aligned}$$

Din triunghiul  $MOK$  deducem:

$$MK = \frac{MO}{\sin \varphi}$$

sau, ținând seama de valoarea de mai sus a lui  $MO$ :

$$MK = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi}.$$

Cu aceste valori avem:

$$\begin{aligned} S_{AMO} &= \frac{R}{\sin \varphi \cos \alpha} \sqrt{\sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi + \alpha)} \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi} = \\ &= \frac{R^2 \sin \alpha}{\sin^2 \varphi \cos^2 \alpha} \sqrt{\sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi + \alpha)}, \end{aligned}$$

deci:

$$S = \frac{(R^2 - r^2) \sin \alpha}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \sqrt{\sin(\varphi - \alpha) \sin(\varphi + \alpha)}$$

**79. Aplicații în fizică.** 1° Să se determine intensitatea  $F$  a rezultantei a două forțe de intensități  $F_1$  și  $F_2$  care fac între ele un unghi  $\alpha$  (fig. 88).

Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul  $ABC$ , obținem:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos(180^\circ - \alpha),$$

adică:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha$$

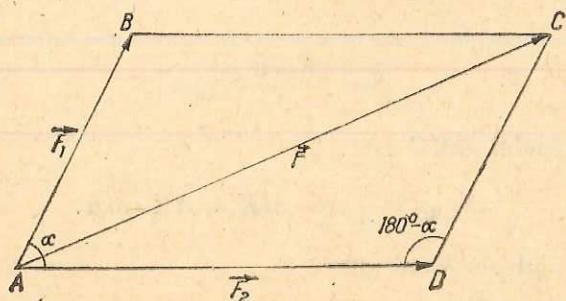


Fig. 88.

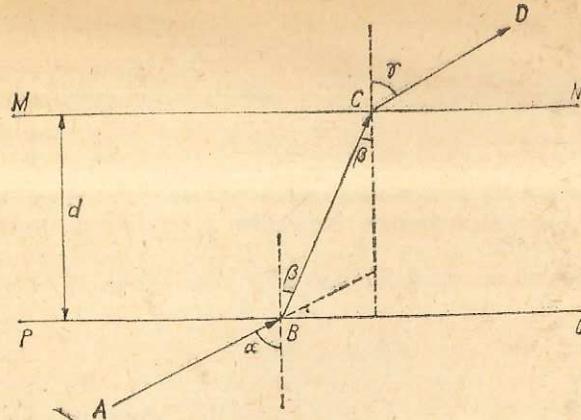


Fig. 89.

2° O rază luminoasă străbate o placă de sticlă limitată de plane paralele. Să se determine poziția razei după trecerea ei prin placă (fig. 89).

Fie  $MN$  și  $PQ$  plane care limitează placă,  $d$  grosimea plăcii și  $n$  indicele de refracție al ei. Raza incidentă  $AB$  se refractă de două ori. Întîi înțilind placă se refractă mergind în direcția  $BC$ , determinată de legea refracției:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

La ieșire din placă raza merge după direcția  $CD$ , care se determină prin condiția:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}.$$

Din aceste două relații rezultă:

$$\sin \alpha = \sin \gamma,$$

adică, ținând seama că  $\alpha$  și  $\gamma$  sunt ascuțite:

$$\alpha = \gamma.$$

Deci, prin trecerea unei raze luminoase printr-o placă cu fețe paralele, ea nu-și schimbă direcția.

**80. Aplicații în topografie.** În numeroase probleme practice trebuie să se cunoască distanțele dintre anumite puncte de pe suprafața pământului și unghiurile dintre direcțiile de la un punct la altul sau de la un punct la altul. Măsurarea directă a acestor distanțe și unghiuri este dificilă și, în unele cazuri imposibilă. Folosind însă unele cunoștințe căpătate la rezolvarea triunghiurilor, o astfel de problemă se reduce la măsurarea pe teren a distanței dintre două puncte și a unghiurilor dintre anumite direcții; celelalte distanțe și unghiuri se determină prin calcul.

Distanțele pe teren se măsoară, de obicei, cu lanțul sau cu panglica, iar unghiurile dintre două direcții cu grafometrul sau cu teodolitul. Pentru vizarea obiectelor, teodolitul este prevăzut cu o lunetă care se poate rota atât în planul orizontal cât și în planul vertical. În acest fel cu acest instrument se pot măsura unghiul dintre proiecțiile orizontale a două direcții și unghiul dintre o direcție și proiecția sa pe planul orizontal.

Să ilustrăm acum cele spuse mai sus prin două exemple simple.

1° Să se determine înălțimea unui turn vertical, în ipoteza că porțiunea de teren din vecinătatea bazei turnului este situată în planul orizontal.

Fie  $AB$  înălțimea turnului considerat și  $O'$  un punct din planul orizontal (fig. 90). Plasând stația în poziția verticală  $O'O$ , se vizează din  $O$  punctul  $B$ —vîrful turnului. În acest fel se măsoară unghiul  $\widehat{COB} = \alpha$  format de dreapta  $OB$  cu proiecția sa pe planul orizontal. Având în vedere că distanța  $AO' = b$  se măsoară pe teren, problema se reduce de fapt la determinarea catetei  $BC$  a triunghiului dreptunghic  $BCO$  în care se cunoște unghiul opus și cealaltă catetă. Așadar

$$CB = b \operatorname{tg} \alpha.$$

Dacă  $h = O'O$  este înălțimea instrumentului de măsurat unghiurile, atunci înălțimea turnului se calculează cu ajutorul formulei:

$$AB = AC + CB = h + b \operatorname{tg} \alpha.$$

2° Să se determine distanța dintre două puncte  $A$  și  $B$  situate într-o porțiune de teren inaccesibilă.

Presupunem că există punctele  $C$  și  $D$ , coplanare cu  $A$  și  $B$ , din care se văd aceste puncte și astfel încât distanța dintre ele să poată fi măsurată (fig. 91). Fie  $b$  distanța dintre punctele  $C, D$  și  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  măsurile unghiurilor  $\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{DCA}, \widehat{ACB}$  respectiv. Din triunghiul  $ACD$ , în care se cunoște latura  $CD$  și unghiurile adiacente, obținem:

$$AC = \frac{b \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)},$$

iar din triunghiul  $BCD$ :

$$BC = \frac{b \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}.$$

În acest fel în triunghiul  $ABC$  se cunoște laturile  $AC, BC$  și unghiul cuprins între ele; prin urmare se poate calcula latura  $AB$ .

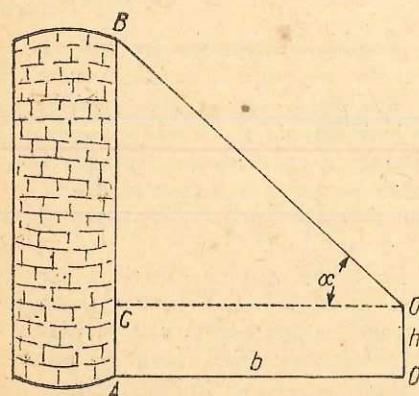


Fig. 90.

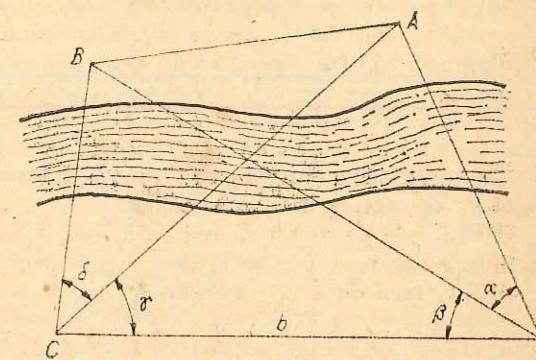


Fig. 91.

### Exerciții

Să se rezolve triunghiurile dreptunghice în care se dă următoarele elemente:

1.  $a = 627; B = 23^\circ 30'$ .

2.  $b = 324,6; B = 40^\circ 28'$ .

3.  $a = 30,69; b = 24,67$ .

4.  $b = 20,18; c = 28,93$ .

5.  $b = 320; \frac{B}{C} = \frac{7}{5}$ .

6.  $a = 225; \frac{c}{b} = 0,75$ .

Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic avem relațiile:

7.  $\operatorname{ctg} B + \frac{1}{\sin B} = \frac{a+c}{b}$ .

8.  $\frac{1}{\cos 2B} + \operatorname{tg} 2B = \frac{c+b}{c-b}$ .

Să se rezolve următoarele triunghiuri oarecare:

9.  $a = 14,5; B = 40^\circ 40'; C = 64^\circ 20'$ .

10.  $a = 11; b = 8; C = 42^\circ 40'$ .

11.  $a = 47; b = 59; A = 108^\circ$ .

12.  $a = 345; b = 384; c = 113$ .

13.  $a = 105; A = 58^\circ; b + c = 216,5$ .

14.  $A = 35^\circ 17' 15''; B = 62^\circ 43' 30''; p = 120$ .

Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem următoarele identități:

15.  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{S}{p^2}$ .

16.  $1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{c}{p}$ .

17.  $a^2 + b^2 + c^2 = 4S (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$ .

18.  $a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0$ .

19.  $\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{c} = \frac{p^2}{abc}$ .

20. Să se demonstreze că triunghiul în care

$$(p-b) \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}$$

este isoscel.

21. Să se calculeze lungimile laturilor unui paralelogram, știind că diagonala lui de lungime  $l$  formează cu laturile unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ .

22. Într-un triunghi oarecare  $ABC$ , înălțimea  $AD$  este tăiată de înălțimea  $CE$  în mijloc: său. Să se arate că tangentele unghiurilor  $B$  și  $C$  ale triunghiului verifică relația

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 2.$$

Să se calculeze unghiurile  $B$  și  $C$  în funcție de unghiul  $A$ .

## Numere complexe sub formă trigonometrică

23. Se dă un cerc cu centru în  $O$  și un diametru  $AB$  al lui. Să se determine o coardă să facă cu diametrul un unghi  $\alpha$  și să fie împărțit de el în raportul  $m$ .
24. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ortic în funcție de laturile triunghiului dat.
25. Să se calculeze intensitatea rezultantei a două forțe concurente care fac între ele un unghi de  $63^{\circ}40'$  și au intensitățile  $F_1 = 174,44\text{ N}$  și  $F_2 = 240,10\text{ N}$ .
26. În planul  $P$  se duce dreapta  $(d)$  care face cu proiecția pe planul  $P$  a unei oblice  $(\Delta)$  unghiul  $\beta$  ( $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ). Știind că dreapta  $(\Delta)$  face cu planul  $P$  unghiul  $\alpha$ , să se afle unghiul  $\varphi$  dintre dreptele  $(d)$  și  $(\Delta)$ .
27. Unghiurile plane ale unui triedru sunt egale cu  $\alpha, \beta, \gamma$ . Să se determine unghiurile diedre.
28. Într-o piramidă patrulateră regulată, unghiul diedru de la bază este egal cu  $\alpha$ . Prin muchia acestui diedru se duce un plan care formează cu planul bazei unghiul  $\beta$ . Să se determine aria secțiunii dacă latura bazei este  $a$ .
29. Într-o piramidă patrulaterală regulată este înscrișă o sferă de rază  $R$ . Să se determine aria laterală a piramidei, dacă unghiul diedru dintre fețele laterale este egal cu  $\alpha$ .
30. Să se afle aria totală a unui con a cărui generatoare  $G$  este inelatată pe planul bazei cu un unghi  $\alpha$ .
31. Pentru a calcula distanța dintre două puncte  $A$  și  $B$  între care se află un obstacol, se alege punctul  $C$  din care se văd punctele  $A$  și  $B$ . Distanțele  $AC, CB$  și unghiul  $\widehat{ACB}$  se pot măsura. Să se calculeze distanța  $AB$ , dacă  $AC = 320\text{ m}, CB = 400\text{ m}$  și  $\widehat{ACB} = 110^{\circ}21'$ .
32. Pentru a determina lățimea unui riu între două puncte  $A$  și  $B$ , pe prelungirea segmentului  $BA$  se alege punctul  $M$  din care se vede  $A$ . După aceea se alege punctul accesibil  $N$ . Știind că  $AM = 50\text{ m}, MN = 36\text{ m}, \widehat{BMN} = 74^{\circ}29'$  și  $\widehat{BNM} = 80^{\circ}56'$ , să se calculeze distanța  $AB$ .
33. Pentru a determina distanța dintre două puncte  $C$  și  $D$ , care nu se văd unul din celălalt, se alege pe teren dreapta  $DN$  și pe această dreaptă punctele  $A$  și  $B$  din care este vizibil punctul  $C$ . După aceea se măsoară distanțele  $DA = 836\text{ m}, AB = 513\text{ m}$  și unghiurile  $\widehat{DAC} = 54^{\circ}16'$  și  $\widehat{DBC} = 38^{\circ}43'$ . Să se determine distanța dintre punctele  $C$  și  $D$ .
34. Pentru a determina distanța dintre două puncte inaccesibile  $A$  și  $B$ , se măsoară distanța  $CD = 245\text{ m}$  și unghiurile  $\widehat{ACD} = 32^{\circ}14', \widehat{BCD} = 48^{\circ}23', \widehat{ADC} = 62^{\circ}7', \widehat{BDC} = 81^{\circ}17'$ . Să se calculeze distanța dintre punctele  $A$  și  $B$ .
35. Punctele  $A, B, C$  formează pe teren un triunghi echilateral cu latura  $a = 2,5\text{ km}$ . Să se calculeze distanța de la punctul  $M$ , situat în interiorul unghiului  $\widehat{ABC}$ , pînă la punctele considerate dacă din punctul  $M$  latura  $AB$  se vede sub unghiul  $\alpha = 22^{\circ}12'$ , iar latura  $BC$  se vede sub unghiul  $\beta = 10^{\circ}28'$ .  
Ind. Se aplică teorema sinusurilor în triunghiurile  $ABM, BCM$  și se determină unghiul  $\widehat{BCM}$ .

## § 25. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

**81. Planul complex.** Numerele de forma  $z = x + iy$ , unde  $x$  și  $y$  sunt numere reale, iar  $i = \sqrt{-1}$  și  $i^2 = -1$  se numesc *numere complexe*.

Din această definiție rezultă că numerele complexe  $x + iy$  cu  $y = 0$  sunt numere reale, deci dacă notăm cu  $R$  mulțimea numerelor reale și cu  $K$  mulțimea numerelor complexe, avem  $R \subset K$ .

Două numere complexe  $x_1 + iy_1$  și  $x_2 + iy_2$  sunt egale dacă și numai dacă  $x_1 = x_2$  și  $y_1 = y_2$ .

Am văzut<sup>1</sup> cum putem stabili o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor reale și mulțimea punctelor unei drepte.<sup>1</sup> Să arătăm acum cum putem stabili o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor complexe și mulțimea punctelor dintr-un plan.

Fie  $z = x + iy$  un număr complex. Să considerăm un plan pe care să-l raportăm la un sistem de două axe ortogonale  $Ox, Oy$ . Un punct  $M$  din acest plan este determinat de coordonatele  $x$  și  $y$  și reciproc. Ținând seama că  $z = x + iy$ , rezultă că există o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor complexe  $z$  și mulțimea punctelor  $M(x, y)$  din plan (fig. 92). Punctul  $M(x, y)$  se numește *imaginăria geometrică* a numărului  $z$ , iar  $z$  se numește *afixul punctului*  $M$ . Lungimea segmentului  $OM$  se numește *modulul* numărului complex  $z$  și se notează cu  $|z|$  sau  $r$ , iar unghiul orientat dintre axa  $Ox$  și vectorul  $\overrightarrow{OM}$  se numește *argumentul* numărului complex și se notează cu  $\arg z$  sau cu  $\varphi$ . Acest plan se numește *planul complex*.

Să considerăm acum vectorul  $\overrightarrow{OM}$ . Mărimile proiecțiilor acestui vector pe axele  $Ox$  și  $Oy$  sunt  $x$ , respectiv  $y$ . De aici rezultă că avem o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor complexe și mulțimea vectorilor din plan cu originea  $O$  (fig. 93).

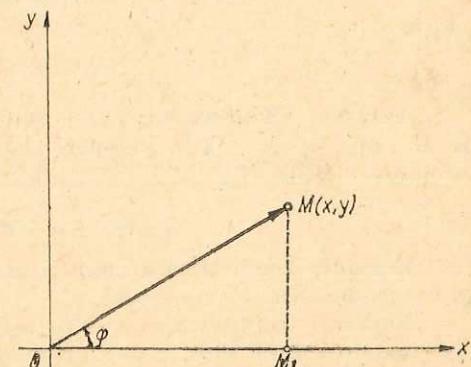


Fig. 92

<sup>1</sup> Algebra, anul I liceu.

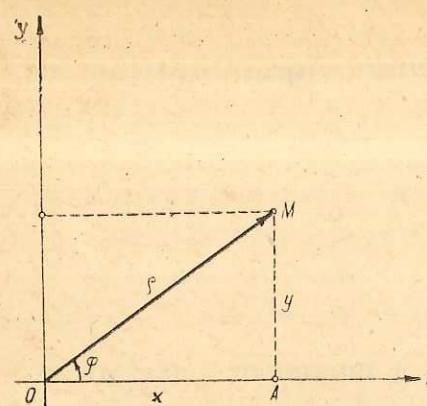


Fig. 93

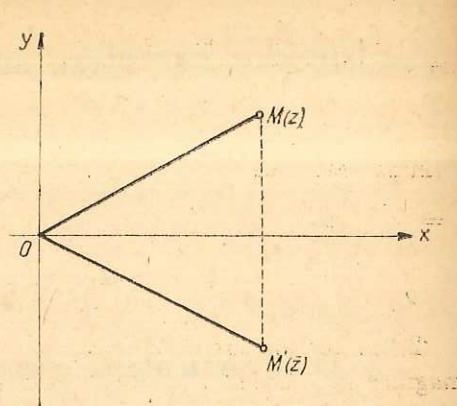


Fig. 94

**82. Forma trigonometrică a numărului complex.** Dacă notăm cu  $A$  proiecția punctului  $M$  pe axa  $Ox$ , din triunghiul dreptunghic  $OAM$  deducem:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}, \quad (1)$$

de unde rezultă:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Cu aceste valori ale lui  $x$  și  $y$ , numărul complex  $z$  se scrie sub forma

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Această formă a numărului complex se numește *forma trigonometrică a numărului complex*.

Din relațiile (1) deducem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

De asemenea, din triunghiul dreptunghic  $AOM$  deducem:

$$OM^2 = OA^2 + AM^2,$$

adică:

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Numărul complex  $x + iy$  se numește conjugatul numărului  $z = x + iy$  și se notează cu  $\bar{z}$ . Din definiția modulului și argumentului unui număr complex rezultă (fig. 94):

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$$

Imaginea geometrică a numărului  $z$  este simetrică față de axa  $Ox$  a imaginii geometrice a numărului  $z$ .

Numărul complex  $z = x + iy$  este nul dacă, și numai dacă,  $x = y = 0$ . De aici rezultă că dacă  $z = 0$ , atunci  $|z| = 0$  și reciproc.

Tinând seama de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, rezultă că două numere complexe  $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  și  $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  sunt egale dacă și numai dacă  $\rho_1 = \rho_2$  și  $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Să scriem acum sub forma trigonometrică cîteva numere complexe.

### Exemplu

1) Fie numărul complex  $z_1 = 1 - i$ . Imaginea geometrică a acestui număr este punctul  $M_1(1, -1)$  situat în cadranul IV (fig. 95, a). Avem:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -1$$

și tinind seama că  $M_1 \in$  cadran IV, rezultă că  $\varphi_1 = \frac{7\pi}{4}$ . De asemenea, avem  $\rho_1 = \sqrt{2}$ , deci:

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

2) Să scriem sub forma trigonometrică numărul complex  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ . Imaginea geometrică a acestui număr este punctul  $M_2(1, \sqrt{3})$  situat în cadranul I (fig. 95, b). Avem  $\operatorname{tg} \varphi_2 = \sqrt{3}$  și avind în vedere că  $M_2 \in$  cadran I deducem  $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ . De asemenea, avem  $\rho_2 = 2$  și deci:

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

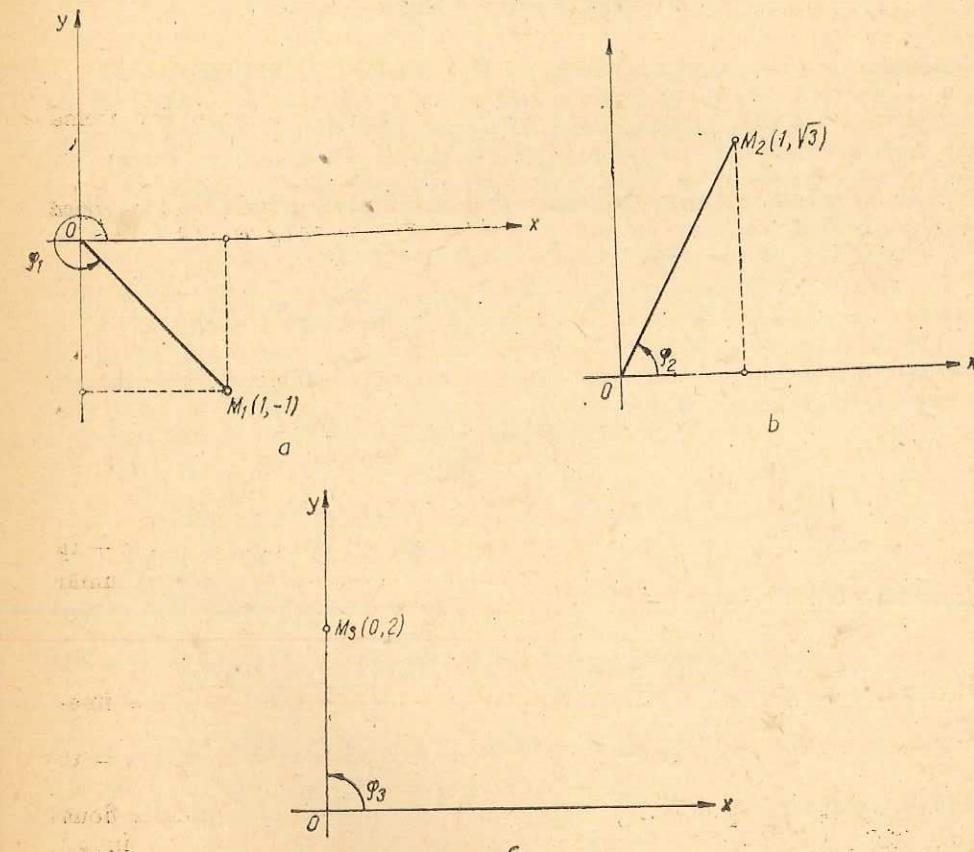


Fig. 95

## § 26. Operații cu numere complexe

3) Imaginea geometrică a numărului  $z_3 = 2i$  este punctul  $M_3(0, 2)$  situat pe axa  $Oy$ , adică  $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$  (fig. 95, c). De asemenea, avem  $\rho_3 = 2$  și deci:

$$z_3 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

4) Fie numărul complex  $z_4 = \sin \alpha - i \cos \alpha$ .

Avem:

$$\sin \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right); \quad \cos \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

adică:

$$z_4 = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Dar:  $\cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right)$  și  $\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\sin \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right)$ , deci

$$z_4 = \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

Rezultă:

$$|z_4| = 1, \arg z_4 = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

5) Să scriem sub forma trigonometrică numărul complex  $z_5 = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ). Avem:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

deci

$$z_5 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\text{Dar } \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right), \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right),$$

de unde deducem:

$$z_5 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right].$$

Având în vedere că  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , rezultă  $0 \leq \frac{\alpha}{2} \leq \pi$  și deci  $\sin \frac{\alpha}{2} \geq 0$ .

De aici rezultă că:

$$|z_5| = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \arg z_5 = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

**83. Adunarea și scăderea numerelor complexe.** Să considerăm acum două numere complexe  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

Avem:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

De aici rezultă că:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

adică adunarea numerelor complexe este o operație comutativă și asociativă.

Pentru a da o interpretare geometrică a adunării numerelor complexe, să considerăm punctele  $M_1(x_1, y_1)$  și  $M_2(x_2, y_2)$ , ale căror afixe sunt numerele complexe  $z_1$ , respectiv  $z_2$  și vectorii  $\overrightarrow{OM}_1$  și  $\overrightarrow{OM}_2$ . Notind cu  $M$  punctul care împreună cu  $O$ ,  $M_1$  și  $M_2$  formează un paralelogram (fig. 96), deducem că:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2.$$

De aici rezultă că vectorul  $\overrightarrow{OM}$  are ca proiecții pe axele de coordonate numerele  $x_1 + x_2$ , respectiv  $y_1 + y_2$ , deci punctul  $M$  are coordonatele  $x_1 + x_2$ ,  $y_1 + y_2$ . Rezultă că afixul punctului  $M$  este numărul complex  $z_1 + z_2$ .

Așadar corespondența biunivocă stabilită între mulțimea numerelor complexe și mulțimea vectorilor din plan se bucură de următoarea proprietate importantă:

Dacă numerelor complexe  $z_1$ ,  $z_2$  le corespund respectiv vectorii  $\overrightarrow{OM}_1$ ,  $\overrightarrow{OM}_2$ , atunci sumei  $z_1 + z_2$  îi corespunde vectorul sumă  $\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$ .

O astfel de corespondență biunivocă se numește *izomorfism*, iar despre mulțimea numerelor complexe și mulțimea vectorilor din plan se spune că sunt *izomorfe*. Se poate arăta că în acest caz orice proprietate a sumei vectorilor este, de asemenea, proprietate a sumei numerelor complexe (de exemplu comutativitatea și asociativitatea menționate mai sus).

Din triunghiul  $OM_1M$  deducem:

$$OM \leq OM_1 + M_1M$$

sau, ținând seama că  $M_1M = OM_2$ ,

Dar

$$OM = |z_1 + z_2|, \quad OM_1 = |z_1|, \quad OM_2 = |z_2|,$$

deci

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (4)$$

De asemenea, dacă considerăm numerele complexe  $z_1$  și  $z_2$ , avem:

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2).$$

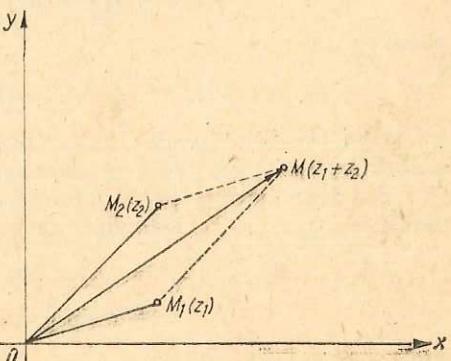


Fig. 96.

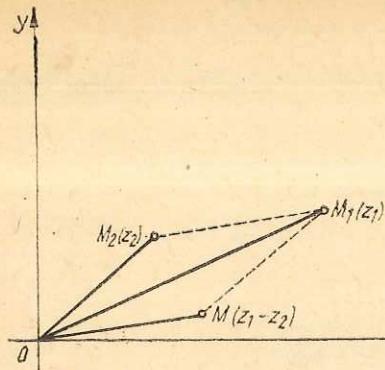


Fig. 97.

Între vectorii  $\overrightarrow{OM_1}$ ,  $\overrightarrow{OM_2}$  și  $\overrightarrow{M_2M_1}$  avem relația (fig. 97):

$$\overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1},$$

de unde rezultă:

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2},$$

deci vectorul  $\overrightarrow{M_2M_1}$  are ca proiecții pe axele de coordonate numeralele  $x_1 - x_2$  și  $y_1 - y_2$ . Dacă prin  $O$  vectorul  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_2M_1}$ ,

rezultă că figura  $OM_2M_1M$  este un paralelogram și  $M$  este tocmăi imaginea geometrică a numărului complex  $z_1 - z_2$ .

**84. Produsul numerelor complexe.** Produsul numerelor complexe  $z_1$  și  $z_2$  se face după regula de înmulțire a polinoamelor, înlocuind pe  $i^2$  cu  $-1$ , adică:

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

De aici rezultă că:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

adică înmulțirea numerelor complexe este comutativă, asociativă și distributivă față de adunarea numerelor complexe.

Să considerăm acum numerele complexe:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Făcând produsul acestor două numere, obținem:

$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$   
sau ținând seama de formulele de adunare a unghiurilor

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

adică

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (2)$$

Deci, modulul produsului a două numere complexe este egal cu produsul modуlor, iar argumentul produsului este egal cu suma argumentelor.

Să demonstrăm prin inducție completă că produsul a  $n$  numere complexe  $z_1, z_2, \dots, z_n$  este dat de formula:

$$z_1 z_2 \dots z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)], \quad (3)$$

unde am notat

$$\rho_k = |z_k|, \quad \varphi_k = \arg z_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Această formulă este adevărată pentru  $n = 2$ . Să presupunem că formula (3) este adevărată pentru  $n = p$  și să calculăm produsul numerelor complexe  $z_1, z_2, \dots, z_p, z_{p+1}$ . În acest caz, notind  $z = z_1 z_2 \dots z_p$ , avem  $|z| = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_p$ ,  $\arg z = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p$ . Cu această notație produsul numerelor  $z_1 z_2, \dots, z_{p+1}$  se scrie:

$$z_1 z_2 \dots z_p z_{p+1} = z z_{p+1}$$

și ținând seama de formula (2), rezultă:

$$|z_1 z_2 \dots z_{p+1}| = |z| |z_{p+1}|, \quad \arg(z_1 z_2 \dots z_{p+1}) = \arg z + \arg z_{p+1},$$

adică:

$$|z_1 z_2 \dots z_{p+1}| = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{p+1}, \quad \arg(z_1 z_2 \dots z_{p+1}) = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{p+1}$$

și deci formula (3) este demonstrată.

Pentru a da o interpretare geometrică înmulțirii numerelor complexe, să considerăm punctele  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  și  $E(1, 0)$ . Pe segmentul  $OM_2$  se construiește triunghiul  $OM_2M$  direct asemenea triunghiului  $OEM_1$  (fig. 98). Din asemănarea acestor triunghiuri rezultă:

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OM_1}} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OE_1}}, \quad \widehat{M_2OM} = \widehat{EOM_1}.$$

Dar

$$OE = 1, \quad OM_1 = \rho_1, \quad OM_2 = \rho_2$$

$$\widehat{EOM}_1 = \varphi_1, \quad \widehat{EOM}_2 = \varphi_2,$$

deci

$$\overrightarrow{OM} = \rho_1 \rho_2, \quad \widehat{EOM} = \varphi_1 + \varphi_2,$$

de unde rezultă că punctul  $M$  este imaginea geometrică a numărului complex  $z_1 z_2$ .

Să aplicăm acum aceste rezultate la un exemplu.

Să se determine produsul numerelor complexe

$$z_k = \cos \frac{\pi}{2^k} + i \sin \frac{\pi}{2^k}.$$

unde

$$k = 0, 1, \dots, n.$$

$$\text{Avem } |z_k| = 1 \text{ și } \arg z_k = \frac{\pi}{2^k},$$

deci notind:

$$z = z_0 z_1 \dots z_n,$$

avem

$$|z| = |z_0| |z_1| \dots |z_n| = 1$$

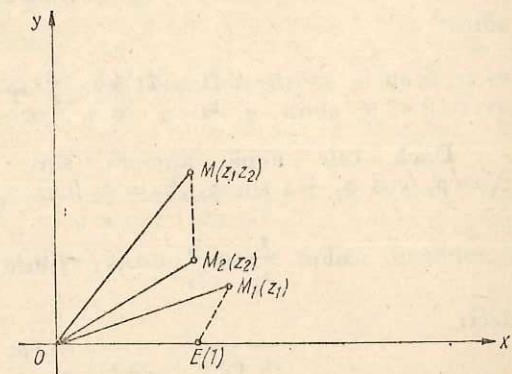


Fig. 98.

și

$$\arg z = \arg z_0 + \arg z_1 + \dots + \arg z_n = \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2^2} + \dots + \frac{\pi}{2^n}.$$

Dar

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}.$$

deci:

$$\arg z = \frac{\pi(2^{n+1} - 1)}{2^n}.$$

Rezultă că:

$$z = \cos \frac{(2^{n+1} - 1)\pi}{2^n} + i \sin \frac{(2^{n+1} - 1)\pi}{2^n}.$$

**85. Împărțirea numerelor complexe.** Fie acum numerele complexe  $z_1$  și  $z_2 \neq 0$ . Pentru a împărți numărul  $z_1$  la  $z_2$ , trebuie să determinăm un număr complex  $z = x + iy$  astfel încât:

$$z_1 = z_2 z.$$

Înmulțind această egalitate membru cu membru cu  $\bar{z}_2$ , obținem:

$$z_1 \bar{z}_2 = z_2 \bar{z}_2 z.$$

Dar  $z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2$  și ținând seama că  $z_2 \neq 0$ , adică  $|z_2| \neq 0$ , deducem:

$$z = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

sau:

$$z = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$

adică:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Dacă cele două numere sunt scrise sub formă trigonometrică  $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , această formulă devine:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

deci:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Ca și în cazul interpretării geometrice a înmulțirii numerelor complexe, să considerăm punctele  $M_1$ ,  $M_2$  și  $E$  să construim triunghiul  $OM_1 M$  direct asemenea cu triunghiul  $OM_2 E$  (fig. 99). Din asemănarea triunghiurilor rezultă:

$$\frac{OM}{OE} = \frac{OM_1}{OM_2}, \quad \widehat{MOM_1} = \widehat{EOM_2}.$$

Dar

$$OE = 1, \quad OM_1 = \rho_1, \quad OM_2 = \rho_2,$$

$$\widehat{EOM_1} = \varphi_1, \quad \widehat{EOM_2} = \varphi_2,$$

deci

$$OM = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \widehat{EOM} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

De aici rezultă că punctul  $M$  este imaginea geometrică a numărului complex  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**86. Puterea numerelor complexe.** Să luăm acum în formula (3)

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = \rho, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi.$$

Cu aceasta obținem:

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (4)$$

adică:

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \arg z.$$

Dar, pe de altă parte:

$$z^n = \rho^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$$

și formula (1) devine:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (5)$$

Aceasta este formula lui Moivre.<sup>1</sup>

Să demonstrăm că formula lui Moivre este adevărată și dacă  $n$  este un număr întreg negativ. Într-adevăr, dacă  $n = -p$  unde  $p > 0$ , atunci avem:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-p} = \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^p}.$$

Dar, ținând seama că  $p$  este un număr natural, putem aplica formula (5) și deci:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-p} = \frac{1}{\cos p\varphi + i \sin p\varphi}$$

<sup>1</sup> A. Moivre, matematician francez (1667—1754).

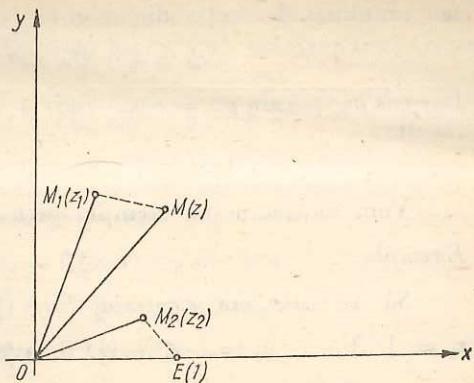


Fig. 99.

sau amplificind fractia din membrul doi cu conjugatul numitorului:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos p\varphi - i \sin p\varphi.$$

Dar  $\cos p\varphi - i \sin p\varphi = \cos(-p\varphi) + i \sin(-p\varphi)$  și avind în vedere că  $-p = n$ , rezultă:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Vom da acum un exemplu în care să aplicăm formula lui Moivre.

*Exemplu*

Să se calculeze expresia  $E = (\sqrt{3} - i)^8 (-1 + i\sqrt{3})^{11}$ . Dacă notăm  $z_1 = \sqrt{3} - i$ ,  $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ , avem  $|z_1| = 2$ ,  $\arg z_1 = \frac{11\pi}{6}$ ,  $|z_2| = 2$ ,  $\arg z_2 = \frac{2\pi}{3}$  deci:

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right), \quad z_2 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Aplicând formula lui Moivre, rezultă:

$$z_1^8 = 2^8 \left( \cos \frac{44\pi}{3} + i \sin \frac{44\pi}{3} \right), \quad z_2^{11} = 2^{11} \left( \cos \frac{22\pi}{3} + i \sin \frac{22\pi}{3} \right),$$

de unde:

$$E = 2^{19} (\cos 22\pi + i \sin 22\pi) = 2^{19}.$$

### Aplicații

1° Dacă în (5) luăm  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , obținem:

$$i^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (5')$$

Pentru  $n = 4m$  avem:

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \cos 2m\pi = 1, \quad \sin \frac{n\pi}{2} = \sin 2m\pi = 0.$$

Pentru  $n = 4m + 1$  avem:

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \cos \left( 2m\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad \sin \frac{n\pi}{2} = \sin \left( 2m\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

Pentru  $n = 4m + 2$  avem:

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \cos (2m\pi + \pi) = -1, \quad \sin \frac{n\pi}{2} = \sin (2m\pi + \pi) = 0.$$

Pentru  $n = 4m + 3$  avem:

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \cos \left( 2m\pi + \frac{3\pi}{2} \right) = 0, \quad \sin \frac{n\pi}{2} = \sin \left( 2m\pi + \frac{3\pi}{2} \right) = -1.$$

Cu aceste valori, formula (5') ne dă:

$$i^{4m} = 1, \quad i^{4m+1} = i, \quad i^{4m+2} = -1, \quad i^{4m+3} = -i, \quad (6)$$

unde  $m$  este un număr întreg.

2° Să presupunem acum că  $n$  este un număr natural și să dezvoltăm membrul întâi al egalității (5) după formula binomului lui Newton. Obținem:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos^n \varphi + i C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi + \\ + i^2 C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \dots + i^n C_n^n \sin \varphi.$$

Având în vedere formula (6), această relație se mai poate scrie:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \\ + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \dots + i(C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \\ - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots).$$

Cu aceasta, formula (5) ne dă:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots \\ \sin n\varphi = C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots \quad (7)$$

De aici rezultă:

$$\operatorname{tg} n\varphi = \frac{C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots}{\cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots}$$

sau împărțind și numărătorul și numitorul fracției din membrul al doilea  $\cos^n \varphi$ :

$$\operatorname{tg} n\varphi = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} \varphi - C_n^3 \operatorname{tg}^3 \varphi + C_n^5 \operatorname{tg}^5 \varphi - \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + C_n^4 \operatorname{tg}^4 \varphi - \dots} \quad (7')$$

De asemenea, din formulele (7) rezultă:

$$\operatorname{ctg} n\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^n \varphi - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2} \varphi + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4} \varphi - \dots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1} \varphi - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} \varphi + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5} \varphi - \dots}$$

Formulele (7), (7'), și (7'') ne dau funcțiile trigonometrice ale unghiului  $n\varphi$  în funcție de funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\varphi$ .

De exemplu, să determinăm funcțiile trigonometrice ale unghiului  $5\varphi$ . Din formulele (7), (7') și (7'') deducem:

$$\sin 5\varphi = 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi,$$

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi,$$

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5 \operatorname{tg} \varphi - 10 \operatorname{tg}^3 \varphi + \operatorname{tg}^5 \varphi}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 \varphi + 5 \operatorname{tg}^4 \varphi},$$

$$\operatorname{ctg} 5\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^5 \varphi - 10 \operatorname{ctg}^3 \varphi + 5 \operatorname{ctg} \varphi}{5 \operatorname{ctg}^4 \varphi - 10 \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1}.$$

87. Rădăcina de ordinul  $n$  dintr-un număr complex. Să considerăm acum numărul complex  $z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  și să determinăm rădăcina de ordinul  $n$  a lui. Pentru aceasta vom nota:

$$\sqrt[n]{\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Ridicînd această egalitate la puterea  $n$  și înînd seama de formula (4), obținem:

$$\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Numerele complexe din cei doi membri fiind egale, deducem:

$$r^n = \rho, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

adică:

$$r = \rho^{\frac{1}{n}}, \quad \theta = \frac{2k\pi + \varphi}{n}.$$

Deci:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{2k\pi + \varphi}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n} \right).$$

Dacă notăm:

$$\xi_k = \rho^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{2k\pi + \varphi}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n} \right),$$

atunci avem:

$$\xi_{n+k} = \rho^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \left( 2\pi + \frac{2k\pi + \varphi}{n} \right) + i \sin \left( 2\pi + \frac{2k\pi + \varphi}{n} \right) \right]$$

și înînd seama de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, deducem:

$$\xi_{n+k} = \xi_k.$$

Deci obținem valori distincte pentru rădăcinile de ordinul  $n$  al lui  $z$ , dînd lui  $k$  valorile  $0, 1, \dots, n-1$ .

Rezultă formula:

$$\sqrt[n]{z} = \rho^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{2k\pi + \varphi}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (8)$$

Cu notația de mai sus, rădăcinile de ordinul  $n$  ale numărului complex  $z$  sunt  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ . Avem:

$$|\xi_0| = |\xi_1| = \dots = |\xi_{n-1}| = \rho^{\frac{1}{n}},$$

deci imaginile geometrice ale rădăcinilor de ordinul  $n$  ale numărului  $z$  sunt situate la aceeași distanță de originea axelor de coordonate, deci se află pe

un cerc cu centrul în  $O$  și cu raza  $\rho^{\frac{1}{n}}$ .

Argumentele numerelor  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ , sunt respectiv;

$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

<sup>1</sup>  $\rho^{\frac{1}{n}}$  reprezintă rădăcina aritmetică.

De aici rezultă că dacă notăm cu  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$  imaginile geometrice ale punctelor  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ , atunci (fig. 100):

$$\begin{aligned} \overbrace{M_0OM_1} &= \overbrace{M_1OM_2} = \dots = \\ &= \overbrace{M_{n-2}OM_{n-1}} = \overbrace{M_{n-1}OM_0} = \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Deci imaginile geometrice ale rădăcinilor de ordinul  $n$  ale numărului complex  $z$  formează un poligon regulat

înscris în cercul  $O$  cu raza  $|z|^{\frac{1}{n}}$ .

În particular, să determinăm rădăcinile de ordinul  $n$  ale numerelor  $1$  și  $-1$ . Avem:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0, \text{ deci:}$$

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

De asemenea, avem:

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

decii:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Rădăcinile de ordinul  $n$  ale numărului  $1$  se numesc *rădăcinile de ordinul  $n$  ale unității*. Să demonstrăm următoarea proprietate a acestor rădăcini: orice putere întreagă a unei rădăcini de ordinul  $n$  a unității este o rădăcină de ordinul  $n$  a unității.

Într-adevăr dacă notăm

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

atunci avem:

$$\omega_k^p = \cos \frac{2kp\pi}{n} + i \sin \frac{2kp\pi}{n}.$$

Notînd cu  $k_1$  restul împărțirii numărului  $kp$  la  $n$ , putem scrie:

$$kp = mn + k_1,$$

unde  $0 \leq k_1 \leq n-1$ , deci:

$$\frac{2kp\pi}{n} = 2m\pi + \frac{2k_1\pi}{n},$$

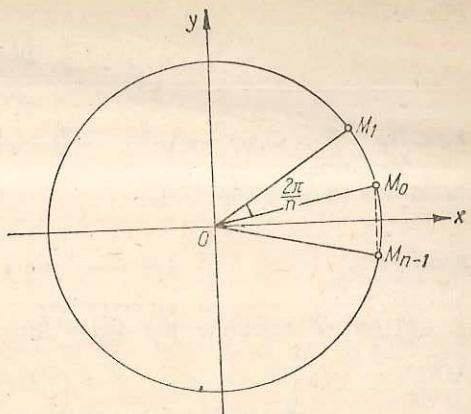


Fig. 100.

adică:

$$\omega_k^p = \cos \frac{2k_1\pi}{n} + i \sin \frac{2k_1\pi}{n}.$$

Rezultă  $\omega_k^p = \omega_{kj}$ , relație care demonstrează proprietatea enunțată.

Să aplicăm formula de extragere a rădăcinii dintr-un număr complex la cîteva cazuri particolare.

*Exemple*

1) Să se calculeze  $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$ .

Avem

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos \frac{\pi}{3}+i \sin \frac{\pi}{3}\right),$$

deci:

$$\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{4}+i \sin \frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{4}\right) (k=0,1,2,3).$$

Cele patru rădăcini sunt:

$$\zeta_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{\pi}{12}+i \sin \frac{\pi}{12}\right),$$

$$\zeta_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{7\pi}{12}+i \sin \frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\zeta_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{13\pi}{12}+i \sin \frac{13\pi}{12}\right),$$

$$\zeta_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{19\pi}{12}+i \sin \frac{19\pi}{12}\right).$$

2) Să se calculeze  $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$ .

Avem:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4}+i \sin \frac{\pi}{4}\right), \quad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4}+i \sin \frac{7\pi}{4}\right),$$

deci:

$$\frac{1+i}{1-i}=\cos \left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i \sin \left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos \frac{\pi}{2}+i \sin \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă:

$$\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}=\cos \frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}+i \sin \frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3} (k=0,1,2).$$

Cele trei rădăcini căutate sunt deci:

$$\zeta_1=\cos \frac{\pi}{6}+i \sin \frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$\zeta_2=\cos \frac{5\pi}{6}+i \sin \frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$\zeta_3=\cos \frac{3\pi}{2}+i \sin \frac{3\pi}{2}=-i.$$

88. Ecuății binome. O ecuație de formă:

$$z^n+a=0, \quad (9)$$

unde  $a$  este un număr complex, se numește *ecuație binomă*.

Pentru a rezolva o astfel de ecuație vom scrie numărul  $-a$  sub forma trigonometrică:

$$-a=\rho(\cos \varphi+i \sin \varphi).$$

Cu aceasta ecuația (9) devine:

$$z^n=\rho(\cos \varphi+i \sin \varphi),$$

de unde rezultă:

$$z=\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{2k\pi+\varphi}{n}+i \sin \frac{2k\pi+\varphi}{n}\right) (k=0,1,\dots,n-1).$$

Deci cele  $n$  rădăcini ale ecuației (9) sunt:

$$z_k=\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{2k\pi+\varphi}{n}+i \sin \frac{2k\pi+\varphi}{n}\right) (k=0,1,\dots,n-1),$$

unde:

$$\rho=|-a|, \varphi=\arg (-a).$$

Să rezolvăm acum cîteva ecuații binome.

*Exemple*

1) Să se rezolve ecuația:

$$(2-3i)z^6+1+5i=0.$$

Această ecuație se poate scrie sub formă:

$$z^6=-\frac{1+5i}{2-3i}$$

sau

$$z^6=1-i.$$

Tinind seama că  $1-i=\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4}+i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$ , ecuația dată devine:

$$z^6=\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4}+i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$$

de unde deducem că rădăcinile ecuației sunt:

$$z_k = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{6} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{6} \right) (k = 0, 1, \dots, 5).$$

2) Să se rezolve ecuația:  $\left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)^4 = \frac{1+ai}{1-ai}$ ,

unde  $a$  este un număr real pozitiv.

Notind  $\rho = \sqrt{1+a^2}$ ,  $\varphi = \arctg a$ , deducem:

$$1+ai = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$1-ai = \rho [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)],$$

deci:  $\frac{1+ai}{1-ai} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$

și ecuația dată se scrie:  $\left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)^4 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$ ,

de unde deducem:

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \cos \frac{k\pi + \varphi}{2} + i \sin \frac{k\pi + \varphi}{2} (k = 0, 1, 2, 3).$$

De aici obținem:

$$z = \frac{\sin \frac{k\pi + \varphi}{2} + \left( 1 - \cos \frac{k\pi + \varphi}{2} \right)}{1 + \cos \frac{k\pi + \varphi}{2} + i \sin \frac{k\pi + \varphi}{2}}.$$

Dar:

$$1 - \cos \frac{k\pi + \varphi}{2} = 2 \sin^2 \frac{k\pi + \varphi}{4}, \quad 1 + \cos \frac{k\pi + \varphi}{2} = 2 \cos^2 \frac{k\pi + \varphi}{4},$$

$$\sin \frac{k\pi + \varphi}{2} = 2 \sin \frac{k\pi + \varphi}{4} \cos \frac{k\pi + \varphi}{4},$$

deci:

$$z = \frac{2 \sin \frac{k\pi + \varphi}{4} \left( \cos \frac{k\pi + \varphi}{4} + i \sin \frac{k\pi + \varphi}{4} \right)}{2 \cos \frac{k\pi + \varphi}{4} \left( \cos \frac{k\pi + \varphi}{4} + i \sin \frac{k\pi + \varphi}{4} \right)},$$

adică:

$$z = \tg \frac{k\pi + \varphi}{4} (k = 0, 1, 2, 3).$$

Cele patru rădăcini ale ecuației date sunt deci:

$$z_1 = \tg \frac{\varphi}{4}, \quad z_2 = \tg \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right), \quad z_3 = \tg \left( \frac{2\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right), \quad z_4 = \tg \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right)$$

Sau:  $z_1 = \tg \frac{\varphi}{4}, \quad z_2 = \frac{1 + \tg \frac{\varphi}{4}}{1 - \tg \frac{\varphi}{4}}, \quad z_3 = -\ctg \frac{\varphi}{4}, \quad z_4 = \frac{\tg \frac{\varphi}{4} - 1}{\tg \frac{\varphi}{4} + 1}$

### Exerciții

1. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe:

a)  $-1-i$ ; b)  $\sqrt{3}-i$ ; c)  $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ ; d)  $1+\cos \alpha - i \sin \alpha$ .

2. Să se facă produsul următoarelor numere complexe, scriindu-le sub formă trigonometrică:

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2 - 2i, \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

3. Să se calculeze expresia:

$$\frac{(\sqrt{3}+i)(\sin \alpha - i \cos \alpha)}{(-1+i)(\sin \alpha + i \cos \alpha)}.$$

4. Să se determine modulele și argumentele următoarelor numere complexe:

$$z_1 = (1-i\sqrt{3})^6, \quad z_2 = (\sqrt{3}+i)^4, \quad z_3 = \frac{(1+i)^8}{(\sqrt{3}+i)^3}.$$

5. Să se arate că:

$$\left( \frac{1+i \tg \alpha}{1-i \tg \alpha} \right)^n = \frac{1+i \tg n\alpha}{1-i \tg n\alpha}.$$

6. Să se calculeze suma:

$$\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{\cos \frac{2\pi}{4}}{2^2} + \dots + \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{2^n}.$$

7. Să se demonstreze formula:

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

8. Să se calculeze următorii radicali:

a)  $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$ ; b)  $\sqrt[4]{1+i}$ ; c)  $\sqrt[3]{1+\cos 2x + i \sin 2x}$   
 $\left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$ .

9. Să se rezolve următoarele ecuații binome:

a)  $z^3 - 27 = 0$ ; b)  $z^4 + 625 = 0$ ;  
c)  $z^3 - i = 0$ ; d)  $(2-i)z^3 - 3 - i = 0$ .

10. Să se rezolve ecuația:

$$z^8 - 2z^4 + 2 = 0.$$

## Probleme recapitulative

Ind. Funcția admite perioada  $2\pi$  și

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{dacă } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 0 & \text{dacă } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi], \\ -\sin 2x & \text{dacă } x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

7. Să se determine modulul numărului complex:

$$z' = \left[ 1 + \left( \frac{1+i}{2} \right)^{2^0} \right] \left[ 1 + \left( \frac{1+i}{2} \right)^{2^1} \right] \left[ 1 + \left( \frac{1+i}{2} \right)^{2^2} \right] \cdots \left[ 1 + \left( \frac{1+i}{2} \right)^{2^n} \right]$$

Ind. Notind  $\frac{1+i}{2} = z$ , obținem succesiv:

$$\begin{aligned} z' &= (1+z)(1+z^2)(1+z^{2^2}) \cdots (1+z^{2^n}) = \\ &= \frac{(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^{2^2}) \cdots (1+z^{2^n})}{1-z} = \\ &\Rightarrow \frac{(1-z^2)(1+z^2)(1+z^{2^2}) \cdots (1+z^{2^n})}{1-z} = \frac{(1-z^4)(1+z^{2^2}) \cdots (1+z^{2^n})}{1-z} = \\ &\cdots = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}, \end{aligned}$$

de unde

$$z' = \begin{cases} \frac{5}{4}(1+i), & \text{dacă } n=1, \\ \left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)(1+i), & \text{dacă } n>1. \end{cases}$$

8. Să se stabilească relația:

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \cdots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}.$$

Ind. Ecuatia binomă  $x^{2n+1} - 1 = 0$  are rădăcinile

$$x_k = \cos \frac{2\pi k}{2n+1} + i \sin \frac{2\pi k}{2n+1} \quad (k=0, 1, \dots, 2n),$$

iar  $\sum_{k=0}^{2n} x_k = 0$ , de unde rezultă că suma părților reale  $\sum_{k=0}^{2n} \cos \frac{2\pi k}{2n+1}$  este nulă.

$$\begin{aligned} \text{Însă } \sum_{k=0}^{2n} \cos \frac{2\pi k}{2n+1} &= 1 + \left( \cos \frac{2n \cdot 2\pi}{2n+1} + \cos \frac{1 \cdot 2\pi}{2n+1} \right) + \\ &+ \left( \cos \frac{(n-1) \cdot 2\pi}{2n+1} + \cos \frac{2 \cdot 2\pi}{2n+1} \right) + \cdots + \left( \cos \frac{(n+1) \cdot 2\pi}{2n+1} + \cos \frac{n \cdot 2\pi}{2n+1} \right) = \\ &= 1 - 2 \left[ \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} + \cdots + \cos \frac{1 \cdot \pi}{2n+1} \right]. \end{aligned}$$

Mai departe se ține seama în ultima expresie de relația:

$$\cos \frac{[2n-(2k-1)]\pi}{2n+1} = -\cos \frac{k \cdot 2\pi}{2n+1} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

1. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos^3 ka - \cos^3 \left(\frac{2\pi}{3} - ka\right)}{\cos ka + \cos \left(\frac{\pi}{3} + ka\right)} = \frac{3}{4}n.$$

Ind. Termenul de rangul  $k$  al sumei precedente, este egal cu  $\frac{3}{4}$ .

2. Să se determine constantele  $a, b, c$  astfel ca expresia  $E = a \sin x \cos x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + b \sin^2 x \cos^2 x (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) + (c-2) \sin^4 x \cos^4 x (\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x) + 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  să nu depindă de  $x$ .

Ind. Notind  $\sin^2 2x = t$ , după transformări, se obține:

$$E(t) = (c-2)t^2 - \frac{1}{2}(b+2c-1)t + a+b+c, \text{ de unde: } c=2, b=-3,$$

iar  $a$  este arbitrar.

3. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\left| \frac{\sin x - \cos x}{1 - \sin x \cos x} \right| \leq 1.$$

Ind. Cu ajutorul substituției  $\sin x - \cos x = t$ , inegalitatea devine  $\frac{2|t|}{t^2 + 1} \leq 1$ .

4. Să se arate că funcția  $f(x) = \cos \alpha x + \cos x$ , unde  $\alpha$  este un număr irațional, nu este periodică.

Ind. Presupunând că  $f(x)$  admite perioada  $T$ , pentru  $x=0$  se obține ecuația  $\cos \alpha T + \cos T = 2$  care nu admite soluții dacă  $T > 0$  și  $\alpha$  este irațional.

5. Să se demonstreze că funcția:

$$f(x) = x - \sin x$$

este strict monotonă.

Ind.  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) - 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2}$  și dacă  $x_2 > x_1$ , atunci

$$\left| 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \right| < x_2 - x_1.$$

6. Să se traseze graficul funcției:

$$f(x) = |\sin x| \cos x + |\cos x| \sin x.$$

9. Să se rezolve inecuația:

$$a \sin x > a \cos x, \text{ unde } a > 0.$$

*Ind.* Dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $a \sin x > a \cos x \Leftrightarrow \sin x < \cos x$ ; dacă  $1 < a$ , atunci  $a \sin x > a \cos x \Leftrightarrow \sin x > \cos x$ .

10. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3.$$

*Ind.* Cu ajutorul identității

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(xy + yz + zx)(x + y + z),$$

ecuația dată se scrie sub forma  $\sin \frac{3x}{2} \sin 2x \sin \frac{5x}{2} \cos x \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ .

11. Să se rezolve ecuația:

$$(1 - \alpha) \cos 4x - 2(5 - 2\alpha) \cos 2x + 5\alpha + 13 = 0$$

și să se discute după valoarea parametrului  $\alpha$ .

*Ind.* Pentru  $\alpha = 4$  ecuația nu admite soluții; pentru  $\alpha \neq 4$  se obține ecuația echivalentă

$$\cos 2x = \frac{\alpha + 2}{-\alpha + 1} \text{ care admite soluții pentru}$$

$$-1 \leq \frac{\alpha + 2}{-\alpha + 1} \leq 1, \text{ de unde } \alpha \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right].$$

12. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 + 2x \cos(k\pi x) + 1 = 0. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

*Ind.* Ecuația echivalentă  $\cos(k\pi x) = -\frac{x^2 + 1}{2x}$  admite soluții numai dacă  $|x| = 1$ .

Se obține soluția  $x = 1$  pentru  $k$  impar și  $x = -1$  pentru  $k$  par.

13. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x = \frac{1}{4}.$$

14. Să se rezolve ecuația:

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = -\frac{1}{2}.$$

*Ind.* Înmulțind ambii membri ai ecuației cu  $2 \sin x$  și transformând produsele obținute în sume, sau ținând seama de exercițiul 7 din cap. VI, se obține ecuația echivalentă  $\sin \frac{2n+1}{2} x = 0$  ( $x \neq k\pi$ ), de unde  $x = k \frac{2\pi}{2n+1}$  ( $k$  este un număr întreg arbitrar, nedivizibil cu  $2n+1$ ).

Pentru oricare din aceste valori ale lui  $k$  este deci valabilă egalitatea

$$\sum_{l=1}^m \cos \frac{k2\pi}{2n+1} l = -\frac{1}{2}, \text{ care constituie o generalizare a ex. 8.}$$

15. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2 \cos x \cos 3y = a + \frac{1}{a} \\ 2 \sin x \sin 3y = 1 - a. \end{cases}$$

*Ind.* Fiindcă  $|2 \cos x \cos 3y| \leq 2$ , iar  $|a + \frac{1}{a}| \geq 2$ , sistemul poate să aibă soluții numai pentru  $|a| = 1$ . Dacă  $a = -1$  sistemul este incompatibil, dacă  $a = 1$  se obțin soluțiile  $x = (l+k)\pi$ ,  $y = (l-k)\frac{\pi}{3}$  ( $l, k \in \mathbb{Z}$ ).

16. Să se arate că dacă  $A, B, C$  sunt unghiurile unui triunghi, atunci

$$\cos A + \cos B + \cos C < 2.$$

*Ind.* Scriind sistemul stîng sub forma:

$$\cos A + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

și observînd că se poate considera  $A \leq 60^\circ$ , prin majorări succesive, se obține inegalitatea dată.

17. Fiind dat un dreptunghi de dimensiuni  $a$  și  $b$ , să se construiască un alt dreptunghi de arie  $m^2$ , astfel ca vîrfurile primului să fie situate pe laturile celui de-al doilea.

*Ind.* Notînd că unghiul dintre două laturi ale dreptunghiurilor considerate, se obține  $\sin 2\alpha = \frac{2(m^2 - ab)}{a^2 + b^2}$

Construcția este posibilă pentru  $\sqrt{ab} \leq m \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ .

18. O piramidă patrulateră regulată cu latura bazei egală cu  $a$  și unghiul diedru de la bază egal cu  $2\alpha$  se secționează cu planul bisector al diedrului de la bază. Să se calculeze aria secțiunii.

*Ind.* Se consideră planul determinat de vîrful piramidei și de mijloacele a două laturi opuse ale bazei. Aria secțiunii este dată de relația  $S = a^2 \cdot \frac{\sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^3 3\alpha}$ .

19. Într-un con se înscrie un cilindru a cărui înălțime este egală cu raza bazei conului. Să se determine unghiul format de axa conului cu generatoarea sa, dacă raportul dintre aria totală a cilindrului și aria bazei conului este egal cu  $\frac{3}{2}$ .

*Ind.* Notînd că unghiul căutat, cu  $R$  raza bazei conului, iar cu  $r$  raza bazei cilindrului, se obține relația  $2 \left(1 + \frac{r}{R}\right) \frac{r}{R} = \frac{3}{2}$  care conduce la ecuația  $4 \operatorname{tg}^2 \alpha - 12 \operatorname{tg} \alpha + 5 = 0$ .

Soluția acceptabilă este  $\alpha = \arctg \frac{1}{2}$ .

20. Să se descompună o forță  $\vec{F}$  în două componente  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  dacă  $\frac{F_2}{F_1} = \frac{3}{4}$  și  $\widehat{(\vec{F}_2, \vec{F})} = \widehat{(\vec{F}_1, \vec{F})} = 2\widehat{(\vec{F}_1, \vec{F})}$ .

Ind. Notând  $\widehat{(\vec{F}_1, \vec{F})} = \alpha$  și folosind teorema sinusurilor, se obține ecuația  $3 \sin 2\alpha - 4 \sin \alpha = 0$  cu soluția nebanală  $\alpha = \arccos \frac{2}{3}$ .

Mai departe, intensitățile forțelor  $F_1$  și  $F_2$  sunt date de soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{F_2}{F_1} = \frac{3}{4}, \\ F_2^2 = F^2 + F_1^2 - 2FF_1 \cos \alpha, \end{cases}$$

adică  $F_1 = 4\lambda$ ,  $F_2 = 3\lambda$ , unde  $\lambda = \frac{1}{3}F$ ,  $\frac{3}{7}F$ .

## Capitolul I

1. a)  $20^\circ$ ,  $\frac{\pi}{10}$ ; c)  $156^\circ$ ,  $\frac{39\pi}{50}$ . 2. a)  $\frac{1}{3}$ ; c)  $\frac{1}{20}$ ; 5,5. 3.  $\frac{4\pi}{5}$ ,  $4 \cdot \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{12}$ . 6. a)  $720^\circ$ ,  $4\pi$ ; c)  $225^\circ$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ . 7. a)  $36^\circ$ ; c)  $390^\circ$ . 8. b)  $97^\circ 24'$ ; d)  $-148^\circ 59'$ . 9. 6,53 m. 10.  $95,5^\circ$ . 11. a)  $\frac{2\pi}{3}$ ; c)  $\frac{8\pi}{9}$ . 12.  $\omega = 10\pi$  rad/s. 13. 404. 14. 9 s. 15. după 12 min; 1 oră 24 min;  $12(2n-1)$  min. 16. după 3 min; 27 min;  $3(4n-3)$  min.

## Capitolul II

1. a)  $17^2 = 15^2 + 8^2$ ;  $\sin \alpha = \frac{15}{17}$  etc. 6. a)  $\frac{20}{29}$ ,  $\frac{21}{29}$ ,  $\frac{20}{21}$ ,  $\frac{24}{20}$ . 7. 14 cm, 48 cm. 8.  $5\sqrt{29}$  cm. 9.  $\frac{5}{4} \cdot 10 \cdot \frac{60}{169}$ . 11. a) 3,5; c)  $5\sqrt{\frac{3}{3}}$ ; e) 2. 12.  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ . 13.  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ . 14.  $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{3}$ . 15.  $|\overrightarrow{AB}| = 3$ ,  $AB = 3$ ;  $|\overrightarrow{CD}| = 1$ ,  $CD = -1$ . 16.  $AB + BA = 0$ ,  $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BA}| = 4$ . 17. a) nu; b) nu; c) da. 18. d) 19.  $-\frac{d}{2}$ . 24. b) Ind.  $-500^\circ = -2 \cdot 360^\circ + 220^\circ$ ; d)  $-\frac{42\pi}{5} = -42\pi - \frac{2\pi}{5}$ . 25.  $\frac{3}{2}$ . 26.  $-5\sqrt{3}$ , 0,  $0, \frac{2}{3}$ . 27. 0. 28.  $\pi - 1$ ,  $-(\pi + 1)$ . 29. a)  $\sin 38^\circ$ ; c)  $\sin(30^\circ + \alpha)$ . 30. b)  $89^\circ$ ; d)  $\cos\left(120^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ . 31. a)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{22}$ ; c)  $\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\alpha}{4}\right)$ . 32. a)  $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ ; c)  $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ . 33. a)  $45^\circ 30' + 44^\circ 30' = 90^\circ$ . 34. a) R; b)  $R - \left\{ \frac{k}{\pi} \right\}$ ; c)  $R - \left\{ \left( \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) \cup (2k\pi) \right\}$ . 37. a)  $\pi$ ; b)  $\pi$ . 38. a) pară; b) impară; c) nici pară, nici impară; d) impară; e) nici pară, nici impară; f) pară. 29. a) strict crescătoare; b) strict descrescătoare; c) nu. 40. a)  $y \in [-1, 3]$ ; b)  $y \in [1, 7]$ ; c)  $y \in [1, 3]$ . 41. a)  $x \in [-2, 2]$ ; b)  $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ ; c)  $x \in [0, 1]$ ; d)  $x \in [-1, 3]$ ; e)  $x \in R - \{-1\}$ . 42.  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{3}$ , 0,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ . 43.  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{11\pi}{2}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ . 44. a)  $y \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right]$ ; b)  $y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{8\pi+3}{12}\right]$ . 45. a)  $-$ ; b)  $+$ ; c)  $-$ . 47. a)  $+$ ; c)  $-$ ; e)  $+$ . 48. a)  $+$ ; c)  $+$ ; e)  $-$ . 50.  $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ .

51.  $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ; 52.  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ ; 53.  $x \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ .

55. a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; c)  $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}$ . 56. a) 1,0,  $\operatorname{tg} 450^\circ$   
nu există, 0; c)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1$ . 57.  $-1,2$ .

58. a)  $\frac{6+\sqrt{6}}{6}$ ; b) 0; c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; d)  $\cos 32^\circ = \sin 32^\circ$ .

### Capitolul III

1.  $\frac{36}{85}, \frac{84}{85}, 2, \frac{3}{5}; -\frac{44}{125}$ . 3.  $-\frac{36}{77}, 4, \frac{a-4}{a+1}, 5, \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}, 6, -\frac{31}{25\sqrt{2}}$ . 7.  $\sin \beta \sin(\alpha+3)$ .

13.  $-\frac{336}{625}, -\frac{527}{625}, \frac{336}{527}$ . 14.  $-\frac{123}{845}, -\frac{116}{845}$ . 15.  $\frac{3}{4}$ . 16.  $-\frac{24}{25}$ . 22.  $\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}; -\frac{5}{12}$ .

23.  $\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}$ . 24.  $\frac{15}{17}, \frac{8}{17}, \frac{15}{8}$ . 26. a)  $\cos 16^\circ$ ; b)  $\sqrt{3} \cos 7^\circ$ ; c)  $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{8}$ .

d)  $-\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8}$ ; e)  $2 \sin 27^\circ 30' \cos 16^\circ 30'$ ; f)  $-\sin 4^\circ$ . 27. a)  $-\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 34^\circ \cos 26^\circ}$ ;  
b)  $\frac{\sin 50^\circ}{\sin 31^\circ \sin 19^\circ}$ ; c)  $\frac{1}{2 \cos \frac{7\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}}$ ; d)  $-\frac{\sqrt{3}}{2 \sin \frac{5\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}}$ . 28. a)  $\operatorname{tg} 2x$ ; b)  $\operatorname{tg} 5x$ .

29.  $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos 4\alpha \cos 3\alpha \cos \alpha}$ . 30.  $\frac{4}{3} \sin(\alpha - 30^\circ) \sin(\alpha + 30^\circ)$ . 33.  $2 \cos 10^\circ + \cos 30^\circ$ .

34.  $\sin 2(a-b) + \sin 2(b-c) + \sin 2(c-a)$ .

### Capitolul IV

1. a)  $\alpha = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$ ; c)  $\alpha = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k\pi$ . 2. a)  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ; c)  $\alpha = \pm \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ; d)  $\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$ . 3. a)  $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ; b)  $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ; d)  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

4. a)  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + k\pi$ ; c)  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ . 5. a)  $\pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ;

c)  $k \cdot 2\pi$ ; 6. a)  $k\pi$ ; c)  $\frac{\pi}{3} + k\pi$ ; 7.  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$ . 8.  $-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ .

9.  $-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ . 12. nu. 13. nu. 14. a) da; b) nu; c) da; 15. a)  $(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\pi}{3}$ ;

b)  $(3k+1)360^\circ - 1^\circ$ ; c)  $k \frac{\pi}{4}$ ; d)  $k \cdot 60 + 45^\circ$ ; e)  $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ . 16. a)  $\{30^\circ + k \cdot 180^\circ\} \cup$

$\{-90^\circ + k \cdot 180^\circ\}$ ; b)  $\{90^\circ + k \cdot 180^\circ\} \cup \{-51^\circ + k \cdot 180^\circ\}$ ; c)  $k\pi$ ; d)  $\operatorname{arctg} 4 + k\pi$ ;

e)  $\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3}$ ; f)  $k \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ . 17. a)  $\left\{k \frac{2\pi}{3}\right\} \cup \left\{(2k+1) \frac{\pi}{7}\right\}$ ; b)  $\left\{k \frac{3\pi}{5}\right\} \cup \left\{(2k+1) \frac{3\pi}{8}\right\}$ ;

c)  $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ . 18. a)  $\{5^\circ + k \cdot 90^\circ\} \cup \{k \cdot 45^\circ\}$ ; b)  $(2k+1) \frac{\pi}{2}$ ; c)  $\left\{\frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$ .

19. a)  $-20^\circ + k \cdot 120^\circ$ ; b)  $\frac{\pi}{16} + k \frac{\pi}{2}$ . 20. a)  $\{30^\circ + k \cdot 180^\circ\} \cup \{-15^\circ + k \cdot 90^\circ\}$ .

b)  $\frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{3}$ ; c)  $-10^\circ + k \cdot 90^\circ$ ; d)  $\left\{(2k+1) \frac{\pi}{12}\right\} \cup \left\{(2k+1) \frac{\pi}{4}\right\} = \left\{(2k+1) \frac{\pi}{12}\right\}$ .

21. a)  $\left\{\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\pm \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$ ; b)  $\pm \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{4}$ . 22. a)  $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} \cup$

$\left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$ ; b)  $(-1)^k \cdot \operatorname{arcsin} \frac{1}{4} + k\pi$ ; c)  $\{(2k+1)\pi\} \cup \left\{\pm \arccos \frac{1}{4} + k \cdot 2\pi\right\}$ ;

d)  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ; e)  $\pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ . 23. a)  $-\frac{\pi}{6} + k\pi$ ; b)  $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 7 + k\pi\}$ ;

c)  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ; d)  $\left\{\operatorname{arctg} \left(-\frac{5}{3}\right) + k\pi\right\}$ ; d)  $\{k\pi\} \cup \{k\pi + \operatorname{arctg} \frac{15}{8}\}$ ; e)  $\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ .

24.  $k \cdot 2\pi$ ; b)  $-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ . 25. a)  $\{2k\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}$ ; b)  $k\pi + (-1)^k \cdot \operatorname{arcsin} \frac{2}{5} - \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ ,  
c)  $(-1)^k \frac{1}{3} \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{5}}{5} + k \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 2$ . 26. a)  $k\pi - \frac{\pi}{20} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$ ;

b)  $k\pi + (1)^k \operatorname{arcsin} \frac{6}{\sqrt{41}} + \operatorname{arctg} \frac{5}{4}$ . Ecuatia  $4 \sin x - 5 \cos x = 7$  nu admite solutii;

c)  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ . 27.  $30^\circ$  și  $150^\circ$ . 28. a)  $\left\{k \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}$ ; b)  $k\pi$ ;

c)  $\left\{(2k+1) \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{k \frac{2\pi}{7} \pm \frac{\pi}{42}\right\}$ ; d)  $k \frac{\pi}{3}$ . Se tine seamă de incluziunea  $\left\{k \frac{\pi}{3}\right\} \supset \{k\pi\}$ ,

29. a)  $k \frac{\pi}{4}$ ; b)  $\{k2\pi\} \cup \{k4\pi \pm \frac{2\pi}{3}\}$ ; c)  $k \frac{\pi}{3}$ ; d)  $\{k\pi\} \cup \left\{(2k+1) \frac{\pi}{3}\right\}$ ; e)  $\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ .

30. a)  $\left\{k \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right\} \cup \left\{k2\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right\}$ ; b)  $\{k \cdot 180^\circ\} \cup \{45^\circ + k \cdot 180^\circ\}$  c)  $\{k2\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} \cup$

$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$ ; 31. a)  $\left\{(2k+1) \frac{\pi}{8}\right\} \cup \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\}$ ; b)  $\left\{(2k+1) \frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{(2k+1) \frac{\pi}{6}\right\}$ ;

32. a)  $x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  $y = k \cdot 180^\circ$  și  $x = k \cdot 180^\circ$ ,  $y = -60^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  
 $\pm 1,344 + k2\pi$ . 33. a)  $x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,  $y = k \cdot 180^\circ$  și  $x = k \cdot 180^\circ$ ,  $y = -60^\circ + k \cdot 180^\circ$ ,

b)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $y = -\frac{\pi}{4} - k\pi$ ; c)  $x = -\frac{\pi}{6} + (k_1 + k_2)\pi$ ,  $y = (k_1 - k_2)\pi$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + (k_1 + k_2)\pi$ ,

$y = \pm \frac{2\pi}{3} + (k_1 - k_2)\pi$ ;  $x = \frac{7\pi}{6} + (k_1 + k_2)\pi$ ,  $y = (k_1 - k_2)\pi$ ; d) Dacă  $|2b + \cos a| \leq 1$ ,

atunci  $x = \frac{1}{2} [a \pm \operatorname{arccos}(2b + \cos a)] + k\pi$ ,  $y = \frac{1}{2} [a \mp \operatorname{arccos}(2b + \cos a)] - k\pi$ .

34.  $\cos(x+y) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$ . 35.  $\left(x_1 = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + k2\pi, y_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + k'\pi\right)$  și

$\left(x_2 = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + k2\pi, y_2 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + k'\pi\right)$ ,  $k$  și  $k'$  fiind numere întregi

arbitrare. 36.  $\left(x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = -\frac{1}{2}\right)$ ;  $\left(x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = -\frac{1}{2}\right)$ ;  $(x_3 = 1, y_3 = 0)$ ;  $(x_4 = -1, y_4 = 0)$ ;  $(x_5 = 0, y_5 = 1)$ ;  $(x_6 = 0, y_6 = -1)$ . 37.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{2} - l\pi$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ).

## Capitolul V

1.  $b=250$ ,  $c=575$ ,  $C=66^\circ 30'$ .
2.  $a=427,1$ ,  $c=277,5$ ,  $C=40^\circ 32'$ .
3.  $c=18,25$ ,  $B=53^\circ 30'$ ,  $C=36^\circ 30'$ .
4.  $a=35,34$ ,  $B=34^\circ 53' 44''$ ,  $C=55^\circ 6' 16''$ .
5.  $a=403,34$ ,  $c=245,54$ ,  $B=52^\circ 30'$ ,  $C=37^\circ 30'$ .
6.  $b=180$ ,  $c=135,6$ ,  $B=53^\circ 7' 49''$ ,  $C=36^\circ 52' 11''$ .
7.  $b=11,8$ ,  $c=14,2$ ,  $A=67^\circ$ .
10.  $c=7,46$ ,  $B=46^\circ 39'$ ,  $C=25^\circ 39'$ .
11. n-are soluție.
12.  $A=39^\circ 12'$ ,  $B=112^\circ 42'$ ,  $C=28^\circ 6'$ .
13.  $B=62^\circ 34'$ ,  $C=59^\circ 26'$ .
14.  $a=28,22$ ,  $b=43,41$ ,  $c=48,37$ ,  $C=81^\circ 59' 15''$ .
31. 592,8 m.
32. 62,8 m.
33. 981 m.
34. 122 m.
35. 4,620 km, 6 067 km; 3,723 km.

## Capitolul VI

1. a)  $\sqrt{-2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ ; b)  $2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$ ; c)  $2 \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ ;
- d)  $2 \cos \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) \right]$ .
2.  $8\sqrt{-2} (\cos 225^\circ + i \sin 225)$ .
3.  $\sqrt{2} |\cos(2\alpha + 15^\circ) + i \sin(2\alpha + 15^\circ)|$ .
4.  $\varphi_1 = 64^\circ$ ,  $\varphi_1 = 0^\circ$ ;  $\varphi_2 = 16^\circ$ ,  $\varphi_2 = 210^\circ$ ;  $\varphi_3 = 2^\circ$ ,  $\varphi_3 = 270^\circ$ .
5.  $\frac{(\sqrt{2}-1) \left( 2n - \cos \frac{n\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \frac{n\pi}{4}}{2n(5 - 2\sqrt{2})}$ .
6.  $a) \sqrt[3]{-2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{3}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{3}}{3} \right)$ ,  $k = 0, 1, 2$ ;
- $b) \sqrt[3]{-2} \left( \cos \frac{8k+1}{16}\pi + i \sin \frac{8k+1}{16}\pi \right)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ;
- c)  $\sqrt[3]{-2} \cos \alpha \left( \cos \frac{2k\pi + \alpha}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \alpha}{3} \right)$ .
9. a)  $z_1 = 3$ ,  $z_2 = \frac{3(-1 + i\sqrt{3})}{2}$ ,
- $z_3 = \frac{3(-1 - i\sqrt{3})}{2}$ ;
- b)  $z = 5 \left[ \cos(2k+1)\frac{\pi}{4} + i \sin(2k+1)\frac{\pi}{4} \right]$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ;
- c)  $z = \cos \frac{(4k+1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4k+1)\pi}{6}$ ,  $k = 0, 1, 2$ ;
- d)  $z = \sqrt[6]{-2} \left[ \cos \frac{(8k+1)\pi}{12} + i \sin \frac{(8k+1)\pi}{12} \right]$
- $k = 0, 1, 2$ .
10.  $z = \sqrt[8]{-2} \left[ \cos \frac{(8k \pm 1)\pi}{16} + i \sin \frac{(8k \pm 1)\pi}{16} \right]$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ .

## BIBLIOGRAFIE

Pentru aprofundarea problemelor din acest manual recomandăm elevilor să consulte următoarele lucrări:

1. Cristescu, V. Culegere de probleme de trigonometrie, București, 1936.
2. Gheorghiev, G. și colaboratorii. Culegere de probleme de trigonometrie, Iași.
3. Ionescu Tiu C. și Vidrașcu, M. Exerciții și probleme de trigonometrie, Editura didactică și pedagogică, București, 1969.
4. Novoselov, S. Curs special de trigonometrie, București, 1958.
5. F. G. M. Exercices de trigonométrie, Paris, 1915.
6. Stoka, M., Raianu, M., Mărgăritescu, E. Culegere de probleme de trigonometrie pentru liceu. Editura didactică și pedagogică, București, 1966, 1970-1975.

## CUPRINS

### **Cap. I. Unghiuri și arce**

§ 1. Sisteme de măsură pentru unghiuri și arce .....	3
§ 2. Generalizarea noțiunii de unghi și de arc .....	6
Exerciții .....	12

### **Cap. II. Funcții trigonometrice**

§ 3. Funcțiile trigonometrice ale unghiului ascuțit .....	14
§ 4. Elemente de algebră vectorială .....	17
§ 5. Funcțiile trigonometrice ale unghiului orientat .....	27
§ 6. Relații între funcțiile trigonometrice .....	37
§ 7. Funcții trigonometrice de argument numeric .....	39
§ 8. Funcții periodice .....	41
§ 9. Funcții pare și impare .....	44
§ 10. Funcții strict monotone .....	46
§ 11. Variația și graficul funcțiilor trigonometrice .....	52
§ 12. Funcții trigonometrice inverse .....	55
§ 13. Reducerea la un unghi ascuțit .....	62
Exerciții .....	66

### **Cap. III. Formule fundamentale**

§ 14. Relații între funcțiile trigonometrice ale aceluiași unghi .....	74
§ 15. Formule trigonometrice de calcul .....	77
§ 16. Identități trigonometrice .....	83
Exerciții .....	91

### **Cap. IV. Ecuații trigonometrice**

§ 17. Multimea unghiurilor care corespund unei valori date a unei funcții trigonometrice .....	97
§ 18. Funcții trigonometrice de același nume egale .....	102
§ 19. Ecuații trigonometrice reductibile la ecuații elementare și sisteme de ecuații trigonometrice .....	106
Exerciții .....	119

### **Cap. V. Aplicațiile trigonometriei în geometrie**

§ 20. Relații trigonometrice într-un triunghi dreptunghic .....	124
§ 21. Relații trigonometrice într-un triunghi oarecare .....	126
§ 22. Tabele trigonometrice .....	134
§ 23. Rezolvarea triunghiurilor .....	139
§ 24. Aplicații în geometrie, fizică și topografie .....	146
Exerciții .....	153

### **Cap. VI. Numere complexe sub formă trigonometrică**

§ 25. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe .....	155
§ 26. Operații cu numere complexe .....	159
Exerciții .....	171
Probleme recapitulative .....	172
Răspunsuri .....	177

Nr. colilor de tipar: 11,5  
Tiraj tranșă a I-a: 100 050 ex.  
Bun de tipar: 1.XI.1976



Com. nr. 50 442/23 292  
Combinatul Poligrafic  
„CASA SCINTEII“  
București — R.S.R.