K. Teleman

M. Florescu
D. Moraru

C. Rădulescu
E. Stătescu

X

Matematică

manual pentru clasa a X-a

Geometrie și trigonometrie

Editura didactică și pedagogică,
București, 1979

Manualul a fost elaborat pe baza programei aprobate de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 39490/1978

Referenți: Prof. CABIRIA ANDREIAN
Dr. ALEXANDRU BREZULEANU
Dr. HOREA BANEA

Indicații Generale

S-a căutat ca obiecte diferite să fie notate diferit, pentru a se evita confuzii. Astfe se face deosebire, în formulări și prin notații, între dreapta definită de două puncte, între segmentele închis și deschis avînd aceste puncte ca extremități și între distanța dintre aceleași puncte (care este egală prin definiție cu lungimea segmentelor menționate).

Printr-o formulare de tipul: „Fie A, B două puncte..." subînțelegem că punctele A și B sînt distincte (deoarece altfel nu am avea *două* puncte). Uneori, cînd vrem să subliniem faptul că o anumită formulare are sens numai dacă punctele A, B sînt distincte, folosim și adjectivul „distincte".

Elevii sînt îndemnați să rețină axiomele, teoremele și formulele încadrate în chenare, după ce au înțeles bine sensul acestora. Se va acorda o atenție deosebită definițiilor, care trebuie de asemenea bine însușite.

Se recomandă ca elevii să învețe corect demonstrațiile teoremelor cuprinse în manual. Menționăm că nu toate proprietățile demonstrate au fost intitulate teoreme.

Unele demonstrații bazate pe raționamente logice pot fi înlocuite, din motive metodologice, prin demonstrații practice. Acestea se vor face prin desene sau modele îngrijit executate. Se recomandă ca demonstrațiile practice să însoțească și unele demonstrații logice.

Recomandăm ca elevii să citească un număr cît mai mare de paragrafe din manual, pe baza indicațiilor date de tovarășii profesori. Verificarea și consolidarea cunoștințelor însușite prin lectura manualului se va face prin rezolvări de exerciții și dialog.

Redactor: prof. EUGENIA PANTELIMON
Tehnoredactor: ILINCA PROSAN
Coperta: N. SÎRBU
Desenator: C. HĂLCESCU

Notații folosite

Dreapta ce trece prin punctele A și B $(A \neq B)$: AB sau BA.

Triunghiul cu vîrfurile A, B, C : ABC.

Punctul A aparține dreptei d : $A \in d$.

Punctul A este intersecția dreptelor d, d' $(d \neq d')$: $\{A\} = d \cap d'$.

Segmentul deschis de extremități A, B $(A \neq B)$: $|AB| = |BA|$.

Segmentul închis de extremități A, B $(A \neq B)$: $[AB] = [BA]$.

Semidreapta limitată de punctul A și conținînd punctul B : $|AB$.

Semiplanul limitat de dreapta d și conținînd punctul A : $|dA$.

Semispațiul limitat de planul p și conținînd punctul A : $|pA$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele h, k : $\widehat{hk} = \widehat{kh}$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele $|AB$, $|AC$: $\widehat{BAC}$ sau $\widehat{CAB}$.

Unghiul diedru avînd ca fețe semiplanele u, v : $\widehat{uv}$ sau $\widehat{vu}$.

Unghiul triedru format din semidreptele a, b, c : $\widehat{abc}$.

Segmentul $|AB|$ este congruent cu segmentul $|CD|$: $|AB| \equiv |CD|$.

Unghiul $\widehat{hk}$ este congruent cu unghiul $\widehat{rs}$: $\widehat{hk} \equiv \widehat{rs}$.

Triunghiul ABC este congruent cu triunghiul $A'B'C'$: $ABC \equiv A'B'C'$.

Figura F este congruentă cu figura F' : $F \equiv F'$.

Unghiurile triunghiului ABC : $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$.

Segmentul etalon: m.

Lungimea segmentelor $|AB|$, $[AB]$: $\overline{AB} = \overline{BA}$ (dacă etalonul este fixat).

Distanța dintre punctele A, B : $d(A, B)$ (dacă etalonul este fixat)

Vectorul legat cu originea A și extremitatea B : $\overrightarrow{AB}$.

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu vectorul $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Norma vectorului $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{v}\|$, $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$.

Produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Produsul vectorial al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{u} \times \vec{v}$.

Locul geometric al punctelor care au proprietățile P, P', P'', ... $\{M : M$ are proprietățile P, P', P''...$\}$

Măsura unghiului $\widehat{hk}$: măs $\widehat{hk}$ (de fiecare dată se va specifica dacă este vorba de măsura în grade sau în radiani).

Cercul de centru O și rază R (într-un plan fixat): $C(O, R)$.

Figurile F, F' coincid: $F = F'$.

Unghiuri drepte: dr.

Dreapta reală : $\mathbf{R}$.

Mulțimea numerelor întregi : $\mathbf{Z}$.

23.10.79

Capitolul

III

Elemente de trigonometrie plană

1. Vectori

Se numește *vector legat* sau *vector* o pereche ordonată de puncte, deci o mulțime formată din două puncte, dintre care unul este numit *origine*, iar al doilea *extremitate*. Vectorul avînd originea A și extremitatea B va fi notat $\overrightarrow{AB}$. Termenul vector vine de la cuvîntul latinesc „vehere“, care înseamnă „a merge“. Cînd ne referim la vectorul $\overrightarrow{AB}$ ne putem gîndi la un mobil, care se deplasează, mergînd din punctul A în punctul B (fig. III. 1). De aceea un vector $\overrightarrow{AB}$ se reprezintă printr-o săgeată de la punctul A la punctul B.

Fig. III.1

Doi vectori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt egali dacă și numai dacă $A = A'$ și $B = B'$.

Un vector, a cărui origine coincide cu extremitatea sa se numește *vector nul*. Fiecare punct A definește vectorul nul $\overrightarrow{AA}$.

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este un vector nenul, punctele A și B sînt distincte și definesc o dreaptă, care se numește *suportul* vectorului $\overrightarrow{AB}$ (fig. III. 2).

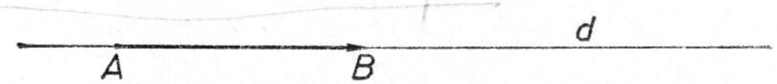


Fig. III.2

Doi vectori care sînt nenuli și au același suport, se numesc *vectori coliniari* (fig. III. 3).

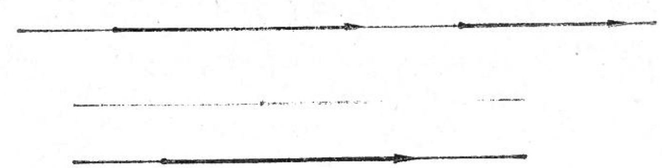


Fig. III.3

Doi vectori nenuli, care au suporții paraleli, se numesc *vectori paraleli*.

Uneori, un vector se notează printr-o singură literă, deasupra căreia se pune o săgeată. De exemplu, putem scrie $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Pentru a exprima că $\vec{u}$ este un vector nul, scriem $\vec{u} \in \vec{0}$, $\vec{0}$ fiind mulțimea vectorilor nuli.

D e f i n i ț i e. **Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ doi vectori nenuli și paraleli. Spunem că vectorii considerați sînt echipolenți, dacă figura $ABB'A'$ este un paralelogram, deci dacă $AB \parallel A'B'$ și dacă $AA' \parallel BB'$** (fig. III. 4).

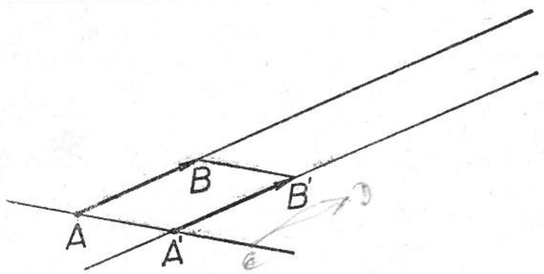


Fig. III.4

D e f i n i ț i e. Vom spune că doi vectori nenuli și paraleli au același sens, dacă extremitățile lor se găsesc de o aceeași parte a dreptei definite de originile lor.

Deci vectorii nenuli și paraleli $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sînt de același sens, dacă punctele B, D se găsesc de aceeași parte a dreptei AC.

Definițiile date pierd orice semnificație, dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ respectiv $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sînt coliniari. Totuși, putem defini echipolența, respectiv relația de a avea același sens și pentru vectori coliniari, dacă procedăm în modul următor: alegem un punct O, exterior dreptei d, care conține vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ și considerăm paralelogramul $OABP$, care are latura OP paralelă cu d. Vom spune că vectorii coliniari $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt echipolenți, dacă vectorii paraleli $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt echipolenți; vectorii coliniari $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ se zic de același sens, dacă vectorii paraleli $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CD}$ sînt de același sens, (fig. III. 5).

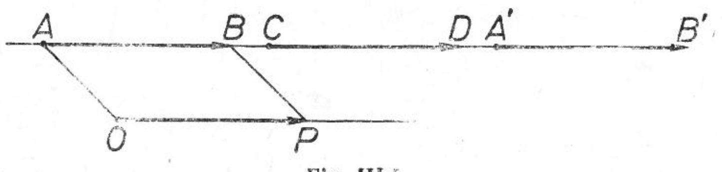


Fig. III.5

Exerciții.

1. *Să se arate că relația de echipolență a vectorilor este relație de echivalență, deci că este reflexivă, simetrică și tranzitivă.*

2. *Să se arate că relația exprimată prin cuvintele „au același sens" este o relație de echivalență.*

3. *Să se arate că definițiile echipolenței și relației privind sensul a doi vectori nenuli și coliniari nu depind de alegerea punctului O.*

Doi vectori nuli se consideră **totdeauna** echipolenți. Pentru a exprima că vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt echipolenți, scriem $\vec{u} \sim \vec{v}$.

Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ doi vectori nenuli și fie O un punct oarecare. Să considerăm punctele M și N astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{CD}$. Se formează astfel unghiul $\widehat{MON}$ (fig. III. 6), despre care vom spune că *reprezintă unghiul vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Dacă se consideră alte puncte O', M', N' astfel ca $\overrightarrow{O'M'} \sim \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{O'N'} \sim \overrightarrow{CD}$, atunci $\widehat{M'O'N'} \equiv \widehat{MON}$, deci *două unghiuri, care reprezintă unghiul a doi vectori nenuli, sînt congruente.*

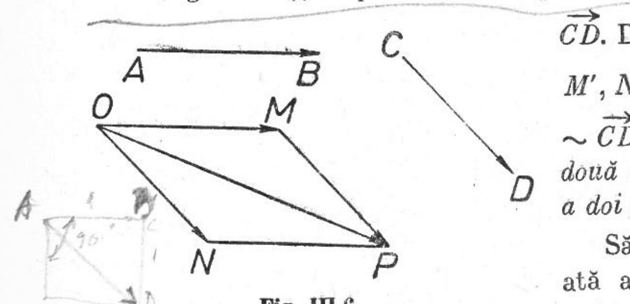


Fig. III.6

Să completăm construcția efectuată anterior, considerînd paralelogramele $MONP$, $M'O'N'P'$. Avem

$$(1) \quad \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{O'M'}, \quad \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{O'N'}, \quad \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{O'P'}.$$

Vom spune că vectorul $\overrightarrow{OP}$ *reprezintă suma* în O a vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ și vom scrie

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) \text{ sau } \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}$$

Potrivit acestei definiții, avem

$$\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O'), \quad \overrightarrow{O'P'} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Ultima formulă (1) arată că *doi vectori, care reprezintă suma altor doi vectori, în două puncte oarecare, sînt echipolenți.* Deci $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{O'P'}$.

Din proprietățile paralelogramului rezultă formulele (fig. III. 6).

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \text{ (în } O) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \text{ (în } O) = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} \text{ (în } O) = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \text{ (în } O).$$

Avem prin urmare, pentru orice doi vectori, $\vec{AB}$ şi $\vec{CD}$, şi pentru orice punct O, proprietatea de *comutativitate*

$$\boxed{\vec{AB} + \vec{CD}\ (\text{în } O) = \vec{CD} + \vec{AB}\ (\text{în } O).}$$

Pentru a obţine suma în A a vectorilor $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, putem proceda în modul următor: considerăm punctul P, astfel ca $\vec{BP} \sim \vec{CD}$; atunci

$$\vec{AB} + \vec{CD}\ (\text{în } A) = \vec{AP}.$$

Fie vectorii $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{CD}$ şi $\vec{w} = \vec{EF}$. Să alegem un punct oarecare O şi să construim punctele M, N, P astfel ca $\vec{OM} \sim \vec{u}$, $\vec{MN} \sim \vec{v}$ şi $\vec{NP} \sim \vec{w}$. Avem atunci (fig. III. 7).

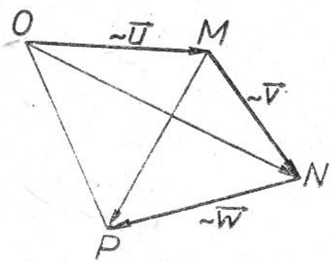


Fig. III.7

$$\vec{ON} = \vec{u} + \vec{v}\ (\text{în } O),\quad \vec{OP} = \vec{ON} + \vec{w}\ (\text{în } O) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}\ (\text{în } O),$$

$$\vec{MP} = \vec{v} + \vec{w}\ (\text{în } M),\quad \vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}\ (\text{în } O) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\ (\text{în } O).$$

Rezultă că *adunarea vectorilor într-un punct are proprietatea de asociativitate*

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}\ (\text{în } O) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\ (\text{în } O).}$$

Exerciţiu. *Se consideră vectorii* $\vec{AB} \sim \vec{A'B'}$, $\vec{CD} \sim \vec{C'D'}$ *şi un punct O. Arătaţi că*

$$\vec{AB} + \vec{CD}\ (\text{în } O) = \vec{A'B'} + \vec{C'D'}\ (\text{în } O).$$

Fie m segmentul etalon, ales ca unitate de măsurare a lungimii segmentelor şi a distanţelor între puncte. Am notat prin $d(A, B)$ distanţa dintre punctele A, B. Dacă $A \neq B$, $d(A, B)$ coincide cu lungimea segmentului $|AB|$, iar dacă $A = B$, avem prin definiţie $d(A, B) = 0$.

Definiţie. După fixarea segmentului etalon, definim norma unui vector $\vec{AB}$ prin formula

$$\boxed{\|\vec{AB}\| = d(A,\ B),}$$

deci norma unui vector este egală cu distanţa dintre originea şi extremitatea acelui vector.

În particular, *vectorii nuli au norma egală cu 0. Reciproc, dacă un vector $\vec{v}$ are norma $\|\vec{v}\|$ egală cu 0, atunci vectorul $\vec{v}$ este nul.* Un vector de normă 1 se numeşte *versor.*

Exerciţiu. *Arătaţi că doi vectori echipolenţi au normele egale.*

Fiind dat un vector $\vec{v} = \vec{AB}$, vom spune că vectorul $\vec{v'} = \vec{BA}$ este un *opus* al vectorului $\vec{v}$, deoarece avem, oricare ar fi punctul $\vec{OO}$.

$$\vec{v} + \vec{v'}\ (\text{în } O) = \vec{O}.$$

În general, vom numi *vector opus* vectorului $\vec{v}$, orice vector echipolent cu vectorul $\vec{v'}$.

Definim *diferenţa* a doi vectori $\vec{v} = \vec{AB}$ şi $\vec{w} = \vec{CD}$, într-un punct O, prin formula

$$\vec{AB} - \vec{CD}\ (\text{în } O) = \vec{AB} + \vec{DC}\ (\text{în } O).$$

Dacă notăm $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{CD}$ (în O), atunci avem $\vec{u} + \vec{CD}$ (în A) $= \vec{AB}$.

Oricare ar fi punctele L, M, N, avem

$$\vec{MN} = \vec{LN} - \vec{LM}\ (\text{în } M),$$

deoarece $\vec{MN} + \vec{LM}$ (în L) $= \vec{LM} + \vec{MN}$ (în L) $= \vec{LN}$.

Dacă se completează figura LMN la un paralelogram $LMNP$, avem

$$\vec{LM} + \vec{LP}\ (\text{în } L) = \vec{LN},\quad \vec{LP} - \vec{LM}\ (\text{în } M) = \vec{MP}$$

şi rezultă că cei doi vectori diagonali $\vec{LN}$, $\vec{MP}$, dau suma şi diferenţa vectorilor $\vec{LM}$, $\vec{LP}$, pe care am construit paralelogramul $LMNP$. (fig. III. 8).

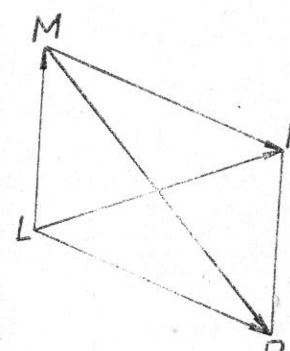


Fig. III.8

Fiind dat un vector $\vec{v} = \vec{AB}$ şi un număr real x, definim *produsul* $x \cdot \vec{v}$ în modul următor:

Dacă $B = A$ sau dacă $x = 0$, $x \cdot \vec{v}$ este vectorul nul $\vec{AA}$.

Dacă $B \neq A$ şi dacă $x > 0$, $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector $\vec{AB'}$, pentru care

$$B' \in |AB,\quad |AB'| = x \cdot |AB|.$$

Dacă $B \neq A$ şi dacă $x < 0$, atunci $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector $\vec{AB''}$, pentru care

$$A \in |BB''|,\quad |AB''| = (-x) \cdot |AB|.$$

În particular, avem $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ şi $(-1)\ \vec{v}$ este un opus al vectorului $\vec{v}$.

Oricare ar fi numerele reale x şi y şi pentru orice vector $\vec{v}$, avem

(2) $$\boxed{x \cdot (y \cdot \vec{v}) = (xy) \cdot \vec{v}.}$$

Ultima formulă se stabilește observînd că cei doi membri reprezintă vectori avînd aceeași origine, aceeași dreaptă suport (dacă cei doi vectori sînt nenuli); în plus, cei doi vectori au același sens, oricare ar fi semnele lui x și y și ei au de asemenea aceeași normă $|xy| \cdot \|\vec{v}\|$.

Să arătăm că, *oricare ar fi vectorii* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ *și oricare ar fi numărul real* x, *avem*

$$\boxed{x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v}.} \tag{3}$$

Pentru demonstrație, să considerăm un punct O și să construim punctele M, N astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \vec{u}$ și $\overrightarrow{ON} \sim \vec{v}$. Fie apoi punctele M', N' pentru care

$$\overrightarrow{OM'} \sim x \cdot \vec{u}, \quad \overrightarrow{ON'} \sim x \cdot \vec{v}.$$

Să presupunem că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli și necoliniari. Atunci $M \neq O$

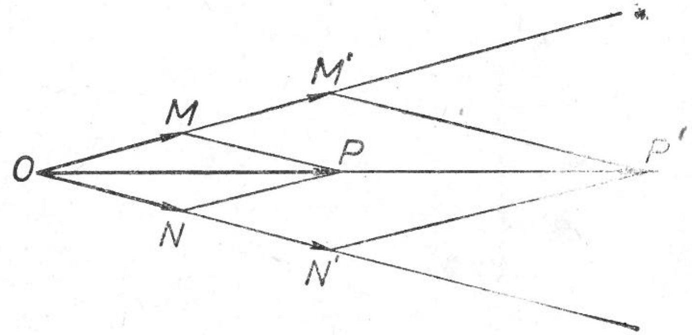


Fig. III.9

și $N \neq O$ și avem $M' \in OM$, $N' \in ON$. Dacă definim punctele P, P' prin formulele (fig. III. 9).

$$\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}, \quad \overrightarrow{OP'} \sim x \cdot \overrightarrow{OP},$$

din teorema lui Thales deducem relațiile

$$MN \,\|\, M'N', \quad M'P' \,\|\, MP \,\|\, ON, \quad N'P' \,\|\, NP \,\|\, OM,$$

$$\overrightarrow{M'P'} \sim x \cdot \overrightarrow{MP} \sim x \cdot \overrightarrow{ON}, \quad \overrightarrow{N'P'} \sim x \cdot \overrightarrow{NP} \sim x \cdot \overrightarrow{OM},$$

deci avem

$$\overrightarrow{OP'} \sim x \cdot \overrightarrow{OP}, \quad \overrightarrow{OP'} \sim \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'} \sim x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{ON}$$

sau

$$\overrightarrow{OP'} \sim x \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) \sim x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{ON}.$$

Dacă unul din vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ este nul, relația (3) este evidentă.

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli dar coliniari, există un număr real r astfel

ca $\vec{v} \sim r \cdot \vec{u}$. În acest caz, avem $\vec{u} + \vec{v} \sim (1 + r)\vec{u}$, $x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x(1 + r) \cdot \vec{u}$, $x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v} \sim x \cdot \vec{u} + xr \cdot \vec{u} \sim (x + xr) \cdot \vec{u} = x(1 + r) \cdot \vec{u}$, deci și în acest caz, relația (3) este adevărată.

Produsul scalar a doi vectori

Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori. Definim **produsul scalar** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ al acestor vectori prin formula

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}, \text{ dacă } \vec{u} \not\in \vec{0} \text{ și } \vec{v} \not\in \vec{0}, \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \text{ dacă } \vec{u} \in \vec{0} \text{ sau } \vec{v} \in \vec{0}. \end{array}}$$

Din această definiție deducem următoarele proprietăți:

Produsul scalar a doi vectori este simetric, deci $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Produsul scalar a doi vectori nu se schimbă, dacă înlocuim cei doi vectori prin doi vectori echipolenți lor. Deci $\vec{u}' \sim \vec{u}$ și $\vec{v}' \sim \vec{v}$ implică $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v}'$.

Produsul scalar a doi vectori este nul fie în cazul în care unul cel puțin din cei doi vectori este nul, fie în cazul în care cei doi vectori sînt nenuli și perpendiculari.

Produsul sclar a doi vectori, care fac un unghi ascuțit, este pozitiv.

Produsul sclar a doi vectori, care fac un unghi obtuz, este negativ.

Unghiul a doi vectori nenuli $\vec{u}$ și $\vec{v}$ poate fi calculat din formula

$$\boxed{\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}}$$

Din inegalitatea $|\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}| \leqslant 1$, deducem *inegalitatea lui Schwarz-Cauchy-Buniakowski*:

$$\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.}$$

Dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt nenuli și paraleli sau coliniari, avem $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \pm 1$. Mai precis, dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ au același sens, atunci $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = 1$ și rezultă $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. În particular, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, deci:

Produsul scalar al unui vector cu el însuși este egal cu pătratul normei acelui vector.

Dacă vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sînt de sensuri opuse, avem $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = -1$ și

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = - \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Dacă vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sînt nenuli, necoliniari și neparaleli, atunci $-1 < \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} < 1$ și rezultă $|\vec{u} \cdot \vec{v}| < \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt vectori nenuli și dacă x este un număr pozitiv, atunci unghiul vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$ se poate lua egal cu unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}, \vec{v}$, deoarece înmulțirea vectorului $\vec{u}$ cu un număr pozitiv dă un vector de același sens cu $\vec{u}$. Rezultă că, pentru $x > 0$, avem

$$(x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = x \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = x(\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = x(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Dacă $x < 0$, atunci unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}$ și $\vec{v}$ se reprezintă prin suplementul unghiului vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$, deoarece vectorul $x \cdot \vec{u}$ are sensul opus lui $\vec{u}$. Rezultă, pentru $x < 0$, $\cos \widehat{(x\vec{u})\vec{v}} = -\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}$, deci

$$(x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \|x \cdot \vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| (-\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = (-x) \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| (-\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Deci *avem, pentru orice doi vectori nenuli și orice* ***număr real nenul x,***

$$\boxed{(x\vec{u}) \cdot \vec{v} = x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}.$$

Această relație este evident verificată și în cazul în care unul din vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sau numărul x este nul. Deci formula scrisă este generală.

Exerciții

1. *Să se arate că, oricare ar fi punctele O, A, B, C, D într-un plan avem*

$$\vec{AB} + \vec{DC} \text{ (în } O) = \vec{AC} + \vec{DB} \text{ (în } O),$$
$$\vec{AC} + \vec{BD} \text{ (în } O) = \vec{AD} + \vec{BC} \text{ (în } O).$$

2. *Se dau punctele A, B, C, D. Să se construiască vectorii* $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CB}$ *(în D),* $\vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CB} + \vec{DA}$ *(în A),* $\vec{AC} + \vec{BD}$ *(în B),* $\vec{AD} + \vec{BC}$ *(în C).*

3. *Se dau punctele A, B, C, M astfel ca* $\vec{BM} \sim \vec{MC}$. *Să se construiască vectorii* $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ *(în M),* $\vec{AB} + \vec{AC} + 2\vec{MA}$ *(în A),* $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{MA}$ *(în M),* $\vec{AC} - \vec{AB} + \vec{CM}$ *(în C).*

4. *Se dau punctele A, B, C, I, J astfel ca* $\vec{CI} \sim \vec{AB}$, $\vec{CJ} \sim \vec{BA}$. *Să se arate că punctele C, I, J sînt coliniare.*

5. *Fie M, N, G mijloacele segmentelor |AB|, |CD|, |MN| dintr-un același plan. Să se arate că, oricare ar fi punctul O din acest plan,*

$$\vec{OA} + \vec{OB} \text{ (în } O) = 2\vec{OM}, \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} \text{ (în } O) = 4\vec{OG}.$$

6. *Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, să se arate că există un punct P astfel ca* $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} \in \vec{0}$.

7. *Fiind date două puncte A, B, să se determine dacă există punctele P, Q, R, S care verifică relațiile*

$$\vec{PA} + \vec{PB} \text{ (în } A) = 2\vec{AB}, \vec{QA} - \vec{QB} \text{ (în } A) = -\vec{AB}, \vec{RA} - \vec{RB} \text{ (în } A) = \vec{AB},$$
$$2\vec{SA} - 3\vec{SB} \text{ (în } A) = \vec{AB}.$$

În enunțurile următoare, $\vec{i}, \vec{j}$ *reprezintă doi versori ortogonali, avînd originea într-un punct O. Dacă P este un punct în planul vectorilor* $\vec{i}, \vec{j}$, *notația* $P(x, y)$ *va însemna că x și y sînt componentele vectorului de poziție* $\vec{OP}$ *față de axele avînd* $\vec{i}$ *și* $\vec{j}$ *ca versori, deci* $\vec{OP} \sim x\vec{i} + y\vec{j}$.

8. *Se dau punctele* $A(2, 2)$, $B(-3, -1)$, $C(3, -2)$.

a) *Notînd prin I mijlocul segmentului |AB|, să se determine componentele vectorului* $\vec{OI}$ *față de* $\vec{i}$ *și* $\vec{j}$.

b) *Fie M, N punctele de pe dreapta AB pentru care* $\vec{MB} = -4\vec{MA}$ *și* $\vec{NB} = 4\vec{NA}$. *Să se arate că*

$$5\vec{OM} = 4\vec{OA} + \vec{OB}, \quad 3\vec{ON} = 4\vec{OA} - \vec{OB}.$$

c) *Fie G punctul de pe dreapta CI, pentru care* $\vec{GC} = -2\vec{GI}$. *Să se arate că* $3\vec{OG} = \vec{OC} + 2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. *Să se calculeze componentele vectorului* $\vec{OG}$.

9. *Se dau punctele* $A(-1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -2)$. *Fie I, J punctele care verifică relațiile* $3\vec{IA} + 5\vec{IB} = \vec{0}$, $3\vec{JA} - 5\vec{JB} = \vec{0}$. *Să se arate că* $8\vec{OI} = 3\vec{OA} + 5\vec{OB}$ *și* $-2\vec{OJ} = 3\vec{OA} - 5\vec{OB}$. *Să se determine componentele vectorilor* $\vec{OI}, \vec{OJ}$.

10. *Să se calculeze normele vectorilor* $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ *și produsele scalare* $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$, $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ *luînd pentru A, B, C punctele definite prin formulele:*

a) $A(0, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(2, 2)$,
b) $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(-1. 2)$,
c) $A(2, 3)$, $B(-4, 0)$, $C(0, 3)$,
d) $A(8, 0)$, $B(1, -2)$, $C(-3, 4)$.

11. *Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, notăm prin I și J, K, L mijloacele segmentelor |AB|, respectiv |CD|, |AD|, |BC|.*

a) *Să se arate că |IJ| și |KL| au același mijloc.*
b) *Ce fel de patrulater este figura ILJK, dacă ABCD este un patrulater?*
c) *Cum sînt punctele I, J, K, L în cazul în care figura ACBD este un patrulater?*
d) *Să se arate că, oricare ar fi punctele A, B, C, D în planul p, avem* $\vec{IL} \sim \vec{KJ}$ *și* $\vec{IK} \sim \vec{LJ}$.

12. *Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime egală cu unitatea. Să se calculeze produsul scalar* $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

13. *Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime 1 și fie AA', A'∈BC,* ***înălțimea din A a acestui triunghi.*** *Să se calculeze produsele scalare* $\vec{AA'} \cdot \vec{AB}$, $\vec{BA'} \cdot \vec{BA}$.

14. *Fie ABCD un pătrat cu laturile de lungime 1. Să se calculeze produsul scalar* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

15. *Fie A, B, C trei vîrfuri consecutive ale unui hexagon convex regulat de laturi congruente cu etalonul m. Să se calculeze produsele scalare* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

2. Funcții trigonometrice

Fie într-un plan p triunghiul dreptunghic isoscel OAB, avînd $OA \perp OB$ și $|OA| \equiv |OB| \equiv m$, unde m este segmentul etalon.

Să considerăm vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Avem $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$ și $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

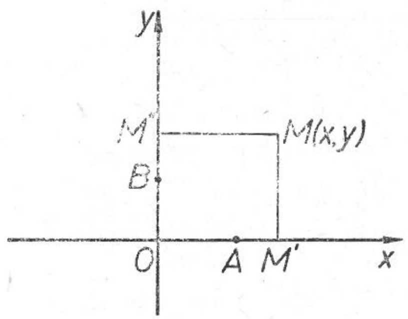


Fig. III.10

Spunem că vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ formează un *reper ortonormat* în planul p.

Dacă M este un punct oarecare din planul p, notăm prin M' proiecția ortogonală a lui M pe dreapta OA, iar prin M'' notăm proiecția ortogonală punctului M pe dreapta OB. Există un cuplu unic de numere reale (x, y), astfel încît să avem (fig. III. 10):

$$\overrightarrow{OM'} = x\cdot\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{OM''} = y\cdot\overrightarrow{OB}.$$

Numerele x și y se numesc *coordonatele punctului* M față de reperul format de vectorii $\vec{a}, \vec{b}$; se spune că x este *abscisa* lui M, iar y este *ordonata* lui M față de reperul $(\vec{a}, \vec{b})$. Se scrie, dacă reperul $(\vec{a}, \vec{b})$ este fixat, $M(x, y)$ pentru a exprima că punctul M are coordonatele x și y.

Pentru orice cuplu (x, y) de numere reale, există un singur punct M în planul p, astfel ca x să fie abscisa lui M, iar y să fie ordonata lui M. Punctul M este dat de formula

(2) $\quad \overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b}$ (în O).

Formulele (1) și (2) stabilesc o aplicație bijectivă $\mathscr{C}$ de la mulțimea $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ a cuplurilor de numere reale la mulțimea punctelor din planul p, deci $\mathscr{C}: \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to p$.

Considerînd semnele coordonatelor x și y, putem împărți planul p în patru cadrane, care coincid cu interioarele celor patru unghiuri drepte formate de dreptele OA, OB (fig. III.11):

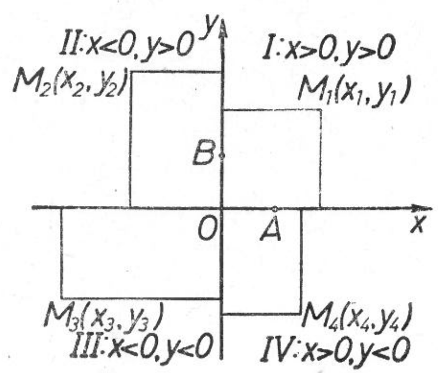


Fig. III.11

Cadranul I $= \{M(x, y);\ x > 0,\ y > 0\}$

Cadranul II $= \{M(x, y);\ x < 0,\ y > 0\}$
Cadranul III $= \{M(x, y);\ x < 0,\ y < 0\}$
Cadranul IV $= \{M(x, y);\ x > 0,\ y < 0\}$.

Planul p este egal, ca mulțime de puncte, cu reuniunea acestor patru cadrane și a dreptelor OA, OB. Avem $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Vom mai considera punctele $A'(-1, 0) \in OA$ și $B'(0, -1) \in OB$. Punctele A, A', B, B' se găsesc pe cercul de centru O și de rază 1, care va fi numit *cercul unitate* sau *cercul trigonometric* din planul p. Inegalitățile $y > 0$ și $y < 0$ definesc semiplanele limitate de dreapta OA în planul p; aceste semiplane vor fi numite *semiplanul superior* respectiv *semiplanul inferior* din planul p.

În primul capitol al acestui manual, am introdus funcțiile sinus și cosinus definite pe *mulțimea unghiurilor*. Vom defini acum funcții asemănătoare, dar definite pe *mulțimea numerelor reale*. Trecerea de la primul tip de funcții la tipul de funcții pe care le vom introduce acuma se face înlocuind fiecare unghi prin măsura sa în radiani. Dar noile funcții vor fi definite pe toată axa reală $\mathbf{R}$, deși măsura în radiani a unui unghi nu poate depăși numărul π, care corespunde unghiurilor alungite. Pentru a obține o astfel de *prelungire* a funcțiilor sinus și cosinus, în afara intervalului $[0, \pi]$, vom construi o aplicație surjectivă foarte importantă notată F, de la axa reală $\mathbf{R}$ la cercul C (avînd raza 1 și centrul în originea unui reper ortonormat $(\vec{a}, \vec{b})$ din plan p).

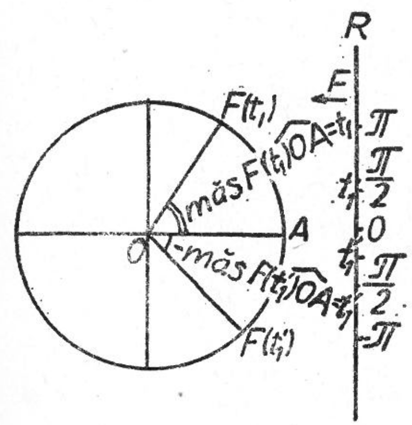


Fig. III.12

Definiție. Aplicația

$$F : R \to C$$

este definită prin următoarele proprietăți (fig. III. 12): 1) $F(t + 2\pi) = F(t)$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

2) Dacă $t \in (0, \pi)$, **punctul** $F(t)$ **va fi acel punct al cercului** C, **situat în semiplanul superior și astfel ca măsura în radiani a unghiului** $\widehat{F(t)OA}$ **să fie egală cu** t.

3) Punem apoi $F(0) = A$ **și** $F(\pi) = A'$ (fig. III.13).

4) Dacă $t \in (-\pi, 0)$, $F(t)$ **va fi acel punct al cercului** C, **situat în semiplanul inferior și pentru care măsura în radiani a unghiului** $\widehat{F(t)OA}$ **este egală cu** $-t$.

5) Punem $F(-\pi) = F(\pi) = A'$.

Potrivit acestei definiții, vom avea (fig. III.13)

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = B,\quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'.$$

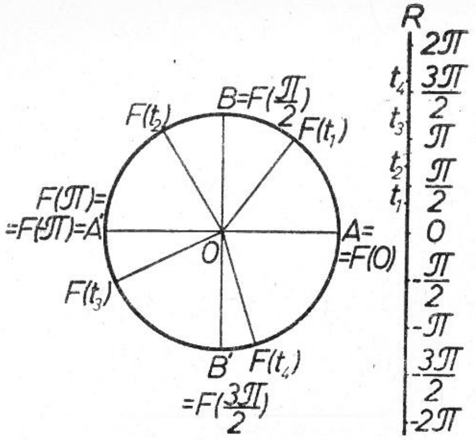


Fig. III.13

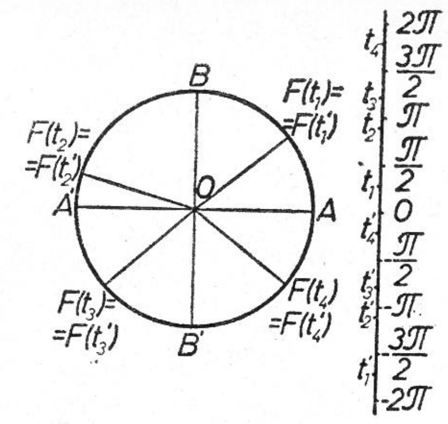


Fig. III.14

Dacă t este un număr real arbitrar, există un număr întreg k, astfel încît să avem $t + 2k\pi \in [0, 2\pi)$ și numărul k este determinat în mod unic prin această proprietate. Prin definiție (fig. III. 14):

$$F(t) = F(t + 2k\pi).$$

Dacă t este un număr pozitiv sau nul, să notăm prin k partea întreagă a raportului $t/2\pi$ și prin r diferența $t - 2k\pi$. Vom avea atunci

$$t = 2k\pi + r,\ r \in [0,\ 2\pi),\ k \in \mathbf{Z},\ k \geqslant 0.$$

Dacă t este un număr negativ, considerăm numărul pozitiv $-t$ și scriem acest număr sub forma de mai sus:

$$-t = 2k\pi + r,\ r \in [0,\ 2\pi),\ k \in \mathbf{Z},\ k \geqslant 0.$$

Vom avea atunci

$$t = -2k\pi - r = 2k'\pi + r',$$

unde,

$$k' = -k - 1,\ r' = 2\pi - r \in (0,\ 2\pi].$$

Rezultă că *orice număr real t poate fi scris sub forma*

(1) $$t = 2k\pi + r,\ k \in \mathbf{Z},\ r \in [0,\ 2\pi).$$

Exerciții:

1. *Să se scrie sub forma (1) numerele* 100, 200, ..., 1 000.

2. *Fie T, t două numere reale astfel ca $T > 0$. Să se arate că există o singură pereche de numere $k \in \mathbf{Z}$, $r \in [0,\ T)$ astfel ca să avem*

$$t = kT + r.$$

3. *Să se arate că funcția $F : \mathbf{R} \to C$ construită mai sus are următoarele proprietăți:*

1°. $F(0) = A$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = B$, $F(\pi) = F(-\pi) = A'$, $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'$.

2°. *Aplicația F este periodică de perioadă 2π, adică avem*

$$F(t + 2\pi) = F(t),$$

pentru orice număr real t.

3°. *Dacă $|t| < \pi$, atunci punctul $M = F(t)$ este astfel încît măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOA}$ este egală cu $|t|$.*

4°. *Dacă t, t' sînt două numere reale astfel ca $|t - t'| < \pi$, atunci punctele $M = F(t)$, $M' = F(t')$ sînt astfel încît măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOM'}$ este egală cu $|t - t'|$,* (fig. III.15)

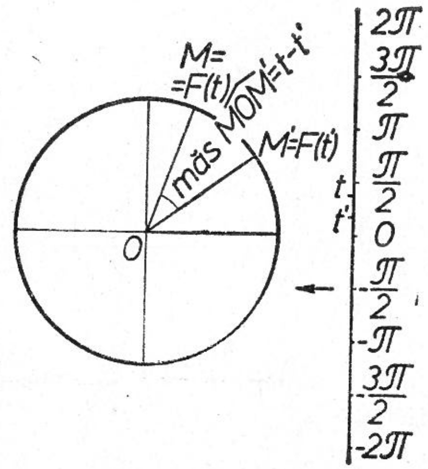


Fig. III.15

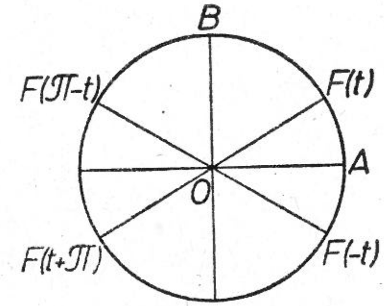


Fig. III.16

5°. *Oricare ar fi $t \in R$, avem:*

— *punctele $F(t)$, $F(\pi + t)$ sînt simetrice față de punctul O,* (fig. III.16).

— *punctele $F(t)$, $F(\pi - t)$ sînt simetrice față de dreapta OB.*

— *punctele $F(t)$, $F(-t)$ sînt simetrice față de dreapta OA.*

(*Indicație.* Pentru a verifica aceste proprietăți, putem presupune că $t \in [0,\ 2\pi]$, deoarece scăzînd din t un multiplu întreg convenabil de 2π, putem ajunge la această situație).

Aplicația F este surjectivă, dar nu este injectivă, deoarece F este o aplicație periodică. Se spune că F constituie *aplicația de acoperire universală* a cercului C; prin această aplicație, cercul C este acoperit de o infinitate de ori de dreapta reală; dacă J este un interval de lungime mai mică decît 2π, inclus în $\mathbf{R}$, atunci imaginea lui J prin F este un arc de cerc avînd aceeași lungime cu J. Deci restricțiile $F \mid J$ ale aplicației F, la intervale J, de lungimi mai mici decît 2π, sînt aplicații injective. Se spune că aceste intervale J sînt *intervale de injectivitate* ale aplicației F.

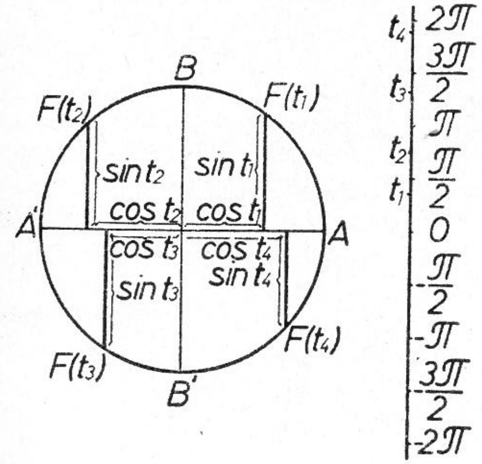


Fig. III.17

Cu ajutorul aplicației $F: \mathbf{R} \to C$ vom defini acum funcțiile (fig. III.17)

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1,\ 1] \subset \mathbf{R},$$
$$\sin : \mathbf{R} \to [-1,\ 1] \subset \mathbf{R}$$

2 —

punînd

(1) $\overrightarrow{OF}(t) = \cos t\,\vec{a} + \sin t\,\vec{b}$.

Deci, pentru fiecare număr $t \in \mathbf{R}$, numărul $\cos t$ este abscisa punctului $F(t)$, iar $\sin t$ este ordonata acestui punct.

Din relația $F(t) \in C$ rezultă că avem, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$,

(2) $$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Proprietățile de la punctul 1 arată că avem

(3) $$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$
$$\cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0,\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

Proprietatea 2 arată că *funcțiile sinus și cosinus sînt periodice cu perioada* 2π, deci avem, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$,

(4) $$\cos(t + 2\pi) = \cos t,\ \sin(t + 2\pi) = \sin t.$$

Proprietățile 3 și 4 arată că **sinusul unui unghi cu vîrful în punctul O este egal cu sinusul numărului real, care reprezintă lungimea arcului dat de intersecția interiorului acelui unghi cu cercul C**. O proprietate analoagă se poate arăta pentru funcția cosinus.

Proprietățile de la punctul 5 pot fi explicitate sub forma:

(5) $\cos(t + \pi) = -\cos t$, $\sin(t + \pi) = -\sin t$, (fig. III.18).

(6) $\cos(\pi - t) = -\cos t$, $\sin(\pi - t) = \sin t$, (fig. III.19).

(7) $\cos(-t) = \cos(t)$, $\sin(-t) = -\sin t$, (fig. III.20).

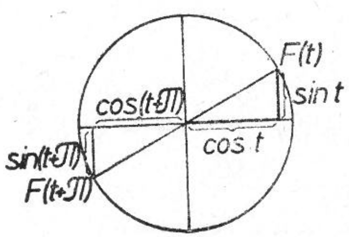


Fig. III.18

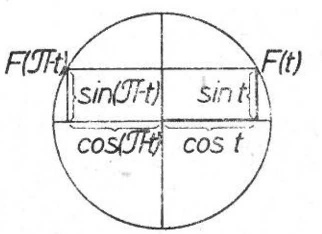


Fig. III.19

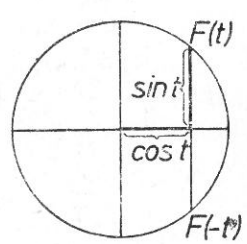


Fig. III.20

Să mai reținem următoarele consecințe imediate ale definițiilor date:

Mulțimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = -1$, este formată din numerele $\pi + 2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Mulțimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = 0$, este formată din numerele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Mulțimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = 1$, este formată din numerele de forma $2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Am definit aplicația $F : \mathbf{R} \to C$ astfel ca, pentru orice $t \in (0, \pi)$, măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOF(t)}$ să fie egală cu t. Din felul în care am definit

funcțiile sinus și cosinus, odată pe mulțimea unghiurilor, și apoi pe dreapta reală, deducem că, pentru $t \in [0, \pi]$, avem

$$\cos\widehat{AOF(t)} = \cos t,\ \sin\widehat{AOF(t)} = \sin t.$$

Aceste relații permit să calculăm, pe cale geometrică, valorile funcțiilor sinus și cosinus.

De exemplu, dacă avem un triunghi echilateral PQR și dacă notăm prin M mijlocul laturii $[QR]$, atunci triunghiul PQM este dreptunghic și, considerînd măsuri în radiani ale unghiurilor indicate, avem (fig. III.21)

$$\text{măs }\widehat{PQM} = \frac{\pi}{3},\ \text{măs }\widehat{QPM} = \frac{\pi}{6}.$$

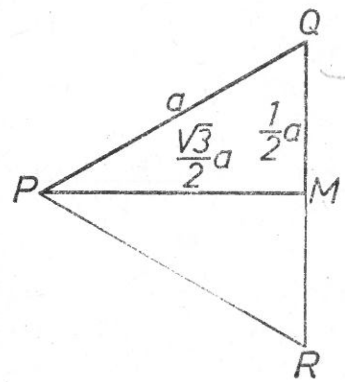


Fig. III.21

Pe de altă parte, dacă notăm prin a lungimea laturii $[PQ]$, atunci

$$d(P, Q) = a,\ d(M, P) = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ d(Q, M) = \frac{1}{2}a,$$

$$\sin\widehat{PQM} = \cos\widehat{QPM} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\widehat{QPM} = \cos\widehat{PQM} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă formulele

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Să considerăm acum un triunghi dreptunghic isoscel LMN, avînd unghiul $\widehat{L}$ drept și $[LM] \equiv [LN]$. În acest caz (fig. III.22),

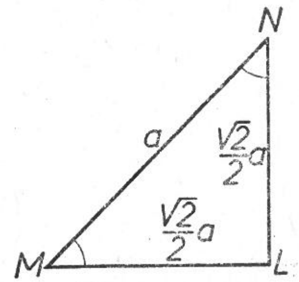


Fig. III.22

$$\text{măs }\widehat{LMN} = \text{măs }\widehat{LNM} = \frac{\pi}{4},$$

$$[MN] \equiv \sqrt{2}\,[LM] \equiv \sqrt{2}\,[LN]$$

și deducem

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercițiu. *Să se calculeze valorile funcțiilor sinus și cosinus corespunzătoare valorilor* $t = -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{6}$.

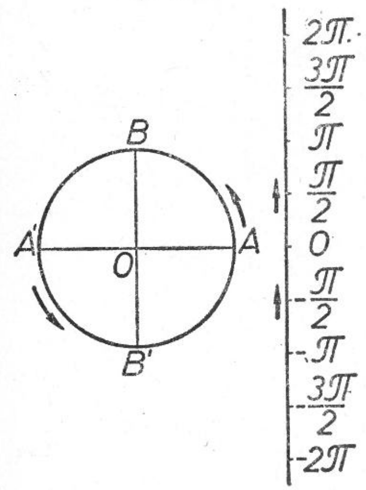


Fig. III.23

Să observăm că, dacă numărul t parcurge axa reală $\mathbf{R}$ de la $-\infty$ la $+\infty$, atunci punctul $F(t)$ descrie cercul C în sensul indicat de săgeată (fig. III.23). Dacă t parcurge semiaxa pozitivă $\mathbf{R}_+$, plecînd din O, $F(t)$ va merge de la A la B, apoi la A', la B', venind din nou în A și repetînd acest traseu de o infinitate de ori.

Funcţia F, deci şi funcţiile sinus şi cosinus, sînt definite pe $\mathbf{R}$; Am arătat că $\sin(-t) = -\sin t$, deci *funcţia sinus este o funcţie impară*. Avem $\cos(-t) = \cos t$, deci *funcţia cosinus este o funcţie pară*.

Aplicaţii.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin(-\pi) = -\sin\pi = 0, \quad \cos(-\pi) = \cos\pi = -1,$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1, \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin(-2\pi) = -\sin(2\pi) = 0, \quad \cos(-2\pi) = \cos(2\pi) = 1.$$

Periodicitatea funcţiilor sinus şi cosinus.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie numerică definită pe toată axa reală şi fie T un **număr pozitiv.** Se spune că T este o *perioadă* pentru funcţia f dacă avem, pentru orice număr $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t + T) = f(t);$$

dacă funcţia f admite o perioadă T, se spune că f este o *funcţie periodică* cu perioada T.

Am arătat că funcţiile sinus şi cosinus sînt funcţii periodice de perioadă $T = 2\pi$.

Dacă o funcţie f este periodică de perioadă T, atunci f admite ca perioade fiecare multiplu întreg pozitiv de T, deoarece avem

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \ldots = f(t + pT) = \ldots, \quad (p \in \mathbf{N}).$$

Dacă ştim că o funcţie f este periodică de perioadă $T > 0$, se pune problema de a şti dacă nu cumva f admite o perioadă T', pozitivă, şi mai mică decît T, sau dacă f nu admite şi alte perioade, în afară de multiplii întregi pozitivi ai perioadei T. Este util să reţinem următoarele proprietăţi:

1. *Funcţiile sinus şi cosinus nu admit nici o perioadă mai mică decît* 2π.

2. *Dacă o funcţie f admite o perioadă T, dar nu admite nici o perioadă mai mică decît T, atunci singurele perioade ale funcţiei f sînt multiplii întregi pozitivi ai perioadei T.*

Demonstraţia proprietăţii. 1. Să presupunem că funcţia sinus ar admite o perioadă T', astfel ca $0 < T' < 2\pi$. Am avea atunci $\sin(t + T') = \sin t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$; în particular, am avea $\sin T' = \sin 0 = 0$. Dar singurul număr T', care satisface condiţiile $0 < T' < 2\pi$, $\sin T' = 0$ este numărul π. Dar π nu este o perioadă pentru funcţia sinus, deoarece $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$. Deci 2π *este cea mai mică perioadă a funcţiei sinus.*

Să presupunem că funcţia cosinus ar admite o perioadă mai mică decît 2π. Fie T'' o astfel de perioadă. Am avea atunci $0 < T'' < 2\pi$ şi $\cos(t + T'') = \cos t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. În particular, $\cos T'' = \cos 0 = 1$. Dar nu există nici un număr real T'' astfel ca $0 < T'' < 2\pi$ şi $\cos T'' = 1$. Deci *cea mai mică perioadă a funcţiei cosinus este tot* 2π.

Demostraţia proprietăţii 2. Să presupunem că T este cea mai mică perioadă a funcţiei f şi fie T' o perioadă arbitrară a lui f. Avem atunci

$$f(t) = f(t + pT) = f(t + qT'),$$

oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$ şi oricare ar fi întregii pozitivi p şi q.

Fie m cel mai mare număr întreg pozitiv, pentru care avem $mT < T'$. În acest caz, $T'' = T' - mT$ este un număr pozitiv mai mic decît T. Pentru orice număr real t, vom avea

$$f(t + T'') = f(t + T' - mT) = f(t - mT + T') = f(t - mT)$$

şi rezultă

$$f(t) = f(t - mT + mT) = f(t - mT) = f(t + T'')$$

deci T'' este o perioadă a funcţiei f, dacă $T'' \neq 0$. Dar $T'' < T$ şi f nu admite perioade mai mici decît T. Deci avem $T'' = 0$ şi $T' = mT$. Deci orice perioadă a funcţiei f este un multiplu întreg pozitiv al perioadei minime T.

Aplicînd ultima proprietate funcţiilor sinus şi cosinus, deducem că singurele perioade ale acestor funcţii sînt multiplii întregi pozitivi ai numărului 2π.

Dacă o funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ admite o perioadă minimă, se spune că această perioadă este *perioada principală* a funcţiei f.

Să observăm că dacă o funcţie f admite perioada T, atunci avem, pentru orice $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t - T) = f(t)$$

deoarece putem scrie $f(t) = f(t - T + T) = f(t - T)$. Avem prin urmare

$$f(t) = f(t \pm T) = f(t \pm 2T) = \ldots = f(t \pm pT) = \ldots,$$

deci pentru orice întreg n şi pentru orice număr real t,

$$f(t + nT) = f(t) \quad (t \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}).$$

Aplicînd această observaţie funcţiilor sinus şi **cosinus**, putem scrie

$$\sin(t + 2n\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2n\pi) = \cos t.$$

În particular, să reţinem formulele:

$$\sin(2n\pi) = 0, \quad \cos(2n\pi) = 1, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Aplicaţii. **1.** *Să se determine perioada principală a funcţiei*

$$f : \mathbf{R} \to [-1, 1], \quad f(x) = \sin(2x) = \sin 2x.$$

Soluţie. Din condiţia de periodicitate $f(x + T) = f(x)$ deducem $\sin(2x + 2T) = \sin(2x)$; această condiţie trebuie să fie îndeplinită pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Punînd $2x = t$, deducem $\sin(t + 2T) = \sin t$; din proprietăţile stabilite anterior deducem $2T = 2\pi$, sau $T = \pi$. Deci perioada principală a funcţiei date este π.

2. *Generalizare.* Să *determinăm perioada principală a funcţiei*

$$g : \mathbf{R} \to [-1, 1], \quad g(x) = \sin(mx) = \sin mx,$$

unde m este un număr real diferit de zero.

Procedînd ca în cazul precedent, obținem condiția $\sin(mx + mT) = \sin(mx)$ sau $\sin(t + mT) = \sin t$, care trebuie să fie verificată pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Cel mai mic număr pozitiv T, care verifică această condiție, este $T = 2\pi/m$.

3. *Ne propunem acum să determinăm perioada principală a funcției*

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h(x) = \sin 4x + \cos 6x.$$

Dacă T este o perioadă pentru h, avem

$$\sin (4x + 4T) + \cos(6x + 6T) = \sin 4x + \cos 6x,\quad x \in \mathbf{R}.$$

Luînd $x = 0$ și apoi $x = \frac{\pi}{2}$ obținem ecuațiile

$$\sin 4T + \cos 6T = 1,\ \sin 4T - \cos 6T = -1,$$

din care rezultă $\sin 4T = 0$ și $\cos 6T = 1$. Cel mai mic număr pozitiv care verifică aceste relații este $T = \pi$. Se verifică că π este într-adevăr o perioadă a funcției h și rezultă că π este perioada principală.

Exerciții

1. *Să se determine perioadele principale ale următoarelor funcții numerice, definite pe* $\mathbf{R}$:
$f(x) = \sin 3x - \cos 5x,\ g(x) = \sin 5x - \sin 7x + \cos 10x - \cos 14x.$
2. *Să se arate că funcția* $h(x) = \sin x + \cos (\sqrt{2}\, x)$ *nu este periodică.*

Observație importantă. Dacă știm despre o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ că admite o perioadă T, pentru a studia comportarea funcției f va fi suficient a ne limita să studiem comportarea funcției f pe un interval oarecare de lungime T, deci pe un interval de forma $[a, a + T)$. Într-adevăr, oricare ar fi numărul t, există un întreg n astfel ca $t - nT$ să aparțină intervalului considerat și, în plus, $f(t) = f(t - nT)$. Dacă de exemplu vrem să determinăm valorile lui t pentru care avem $f(t) = 0$, va fi suficient să găsim valorile care verifică această condiție și care se găsesc în intervalul $[a, a + T)$. Orice altă valoare a lui t, pentru care $f(t) = 0$, se va obține dintr-una din valorile găsite în intervalul considerat, adăugînd multiplii întregi ai perioadei T.

În același mod, pentru a obține punctele t în care funcția f are o anumită valoare y, va fi suficient să determinăm punctele cu această proprietate, care aparțin intervalului considerat. În particular, putem afla în acest fel punctele t, pentru care $f(t)$ este o valoare de maxim sau de minim.

Exercițiu. *Să se determine valorile lui t pentru care funcția* ***sinus*** *are una din valorile* $-1,\ -\sqrt{3}/2,\ -1/2,\ -\sqrt{2}/2,\ 1/2,\ \sqrt{2}/2,\ \sqrt{3}/2,\ 1, 0.$

3. Formule de reducere la primul cadran

Folosind periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus, am redus problema determinării valorilor acestor funcții la aceea a determinării valorilor restricțiilor funcțiilor sinus și cosinus la intervalul $[0, 2\pi)$.

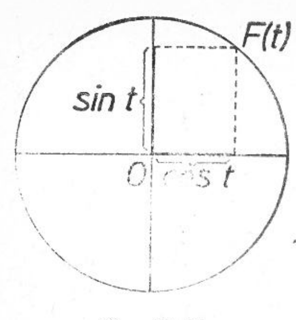


Fig. III.24

Folosind proprietățile de simetrie ale aplicației $F : \mathbf{R} \to C$ și ținînd seama de faptul că punctul $F(t)$ are coordonatele $(\cos t, \sin t)$, putem reduce mai departe studiul valorilor funcțiilor sinus și cosinus (fig. III. 24) restrîngînd aceste funcții la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; pentru valorile lui t cuprinse în acest interval, punctul $F(t)$ se va găsi în primul cadran, dacă exceptăm valorile extreme 0 și $\pi/2$, care dau punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

Formula $\overrightarrow{OF(t+\pi)} = -\overrightarrow{OF(t)}$ permite să considerăm numai puncte t din intervalul $[0, \pi)$, care dau puncte $F(t)$ aparținînd primelor două cadrane, dacă exceptăm punctele A, B. Dacă $t \in [\pi, 2\pi)$, putem calcula $\cos t$ și $\sin t$ folosind relațiile

$$\cos t = -\cos(t - \pi),\ \sin t = -\sin(t - \pi),$$

în care $t - \pi \in [0, \pi)$. Mai departe, dacă avem un număr u în intervalul $[\pi/2, \pi)$, putem calcula numerele $\cos u$ și $\sin u$ din relațiile

$$\cos u = -\cos (\pi - u),\ \sin u = \sin (\pi - u),$$

în care $\pi - u \in (0, \pi/2]$.

Formulele

$$\cos t = \sin(\pi/2 - t),\ \sin t = \cos(\pi/2 - t)$$

arată în sfîrșit că, pentru a cunoaște toate valorile funcțiilor sinus și cosinus, este suficient să cunoaștem valorile pe care le iau aceste funcții în punctele intervalului $[0, \pi/4]$.

Aplicații. Din observațiile făcute anterior, deducem formulele

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4},\quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4},$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4},\quad \cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4},$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4},\quad \cos \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\sin \pi = \sin 0 = 0,\ \cos \pi = -\cos 0 = -1.$$

4. Reprezentarea grafică a funcției sinus

Să considerăm, într-un plan p, un reper ortonormat $(\vec{a}, \vec{b})$, format din vectorii unitari și ortogonali $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Fiecare punct P din planul p

va fi determinat de un cuplu (x, y) de numere reale, astfel ca (fig. III.25)

$$\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

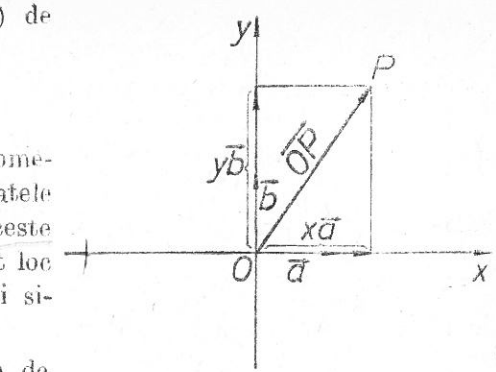


Fig. III.25

Ne propunem să trasăm locul geometric al punctelor P avînd coordonatele de forma $x = t$, $y = \sin t$; din aceste ecuații deducem $y = \sin x$. Acest loc geometric reprezintă graficul funcției sinus în planul p.

Să împărțim axa OA în intervale de lungimi egale cu 2π și avînd extremitățile în punctele $M_k(2k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, (fig. III.26).

Punctele M_k aparțin locului geometric considerat, deci graficului funcției sinus. Funcția sinus fiind periodică de perioadă 2π, graficul acestei funcții este format dintr-o infinitate de arce S_k avînd extremitățile în cîte două puncte

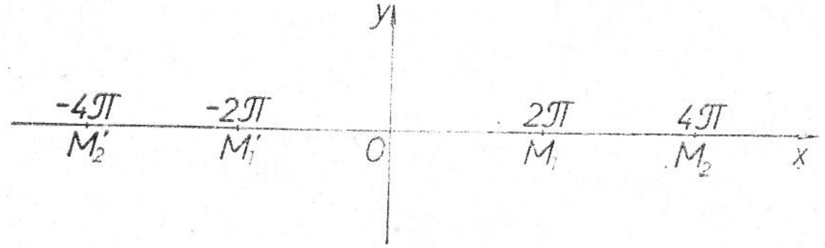


Fig. III.26

consecutive M_{k-1}, M_k. Arcul S_k constituie reprezentarea grafică a restricției funcției sinus la intervalul $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$ și fiecare din arcele S_k se poate obține din arcul S_1 printr-o translație de-a lungul axei OA, anume prin translația

$$y' = y, \quad x' = x + 2(k-1)\pi.$$

Deci arcele S_k sînt congruente două cîte două, în particular, ele sînt congruente cu arcul S_1.

Această observație arată că este suficient să trasăm graficul funcției sinus restrînsă la intervalul $[0, 2\pi]$, deci este suficient să trasăm arcul S_1.

Cînd x parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[-1, 1]$ în ambele sensuri, după cum urmează (fig. III. 27):

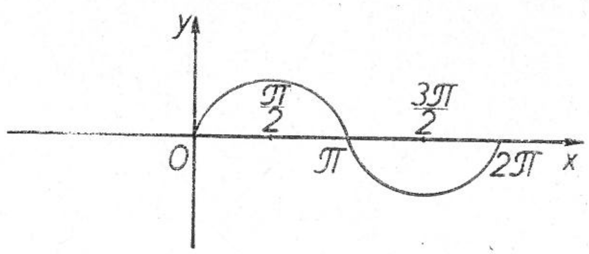


Fig. III.27

Pentru $x = 0$, $\sin x = 0$. Cînd x parcurge subintervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[0, 1]$ crescînd de la 0 la 1. Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ are valoarea maximă 1. Cînd x trece în intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ funcția sinus devine descrescătoare, numărul $\sin x$ coborînd de la valoarea maximă 1 la valoarea 0. În intervalul următor $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, funcția sinus continuă să descrească, valorile ei coborînd de la 0 la -1, care este valoarea minimă pe care poate s-o ia funcția sinus. De la această valoare minimă, numărul $\sin x$ începe să crească din nou, mergînd de la -1 la 0, ajungînd la 0 pentru $x = 2\pi$.

Figura III. 28 reprezintă graficul funcției sinus prelungită în afara intervalului $[0, 2\pi]$. Ne putem imagina acum forma întregului grafic.

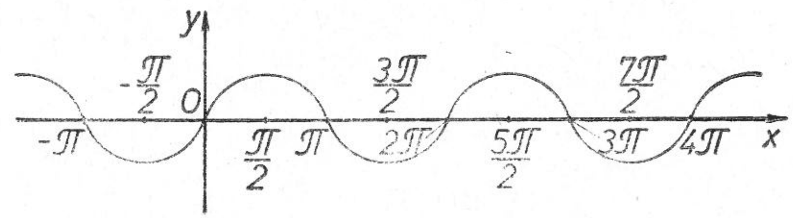


Fig. III.28

Intervale de monotonie. Din indicațiile date, rezultă că funcția sinus este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Dimpotrivă, funcția sinus este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

Aplicație. Să se afle semnul diferenței $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{11}$.

Se observă că $\frac{\pi}{11} < \frac{\pi}{9}$ și că numerele $\frac{\pi}{11}$, $\frac{\pi}{9}$ aparțin intervalului $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pe care funcția sinus este crescătoare. Avem deci $\sin\frac{\pi}{11} < \sin\frac{\pi}{9}$ și $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{11} > 0$.

Semnul funcției sinus.

Din observațiile făcute, deducem că funcția sinus este pozitivă pe fiecare interval deschis $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, unde $k \in \mathbf{Z}$ și că aceeași funcție este negativă pe fiecare interval deschis $(\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi)$.

Aplicație. Să se afle semnul expresiei

$$E=\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\sin\frac{23\pi}{7}\sin 3\sin 5.$$

Soluție. Avem $\frac{\pi}{9}\in(0,\pi)$, deci $\sin\frac{\pi}{9}>0$; $\frac{11\pi}{9}\in(\pi,2\pi)$, $\sin\frac{11\pi}{9}<0$, $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)=-\sin\frac{8\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7}\in(\pi,2\pi)$, $\sin\frac{8\pi}{7}<0$; $\frac{23\pi}{7}\in(3\pi,4\pi)$, $\sin\frac{23\pi}{7}<0$; $3\in(0,\pi)$, $\sin 3>0$; $5\in(\pi,2\pi)$, $\sin 5<0$.

Rezultă $E<0$.

Aplicație. Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbf{R}\to[-2,2]$, $f(x)=2\sin x$.

Soluție. Funcția f are aceeași perioadă și aceleași intervale de monotonie cu funcția sinus. Graficul lui f se obține din graficul funcției sinus printr-o *dilatare* în lungul axei OB. Graficul funcției f intersectează axa OA în punctele $M_k(k\pi, 0)$ și are punctele de maxim $L_k\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, 2\right)$ și punctele de minim $L'_k\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -2\right)$, unde $k\in\mathbf{Z}$. Graficul funcției f este reprezentat în figura III. 29.

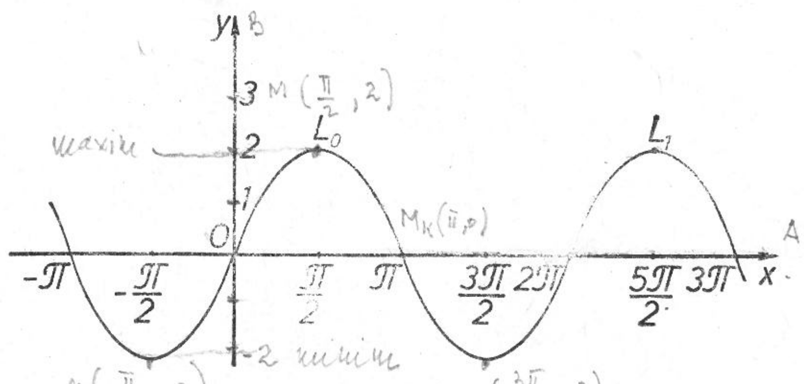


Fig. III.29

Aplicație. Să se reprezinte grafic funcția $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$, $g(x)=\sin 2x$.

Soluție. Funcția g este periodică de perioadă π. Dacă $(x, y=\sin 2x)$ este un punct al graficului funcției g, atunci punctul $(2x, \sin 2x)$ va fi un punct al graficului funcției sinus. Deci graficul funcției g se obține din graficul funcției sinus efectuînd o *contracție* de-a lungul axei OA. Graficul funcției g intersectează axa OA în punctele $P_k\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, unde $k\in\mathbf{Z}$. Valoarea maximă a funcției g este 1 și este atinsă în punctele de abscise $\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$, iar valoarea

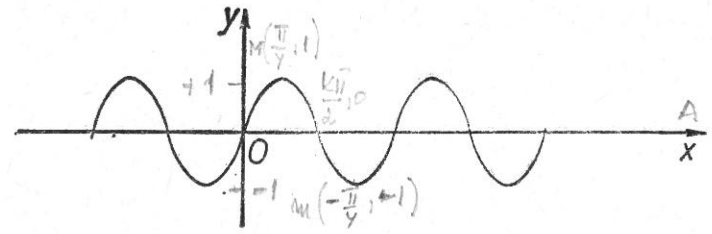


Fig. III.30

minimă este atinsă în punctele de abscise $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Reprezentarea grafică a funcției g este dată în figura III. 30.

5. Reprezentarea grafică a funcției cosinus

Pentru orice număr real x avem $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$. Rezultă că, din orice punct $(x, y=\cos x)$ al graficului funcției cosinus, se obține un punct al graficului funcției sinus, făcînd o translație de-a lungul axei OA, punînd $x'=x+\frac{\pi}{2}$, $y'=y$. Într-adevăr, dacă $y'=\sin x'$, atunci $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$. Deci putem obține graficul funcției cosinus, considerînd graficul funcției sinus și mutînd axa OB, paralel cu ea însăși, din punctul $O(0, 0)$ în punctul $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Figura III. 31 reprezintă graficul funcției cosinus.

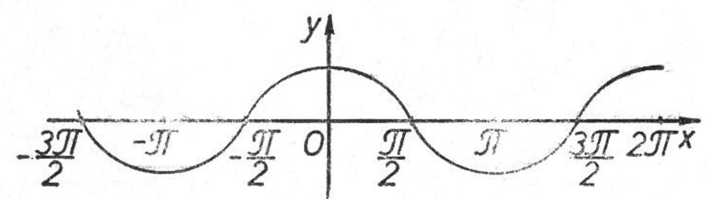


Fig. III.31

Acest grafic intersectează axa OA în punctele $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; punctele de maxim au coordonatele $(2k\pi, 1)$, $k\in\mathbf{Z}$, iar punctele de minim au coordonatele $(2k\pi+\pi, -1)$.

Funcția cosinus este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$, și este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi+2k\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$.

Aplicație. Să se stabilească semnele expresiilor

$$E_1=\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{5},\quad E_3=\cos\frac{9\pi}{7}-\cos\frac{8\pi}{7}.$$

Soluție. Avem $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{5} \in (0, \pi)$ și $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$. Funcția cosinus fiind descrescătoare pe intervalul $(0, \pi)$, avem $E_1 < 0$.

Pentru a doua expresie, observăm că $\frac{8\pi}{7} < \frac{9\pi}{7} \in (\pi, 2\pi)$; pe acest interval, funcția cosinus este crescătoare, deci $E_2 > 0$.

Semnul funcției cosinus. Din reprezentarea grafică a funcției cosinus rezultă că această funcție este pozitivă pe orice interval deschis de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ și că aceeași funcție este negativă pe fiecare interval de forma $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Exercițiu. *Să se afle semnul numărului* cos 1 234.

6. Formule de adunare și scădere

Fie u și v două unghiuri ascuțite, astfel ca suma $u + v$ să fie reprezentată de asemenea prin unghiuri ascuțite. Să construim, într-un plan p, trei semidrepte h, k, m cu aceeași origine astfel ca acestea să formeze unghiurile adiacente $\widehat{hk} \equiv u$ și $\widehat{km} \equiv v$. În acest caz, unghiurile $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$, $\widehat{hm}$ vor fi unghiuri ascuțite și semidreapta k va fi interioară unghiului $\widehat{hm}$, (fig. III. 32).

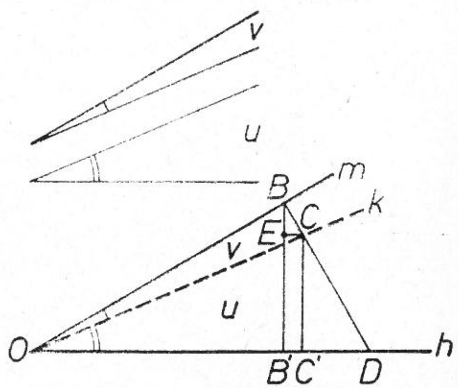


Fig III.32.

Să alegem un punct arbitrar $B \in m$ și să construim punctele $C \in k$, $B' \in h$, $C' \in h$ astfel ca

(1) $BC \perp OC$, $CC' \perp OC'$, $BB' \perp OB'$.

Dreapta BC intersectează semidreapta h într-un punct D, astfel încît:

(2) $B' \in |OD|$, $B' \in |OC'|$, $C' \in |B'D|$.

Aplicînd de mai multe ori teorema proiecției, obținem relațiile

(3) $|OB'| \equiv |OB| \cos\widehat{hm} \equiv |OB| \cos(u + v)$,

(4) $|OC| \equiv |OB| \cos\widehat{km} \equiv |OB| \cos v$,

(5) $|OC'| \equiv |OC| \cos\widehat{hk} \equiv |OB| \cos v \cos u$,

(6) $|B'C'| \equiv |BC| \cos \widehat{BDB'}$, $|BC| \equiv |OB| \cos\widehat{OBC}$.

Din triunghiurile dreptunghice OCD și OBC rezultă

$$\cos\widehat{BDB'} = \cos\widehat{BDO} = \sin\widehat{COD} = \sin u,$$

$$\cos\widehat{OBC} = \sin\widehat{COB} = \sin v,$$

astfel încît formulele (6) pot fi scrise sub forma

(7) $|B'C'| \equiv |BC| \sin u \equiv |OB| \sin v \sin u$.

Din relațiile de ordonare (2) rezultă formula

$$|OC'| \equiv |OB'| + |B'C'|$$

iar egalitățile (3), (5) și (7) dau

(8) $|OB| \cos u \cos v = |OB| \cos(u + v) + |OB| \sin u \sin v$.

Avem deci egalitatea $\cos u \cos v = \cos(u + v) + \sin u \sin v$ sau

(9) $$\boxed{\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v.}$$

Demonstrația care ne-a condus la relația (9) este valabilă ori de cîte ori unghiurile u, v și $u + v$ sînt ascuțite.

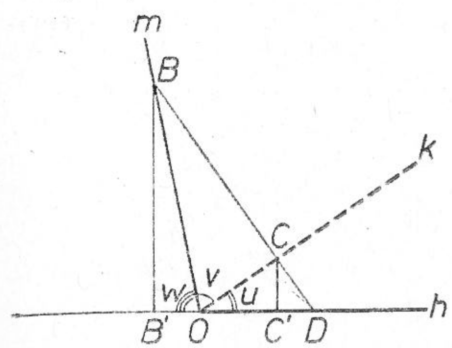


Fig. III.33

Dacă unghiurile u și v sînt ascuțite, dar unghiul $u + v$ este obtuz, deci dacă avem situația din figura III. 33, atunci vom avea $O \in |B'C'|$ și, notînd prin w unghiul $\widehat{BOB'}$, care este suplementul unghiului $\widehat{hm} = \widehat{BOD}$, avem

(10) $O \in |B'C'|$,
$\cos w = -\cos(u + v)$.

Aplicînd din nou, de mai multe ori teorema proiecției, vom avea

$$|OB'| \equiv |OB| \cos w, \quad |OC'| \equiv |OC| \cos u \equiv |OB| \cos v \cos u,$$

$$|B'C'| \equiv |BC| \cos\widehat{BDB'} \equiv |OB| \sin v \sin u$$

și rezultă egalitatea

$$|OB| \sin u \sin v \equiv |OB'| + |OC'| \equiv |OB| (\cos w + \cos u \cos v)$$

sau

$$\sin u \sin v = \cos w + \cos u \cos v.$$

Avem deci

$$\cos(u + v) = -\cos w = \cos u \cos v - \sin u \sin v,$$

și rezultă că egalitatea (9) este adevărată și în cazul în care u și v sînt unghiuri ascuțite, iar $u + v$ este unghi obtuz.

Dacă $u + v$ este un unghi drept, atunci $\cos(u + v) = 0$, $\cos u = \sin v$ și $\cos v = \sin u$, astfel încît egalitatea (9) rămîne adevărată.

23.10.79

Dacă u și v sînt unghiuri astfel încît u este obtuz sau drept și dacă suma $u + v$ este definită, deci dacă sîntem în situația ilustrată în figura III. 34, atunci vom avea relațiile de ordonare

(11) $C' \in |OB'|$,
$B' \in |OD|$, $C' \in |OD|$.

Exercițiu. *Să se demonstreze egalitatea* (9) *în condițiile* (11).

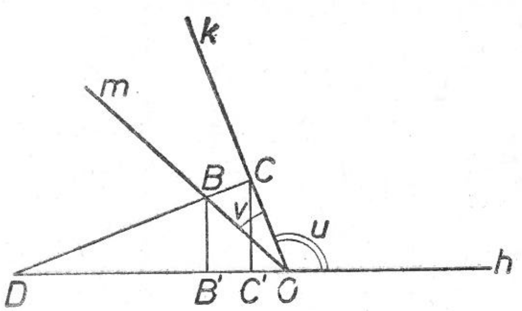


Fig. III.34

Formula (9) este adevărată ori de cîte ori u și v sînt unghiuri astfel încît suma $u + v$ este definită. Dacă $u + v$ este un unghi alungit, atunci unghiurile u și v sînt suplementare și avem

$$\cos u = -\cos v, \ \sin u = \sin v, \ \cos(u + v) = -1$$

astfel încît formula (9) este de asemenea adevărată.

Formula (9) permite calculul cosinusului sumei a două unghiuri, cunoscînd sinusurile și cosinusurile celor două unghiuri.

Ne propunem să stabilim o formulă analoagă pentru sinusul sumei a două unghiuri.

Vom considera separat fiecare din cazurile pe care le-am distins anterior pentru calculul cosinusului sumei $u + v$.

În cazul figurii III. 32, deci în cazul în care unghiurile u, v și $u + v$ sînt ascuțite, avem

$|BB'| \equiv |OB| \sin(u + v)$, $|CC'| \equiv |OC| \sin u \equiv |OB| \cos v \sin u$, $|BC| \equiv$
$\equiv |OB| \sin v$.

Dacă notăm prin E proiecția ortogonală a punctului C pe dreapta BB', vom avea $E \in |BB'|$ și

$|B'E| \equiv |CC'|$, $|BB'| \equiv |BE| + |B'E|$, $|BE| \equiv |BC| \cos \widehat{CBE} \equiv$
$\equiv |BC| \cos u$.

Rezultă formula

$|OB| \sin(u + v) = |CC'| + |BE| = |OB| \sin u \cos v + |OB| \sin v \cos u$

și avem deci

(12) $$\boxed{\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u}$$

Exercițiu. *Să se demonstreze egalitatea* (12) *în cazurile în care unghiul u sau unghiul v este ascuțit și în cazul în care unghiurile u, v sînt suplementare.*

Formula (12), este valabilă pentru orice unghiuri u și v, pentru care suma v este definită, și permite calculul sinusului sumei $u + v$ în funcție de sinusurile și cosinusurile unghiurilor u și v.

$\sqrt{9} \times \sqrt{36} = \sqrt{324}$ 18 $\sin u+v = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

Să reținem deci formulele

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(u + v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v,\\ \sin(u + v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v,\end{aligned}}$$

29.10.79

adevărate pentru orice două unghiuri u și v, pentru care suma $u + v$ este definită.

Aplicații. Am arătat că

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rezultă, folosind formulele scrise mai sus,

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \sin 45° \cos 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \sin 30° \sin 45°$$
$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Pentru a da o altă aplicație să observăm că, din formula (9) rezultă dacă presupunem $v = u =$ unghi ascuțit,

$$\cos 2u = \cos u \cos u - \sin u \sin u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1.$$

Din ultima egalitate deducem formula

(14) $$\cos u = \sqrt{\frac{1 + \cos 2u}{2}}, \quad \left(u \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Am ținut seama de faptul că, unghiul u fiind ascuțit, cosinusul său trebuie să fie pozitiv.

Să presupunem în ultima formulă că u este un unghi de 15°, deci că $2u$ este un unghi de 30°. În acest caz, vom avea $\cos 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și formula (14) dă

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Exerciții

1. *Să se calculeze* sin 15°. **R.** $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.
2. *Să se calculeze* cos (22°30′) *și* sin (22°30′), *apoi* cos 7°30′, sin 7°30′.

Fie a și b două numere reale. Am arătat că există două numere întregi m și n astfel ca numerele $a' = a - 2m\pi$, $b' = b - 2n\pi$ să aparțină intervalului $[0, 2\pi)$, deci astfel ca să avem

(1) $$a = a' + 2m\pi, \ 0 \leqslant a' < 2\pi, \ b = b' + 2n\pi, \ 0 \leqslant b' < 2\pi.$$

De exemplu, dacă a este un număr pozitiv, împărțim numărul a la 2π și notăm cu m partea întreagă a cîtului, iar prin a' restul. Dacă a este un număr negativ, $-a$ va fi pozitiv și avem o relație de forma $-a = a^* + 2h\pi$, unde $0 \leqslant a^* < 2\pi$ și $h \in \mathbf{Z}$, $h \geqslant 0$. Vom putea scrie atunci, dacă $a^* > 0$,

$$a = -a^* - 2h\pi = (2\pi - a^*) + 2m\pi, \quad m = -h - 1.$$

Deci relațiile (1) pot fi într-adevăr realizate.

Fiecare din numerele a', b' se va găsi într-unul din intervalele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Aceasta înseamnă că există numere naturale p și q, cel mult egale cu 3, astfel ca să avem

$$(2) \qquad a'' = a' - p\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right);\quad b'' = b' - q\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Din formulele (1) rezultă că avem

$$(3) \qquad \cos a = \cos a', \ \sin a = \sin a', \ \cos b = \cos b', \ \sin b = \sin b',$$

$$(4) \qquad \cos(a + b) = \cos(a' + b'), \ \sin(a + b) = \sin(a' + b').$$

Dacă în formulele (2) avem $p = q = 0$, atunci există unghiuri ascuțite u și v, astfel ca măsurile în radiani ale unghiurilor u, v, $u + v$ să fie egale cu numerele a', b', $a' + b'$. Avem atunci

$$(5) \qquad \cos a' = \cos u, \ \sin a' = \sin u, \ \cos b' = \cos v, \ \sin b' = \sin v,$$

$$(6) \qquad \cos(a' + b') = \cos(u + v), \ \sin(a' + b') = \sin(u + v).$$

Din formulele (3) — (6) și din formulele cunoscute pentru unghiuri deducem egalitățile

$$(7) \qquad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$(8) \qquad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

În cazul general, vom avea formulele analoage pentru a'' și b'', deoarece aceste numere aparțin intervalului $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; deci putem scrie

$$(9) \qquad \cos(a'' + b'') = \cos a'' \cos b'' - \sin a'' \sin b'',$$

$$(10) \qquad \sin(a'' + b'') = \sin a'' \cos b'' + \cos a'' \sin b''.$$

Pentru a arăta că formulele (7) și (8) sînt generale, deci că sînt adevărate pentru orice valori date variabilelor a și b, este suficient să arătăm că:

Dacă formulele (7) și (8) sînt verificate de numerele a și b, atunci ele vor fi verificate și de numerele $a' = a + \frac{\pi}{2}$ și b.

Demonstrație. Ne vom sprijini pe identitățile generale

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t, \quad \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t.$$

Avem, ținînd seama de aceste identități și de formulele (7) și (8),

$$\cos(a' + b) = \cos\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a + b) = -\sin a \cos b - \cos a \sin b =$$
$$= \cos a' \cos b - \sin a' \sin b,$$

$$\sin(a' + b) = \sin\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b =$$
$$= \sin a' \cos b + \cos a' \sin b.$$

Rezultă că formulele (7) și (8) sînt verificate și de numerele a' și b. Repetînd raționamentul, vom arăta că aceste formule sînt verificate de fiecare din perechile de numere

$$(a'', b''), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 2\frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b''\right),$$

$$\left(a'', b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(a'', b'' + \pi), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right), (a'' + \pi, b'' + \pi), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right),$$

$$\left(a'', b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{3\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right)$$

În rezumat, putem enunța următorul rezultat fundamental:
Oricare ar fi numerele reale a și b, avem

$$(11) \qquad \boxed{\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,}$$
$$(12) \qquad \boxed{\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.}$$

Dacă în aceste identități punem $b = -b'$, obținem identitățile:

$$(13) \qquad \sin(a - b') = \sin a \cos b' - \cos a \sin b'.$$

$$(14) \qquad \cos(a - b') = \cos a \cos b' + \sin a \sin b'.$$

Aceste formule permit să se calculeze sinusurile și cosinusurile sumei și diferenței a două unghiuri, cunoscînd sinusurile și cosinusurile celor două unghiuri.

Aplicații. **1.** *Să se arate ce devin formulele precedente, cînd luăm:*

$$a = 0, \ a = \frac{\pi}{2}, \ a = \pi, \ a = 2\pi$$

sau

$$b' = 0, \ b' = \frac{\pi}{2}, \ b' = \pi, \ b' = 2\pi.$$

Soluție. Se obțin formulele cunoscute

$$\sin(-v) = -\sin v, \ \cos(-v) = \cos v, \ \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \cos v,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \mp \sin v, \ \sin(\pi \pm v) = \mp \sin v, \ \cos(\pi \pm v) = -\cos v,$$

$$\sin(2\pi \pm v) = \pm \sin v, \ \cos(2\pi \pm v) = \cos v,$$

$$\sin\left(u-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos u,\ \cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right) = \sin u,$$
$$\sin(u-\pi) = -\sin u,\ \cos(u-\pi) = -\cos u,$$
$$\sin(u-2\pi) = \sin u,\ \cos(u-2\pi) = \cos u.$$

2. *Să se calculeze* $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$ şi $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Soluţie. Avem $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, deci $\sin\frac{\pi}{12} =$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

3. *Să se arate că* $\sin(u+v)\cos u - \cos(u+v)\sin u = \sin v$ şi $\cos(u+v)\cos u + \sin(u+v)\sin u = \cos v$.

Soluţie. Avem $v = (u+v) - u$, $\sin v = \sin[(u+v)-u]$. Aplicînd formula (13), se obţine prima relaţie. A doua relaţie se va obţine aplicînd formula (14).

7. Funcţiile tangentă şi cotangentă

Funcţia tangentă. Să notăm prin M mulţimea numerelor reale de forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Pentru fiecare număr $x \notin M$, dreapta $OF(x)$ intersectează dreapta D, trecînd prin punctul A (1, 0) şi paralelă la OB, într-un punct T (fig. III. 35; 36) care are coordonatele de forma $(1, u)$. Punctul T depinde de x, deci u este o funcţie de x. Această funcţie este definită pe mulţimea $\mathbf{R} - M$ şi are valori în $\mathbf{R}$. Se scrie $u = tg\ x$ şi se spune că aplicaţia $x \to u$ este *funcţia tangentă*. Avem deci

$$tg : \mathbf{R} - M \to \mathbf{R},\ M = \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

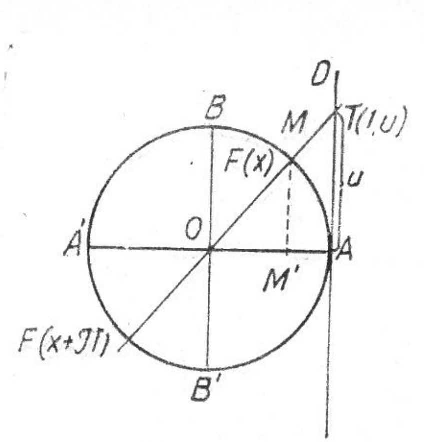


Fig. III.35

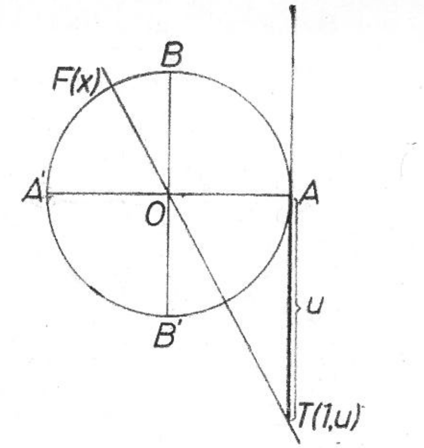


Fig. III.36

Funcţia tangentă are valori pozitive cînd punctul $F(x) \in C$ se găseşte fie în cadranul I, fie în cadranul III, deci tg x este un număr pozitiv dacă sin x şi cos x au acelaşi semn. Funcţia tangentă are valori negative pentru acei $x \in \mathbf{R} - M$, pentru care punctul $F(x)$ se găseşte în unul din cadranele II sau IV, deci cînd sin x şi cos x au semne contrare.

Din triunghiurile asemenea OAT şi $OM'M$, unde $M = F(x)$ şi $M'(\cos x, 0)$ este proiecţia lui M pe axa OA, deducem, ţinînd seama că $d(O, A) = 1$, (fig. III. 35)

$$(1)\qquad \boxed{u = \mathrm{tg}\ x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

Formula (1) arată cum se exprimă funcţia tangentă cu ajutorul funcţiilor sinus şi cosinus. Observăm că valorile lui x, în care se anulează numitorul fracţiei $\frac{\sin x}{\cos x}$, sînt tocmai elementele mulţimii M, care a fost exclusă din definiţia funcţiei tangentă.

Să notăm prin N mulţimea formată din punctele x, în care se anulează funcţia sinus. Putem defini *funcţia cotangentă*

$$\mathrm{ctg} : \mathbf{R} - N \to \mathbf{R},\ N = \{k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}$$

punînd

$$(2)\qquad \boxed{\mathrm{ctg}\ x = \frac{\cos x}{\sin x}}.$$

Această funcţie ia valori pozitive cînd sin x şi cos x au acelaşi semn şi ia valori negative, cînd sin x şi cos x au semne contrare. Deci numerele tg x şi ctg x au acelaşi semn, pentru orice $x \in \mathbf{R} - (M \cup N)$.

Interpretarea geometrică a funcţiei cotangentă, analoagă celei date pentru funcţia tangentă, se poate obţine considerînd punctul de intersecţie T'

al dreptei OM, $M = F(x)$, cu paralela dusă prin punctul $B(0, 1)$ la axa OA. În acest caz, numărul ctg x este egal cu abscisa punctului T; (fig. III. 37; 38).

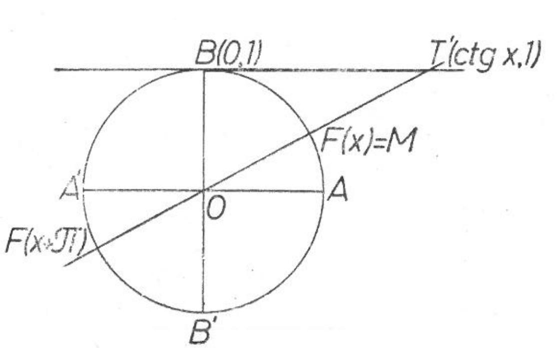


Fig. III.37

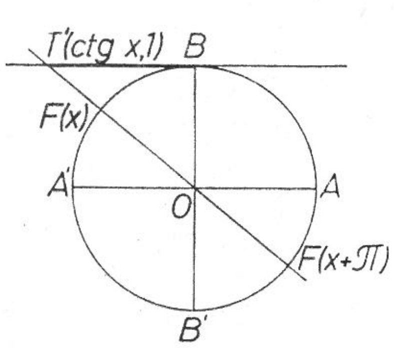


Fig. III.38

Domeniul de definiție al funcției tangentă este egal cu reuniunea intervalelor $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Notînd prin I_k intervalul $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, observăm că funcția tg crește de la $-\infty$ la $+\infty$, pe intervalul I_k.

Funcția tangentă se anulează în punctele, în care se anulează funcția sinus, deci în punctele mulțimii N.

Funcția cotangentă are ca domeniu de definiție reuniunea intervalelor $J_k = (k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Pe fiecare interval J_k, funcția cotangentă descrește de la $+\infty$ la $-\infty$. Funcția cotangentă se anulează în punctele în care se anulează funcția cosinus, deci în punctele mulțimii M.

Reținem că funcțiile tangentă și cotangentă sînt astfel încît fiecare dintre ele se anulează pe mulțimea, pe care cealaltă funcție nu este definită.

În punctele în care ambele funcții, tangentă și cotangentă, sînt simultan definite, aceste funcții sînt legate prin relația

(3) $$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1,\ x \in \mathbf{R} - (M \cup N).$$

Din formulele (1) și (2) rezultă că fiecare din funcțiile tangentă și cotangentă este o funcție periodică, ce admite perioada 2π. Dar, pentru aceste funcții, 2π nu este perioada minimă. Într-adevăr, din relațiile

$$\sin(x + \pi) = -\sin x,\ \cos(x + \pi) = -\cos x$$

rezultă că avem $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ pentru orice $x \in \mathbf{R} - M$ și $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - N$. **Deci funcțiile tg *și* ctg admit numărul π drept perioadă.**

Se pune problema de a decide dacă există perioade mai mici decît π pentru funcțiile tg și ctg. Dacă T este o perioadă a funcției tg, trebuie să avem $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - M$; în particular, $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} 0 = 0$. Deci T trebuie să fie un multiplu întreg de π. Rezultă că *perioada minimă a funcției tangentă este* π.

Fie T o perioadă a funcției cotangentă. Va trebui să avem $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + T)$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - N$. În particular, $\operatorname{ctg}\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$. Rezultă că T trebuie căutat printre numerele de forma $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci *perioada minimă a funcției cotangentă este tot* π.

Să observăm că, din moment ce funcția tangentă este crescătoare pe fiecare interval I_k, a cărui lungime este π, nu este posibil ca această funcție să admită perioade mai mici decît π. Aceeași observație este valabilă pentru funcția cotangentă.

Din proprietățile de periodicitate ale funcțiilor tg și ctg rezultă că graficele acestor funcții se obțin din graficele restricțiilor lor la intervalele I_k respectiv J_k, prin translații de-a lungul axei OA, de mărimi egale cu multiplii întregi de π. Figurile III.39 și III. 40 dau reprezentările grafice ale funcțiilor tangentă și cotangentă.

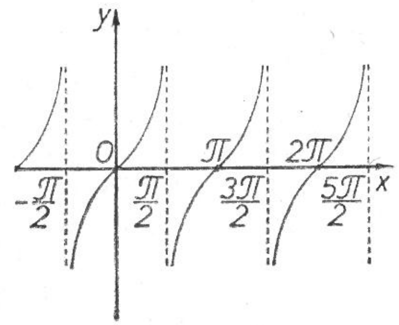


Fig. III. 39

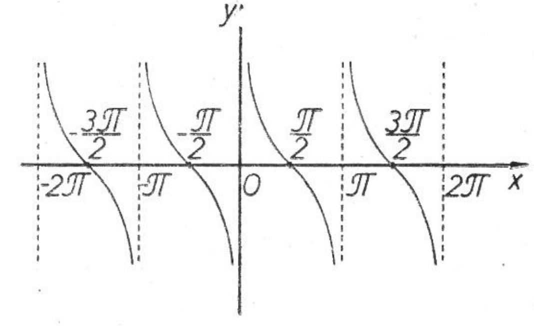


Fig. III. 40

Se observă că funcția tangentă ia fiecare valoare reală y de o infinitate de ori, anume o dată în fiecare din intervalele I_k. De asemenea, funcția cotangentă ia orice valoare reală y, o dată în fiecare din intervalele J_k.

De asemenea, se poate observa că fiecare dreaptă d, definită de o ecuație de forma $y = mx + n$, intersectează graficul funcției tangentă într-o infinitate de puncte $P_k(x_k, y_k)$, unde $x_k \in I_k$. Punctele P_k reprezintă soluțiile sistemului de ecuații

$$y = mx + n,\ y = \operatorname{tg} x$$

iar numerele x_k sînt soluțiile ecuației

(4) $$\operatorname{tg} x = mx + n.$$

Deci:

Ecuația (4) admite o infinitate de soluții x_k, $k \in \mathbf{Z}$, fiecare din aceste soluții fiind situată în intervalul $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Exercițiu. *Fiind date numerele reale m și n, să se precizeze numărul soluțiilor ecuației* $\operatorname{ctg} x = mx + n$.

Convenție generală. Ori de cîte ori vom considera o expresie în care apar funcțiile tangentă și cotangentă, sau amîndouă aceste funcții, sau în care apar fracții ce conțin funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate la una sau mai multe variabile, vom presupune că sînt excluse din considerații acele valori ale variabilelor, pentru care expresia nu are sens. În fiecare caz, elevii vor examina și vor determina mulțimea valorilor ce trebuie excluse.

Ne propunem să exprimăm numărul $\operatorname{tg}(u+v)$ cu ajutorul numerelor $\operatorname{tg} u$ și $\operatorname{tg} v$. Avem, folosind formulele cunoscute,

$$\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}=\frac{\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos u\cos v-\sin u\sin v}.$$

Împărțind numărătorul și numitorul ultimei fracții prin $\cos u \cos v$ respectiv prin $\sin u \sin v$, obținem formulele

$$\boxed{\operatorname{tg}(u+v)=\frac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}=\frac{\operatorname{ctg} v+\operatorname{ctg} u}{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v-1}}$$

Procedînd în mod analog, obținem formulele

$$\boxed{\operatorname{tg}(u-v)=\frac{\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} v}{1+\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}=\frac{\operatorname{ctg} v-\operatorname{ctg} u}{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v+1}}$$

$$\operatorname{ctg}(u+v)=\frac{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v-1}{\operatorname{ctg} u+\operatorname{ctg} v}=\frac{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v}$$

$$\operatorname{ctg}(u-v)=\frac{\operatorname{ctg} u\operatorname{ctg} v+1}{\operatorname{ctg} v-\operatorname{ctg} u}=\frac{1+\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} v}.$$

Aplicații. 1. *Să se arate că*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg} x,\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg} x.$$

Soluție. Se aplică formula care dă $\operatorname{tg}(u-v)$ în funcție de $\operatorname{ctg} u$ și $\operatorname{ctg} v$, apoi formula care dă $\operatorname{ctg}(u-v)$ în funcție de $\operatorname{ctg} u$ și $\operatorname{ctg} v$.

2. *Să se calculeze* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Soluție. Observînd că $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, obținem

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

Folosind valorile deduse anterior pentru anumite arce, putem întocmi următorul tabel de valori ale funcțiilor tangentă și cotangentă

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\operatorname{ctg} x$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Valorile alese pentru x dau puncte $F(x)$ în cadranele IV și I. Pentru a trece la cadranele II și III, folosim formulele

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x,\quad \operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x.$$

Folosind periodicitatea funcțiilor tg și ctg, putem completa tabelul făcînd să apară valorile lui x deduse din cele scrise prin adăugarea multiplilor întregi ai perioadei π.

Exerciții

Să se stabilească relațiile

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$,

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

4. *Să se exprime numerele* $\sin(u+v+w)$, $\operatorname{tg}(u+v+w)$ *cu ajutorul valorilor funcțiilor sinus, cosinus și tangentă, corespunzătoare valorilor u, v, w date variabilei independente.*

Soluție. Avem, folosind formule cunoscute,

$$\begin{aligned}\sin(u+v+w)&=\sin(u+v)\cos w+\cos(u+v)\sin w=\\&=\sin u\cos v\cos w+\sin v\cos u\cos w+\sin w\cos u\cos v-\\&-\sin u\sin v\sin w,\\ \cos(u+v+w)&=\cos(u+v)\cos w-\sin(u+v)\sin w=\\&=\cos u\cos v\cos w-\sin u\sin v\cos w-\sin u\sin w\cos v-\\&-\sin v\sin w\cos u,\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(u+v+w)=\frac{\sin(u+v+w)}{\cos(u+v+w)}=\frac{\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v+\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v\operatorname{tg} w}{1-\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v-\operatorname{tg} v\operatorname{tg} w-\operatorname{tg} w\operatorname{tg} u}.$$

5. ***Să se arate că dacă $u+v+w=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, atunci***

$$\operatorname{tg} u+\operatorname{tg} v+\operatorname{tg} w=\operatorname{tg} u\operatorname{tg} v\operatorname{tg} w.$$

Soluție. Se pune în primul membru al ultimei identități $\operatorname{tg}(u+v+w)=0$.

6. *Să se exprime numerele* $\sin(u+v+w+t)$, $\cos(u+v+w+t)$ *cu ajutorul numerelor* $\sin u$, $\sin v$, $\sin w$, $\sin t$, $\cos u$, $\cos v$, $\cos w$, $\cos t$.

Dacă în formulele stabilite pentru calculul expresiilor $\sin(u+v)$, $\cos(u+v)$, $\operatorname{tg}(u+v)$, $\sin(u+v+w)$, $\cos(u+v+w)$, $\operatorname{tg}(u+v+w)$ *punem* $u=v=w=x$, *obținem identitățile*

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\quad \operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\sin 3x=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=2\sin x\cos^2 x+\cos^2 x\sin x-$$
$$-\sin^3 x=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x,$$

$$\cos 3x=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos^3 x-\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x\cos x=$$
$$=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x.$$

Dacă ținem seama de identitatea $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, putem scrie

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x,\quad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x,$$
$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x.$$

Pentru tg $3x$ şi ctg $3x$ se obţin formulele

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}, \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}.$$

Formulele stabilite în acest fel permit calculul funcţiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă, corespunzătoare multiplilor $2x$ şi $3x$ ai argumentului x. Metoda folosită poate fi aplicată şi pentru calculul valorilor corespunzătoare multiplilor $4x$, $5x$ etc., ca funcţii de $\sin x$, $\cos x$ şi $\operatorname{tg} x$.

Să observăm că avem, pentru orice număr x, pentru care $\cos x \neq 0$,

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Folosind formulele stabilite pentru $\sin 2x$, $\cos 2x$ şi $\operatorname{tg} 2x$, putem acuma să exprimăm numerele $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ şi $\operatorname{ctg} x$, în funcţie de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Într-adevăr, putem scrie, dacă $\cos\frac{x}{2} \neq 0$,

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Deci am demonstrat că:

Dacă x este astfel încît $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ şi dacă notăm $m = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, atunci

$$\boxed{\sin x = \frac{2m}{1 + m^2}, \quad \cos x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2m}{1 - m^2}}.$$

Aceste formule arată că sinusul, cosinusul şi tangenta unui număr x, pentru care $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, pot fi exprimate prin funcţii raţionale de tangenta lui $\frac{x}{2}$.

Aplicaţii. 1. *Să se afle* $\sin x$ *şi* $\cos x$ *ştiind că* $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$.

Soluţie. Potrivit formulelor stabilite mai sus avem

$$\sin x = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 9 \cdot 10^{-1} = \frac{3}{5}.$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = \frac{4}{5}.$$

2. *Să se afle numărul* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *ştiind că* $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$.

Soluţie. Să calculăm $\operatorname{tg} x$. Avem

$\operatorname{tg} x = 2(\sqrt{2} - 1)(1 - (\sqrt{2} - 1)^2)^{-1} = 1$. Singurul număr $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{tg} x = 1$ este $x = \pi/4$.

8. Transformarea sumelor de două sinusuri sau de două cosinusuri în produse

Din formulele

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

deducem, adunînd membru cu membru,

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$$

şi apoi, scăzînd membru cu membru,

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \sin y \cos x.$$

Dacă notăm

$$x + y = p, \quad x - y = q,$$

vom avea

$$x = \frac{p + q}{2}, \quad y = \frac{p - q}{2}$$

şi formulele precedente devin

$$\boxed{\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin\frac{p + q}{2}\cos\frac{p - q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin\frac{p - q}{2}\cos\frac{p + q}{2} \end{aligned}}$$

În mod *analog, plecînd de la formulele cunoscute*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

obţinem, prin adunare şi scădere membru cu membru,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos x \cos y \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin x \sin y. \end{aligned}}$$

Făcînd notaţiile indicate mai sus, obţinem

$$\boxed{\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos\frac{p + q}{2}\cos\frac{p - q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin\frac{p + q}{2}\sin\frac{p - q}{2} = 2 \sin\frac{p + q}{2}\sin\frac{q - p}{2} \end{aligned}}$$

Aceste formule arată că sumele şi diferenţele a două sinusuri sau a două cosinusuri pot fi reprezentate prin produse de sinusuri şi cosinusuri. Vom da unele exemple de aplicare a acestor formule. Menționăm că aceste formule sînt utile, dacă vrem să calculăm efectiv expresii trigonometrice cu ajutorul tablelor de logaritmi, care se studiază în cl. a X-a.

Aplicație. Să se transforme în produs suma

$$E = \sin u + \sin 2u + \sin 3u.$$

Soluție. Avem

$$E = (\sin u + \sin 3u) + \sin 2u = 2 \sin 2u \cos u + \sin 2u =$$

$$= 2 \sin 2u \cdot \left(\cos u + \frac{1}{2}\right) = 2 \sin 2u \left(\cos u + \cos \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4 \sin 2u \cos \frac{u + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{u - \frac{\pi}{3}}{2}.$$

Aplicație. Să se transforme în produse sumele:

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

$$S' = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x,$$

$$S'' = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x.$$

Soluție. Avem

$$S = (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) = 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x =$$

$$= 2 \cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 2 \cos x \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$S' = (\sin x + \sin 7x) + (\sin 3x + \sin 5x) = 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cdot$$

$$\cdot \cos x = 2 \sin 4x(\cos 3x + \cos x) = 4 \sin 4x \cos 2x \cos x;$$

$$S'' = (\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 2 \cos 4x \cos 3x +$$

$$+ 2 \cos 4x \cos x = 2 \cos 4x(\cos 3x + \cos x) = 4 \cos 4x \cos 2x \cos x.$$

Observație. **Din relațiile stabilite, deducem formula**

$$\frac{S'}{S''} = \operatorname{tg} 4x.$$

Exerciții. *Să se transforme în produse următoarele sume:*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x.$$

9. Identități condiționate

O identitate este o egalitate între două funcții de una sau mai multe variabile independente, care este verificată pentru orice valori date variabilelor independente, astfel încît cele două funcții să fie definite pentru aceste valori.

O egalitate între două funcții, care este verificată în cazul în care variabilele independente verifică o anumită condiție, se numește *identitate condiționată* (de acea condiție).

Exemple

1. Dacă $x + y = 0$, atunci $x^3 = -y^3$.

2. În Trigonometrie, se întîlnesc numeroase relații între liniile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi și care sînt consecințe ale relației măs $\hat{A}$ + măs $\hat{B}$ + măs $\hat{C} = \pi$. Aceste relații sînt deci identități condiționate.

3. Dacă $u + v + w = \pi$, atunci: $\sin(u + v) = \sin w$, $\cos(u + v) = -\cos w$, și

(1) $$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w.$$

Observație. Oricare ar fi numărul întreg k, relația $u + v + w = k\pi$ implică relația (1).

Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

(2) $$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Putem scrie pe rînd următoarele egalități:

$$(\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} + \sin (A + B) =$$

$$= 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} + 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A + B}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{A + B}{2}\left(\cos \frac{A - B}{2} + \cos \frac{A + B}{2}\right) = 4 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$$

Dacă ținem seama că $\frac{A + B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, obținem formula (2).

4. Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

(3) $$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Avem, ținînd seama că $(A + B) + C = \pi$ și $\frac{A + B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, $(\cos A + \cos B) + \cos C = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} -$

$$- \cos (A + B) = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A + B}{2} + 1 =$$

$$= 2 \cos \frac{A + B}{2}\left(\cos \frac{A - B}{2} - \cos \frac{A + B}{2}\right) + 1 = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

4. Am demonstrat că, oricare ar fi numerele reale A, B, C, avem

$$\sin (A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A +$$

$$+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C,$$

$$\cos (A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C -$$

$$- \sin B \sin C \cdot \cos A - \sin C \sin A \cos B.$$

Dacă $A + B + C = \pi$, rezultă
$\sin A \sin B \sin C = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B$,
$\cos A \cos B \cos C = \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \cdot \sin B - 1$.

Exerciţii

1. *Să se demonstreze că dacă $A + B + C = \pi$, atunci:*
a. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$,
b. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

2. *Să se arate că dacă $u + v = w$, atunci*
$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w - 2\cos u \cos v \cos w = 1$.

3. *În ipoteza $a + b + c = \pi$, să se transforme în produse sumele:*
$\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2} + \cos \frac{c}{2}$, $\sin \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} + \sin \frac{c}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{a}{2} + \operatorname{ctg} \frac{b}{2} + \operatorname{ctg} \frac{c}{2}$.

4. *În ipoteza $a + b + c + d = 2\pi$, să se transforme în produse sumele*
$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d$, $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d$,
$\sin a - \sin b + \sin c - \sin d$, $\cos a - \cos b + \cos c - \cos d$.

5. *Ştiind că $a + c = 2b$ şi că $t - z = z - y = y - x$, să se transforme în produse sumele*
$\sin a + \sin b + \sin c$, $\sin x + \sin y + \sin z + \sin t$,
$\cos a + \cos b + \cos c$, $\cos x + \cos y + \cos z + \cos t$.

6. *Să se transforme în produs suma*
$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \sin(a + 3b) + \sin(a + 4b)$.

7. *Să se transforme în produs suma*
$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \cos(a + 3b) + \cos(a + 4b)$.

(*Indicaţie pentru ex. 6 şi 7.* Se înmulţeşte fiecare termen cu $\sin \frac{b}{2}$ şi se transformă fiecare produs astfel obţinut într-o diferenţă de cosinusuri respectiv de sinusuri).

10. Transformarea în produs a sumei a două tangente sau a două cotangente

Uneori sînt utile identităţile următoare

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q \pm \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}$$

$$\operatorname{ctg} p \pm \operatorname{ctg} q = \frac{\cos p}{\sin p} \pm \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\cos p \sin q \pm \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}$$

care permit să transformăm în produse suma a două tangente sau a două cotangente.

Aplicaţie. Să se transforme în produs suma

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x.$$

Soluţie. Avem

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x) - \operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \sin 3x \frac{\cos 3x - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} =$$

$$= \sin 3x \frac{\cos(2x + x) - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = -\frac{\sin 3x \sin 2x \sin x}{\cos 3x \cos 2x \cos x} = -\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x.$$

A doua soluţie. Observăm că expresia dată se poate scrie sub forma $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x)$ şi că $x + 2x + (-3x) = 0$. Aplicînd un rezultat stabilit anterior, putem scrie

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}(-3x) = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x.$$

Exerciţiu. *Ştiind că numerele u, v, w reprezintă măsurile în radiani ale unghiurilor unui triunghi, să se transforme în produs suma*

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w.$$

Exerciţii recapitulative

I. *Să se demonstreze următoarele identităţi:*

1. $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

2. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$

3. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

4. $\sin 5a \cos 3a = \frac{1}{2}(\sin 8a + \sin 2a)$

5. $\sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2}(\sin 8a - \sin 2a)$

6. $\sin(a - b)\cos(a + b) + \sin(b - c)\cos(b + c) + \sin(c - a)\cos(c + a) = 0$

7. $\sin(a - b)\sin(a + b) + \sin(b - c)\sin(b + c) + \sin(c - a)\sin(c + a) = 0$

8. $\sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x)$, $\cos 2x \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 7x)$,

9. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{ctg} 2x$

10. $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

11. $\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a + b)\sin(a - b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$

12. $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \operatorname{tg} 3a$

II. *Să se calculeze valorile exprimate prin formulele următoare*

1. $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}$.

(*Indicaţie.* Se foloseşte faptul că $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ şi $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$)

2. $\sin \frac{7\pi}{12}$, $\cos \frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{12}$, $\sin \frac{11\pi}{12}$, $\cos \frac{11\pi}{12}$, $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{12}$, $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$.

III. 1. *Să se arate că dacă $\widehat{A}$ este un unghi, oarecare atunci*

$$\cos\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\cos\widehat{A}+1}{2}}, \quad \sin\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{A}}{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{A}}{1+\cos\widehat{A}}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\widehat{A}}{1-\cos\widehat{A}}}$$

2. *Să se calculeze, cu două zecimale exacte,* $\sin\frac{\pi}{24}$, $\cos\frac{\pi}{24}$ *și* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$.

IV. *Să se arate că dacă x este un număr real oarecare, atunci*

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

și să se indice felul în care trebuie alese semnele, cînd x parcurge dreapta reală.

11. Funcții trigonometrice inverse

Știm de la algebră că dacă $f : E \to F$ este o aplicație bijectivă de la mulțimea E la mulțimea F, deci dacă f asociază fiecărui element x din E un element $y = f(x)$ din F, astfel ca orice element din F să fie asociat unui element și unuia singur din E, atunci există *aplicația inversă* a lui f, notată $f^{-1} : F \to E$ și definită în modul următor:

dacă $y' \in F$, atunci $f^{-1}(y')$ este acel element x' din E, pentru care $f(x') = y'$.

Deci, pentru o aplicație bijectivă $f : E \to F$, relațiile

$$x \in E, \ y = f(x)$$

sînt echivalente cu relațiile

$$y \in F, \ x = f^{-1}(y).$$

Funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă au fost definite între următoarele mulțimi[1]:

$$\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]; \quad \cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$

$$\operatorname{tg} : \mathbf{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right) \to \mathbf{R}, \quad \operatorname{ctg} : \mathbf{R} - (\pi\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}.$$

Astfel definite, funcțiile trigonometrice nu sînt bijective, dar sînt surjective. Într-adevăr, orice număr din intervalul închis $[-1, 1]$ este de forma $\sin x$ sau $\cos y$, pentru o infinitate de valori ale lui x și y; de asemenea, orice număr real se poate pune sub forma $\operatorname{tg} u$ sau $\operatorname{ctg} v$ pentru o infinitate de valori ale lui u și v.

Deci orice număr real cuprins între -1 și 1, incluzînd aceste valori, este egal cu sinusul a o infinitate de numere x și este egal cu cosinusul a o infinitate de numere y. Mulțimea numerelor reale x, al căror sinus are o valoare

[1] Pentru mulțime $A \subset \mathbf{R}$ convenim să notăm prin $n + m\ A$ mulțimea $\{n + ma;\ a \in A\}$, oricare ar fi numerele reale m și n.

dată a, se notează Arcsin a și se citește: Arcsin a = *mulțimea arcelor, al căror sinus este egal cu a.*

Denumirea vine de la faptul că funcțiile trigonometrice au fost definite cu ajutorul unei aplicații $F : \mathbf{R} \to C$, care aplică intervalele dreptei reale $\mathbf{R}$ pe arce ale cercului trigonometric C.

În mod analog:

Se notează prin Arccos b mulțimea arcelor (numerelor reale), al căror cosinus este egal cu numărul $b \in [-1, 1]$.

Se notează prin Arctg m mulțimea arcelor (numerelor reale), ale căror tangente sînt egale cu numărul $m \in \mathbf{R}$.

Se notează prin Arcctg m, mulțimea arcelor (numerelor reale), ale căror cotangente sînt egale cu numărul $m \in \mathbf{R}$.

Mulțimile astfel introduse

$$\operatorname{Arcsin} a, \ \operatorname{Arccos} b, \ \operatorname{Arctg} m, \ \operatorname{Arcctg} m$$

sînt mulțimi infinite de numere reale, conținînd fiecare o infinitate numărabilă de elemente.

Se pune problema de a distinge, în fiecare din aceste mulțimi, cîte un element, printr-o regulă generală și ușor de reținut.

Rezolvarea acestei probleme se poate face în mod natural, avînd în vedere faptul că *fiecare din funcțiile trigonometrice considerate admite cîte un interval, închis sau deschis, pe care funcția respectivă are restricția injectivă și surjectivă.*

Într-adevăr, din studiul făcut asupra funcțiilor trigonometrice, rezultă că:

1. Dacă numărul real x parcurge intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$, numărul $\sin x$ va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la -1 la 1, trecînd prin fiecare punct al acestui interval, o singură dată.

Aceasta înseamnă că dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, atunci există un singur număr $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel ca $\sin x = a$. Numărul x va fi notat prin arcsin a. Avem prin urmare, pentru $a \in [-1, 1]$,

$$\{\arcsin a\} = (\operatorname{Arcsin} a) \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exemple. Avem

$$\arcsin 0 = 0, \ \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

2. Dacă numărul x parcurge intervalul $[0, \pi]$, de la 0 la π, atunci numărul $\cos x$ va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la 1 la -1, o singură dată, trecînd prin fiecare punct al acestui interval.

Deci, oricare ar fi numărul $b \in [-1, 1]$, există un singur număr $y \in [0, \pi]$, astfel ca $b = \cos y$. Numărul y, care verifică aceste condiții, va fi notat $y = \arccos b$. Avem deci

$$\{\arccos b\} = (\mathrm{Arccos}\, b) \cap [0, \pi].$$

Exemple. Avem

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \ \arccos 1 = 0, \quad \arccos(-1) = \pi,$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \ \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

3. Dacă numărul x parcurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$ atunci numărul $\mathrm{tg}\, x$ va parcurge întreaga dreaptă reală $\mathbb{R}$, în sensul pozitiv (crescător), trecînd prin fiecare punct o singură dată.

Dacă $m \in \mathbb{R}$, există deci un singur număr real $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel ca $\mathrm{tg}\, u = m$. Acest număr u va fi notat prin $\mathrm{arctg}\, m$. Avem deci:

$$\{\mathrm{arctg}\, m\} = (\mathrm{Arctg}\ m) \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemple. Avem

$$\mathrm{arctg} 0 = 0, \ \mathrm{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{arctg}\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \ \mathrm{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\mathrm{arctg}\ (-1) = -\frac{\pi}{4}, \ \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \ \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

4. Dacă numărul x parcurge intervalul $(0, \pi)$, de la 0 la π, numărul $\mathrm{ctg}\, x$ va parcurge întreaga dreaptă reală $\mathbb{R}$, în sens negativ (descrescător) trecînd prin fiecare punct, o singură dată. Deci, oricare ar fi numărul real m, există un unic număr $\varphi \in (0, \pi)$, astfel ca $m = \mathrm{ctg}\, \varphi$. Numărul φ avînd aceste proprietăți, va fi notat $\mathrm{arcctg}\, m$. Avem deci:

$$\{\mathrm{arcctg}\, m\} = (\mathrm{Arcctg}\, m) \cap (0, \pi).$$

Exemple. Avem

$$\mathrm{arcctg}\, 0 = \frac{\pi}{2}, \ \mathrm{arcctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}, \ \mathrm{arcctg}\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \ \mathrm{arcctg}\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3},$$

$$\mathrm{arcctg}\ (-1) = \frac{3\pi}{4}, \ \mathrm{arcctg}\,(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6} \quad \mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Recapitulare. Funcțiile următoare, date de restricții,

$$\sin\Big|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],$$

$$\cos \mid [0, \pi] : [0, \pi] \to [-1, 1],$$

$$\mathrm{tg}\Big|\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},$$

$$\mathrm{ctg} \mid (0, \pi) : (0, \pi) \to \mathbb{R}$$

sînt bijective și admit ca inverse funcțiile

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi],$$

$$\mathrm{arctg}\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{arcctg}\colon \ \mathbb{R} \to (0, \pi).$$

Exerciții

1. *Să se indice, pentru fiecare din funcțiile sin, cos, tg și ctg, alte intervale, pe care aceste funcții să aibă restricții bijective.*

2. *Să se indice intervale, pe care funcțiile cos și ctg sînt crescătoare și intervale, pe care funcțiile sin și tg sînt descrescătoare.*

3. *Să se arate că următoarele egalități sînt adevărate, în fiecare punct al domeniului de definiție al funcției respective:*

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \ \mathrm{arctg}(-m) = -\mathrm{arctg}\, m,$$

$$\arccos(-b) = \pi - \arccos b, \ \mathrm{arcctg}(-m) = \pi - \mathrm{arcctg}\, m.$$

4. *Să se arate că, pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, avem*

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$$

5. *Pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, avem* $\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2}$ *și* $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$.

6. *Să se exprime sub o formă cît mai simplă numerele*

$\sin(2\arcsin a)$, $\sin(3\arcsin a)$, $\sin(4\arcsin a)$, $\sin(5\arcsin a)$,
$\cos(2\arcsin a)$, $\cos(3\arcsin a)$, $\cos(4\arcsin a)$, $\cos(5\arcsin a)$,
$\sin(2\arccos a)$, $\sin(3\arccos a)$, $\sin(4\arccos a)$, $\sin(5\arccos a)$,
$\cos(2\arccos a)$, $\cos(3\arccos a)$, $\cos(4\arccos a)$, $\cos(5\arccos a)$.

7. *Să se calculeze* $\sin x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ *știind că* $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$ *Apoi să se calculeze, în aceeași ipoteză,* $\sin 2x$ *și* $\cos 2x$. *Să se deducă valoarea lui x.*

R. $x = \frac{\pi}{12}$.

8. *Se dă* $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)$. *Să se calculeze* $\sin 5x$ *și să se afle x.*

9. *Să se calculeze numerele*

$$\sin \frac{\pi}{12}, \quad \cos \frac{\pi}{12}, \quad \mathrm{tg} \frac{\pi}{12}, \quad \sin \frac{\pi}{10}, \quad \cos \frac{\pi}{10}, \quad \mathrm{tg} \frac{\pi}{10}$$

folosind rezultatele de la exercițiile 7 și 8.

10. *Se dau relațiile*

$$u = \arcsin \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4}$$

$$v = \operatorname{arctg}(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2).$$

Să se calculeze sin $5u$ *și* tg $4v$ *și să se deducă valorile exacte ale numerelor* u *și* v.

R. $u = \frac{\pi}{20}$, $v = \frac{\pi}{24}$.

11. *Să se arate că, pentru orice număr real nenul, avem*

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

12. Ecuații trigonometrice

Dacă x este un număr real variabil, și dacă

$$P(x) = a + bx + cx^2 + \dots + hx^p$$

este un polinom cu coeficienții $a, b, c, \dots, h$, egalitatea

$$P(x) = 0$$

constituie o *relație algebrică* în variabila x. Dacă toți coeficienții $a, b, c, \dots, h$ sînt nuli, relația $P(x) = 0$ este adevărată pentru orice valoare dată lui x; se spune că relația $P(x) = 0$ este o identitate sau că este identic verificată.

Fie E o mulțime de numere reale, $E \subset \mathbf{R}$, și fie $f : E \to \mathbf{R}$ o funcție numerică definită pe mulțimea E. Dacă $f(x)$ depinde de x prin intermediul unor funcții trigonometrice cunoscute, spunem că și f este o funcție trigonometrică. Dacă f este o funcție trigonometrică, egalitatea

$$f(x) = 0$$

se numește ***relație trigonometrică.***

Exemple. Funcțiile

$$\sin x,\ \sin 3x,\ \cos x^2,\ \sin 3x + \cos 2x,\ \operatorname{tg} x - 7\frac{\sin x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

sînt funcții trigonometrice. Egalitățile

$$\sin x = 0,\ \cos(x + 3) - 2 = 0,\ \operatorname{tg}(\sin x) = 0$$

constituie exemple de relații trigonometrice.

O relație trigonometrică poate fi verificată pentru orice valoare dată variabilei x. Exemplu: $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$.

Există relații care nu sînt verificate pentru nici o valoare dată variabilei x. Exemplu: $\sin 3x = 2$.

O relație trigonometrică se mai numește și *ecuație trigonometrică*. Deci o ecuație trigonometrică este o relație de forma $f(x) = 0$, unde $f : E \to \mathbf{R}$ este o funcție trigonometrică definită pe o mulțime $E \subset \mathbf{R}$.

Funcțiile trigonometrice pe care le vom considera vor fi combinații polinomiale sau raționale de funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate unor multipli sau unor submultipli ai numărului x, sau unor funcții mai complicate de x.

Pentru astfel de funcții, mulțimea de definiție poate fi dedusă din însăși expresia care definește funcția f. De exemplu, funcția

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x} + \operatorname{tg} x$$

este definită pe mulțimea E, care se obține din $\mathbf{R}$ scoțînd numerele x, pentru care avem $\sin x = 1$ sau $\cos x = 0$.

Prin urmare, putem da o ecuație $f(x) = 0$, fără a specifica domeniul de definiție al funcției f, urmînd ca acest domeniu să fie dedus din felul în care a fost exprimat membrul stîng $f(x)$ al ecuației.

A rezolva o ecuație $f(x) = 0$ înseamnă a determina mulțimea S formată din toate numerele $x \in \mathbf{R}$, pentru care avem $f(x) = 0$. Mulțimea S se numește *mulțimea soluțiilor* ecuației $f(x) = 0$.

Deci a rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor acelei ecuații.

Mulțimea S a soluțiilor unei ecuații $f(x) = 0$ este o submulțime a mulțimii E, pe care este definită funcția f, sau a mulțimii formate din numerele x, pentru care funcția f are sens, dacă mulțimea E nu a fost specificată.

Vom începe prin rezolvarea ecuațiilor trigonometrice cele mai simple.

Ecuația $\sin x - a = 0$, $a \in \mathbf{R}$. Deci fiind dat un număr real a, trebuie să determinăm mulțimea S a numerelor x, pentru care avem $\sin x = a$.

Avem de distins mai multe cazuri:

Dacă $|a| > 1$, ecuația $\sin x = a$ nu are nici o soluție, deoarece sinusul oricărui număr real este un număr, a cărui valoare absolută nu depășește numărul 1. Deci în cazul $|a| > 1$, mulțimea soluțiilor ecuației date este mulțimea vidă.

Dacă $a = 1$ obținem, ecuația $\sin x = 1$, care admite soluția $x = \frac{\pi}{2}$. Din periodicitatea funcției sinus, rezultă că orice număr de forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, este de asemenea o soluție a ecuației $\sin x = 1$. Din studiul efectuat asupra funcției sinus rezultă pe de altă parte că singurele numere reale care verifică ecuația $\sin x = 1$ sînt numerele de forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci mulțimea S a soluțiilor ecuației $\sin x = 1$ este mulțimea

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Dacă r este un număr real, convenim să notăm prin $r\,\mathbf{Z}$ mulțimea

$$r\mathbf{Z} = \{rm;\ m \in \mathbf{Z}\}$$

formată din multiplii întregi ai lui r. Mai general, dacă A este o mulțime de numere și dacă $b \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}$, notăm $b + rA = \{b + ra;\ a \in A\}$.

În particular, dacă b, r sînt numere reale, convenim să notăm prin $b + r\mathbf{Z}$ mulțimea

$$b + r\mathbf{Z} = \{b + rm;\ m \in \mathbf{Z}\}.$$

Cu aceste convenţii, putem scrie mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x = 1$ sub forma

$$S = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

În mod asemănător, din proprietăţile cunoscute ale funcţiei sinus deducem că mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x = -1$ este dată de formula

$$S = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Fie acuma a un număr din intervalul deschis $(-1, 1)$. În intervalul $[0, 2\pi]$ există exact două numere care verifică ecuaţia $\sin x = a$; dacă x' este unul din aceste numere, al doilea are valoarea $x'' = \pi - x'$, dacă $a > 0$ şi $x'' = 3\pi - x'$, dacă $a < 0$.

Intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ conţine exact un număr x cu proprietatea $\sin x = a$. Rezultă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x = a$, $a \in (-1, 1)$, este

$$S = (x' + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - x' + 2\pi\mathbf{Z}),$$

unde x' este o soluţie particulară; se poate presupune că $x' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

În particular, ecuaţia $\sin x = 0$ admite ca mulţime a soluţiilor

$$S = \pi\mathbf{Z}.$$

În rezumat, dacă asociem fiecărui număr a din intervalul închis $[-1, 1]$, acel număr x din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pentru care $\sin x = a$ şi dacă notăm numărul x astfel definit prin arcsin$a$, atunci putem enunţa următorul rezultat:

Pentru $a \in [-1, 1]$, mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$\sin x = a$$

este

$$\boxed{S = (\arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}).}$$

Exerciţiu. *Să se arate că mulţimea soluţiilor ecuaţiei* $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$, *se poate defini prin formula*

$$S = \{(-1)^n \arcsin a + n\pi;\ n \in \mathbf{Z}\}.$$

Notaţie. Dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, se notează prin Arcsin$a$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x = a$. Deci

$$\text{Arcsin}a = (\arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exerciţii

1. *Să se determine numerele*

$$\arcsin\frac{1}{2},\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2},\ \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right),\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. *Să se determine mulţimile*

$$\text{Arcsin}\frac{1}{2},\ \text{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right),\ \text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Aplicaţie. Să se rezolve ecuaţia $\sin 2x = 0$.

Soluţie. Punînd $y = 2x$, relaţia $\sin 2x = 0$ este echivalentă cu relaţia $\sin y = 0$ care este la rîndul ei echivalentă cu condiţia

$$y = 2x \in \text{Arcsin}0.$$

Deci soluţiile ecuaţiei $\sin 2x = 0$ se obţin împărţind prin 2 soluţiile ecuaţiei $\sin y = 0$. Deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin 2x = 0$ este dată de formula $S = \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$. Putem scrie $S = \frac{1}{2}\text{Arcsin}0$.

Aplicaţie. Să se rezolve ecuaţia $\sin\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$.

Soluţie. Punînd $y = \frac{x}{3}$, ecuaţia dată devine $\sin y = \frac{1}{2}$. Soluţiile ultimei ecuaţii formează mulţimea $\text{Arcsin}\frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right)$. Rezultă că mulţimea S a soluţiilor ecuaţiei date este formată din numerele care se obţin înmulţind cu 3 elementele mulţimii $\text{Arcsin}\frac{1}{2}$, deci

$$S = \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2} + 6\pi\mathbf{Z}\right) = 3\,\text{Arcsin}\frac{1}{2}.$$

Observaţie. În cele două rezolvări, am folosit următoarea convenţie: Dacă S este o mulţime de numere reale şi dacă h este un număr real, notăm $hS = \{hx;\ x \in S\}$, deci mulţimea hS este formată din produsele cu h ale numerelor din mulţimea S.

Exerciţii.

1. *Să se arate care sînt mulţimile soluţiilor fiecăreia din ecuaţiile*

$$\sin x = 0,\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. *Să se arate că, pentru* $a \in [-1, 1]$, *mulţimile soluţiilor ecuaţiilor* $\sin x = a$ *şi* $\sin x = -a$ *sînt simetrice faţă de originea O a axei reale.*

Ecuaţia $\cos x = a$, $a \in \mathbf{R}$. Pentru $|a| > 1$, ecuaţia $\cos x = a$ nu are nici o soluţie, deci mulţimea soluţiilor este vidă.

Pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, ecuaţia $\cos x = a$ are o soluţie unică în intervalul $[0, \pi]$. Această soluţie se notează arccos$a$. Numerele $\pm\arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sînt asemenea soluţii ale ecuaţiei $\cos x = a$. Din proprietățile cunoscute ale funcției cosinus deducem că orice soluție a ecuației $\cos x = a$ este un număr de forma $\pm\arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Deci, notînd prin $\operatorname{Arccos} a$ mulțimea formată din aceste numere, putem spune că:

Mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, *este dată de*

$$\boxed{\operatorname{Arccos} a = S = (\arccos a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (-\arccos a) + 2\pi\mathbf{Z}).}$$

Aplicații. 1. Avem

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos 1 = 0, \quad \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6};$$

$$\operatorname{Arccos} 0 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

$$\operatorname{Arccos} 1 = 2\pi\mathbf{Z}, \quad \operatorname{Arccos}(-1) = \pi + 2\pi\mathbf{Z},$$

$$\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Exerciții

1. *Să se determine numerele*

$$\arccos\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right).$$

2. *Să se determine mulțimile*

$$\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. *Să se rezolve ecuația* $2\cos x + 1 = 0$.

4. *Să se determine mulțimea* $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 3\pi]$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $2\cos x + 1 = 0$.

Soluție. Relația dată este echivalentă cu ecuația $\cos x = -\frac{1}{2}$. Avem $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, deci mulțimea soluțiilor va fi

$$S = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Exercițiu. *Să se determine elementele mulțimii* $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 2\pi]$.

Ecuația $\operatorname{tg} x = m$.

Domeniul de definiție al funcției tangentă este mulțimea $\mathbf{R} - \operatorname{Arccos} 0$, deci mulțimea soluțiilor oricărei ecuații de forma $\operatorname{tg} x = m$ trebuie căutată în acest domeniu.

Codomeniul funcției tangentă este întreaga dreaptă reală $\mathbf{R}$; deci orice număr real m este egal cu tangenta unui anumit număr $x \in \mathbf{R}$. Deci oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = m$ este nevidă. Printre soluțiile acestei ecuații, există una și una singură în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ deoarece atunci cînd x parcurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, numărul $\operatorname{tg} x$ parcurge toată dreapta $\mathbf{R}$, o singură dată.

Pentru $m \in \mathbf{R}$, numărul $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{tg} x = m$ se notează $\operatorname{arctg} m$.

Exemple. Avem

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Numărul $\operatorname{arctg} m$ nu este singura soluție a ecuației $\operatorname{tg} x = m$, deoarece funcția tangentă este periodică, cu perioada principală π. Rezultă că orice număr de forma $\operatorname{arctg} m + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, este o soluție a aceleiași ecuații. Din proprietățile funcției tangentă rezultă că acestea sînt singurele soluții ale ecuației $\operatorname{tg} x = m$. Deci:

Mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = m$ este

$$\boxed{\operatorname{Arctg} m = \operatorname{arctg} m + \pi\mathbf{Z}.}$$

Exemple. Mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = 0$ este $\pi\mathbf{Z}$, iar mulțimea soluțiile ecuației $\operatorname{tg} x = 1$ este $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}$.

Exerciții

1. *Să se rezolve ecuația* $\operatorname{tg} x = -1$.

2. *Să se rezolve ecuația* $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ *și să se determine valorile lui* x, *care verifică această ecuație și care aparțin intervalului* $(1, 8)$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin x = m \cos x$.

Soluție. Nu putem avea, pentru o soluție x a ecuației date, $\cos x = 0$ deoarece din ecuație ar rezulta și $\sin x = 0$; dar relațiile $\sin x = 0$ și $\cos x = 0$ nu pot fi verificate de un același număr x.

Avînd în vedere că avem $\cos x \neq 0$, deducem că relaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $\operatorname{tg}x = m$, care a fost analizată anterior. Deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x = m \cos x$ este mulţimea $\operatorname{Arctg} m$.

Observaţie. Avem

$$\operatorname{Arcsin} 0 = \operatorname{Arctg} 0 = \pi\mathbf{Z}.$$

Ecuaţia $\operatorname{ctg}x = m$. Funcţia cotangentă este definită pe mulţimea

$$\mathbf{R} - \operatorname{Arcsin} 0,$$

deci soluţiile oricărei ecuaţii de forma $\operatorname{ctg}x = m$ trebuie căutate în mulţimea $R - \operatorname{Arcsin} 0$.

Orice număr real este egal cu cotangenta unui număr unic din intervalul $(0, \pi)$, deoarece atunci cînd x parcurge intervalul $(0, \pi)$, numărul $\operatorname{ctg}x$ parcurge o singură dată întreaga dreaptă $\mathbf{R}$. Numărul real x, cu proprietăţile

$$x \in (0, \pi), \ \operatorname{ctg}x = m$$

se notează $\operatorname{arcctg} m$.

Din proprietăţile funcţiei cotangentă rezultă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{ctg}x = m$ este

$$\boxed{\operatorname{Arcctg} m = \operatorname{arcctg} m + \pi\mathbf{Z}.}$$

Exemple. Avem

$$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arcctg} 0 = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z},$$

$$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z},$$

$$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{Arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + \pi\mathbf{Z},$$

$$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \operatorname{Arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6} + \pi\mathbf{Z}.$$

Exerciţii

1. *Să se rezolve ecuaţia* $\cos x = m \sin x$, *pentru* $m = -1$ *şi* $m = -\sqrt{3}$.
2. *Să se arate că ecuaţiile* $\cos x = 0$ *şi* $\operatorname{ctg} x = 0$ *au aceleaşi soluţii.*

13. Ecuaţii trigonometrice care se reduc la una sau mai multe ecuaţii de tipurile $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\operatorname{tg} x = p$, $\operatorname{ctg} x = q$.

Aplicînd regulile de calcul algebric şi relaţiile cunoscute între diferitele funcţii trigonometrice, numeroase ecuaţii trigonometrice pot fi rezolvate prin

reducere la una din ecuaţiile studiate anterior, sau la mai multe din aceste ecuaţii.

Exemplu. Ecuaţia

$$\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$$

poate fi scrisă sub forma

$$(\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0,$$

din care rezultă că trebuie să fie verificată cel puţin una din relaţiile

$$\sin x = 1 \text{ sau } \sin x = 2.$$

Dar ultima relaţie este imposibilă, deci ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $\sin x = 1$. Mulţimea soluţiilor va fi mulţimea $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}$.

Mai general, dacă f este o funcţie definită pe o mulţime $A \subset \mathbf{R}$, se poate considera relaţia

$$f(\sin x) = 0.$$

Făcînd înlocuirea $y = \sin x$, ecuaţia devine

$$f(y) = 0.$$

Ultima ecuaţie poate avea 0, 1, 2, 3 sau mai multe soluţii. Dacă y' este o soluţie a ecuaţiei $f(y) = 0$, ecuaţia $\sin x = y'$ va admite soluţii dacă şi numai dacă $y' \in [-1, 1]$. Rezultă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei $f(\sin x) = 0$ este egală cu reuniunea mulţimilor $\operatorname{Arcsin} y'$, corespunzătoare acelor soluţii y' ale ecuaţiei $f(y) = 0$, pentru care $y' \in [-1, 1]$.

Consideraţii asemănătoare se pot face pentru ecuaţiile de forma

$$f(\cos x) = 0, \ f(\operatorname{tg} x) = 0, \ f(\operatorname{ctg} x) = 0.$$

Ecuaţiile de forma

$$\sin f(x) = \sin g(x), \ \cos f(x) = \cos g(x)$$

$$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} h(x), \ \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} h(x),$$

în care f, g, h sînt funcţii numerice date, pot fi rezolvate de asemenea folosind proprietăţile pe care le cunoaştem ale funcţiilor trigonometrice.

De exemplu o ecuaţie de forma

(1) $$\sin f(x) = \sin g(x)$$

se rezolvă observînd că un număr x verifică o astfel de ecuaţie dacă şi numai dacă există un număr întreg k, astfel încît să avem

(2) $$f(x) - g(x) = 2k\pi \text{ sau } f(x) + g(x) = (2k + 1)\pi.$$

Deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) este egală cu reuniunea mulţimilor de soluţii ale fiecăreia din ecuaţiile (2), considerate, pentru fiecare număr întreg k.

De exemplu, ecuaţia

$$\sin(x^2) = \sin x \tag{3}$$

are ca mulţime de soluţii reuniunea mulţimilor de soluţii ale fiecăreia din ecuaţiile

$$x^2 - x = 2k\pi, \quad x^2 + x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Prima din aceste ecuaţii are soluţii reale numai dacă $1 + 8k\pi \geqslant 0$, iar a doua ecuaţie are soluţii numai pentru $1 + (8k+4)\pi \geqslant 0$. Rezultă că *ecuaţia dată admite o infinitate de soluţii*, anume

$$x'_k = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8k\pi}}{2}, \quad x''_k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (8k+4)\pi}}{2}$$

unde k poate lua orice valoare întreagă, cu condiţia ca expresiile de sub radicali să fie pozitive.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (3), am utilizat următorul criteriu:

(I) Relaţia $\sin u = \sin v$ are loc dacă şi numai dacă există un număr întreg n, astfel ca să avem fie $u - v = 2n\pi$, fie $u + v = (2n+1)\pi$.

Ultimele două condiţii cînt echivalente cu condiţia $u \in v + 2\pi\mathbf{Z}$, respectiv cu condiţia $u \in \pi - v + 2\pi\mathbf{Z}$.

Pentru rezolvarea ecuaţiilor

$$\cos f(x) = \cos g(x),\ \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} h(x),\ \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} h(x),$$

vom folosi următoarele criterii:

(II) Relaţia $\cos u = \cos v$ este adevărată dacă şi numai dacă există un număr întreg n, astfel încît să avem fie $u - v = 2n\pi$ fie $u + v = 2n\pi$.

(III) Relaţia $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$ este verificată dacă şi numai dacă există un număr întreg n, astfel încît să avem $v = u + n\pi$.

(IV) Relaţia $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ este verificată dacă şi numai dacă există un număr întreg n, astfel ca $v = u + n\pi$.

Aplicaţii. **1.** *Să se rezolve ecuaţia* $\cos 2x = \cos 3x$.

Soluţie. Aplicînd criteriul (II), obţinem ecuaţiile

$$3x = 2x + 2n\pi, \quad 3x + 2x = 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$$

care au soluţiile

$$x'_n = 2n\pi, \quad x''_n = \frac{2n}{5}\pi.$$

2. *Să se rezolve ecuaţia* $\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} x$.

Soluţie. Aplicînd criteriul (IV), obţinem ecuaţiile

$$4x = x + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

care au soluţiile

$$x_n = \frac{n}{3}\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Exerciţii.

Să se rezolve următoarele ecuaţii:

1. $\sin(2x + 1) = \sin(3x^2)$.
2. $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
3. $\sin x = \cos 2x$.
4. $\operatorname{tg} px = \operatorname{tg} qx$ $(p, q \in \mathbf{R})$
5. $\cos px = \cos qx$.
6. $\sin px = \sin qx$.
7. $\sin px = \cos qx$.
8. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia $\sin 2x \sin 3x = \sin x \sin 4x$.

Soluţie. Ecuaţia dată este echivalentă cu fiecare din ecuaţiile următoare:

$$2 \sin 2x \sin 3x = 2 \sin x \sin 4x,$$

$$\cos x - \cos 5x = \cos 3x - \cos 5x,$$

$$\cos x = \cos 3x;$$

aplicînd criteriul (II), obţinem soluţiile $x_n = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$.

Exerciţiu. *Să se rezolve ecuaţia* $\cos 2x \cos 3x = \cos x \cos 4x$.

Ecuaţii trigonometrice care se reduc la ecuaţii de gradul II

Ecuaţii de forma $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$.

Făcînd substituţia $y = \sin x$, ecuaţia dată devine

$$ay^2 + by + c = 0. \tag{1}$$

Sînt posibile mai multe cazuri:

1) Rădăcinile ecuaţiei (1) sînt imaginare. Atunci ecuaţia trigonometrică nu are nici o soluţie în $\mathbf{R}$.

2) Rădăcinile ecuaţiei (1) sînt reale, dar sînt amîndouă exterioare intervalului $[-1, 1]$. Nici în acest caz ecuaţia trigonometrică dată nu are nici o soluţie în $\mathbf{R}$.

3) Ecuaţia (1) are o singură soluţie reală y_0 conţinută în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $S = \operatorname{Arcsin} y_0$.

4) Ecuaţia (1) are două soluţii reale y_1, y_2 conţinute în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, ecuaţia trigonometrică dată are ca mulţime a soluţiilor reuniunea $\operatorname{Arcsin} y_1 \cup \operatorname{Arcsin} y_2$.

Observaţii. Pentru ca ecuaţia (1) să aibă cel puţin o soluţie reală este necesar şi suficient să avem $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Dacă $a = 0$, dar $b \neq 0$ şi dacă $|c| < |b|$, atunci ecuaţia dată are ca mulţime a soluţiilor mulţimea $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{c}{b}\right)$.

Ecuația (1) are două rădăcini în intervalul $[-1, 1]$ dacă și numai dacă

$$-\frac{b}{2a} \in (-1, 1),\ a(a - b + c) \geqslant 0 \text{ și } a(a + b + c) \geqslant 0,\ b^2 - 4ac > 0.$$

Dacă ecuația (1) are o singură rădăcină în intervalul $[-1, 1]$, avem

$$(a - b + c)(a + b + c) \leqslant 0.$$

Ecuațiile de forma $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$ se discută și se rezolvă în mod analog.

Ecuațiile de forma $A \cos 2x + B \cos x + C = 0$ se aduc la forma

$$2A \cos^2 x + B \cos x + C - A = 0.$$

Ecuațiile de forma $A \cos 2x + B \sin x + C = 0$ se reduc de asemenea la o ecuație de gradul II, deoarece putem folosi identitatea

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Ecuațiile de tipul $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$ sau $a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$ se rezolvă de asemenea prin reducere la ecuații de gradul II, făcînd substituțiile $y = \operatorname{tg} x$ respectiv $y = \operatorname{ctg} x$. Discuția acestor ecuații este mai simplă, deoarece orice soluție reală m a ecuației de gradul II conduce la o mulțime de soluții de forma Arctg m, respectiv Arcctg m.

O ecuație omogenă de gradul II în $\sin x$ și $\cos x$, deci o ecuație de forma

(2) $$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

poate fi de asemenea redusă la o ecuație algebrică de gradul doi.

Într-adevăr, dacă $a \neq 0$, orice soluție a ecuației (2) este astfel încît $\cos x \neq 0$ deoarece nu putem avea simultan $\sin x = 0$ și $\cos x = 0$. Deci, în cazul $a \neq 0$ putem împărți primul membru al ecuației (2) prin $\cos x$ și obținem atunci ecuația echivalentă cu (2),

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0,$$

care se reduce la o ecuație algebrică de gradul II, prin efectuarea substituției $y = \operatorname{tg} x$.

Dacă $a = 0$, mulțimea soluțiilor ecuației (2) este egală cu reuniunea mulțimilor formate din soluțiile ecuațiilor

$$\cos x = 0 \text{ și } b \sin x + c \cos x = 0.$$

Știm să determinăm mulțimea soluțiilor primei ecuații. Ecuația a doua se reduce la ecuația

$$\operatorname{tg} x = -\frac{c}{b}$$

dacă $b \neq 0$, și se reduce la ecuația $\cos x = 0$ dacă $b = 0$ dar $c \neq 0$.

Aplicații. 1. *Să se rezolve ecuația* $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$.

Soluție. Notînd $y = \sin x$ ecuația devine $2y^2 - 7y + 3 = 0$. Soluțiile ultimei ecuații sînt $\frac{1}{2}$ și 3. Convine numai prima din aceste soluții, care conduce la mulțimea următoare de soluții pentru ecuația trigonometrică dată:

$$S = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi \mathbf{Z}\right).$$

2. *Să se rezolve ecuația* $\cos 2x - 3 \cos x - 1 = 0$.

Soluție. Notăm $y = \cos x$; atunci $\cos 2x = 2y^2 - 1$ și sintem conduși la rezolvarea ecuației algebrice $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Ultima ecuație are rădăcinile $-\frac{1}{2}$ și 2, dintre care convine numai prima. Deci mulțimea soluțiilor ecuației trigonometrice date este

$$S = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(\ \ \frac{2\pi}{3} + 2\pi \mathbf{Z}\right).$$

3. *Să se rezolve ecuația* $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0$.

Soluție. Notăm $y = \operatorname{tg} x$; ecuația dată devine

$$y^2 - 8y + 7 = 0$$

și obținem rădăcinile 1 și 7. Mulțimea soluțiilor ecuației trigonometrice date este deci reuniunea

$$S = \operatorname{Arctg} 1 \cup \operatorname{Arctg} 7.$$

Amintim că $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi \mathbf{Z}$. De asemenea, $\operatorname{Arctg} 7 = \operatorname{arctg} 7 + \pi \mathbf{Z}$.

4. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Rezolvare. Folosim identitatea

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

și obținem ecuația echivalentă cu ecuația dată,

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4}.$$

Ultima ecuație are ca mulțime de soluții reuniunea mulțimilor de soluții ale ecuațiilor

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației date este[1]

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + \pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi \mathbf{Z}\right) \cup$$
$$\cup \left(-\frac{\pi}{6} + \pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi \mathbf{Z}\right).$$

[1] Reamintim că, dacă avem o mulțime A de numere reale, convenim să notăm prin $n + mA$ mulțimea $\{n + ma;\ a \in A\}$, *oricare ar fi numerele reale* m *și* n.

5. *Să rezolvăm ecuația*

$$4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1.$$

Soluție. Din identitatea $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ deducem

$$\sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x$$

astfel încît ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$4(1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x) = 1,$$

și cu ecuația

$$4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0.$$

Ultima ecuație poate fi pus sub forma

$$(2\cos^2 x - 1)^2 = 0$$

și se reduce la ecuația echivalentă $\cos 2x = 0$. Mulțimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \frac{1}{2}\ \mathrm{Arccos}\ 0 = \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right);$$

14. Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$

Pentru $(a = 0,\ b \neq 0)$ sau $(a \neq 0$ și $b = 0)$ ecuația

(1) $$a \sin x + b \cos x = c$$

este echivalentă cu ecuația $\cos x = \frac{c}{b}$ respectiv cu ecuația $\sin x = \frac{c}{a}$ și fiecare din aceste ecuații a fost discutată.

Dacă $ab \neq 0$ dar $c = 0$, ecuația (1) se scrie $a \sin x + b \cos x = 0$ și este echivalentă cu ecuația $\mathrm{tg}\, x = -\frac{b}{a}$, care a fost de asemenea discutată.

Vom studia acum soluțiile unei ecuații de forma (1), în care $abc \neq 0$. O astfel de ecuație poate fi rezolvată prin mai multe metode.

Metoda 1.

Notăm:

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad q = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

și considerăm punctul $M(p, q)$; acest punct aparține cercului trigonometric, deoarece $p^2 + q^2 = 1$. Aplicația $F : \mathbf{R} \to C$ fiind surjectivă, rezultă că există un număr real t, astfel ca să avem

(2) $$p = \cos t,\ q = \sin t,\ t \in [0, 2\pi).$$

În acest caz, vom avea

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos t, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin t.$$

Introducînd aceste valori în ecuația (1), această ecuație capătă forma $\sqrt{a^2 + b^2}(\cos t \sin x + \sin t \cos x) = c$ sau

(3) $$h \sin(t + x) = c,\ h = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ecuația (3) admite o mulțime nevidă de soluții dacă și numai dacă $|c| \leqslant h$. În acest caz, mulțimea soluțiilor va fi

(I) $$S = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{c}{h}\right) - t = \left(\arcsin\frac{c}{h} - t + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\pi - \arcsin\frac{c}{h} - t + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Observație. Aplicarea acestei metode presupune posibilitatea găsirii numărului real t, care să verifice condițiile (2). Existența acestui număr este asigurată, dar aflarea *valorii exacte* a lui t este în general o problemă imposibilă din punct de vedere practic. Totuși, cu ajutorul tabelelor, putem găsi *valoarea aproximativă* a lui t, suficient de apropiată de valoarea exactă, pentru aplicațiile obișnuite. În condițiile unor calcule foarte fine, mașinile electronice de calcul permit obținerea unor aproximații pentru t oricît de bune vrem, în principiu.

În cazuri particulare favorabile, valoarea exactă a lui t poate fi dedusă fără dificultate din relațiile (2).

Exemplu. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x = 1$.

Soluție. Avem $a = b = c = 1$, deci $h = \sqrt{2}$, $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t = \frac{\pi}{4}$.

Ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Potrivit formulei generale, mulțimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = (2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Metoda 2. Presupunem că $b + c \neq 0$.

Notăm $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ și exprimăm $\sin x$ și $\cos x$ cu ajutorul lui y, folosind formulele care dau sinusul și cosinusul unui unghi în funcție de tangenta unghiului pe jumătate. Avem

$$\sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

şi ecuaţia (1) capătă forma

$$2\,ay + b(1 - y^2) = c(1 + y^2).$$

Am obţinut o ecuaţie algebrică de gradul II, care se mai poate scrie

$$(4)\qquad (b + c)y^2 - 2\,ay + (c - b) = 0.$$

Ecuaţia (4) are rădăcinile reale, dacă este verificată condiţia

$$a^2 - (b + c)(c - b) \geqslant 0$$

sau dacă $a^2 + b^2 \geqslant c^2$. Dar această condiţie este echivalentă cu condiţia $h \geqslant |c|$, găsită prin aplicarea metodei 1.

Să presupunem că avem

$$a^2 + b^2 > c^2$$

şi fie m una din soluţiile ecuaţiei (4). Din ecuaţia

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = m$$

deducem $x \in 2\operatorname{Arctg} m$, deci mulţimea $2\operatorname{Arctg} m = 2\operatorname{arctg} m + 2\pi\mathbf{Z}$ este o mulţime de soluţii ale ecuaţiei (1). Dacă ecuaţia (4) are două rădăcini reale m_1 şi m_2, atunci mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) va fi

$$\text{(II)}\qquad S = 2\operatorname{Arctg} m_1 \cup 2\operatorname{Arctg} m_2.$$

Exerciţiu. *Să se arate, în legătură cu rezultatele obţinute aplicînd metoda 1 şi metoda 2 că, dacă $b + c \neq 0$, atunci formulele (I) şi (II) definesc mulţimi egale.*

Observaţie. Dacă $b + c = 0$, deci dacă $b = -c$ atunci ecuaţia (1) admite soluţiile $(2k + 1)\pi$, pentru $k \in \mathbf{Z}$; într-adevăr, pentru $x = (2k + 1)\pi$ avem $\sin x = 0$ şi $\cos x = -1$. Pentru aceste soluţii, funcţia tangentă nu poate fi aplicată numerelor $\frac{x}{2}$. Deci metoda 2 nu poate conduce la găsirea acestor soluţii.

Pentru $b = -c$, putem scrie ecuaţia (1) sub formele echivalente

$$a \sin x = c(1 + \cos x),$$

$$2\,a \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2c\cos^2\frac{x}{2},$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(a\sin\frac{x}{2} - c\cos\frac{x}{2}\right) = 0,$$

care admit ca mulţime de soluţii reuniunea

$$S = (\pi + 2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(2\operatorname{Arctg}\frac{c}{a}\right),\quad (a \neq 0).$$

Exemplu. Să rezolvăm prin metoda 2 ecuaţia $\sin x + \cos x = 1$. Avem $b + c = 2 \neq 0$, deci metoda 2 va furniza toate soluţiile.

Punînd $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, se obţine ecuaţia

$$y^2 - y = 0,$$

care are soluţiile 0 şi 1. Rezultă că ecuaţia trigonometrică dată are mulţimea de soluţii

$$S = 2\operatorname{Arctg} 0 \cup 2\operatorname{Arctg} 1 = (2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right),$$

care a fost obţinută şi prin aplicarea metodei 1.

Ecuaţia

$$(5)\qquad \sin x + \cos x = -1$$

se rezolvă prin metoda 1. Ecuaţiile (2) vor fi verificate de $t = \frac{\pi}{4}$ şi ecuaţia (3) devine

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

rezultă că mulţimea de soluţii ale ecuaţiei (5) este

$$S = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exerciţii

1. *Să se rezolve ecuaţiile*

$$\sin x + 3\cos x = 1,\quad 3\sin x - \cos x = -1.$$

2. *Să se rezolve ecuaţiile*

$$3\sin 3x + 4\cos 3x = -5,\quad 3\sin 2x - 4\cos 2x = 5.$$

Alte metode de rezolvare a ecuaţiilor trigonometrice

O bună cunoaştere a proprietăţilor funcţiilor trigonometrice şi utilizarea judicioasă a identităţilor trigonometrice şi algebrice permit rezolvarea unei mari varietăţi de ecuaţii trigonometrice.

Trebuie subliniat că nu există o metodă generală pentru rezolvarea oricărei ecuaţii trigonometrice. Dimpotrivă, se poate afirma că ecuaţiile trigonometrice, care pot fi rezolvate efectiv, prin indicarea explicită a mulţimii soluţiilor, constituie o categorie foarte restrînsă, în mulţimea tuturor ecuaţiilor trigonometrice care se pot imagina, sau care intervin în practică.

Combinarea metodelor furnizate de algebră şi de analiză permit însă, în principiu, să se rezolve *orice* ecuaţie trigonometrică, *cu o aproximaţie oricît de bună vrem.* O parte din aceste metode vor fi prezentate în manualele destinate claselor X, XI şi XII. În acest capitol, ne limităm a indica numai unele metode elementare, care însă pot fi aplicate multor tipuri de ecuaţii ce intervin în aplicaţii practice.

Utilizarea identităţilor algebrice.

Să considerăm ecuaţia

$$\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0.$$

Primul membru al acestei ecuaţii poate fi descompus într-un produs de doi factori; se obţine atunci ecuaţia echivalentă:

$$(\sin x - 1)(\cos x - \sin x) = 0,$$

care are mulţimea de soluţii:

$$S = (\mathrm{Arcsin}\ 1) \cup (\mathrm{Arctg}\ 1) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

Pentru a da alt exemplu, să considerăm ecuaţia

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Folosind identităţile $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem transforma ecuaţia dată în ecuaţia echivalentă $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, care are mulţimea de soluţii

$$S = \frac{1}{2}\ \mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right)\right\}.$$

Să ne propunem acuma să rezolvăm ecuaţia

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}.$$

Folosind identitatea

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

ecuaţia se poate scrie sub forma echivalentă

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0.$$

Transformînd în produs suma dintre $\cos 2x$ şi $\cos 6x$, ecuaţia devine

$$\cos 4x(2 \cos 2x + 1) = 0.$$

Mulţimea soluţiilor ultimei ecuaţii este egală cu reuniunea mulţimilor de soluţii ale ecuaţiilor

$$\cos 4x = 0,\ \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă că ecuaţia dată are următoarea mulţime de soluţii:

$$S = \left(\frac{1}{4}\ \mathrm{Arccos}\ 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}\ \mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Exerciţii. 1. *Să se explicitеze membrul drept al ultimei formule.*

2. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 2.$$

Capitolul **IV**

Aplicații ale trigonometriei în geometrie și algebră

1. Relații metrice într-un triunghi oarecare

Fie ABC un triunghi oarecare. Vom nota prin a, b, c lungimile laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$, măsurate cu ajutorul unui segment etalon fixat m. Vom nota prin A', B', C' punctele de intersecție ale înălțimilor din A respectiv B, C, cu suporții laturilor opuse acestor vîrfuri, astfel ca (fig. IV.1)

$$A' \in BC,\ B' \in CA,\ C' \in AB.$$

Notăm apoi prin a', b', c' lungimile segmentelor $|AA'|$, respectiv $|BB'|$, $|CC'|$. Avem atunci următoarele egalități, care rezultă din definițiile funcțiilor sinus și cosinus, definite pe mulțimea unghiurilor:

(1) $a' = c \sin B = b \sin C,\ b' = a \sin C = c \sin A,\ c' = b \sin A = a \sin B,$

care arată că numerele a, b, c sînt proporționale cu $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, deci

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

Dacă notăm cu O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și cu A'' mijlocul laturii $|BC|$, și dacă notăm prin R raza cercului circumscris, din triunghiul dreptunghic $OA''B$ rezultă (fig. IV.2)

(3) $\frac{a}{2} = d(A'',B) = R \sin \widehat{A''OB}.$

Dar unghiul $\widehat{A''OB}$ este congruent cu unghiul $\hat{A}$, dacă $\hat{A}$ este un unghi ascuțit, și $\widehat{A''OB}$ este congruent cu suplementul unghiului $\hat{A}$, dacă $\hat{A}$ este un unghi obtuz. Deci, in toate cazurile, avem (fig. IV.2 și IV.3)

(4) $\sin \widehat{A''OB} = \sin \hat{A}$

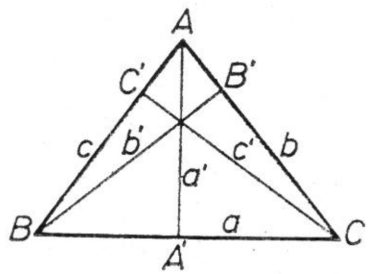


Fig. IV.1

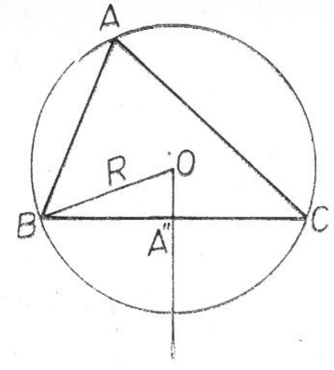


Fig. IV.2

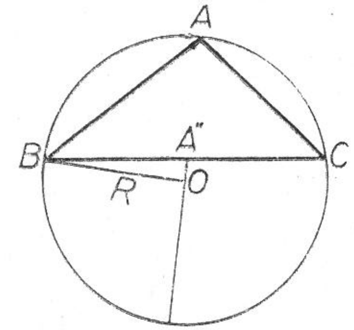


Fig. IV.3

și formula (3) devine

(5) $$a = 2R \sin A.$$

Relația (5) arată că valoarea comună a rapoartelor din (2) este egală cu diametrul cercului circumscris triunghiului ABC, deci că avem

(6) **Teorema sinusurilor. În orice triunghi ABC:**

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.}$$

Dacă unghiul $\hat{B}$ este ascuțit, avem, din triunghiul dreptunghic $AA'B$,

(7) $$d(A', B) = c \cos B$$

iar dacă unghiul $\hat{B}$ este obtuz (fig. IV.4),

(8) $$d(A', B) = -c \cos B,$$

deoarece in acest caz, avem $B \in |A'C|$.

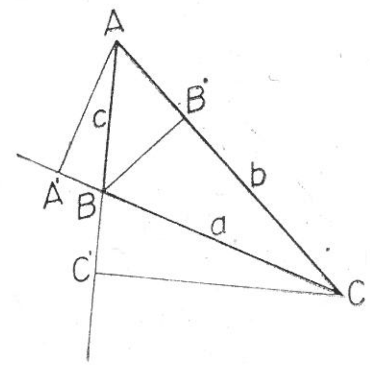


Fig. IV.4

Dacă amîndouă unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt ascuțite, vom avea

$A' \in |BC|$, $a = d(A', B) + d(A', C)$,
$d(A', B) = c \cos B$, $d(A', C) = b \cos C$

deci

(9) $$a = c \cos B + b \cos C.$$

Formula (9) este verificată și în cazurile în care $\hat{B}$ (sau $\hat{C}$) este un unghi obtuz. De exemplu, dacă $\hat{B}$ este obtuz, atunci

$a = d(A', C) - d(A', B) = b \cos C - (-c \cos B) = b \cos C + c \cos B.$

Deci *formula (9) este verificată în orice triunghi.*

Permutînd circular literele (a, b, c) și literele (A, B, C), obținem alte două relații analoage relației (9), anume:

(10) $$b = a\cos C + c\cos A,\quad c = b\cos A + a\cos B.$$

Dacă înmulțim relațiile (10), membru cu membru, prin b, respectiv c și dacă adunăm membru cu membru relațiile astfel obținute, ajungem la

(11) $$b^2 + c^2 = a(b\cos C + c\cos B) + 2bc\cos A.$$

Dacă ținem seama de relația (9), putem scrie (11) sub forma

(11') $$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc\cos A$$

sau

(12) $$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.}$$

Din formula (11') mai deducem relația

(13) $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Formula (12) permite calculul lungimii a cînd se cunosc lungimile laturilor b, c și unghiul $\hat{A}$, iar formula (13) permite determinarea unghiului $\hat{A}$, cînd se cunosc lungimile tuturor laturilor triunghiului ABC.

Un triunghi este determinat, din punct de vedere metric, dacă se cunosc lungimile laturilor sale și măsurile unghiurilor lui.

Teoremele de congruență ale triunghiurilor arată că un triunghi este determinat, din punct de vedere metric, dacă se cunosc trei din mărimile a, b, c, măs $\hat{A}$, măs $\hat{B}$, măs $\hat{C}$, în următoarele situații:

$$\text{I} : b,\ c,\ \text{măs}\ \hat{A};\quad \text{II} : a,\ \text{măs}\ \hat{B},\ \text{măs}\ \hat{C};\quad \text{III} : a,\ b,\ c.$$

Pentru aplicațiile practice și pentru numeroase considerații teoretice, este important să putem calcula toate elementele a, b, c, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ în fiecare din cazurile I, II, III.

În cazul I, formula (12) permite calculul lungimii a, iar relațiile (2) permit calculul unghiurilor $\hat{B}$, $\hat{C}$:

(14) $$\sin B = \frac{b\sin A}{a},\quad \sin C = \frac{c\sin A}{a}.$$

În cazul II, știm că $\sin A = \sin(B + C)$ și din formulele (2) deducem

$$b = \frac{a\sin B}{\sin(B + C)},\quad c = \frac{a\sin C}{\sin(B + C)}.$$

În cazul III, putem afla măsurile unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ folosind formula (13) și analoagele ei, obținute prin permutări circulare:

(15) $$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},\quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

În aplicații practice, utilizarea directă a formulelor (13), (15) și în general a unor formule care conțin sume de pătrate, face să apară erori mari, prin aproximările folosite. Într-adevăr, în general, nu putem cunoaște valorile exacte ale funcțiilor trigonometrice, aceste funcții fiind date de tabele, ce dau un anumit număr de zecimale. Erorile introduse prin folosirea tabelelor scad simțitor, dacă se pot folosi așa-numitele formule *calculabile prin logaritmi*, adică formule în care sumele sînt înlocuite cu produse. Tabelele de valori ale funcțiilor trigonometrice indică și logaritmii acestor valori (se va învăța în clasa a X-a).

Exemplu de formulă calculabilă prin logaritmi. Ne propunem să transformăm într-o formulă calculabilă prin logaritmi formula (13), care dă măsura unghiului $\hat{A}$ în funcție de lungimile a, b, c. Putem scrie

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos A + 1}{2}} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc}}.$$

Dacă introducem notațiile uzuale

$$a + b + c = 2p,\quad -a + b + c = 2(p - a),\quad a - b + c = 2(p - b),$$
$$a + b - c = 2(p - c),$$

obținem formula

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}.$$

Prin permutări circulare, se obțin relațiile

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p - b)}{ca}},\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p - c)}{ab}}.$$

Exerciții

1. *Să se demonstreze relațiile*

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}},\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - c)(p - a)}{ca}},$$
$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}}.$$

2. *Să se deducă formule de calcul pentru* $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

Din formula (13) rezultă

$$\sin^2 A = 1 - \frac{(a^2 - b^2 - c^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}{4b^2c^2} =$$

$$= \frac{(2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4b^2c^2} = \frac{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}{4b^2c^2} =$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4b^2c^2} = 4\frac{p(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2c^2}.$$

Avînd în vedere că $\hat{A}$ este un unghi, avem $\sin A > 0$ și deducem

$$(16) \qquad \sin A = 2\frac{\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{bc}.$$

Să ne amintim formula, care exprimă aria unui triunghi în funcție de lungimea unei laturi și a înălțimii care cade pe acea latură:

$$2S = aa' = bb' = cc'.$$

Avem însă $a' = c \sin B = B \sin C$, $b' = a \sin C = c \sin A$, $c' = b \sin A = a \sin B$ și rezultă pentru calculul ariei S următoarele formule

$$(17) \qquad 2S = ac \sin B = ab \sin C = bc \sin A.$$

Dacă ținem seama de formula (16), deducem *formula lui Heron*:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

O aplicație a teoremei sinusurilor. Fie a, b, m, n patru drepte coplanare trecînd printr-un punct O și fie d o dreaptă, care nu trece prin punctul O și care intersectează dreptele a, b, m, n respectiv în punctele A, B, M, N. În acest caz, este adevărată egalitatea

$$(1) \qquad \frac{|MA|}{|NA|} : \frac{|MB|}{|NB|} = \frac{\sin \widehat{AOM}}{\sin \widehat{AON}} : \frac{\sin \widehat{BOM}}{\sin \widehat{BON}}.$$

Demonstrație. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul OMA, obținem (fig. IV.5)

$$(2) \qquad \frac{|MA|}{|OA|} = \frac{d(M, A)}{d(O, A)} = \frac{\sin \widehat{AOM}}{\sin \widehat{OMA}}.$$

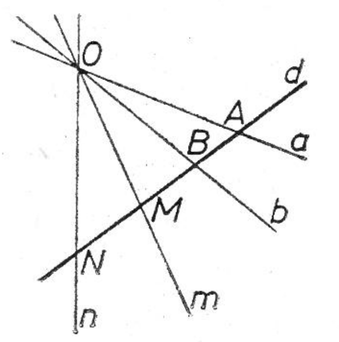


Fig. IV.5

Aplicînd aceeași teoremă în triunghiul ONA, obținem

$$(3) \qquad \frac{|NA|}{|OA|} = \frac{\sin \widehat{AON}}{\sin \widehat{ONA}}.$$

Împărțind relațiile (2) și (3) membru cu membru, obținem

$$(4) \qquad \frac{|MA|}{|NA|} = \frac{\sin \widehat{AOM}}{\sin \widehat{AON}} \cdot \frac{\sin \widehat{ONA}}{\sin \widehat{OMA}}.$$

Înlocuind punctul A prin punctul B, obținem relația

$$(5) \qquad \frac{|MB|}{|NB|} = \frac{\sin \widehat{BOM}}{\sin \widehat{BON}} \cdot \frac{\sin \widehat{ONB}}{\sin \widehat{OMB}}.$$

Dacă împărțim acum relațiile (4) și (5) membru cu membru, obținem relația (1), deoarece $\sin \widehat{ONA} = \sin \widehat{ONB}$ și $\sin \widehat{OMA} = \sin \widehat{OMB}$.

C o r o l a r. Fiind date patru drepte coplanare și concurente a, b, m, n și alte două drepte d și d', care intersectează primele patru drepte în punctele A, B, M, N respectiv A', B', M', N', avem:

$$(6) \qquad \frac{|MA|}{|NA|} : \frac{|MB|}{|NB|} = \frac{|M'A'|}{|N'A'|} : \frac{|M'B'|}{|N'B'|}.$$

Demonstrație. Fiecare din cele două birapoarte care apar în cei doi membri ai relației (6) este egal cu un biraport de patru sinusuri, anume cu un biraport format cu sinusurile unghiurilor care apar în membrul drept al egalității (1).

Raportul dublu care apare în membrul stîng al egalității (1) se numește *biraportul* sau *raportul anarmonic* al figurii $ABMN$, iar membrul drept al aceleiași egalități se numește raportul anarmonic al dreptelor a, b, m, n.

Exerciții

1. Să se determine măsurile în grade sexagesimale ale unghiurilor unui triunghi, cunoscînd lungimile laturilor $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$.

2. Un turn, asimilat cu un segment $[AB]$, este privit de un observator din punctele M și N astfel ca $M \in |AN|$, A fiind baza turnului. Știind că $d(M, N) = 100$ m și că unghiurile $\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$ au măsurile în grade sexagesimale egale cu 57° respectiv 46°, să se determine înălțimea turnului și distanțele $d(A, M)$, $d(A, N)$.

3. Două puncte inaccesibile A, B sînt privite din punctele M, N. Cunoscînd distanța $d(M, N) = d$ și unghiurile $\widehat{MNB}$, $\widehat{MNA}$, $\widehat{NMB}$, $\widehat{NMA}$ și știind că punctele A, B, M, N sînt într-un același plan, să se determine distanța $d(A, B)$.

4. Un astronom privește un astru A de pe bolta cerească în două momente ale anului, la un interval de 6 luni, cînd Pămîntul ocupă două poziții B, B', diametral opuse pe traiectoria sa în jurul Soarelui. Cu ajutorul instrumentelor de care dispune, observatorul este capabil să măsoare unghiul BAB' și găsește valoarea în grade u. Cunoscînd că distanța $d(B, B')$ este egală cu D (= 300 000 000 km) și presupunînd că triunghiul ABB' este isoscel ($|AB| \equiv |AB'|$), să se calculeze distanța $d(B, A)$ pentru $u = 1°, 2°, \ldots, 10°$.

5. Unghiurile unui triunghi au măsurile egale cu 50°, 60° şi 70°. Ştiind că raza cercului circumscris este 1, să se calculeze lungimile laturilor acelui triunghi.

6. Un triunghi are două unghiuri de 36° şi laturile ce formează al treilea unghi au lungimea 1. Să se determine lungimea celei de a treia laturi.

2. Exprimarea numerelor complexe de modul 1 cu ajutorul funcţiilor trigonometrice

Fiecărui număr real t îi vom asocia numărul complex $\cos t + i \sin t$, care va fi notat e^{it}. Avem deci, pentru $t \in \mathbf{R}$,

(1) $$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t.}$$

Din această definiţie a simbolului e^{it} deducem următoarele proprietăţi:

1. *Oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$, numărul complex e^{it} are modulul egal cu unitatea.*
Într-adevăr, avem

$$|e^{it}| = |\cos t + i \sin t| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1} = 1.$$

2. *Numărul complex e^{it} este egal cu 1 pentru $t = 0$.*
Într-adevăr, avem $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, deci $e^{i0} = 1 + i \cdot 0 = 1$.

3. Alte cazuri particulare sînt date de relaţiile

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{i2\pi} = 1.$$

4. *Pentru orice două numere reale u şi t avem*

$$\boxed{e^{iu}e^{it} = e^{i(u+t)}.}$$

Demonstraţie. Avem

$$e^{iu}e^{it} = (\cos u + i \sin u)(\cos t + i \sin t) =$$
$$= (\cos u \cos t - \sin u \sin t) + i(\cos u \sin t + \cos t \sin u) =$$
$$= \cos(u + t) + i \sin(u + t) = e^{i(u+t)}.$$

5. *Oricare ar fi numărul real t, avem*

$$(e^{it})^2 = e^{i2t}, \ (e^{it})^3 = e^{i3t}, \ (e^{it})^4 = e^{i4t}, \ldots$$

şi în general, pentru orice număr natural n,

$$(e^{it})^n = e^{int}.$$

Într-adevăr, putem scrie, folosind proprietatea 4,

$$(e^{it})^2 = e^{it}e^{it} = e^{i(t+t)} = e^{i2t},$$
$$(e^{it})^3 = (e^{it})^2 e^{it} = e^{i2t}e^{it} = e^{i3t}, \ldots$$

Observaţie. În loc de e^{int}, pentru $t \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}$, se convine să se scrie e^{nit}.

6. *Pentru orice număr $t \in \mathbf{R}$, avem*

$$e^{it} \cdot e^{i(-t)} = 1.$$

Într-adevăr, avem, în virtutea proprietăţii 4,

$$e^{it}e^{i(-t)} = e^{i(t-t)} = e^{i0} = 1.$$

Observaţie. În loc de e^{i0} se scrie e^0 şi în loc de $e^{i(-t)}$ se scrie e^{-it}. Proprietatea 6 poate fi deci scrisă sub forma

$$e^{it}e^{-it} = 1.$$

7. *Numărul e^{-it} este complex conjugat lui e^{it}.*

Într-adevăr, avem

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t = \overline{e^{it}}.$$

8. *Numărul e^{-it} este inversul numărului complex e^{it}.*

Demonstraţie. Am arătat că avem $e^{-it}e^{it} = 1$, deci e^{-it} este inversul lui e^{it}.

9. *Orice număr complex de modul 1 se poate pune într-o infinitate de feluri, sub forma e^{it}.*

Demonstraţie. Fie $z = x + iy$ un număr complex de modul 1. Avem atunci

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Din proprietăţile funcţiilor sinus şi cosinus ştim că există o infinitate de numere reale t, astfel ca să avem $x = \cos t$ şi $y = \sin t$. Pentru un astfel de număr, avem

$$z = \cos t + i \sin t = e^{it}.$$

10. *Pentru orice număr real t şi orice număr întreg n avem*

$$e^{i(t+2n\pi)} = e^{it}.$$

Într-adevăr, putem scrie

$$e^{i(t+2n\pi)} = e^{it}e^{2ni\pi} = e^{it},$$

deoarece $2^{2ni\pi} = \cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi) = 1 + i0 = 1$.

11. ***Dacă t şi u sînt numere reale astfel încît $e^{it} = e^{iu}$, atunci diferenţa $t - u$ este egală cu un multiplu întreg de 2π.***

Într-adevăr, din $e^{it} = e^{iu}$ rezultă $\cos t + i \sin t = \cos u + i \sin u$ deci $\cos t = \cos u$ şi $\sin t = \sin u$; ultimele două egalităţi implică existenţa unui număr întreg n cu proprietatea $t - u = 2n\pi$.

Legea care asociază fiecărui număr real t numărul complex $e^{it} = \cos t + i \sin t$ este o aplicaţie de la mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale la mulţimea numerelor complexe de modul 1. Această aplicaţie se notează uneori prin exp. Avem deci, prin convenţie de notaţie,

$$\boxed{\exp(t) = e^{it}.}$$

Proprietățile demonstrate pot fi exprimate prin formulele:

$$\exp(0) = \exp(2\pi) = 1,\ \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) = i,\ \exp(\pi) = -1,\ \exp(t)\cdot\exp(u) = \exp(t+u),\ \exp(t)\cdot\exp(-t) = 1,\ \exp(-t) = \overline{\exp(t)},\ \exp(t+2n\pi) = \exp(t).$$

De asemenea, proprietatea 9 poate fi formulată spunînd că aplicația exp este surjectivă de la **R** la mulțimea numerelor complexe de modul 1.

Proprietatea 10 arată că exp este o aplicație periodică de perioadă 2π, iar proprietatea 11 arată că 2π este perioada principală a funcției exp.

Exerciții

1. Să se calculeze $\exp(t)$ pentru următoarele valori ale lui t:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{10}.$$

2. Să se arate că $\exp(t+\pi) = -\exp(t)$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$.

Aplicație. Formula lui Moivre. Dacă z este un număr complex și dacă n este un număr natural, $n = 0, 1, 2, \ldots$, definim *puterile întregi nenegative* ale lui z prin formulele

$$z^0 = 1,\ z^1 = z,\ z^2 = z\cdot z,\ z^3 = z^2\cdot z,\ \ldots,\ z^{n+1} = z^n\cdot z,\ \ldots$$

Reamintim că *produsul a două numere* naturale se definește prin formule asemănătoare:

$$m\cdot 0 = 0,\ m\cdot 1 = m,\ m\cdot 2 = m+m,\ \ldots,\ m(n+1) = mn+m,\ \ldots$$

Astfel de noțiuni se numesc noțiuni introduse *prin inducție*, în raport cu n. Principiul inducției afirmă că, prin astfel de formule, simbolurile z^n și mn sînt definite pentru orice n.

Așa cum am introdus o *definiție* cu ajutorul inducției, putem da și o *demonstrație* prin inducție.

De exemplu, asociativitatea înmulțirii numerelor naturale, exprimată prin formula $(mn)p = m(np)$, dau comutativitatea, exprimată prin formula $mn = nm$, se demonstrează prin inducție. Anume, se arată că aceste proprietăți sînt adevărate pentru $m = 0$ și apoi se arată că, admițînd aceste proprietăți adevărate pentru o valoare a lui m, atunci ele sînt adevărate și pentru valoarea succesivă $m+1$.

Pe aceeași cale, putem demonstra *formula lui Moivre*, valabilă pentru orice număr real t și orice număr natural n:

$$(1)\qquad \boxed{(\cos t + i\sin t)^n = \cos(nt) + i\sin(nt)}\ .$$

Formula (1) este evident verificată pentru $n = 0$ și pentru orice t, deoarece pentru $n = 0$, ambii membrii ai relației (1) sînt egali cu 1.

Să presupunem formula (1) adevărată pentru numărul natural n și să notăm $z = \cos t + i\sin t = e^{it}$. Avem atunci

$$z^{n+1} = (\cos t + i\sin t)^{n+1} = z^n\cdot z = (\cos t + i\sin t)^n\cdot(\cos t + i\sin t).$$

Folosind formula (1), pe care o admitem adevărată pentru numărul n,

$$z^{n+1} = [\cos(nt) + i\sin(nt)](\cos t + i\sin t) = \cos(nt)\cos t - \sin(nt)\sin t + i[\sin(nt)\cos t + \cos(nt)\sin t] = \cos(nt+t) + i\sin(nt+t).$$

Din (1) rezultă deci

$$(\cos t + i\sin t)^{n+1} = \cos(n+1)t + i\sin(n+1)t.$$

Deducem că *formula (1) este verificată pentru orice număr natural n*, deci formula lui Moivre este demonstrată.

Exerciții

1. Să se demonstreze formula lui Moivre direct, pentru $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ și $n = 5$.
2. Din formula lui Moivre pentru $n = 3$ să se deducă identitățile:

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t\sin^2 t,\quad \sin 3t = 3\cos^2 t\sin t - \sin^3 t.$$

3. Să se demonstreze identitățile

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},\quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

3. Forma trigonometrică a unui număr complex

Dacă avem un număr complex $z = x + iy$, unde $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ și $i^2 = -1$ definim *modulul* lui z prin formula

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Modulul numărului z este un număr real pozitiv sau nul. Avem $|z| = 0$ dacă și numai dacă $z = 0$. Dacă $z \neq 0$, atunci $|z|$ este un număr pozitiv.

Dacă avem două numere complexe

$$z = x + iy,\quad z' = x' + iy',$$

produsul zz' este dat de formula

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

și modulul produsului este

$$|zz'| = \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)}.$$

Avem deci

$$|zz'| = |z|\cdot|z'|.$$

Pentru orice număr complex nenul z, numărul $\frac{z}{|z|}$ este un număr complex de modul 1. Într-adevăr, dacă notăm $r = |z|$, atunci avem

$$\frac{z}{|z|} = \frac{z}{r} = \frac{x}{r} + i\frac{y}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

deci

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{r^2}} = 1.$$

Rezultă că există un număr $t \in [0, 2\pi)$, astfel ca să avem

(1) $$\frac{z}{|z|} = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

sau

(2) $$z = r\, e^{it} = r(\cos t + i \sin t).$$

Vom nota prin $\arg z$ numărul real t, care verifică relația (2) și condiția $t \in [0, 2\pi)$; numărul $\arg z$ se va numi *argumentul redus* al numărului complex nenul z. Rezultă că, pentru orice număr complex nenul z avem identitatea

(3) $$\boxed{z = |z|\, e^{i \arg z}, \ \arg z \in [0, 2\pi).}$$

Argumentul redus $\arg z$ nu este singurul număr real care verifică egalitatea (2); știm că orice număr de forma

(4) $$t = \arg z + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$$

verifică această egalitate. Orice număr de forma (4) se numește *argument* al numărului complex z.

Reciproc, dacă un număr real t verifică egalitatea (2), atunci există un număr întreg k, pozitiv, sau negativ sau nul, astfel încît să avem (4). Mulțimea numerelor t de forma (4) va fi notată $\operatorname{Arg} z$. Avem deci, prin definiție, următoarea formulă, care dă *mulțimea argumentelor* numărului complex z:

(5) $$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi; \ \ k \in \mathbf{Z}\} = \arg z + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Numărul $\arg z$ și mulțimea $\operatorname{Arg} z$ sînt definite numai pentru numerele complexe z diferite de zero.

Deci, dacă z este un număr complex diferit de zero, $z = x + iy$, și dacă $r = |z|$, $t \in \operatorname{Arg} z$, atunci avem

(6) $$z = x + iy = r\, e^{it}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă $z = 0$, deci dacă $x = y = r = 0$, atunci relația (6) va fi verificată de *orice* număr real t. *Argumentul numărului complex 0 nu este definit.*

Din egalitățile (6) rezultă formulele importante

(7) $$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

și, dacă $r \neq 0$,

(8) $$\cos t = \frac{x}{r}, \quad \sin t = \frac{y}{r}.$$

Dacă z nu este un număr pur imaginar, deci dacă $x \neq 0$, atunci $\cos t \neq 0$ și din relațiile (7) sau (8) deducem relația importantă

(9) $$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} t,$$

valabilă pentru orice număr $t \in \operatorname{Arg} z$, în particular pentru $t = \arg z$.

Exemple. Dacă $z = 0$, avem $r = 0$ și argumentul lui z nu este definit. Dacă $z = 1$, avem $r = 1$ și $\arg 1 = 0$. Dacă $z = i$, avem $r = 1$ și $\arg z = \pi/2$.

Dacă $z = 1 - i\sqrt{3}$, atunci $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos(\arg z) = \frac{1}{2}$ și $\sin(\arg z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $\arg z = \frac{5\pi}{3}$, $\operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}$.

Dacă $z = -1 + i\sqrt{3}$, atunci $r = 2$ și $\arg z = \frac{2\pi}{3}$.

Expresia

$$|z|\, e^{i \arg z} = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z)$$

poartă numele de *formă trigonometrică* a numărului complex z, $z \neq 0$.

Am arătat că avem egalitatea

(10) $$z = r(\cos t + i \sin t)$$

dacă $r = |z|$ și dacă $t \in \operatorname{Arg} z$.

Numărul pozitiv r și numărul real $\arg z \in [0, 2\pi)$ sînt asociate în mod unic numărului complex nenul z. Reciproc, fiind date numerele $r > 0$ și $t \in \mathbf{R}$, formula (10) definește un număr complex nenul. Numerele complexe $z = r(\cos t + i \sin t)$, $z' = r'(\cos t' + i \sin t')$, cu $r > 0$, $r' > 0$, sînt egale dacă și numai dacă avem

(11) $$r = r' \ \text{ și } \ t - t' \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

Rezultă că: *Două numere complexe nenule sînt egale dacă și numai dacă ele au același modul și dacă diferența argumentelor lor este un multiplu întreg de 2π.*

Condiția ca două numere complexe să fie conjugate.

Fie $z = r(\cos t + i \sin t)$ un număr complex. Conjugatul complex al lui z va fi dat de formula $\bar{z} = r(\cos t - i \sin t) = r(\cos t' + i \sin t')$, unde

(12) $$t' = -t + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Rezultă că $\arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$, dacă $\arg z \neq 0$ și $\arg \bar{z} = \arg z$, dacă $\arg z = \pi$ sau $\arg z = 0$, deci dacă z este un număr real, nenul; în ultimul caz, $\bar{z} = z$.

Mulțimea argumentelor numărului conjugat $\bar{z}$ este dată de formula

$$\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z = \{-t; \ t \in \operatorname{Arg} z\}.$$

Exercițiu. Să se determine modulele și argumentele numerelor -3, 3, $-3i$, $3i$, $2+2\sqrt{3}i$, $\sqrt{3}-i$.

4. Înmulțirea numerelor complexe scrise sub formă trigonometrică

Fie z și z' două numere complexe. Să presupunem că am scris aceste numere sub formă trigonometrică:

$$z = r(\cos t + i \sin t),\quad z' = r'(\cos t' + i \sin t').$$

Produsul acestor numere va fi dat de formula

$$zz' = rr'e^{it}e^{it'} = rr'e^{i(t+t')},$$

unde

$$e^{i(t+t')} = \cos(t+t') + i \sin(t+t').$$

Numărul $t+t'$ aparține mulțimii $\mathrm{Arg}(zz')$, dar în general nu este egal cu argumentul redus al lui zz', deoarece este posibil ca să avem $t+t' > 2\pi$. Din relația $t+t' \in \mathrm{Arg}(zz')$ rezultă însă că avem

(13) $$\arg(zz') - (\arg z + \arg z') \in 2\pi\mathbf{Z},$$

deci *diferența $\arg(zz') - (\arg z + \arg z')$ este un multiplu întreg de 2π.*

Relația (13) poate fi exprimată simbolic prin formula

(14) $$\boxed{\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}\, z + \arg z' = \arg z + \mathrm{Arg}\, z'.}$$

Formula care dă produsul a două numere complexe scrise sub formă trigonometrică, poate fi generalizată, considerînd n numere complexe

$$z_1 = r_1(\cos t_1 + i \sin t_1), \ldots, z_n = r_n(\cos t_n + i \sin t_n).$$

Vom avea

(15) $$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(t_1 + \ldots + t_n) + i \sin(t_1 + \ldots + t_n)].$$

În particular, dacă numerele $z_1, \ldots, z_n$ sînt egale cu același număr z obținem formula următoare, care dă puterea a n — a a lui z:

(15′) $$z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt).$$

Să presupunem că numerele complexe $z = re^{it}$ și $z' = r'e^{it'}$ sînt inverse unul celuilalt, deci că $zz' = 1$. În acest caz, vom avea

$$rr'e^{i(t+t')} = 1,$$

deci $r' = r^{-1}$ și $t + t' \in 2\pi\mathbf{Z}$. Ultima relație poate fi exprimată astfel:

(16) $$-\arg z' \in \mathrm{Arg}\, z.$$

Avem deci

$$|z^{-1}| = |z|^{-1},\quad -\arg(z^{-1}) \in \mathrm{Arg}\, z.$$

Fie w și z două numere complexe.

Cîtul numerelor complexe w și z, deci produsul wz^{-1} va fi definit de formulele

(17) $$|wz^{-1}| = |w| \cdot |z|^{-1},\quad \arg(wz^{-1}) \in \arg w - \arg z + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Aplicație. Să calculăm numărul complex

$$c = \frac{512}{(\sqrt{3}+i)^9}.$$

Avem $|c| = 512|\sqrt{3}+i|^{-9} = 512 \cdot 2^{-9} = 1$ și $\arg c \in \arg(512) - \arg(\sqrt{3}+i)^9 + 2\pi\mathbf{Z} = -9\arg(\sqrt{3}+i) + 2\pi\mathbf{Z}$. Dar

$$\arg(\sqrt{3}+i) = \arg\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\pi}{6},$$

deci $9\arg(\sqrt{3}+i) = 3\pi/2$ și vom avea

$$\arg c \in -\frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Rezultă

$$c = e^{i\arg c} = e^{-3i\pi/2} = i.$$

Exercițiu. Să se demonstreze formulele (15) și (15′).
(*Indicație.* Se va folosi inducția matematică).

5. Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex

Definiție. Fie z un număr nenul și fie n un număr natural mai mare decît 1. Se numește rădăcină de ordinul n a lui z orice număr complex Z, care verifică ecuația

(1) $$Z^n = z.$$

Dacă notăm $z = re^{it}$ și $Z = Re^{iT}$, unde $r > 0$, $R > 0$, $t \in \mathbf{R}$, $T \in \mathbf{R}$, ecuația (1) este echivalentă cu relațiile

(2) $$R^n = r,\quad nT - t \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

Prima din aceste relații are o soluție unică:

(3) $$R = r^{1/n},$$

deci R trebuie să fie rădăcina pozitivă de ordinul n a numărului pozitiv r. Se știe de la algebră că această rădăcină există și este unică.

A doua relație (2) este echivalentă cu existența unui număr întreg k, astfel ca să avem

(4) $$nT = t + 2k\pi,\quad k \in \mathbf{Z}.$$

Avem deci

(5) $$T = \frac{t + 2k\pi}{n},\quad k \in \mathbf{Z}.$$

Pentru orice alegere a lui k în formula (5), luînd pentru R valoarea dată de (3), obținem o soluție a ecuației (1), dacă punem $Z = Re^{iT}$. Dînd lui k în formula (5) valorile $0, 1, 2, ..., n-1$, obținem pentru T valorile

(6) $$T_0 = \frac{t}{n},\quad T_1 = \frac{t+2\pi}{n}, ..., T_k = \frac{t+2k\pi}{n}, ..., T_{n-1} = \frac{t+2(n-1)\pi}{n}.$$

Să notăm

(7) $$Z_k = r^{1/n}e^{iT_k},\quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Obținem atunci n numere complexe și fiecare din aceste numere verifică ecuația (1). Aceste numere sînt distincte două cîte două, deoarece diferența a două oarecare din numerele șirului (6) este diferită de orice multiplu întreg de 2π. Rezultă că:

Ecuația (1) admite n soluții distincte, date de formulele (7) și (6).

Se pune problema de a vedea dacă ecuația (1) admite vreo soluție diferită de soluțiile indicate. Am arătat că orice soluție a ecuației (1) este de forma $Z = Re^{iT}$ cu R dat de (3) și cu T de forma (5). În aparență, ecuația (5) furnizează o infinitate de soluții, deoarece putem da o infinitate de valori parametrului $k \in Z$. În realitate, dacă dăm lui k o valoare diferită de valorile considerate mai sus, deci diferită de $0, 1, 2, ..., n-1$, acea valoare k va diferi de una din valorile $0, 1, ..., n-1$ printr-un multiplu întreg de n. Deci vom avea o relație de forma $k = h + qn$, unde $h \in \{0, 1, ..., n-1\}$ și $q \in \mathbf{Z}$. În acest caz, soluția $Z = Re^{i(t+2k\pi)/n}$ va fi egală cu numărul $Re^{i(t+2h\pi)/n} = Re^{iT_h} = Z_h$, care aparține șirului (7). Deci:

Șirul (7) conține toate soluțiile ecuației (1).

Deci am demonstrat că:

Dacă avem un număr complex nenul $z = re^{it}$ și un număr natural n, atunci există exact n rădăcini de ordinul n ale lui z și aceste rădăcini sînt date de formula

(8) $$Z_k = r^{1/n}e^{i(t+2k\pi)/n},\ k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Dacă $t = \arg z$, deci dacă $t \in [0, 2\pi)$, atunci numerele $T_k = \frac{t+2k\pi}{n}$, cu $k = 0, 1, 2,...,n-1$, aparțin de asemenea intervalului $[0, 2\pi)$, deci T_k este argumentul redus al numărului Z_k. Deci argumentele reduse ale rădăcinilor ecuației (1) sînt date de relația

(9) $$\arg Z_k = \frac{\arg z + 2k\pi}{n},\quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

În particular, dacă modulul lui z este egal cu 1, atunci fiecare din rădăcinile (8) va avea modulul egal cu 1.

Dacă $z = 1$, rădăcinile ecuației (1) vor fi rădăcinile de ordinul n ale unității. Aceste rădăcini sînt soluțiile ecuației

(10) $$Z^n = 1.$$

Potrivit rezultatului stabilit mai sus, *există exact n rădăcini de ordinul n ale unității și aceste rădăcini sînt date de formula*

(11) $$U_k = e^{i2k\pi/n},\quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Pentru $k = 0$ se obține $U_0 = 1$, iar pentru $k = 1$, obținem rădăcina

$$U_1 = e^{2\pi i/n}.$$

Avem, pentru orice $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$

$$U_k = (U_1)^k,$$

deci rădăcinile de ordinul n ale unității sînt egale cu puterile de grade mai mici decît n ale unei rădăcini particulare U_1. Se spune că U_1 este o rădăcină *primitivă* de ordinul n a unității.

Exerciții

1. Fie Z o rădăcină de ordinul n a ecuației $Z^n = z$ și fie U o rădăcină de ordinul n a unității. Să se arate că UZ este o rădăcină de ordinul n a lui z.

2. Să se arate că orice rădăcină de ordinul n a numărului complex z este de forma $Z(U_1)^k$, unde Z este o rădăcină particulară de ordinul n a lui z, iar U_1 este rădăcina primitivă a unității, indicată mai sus.

Aplicație. Să se rezolve ecuația

(12) $$Z^{n-1} + Z^{n-2} + ... + Z + 1 = 0.$$

Soluție. Avem identitatea

(13) $$Z^n - 1 = (Z-1)(Z^{n-1} + Z^{n-2} + ... + Z + 1),$$

din care rezultă că soluțiile ecuației (12) sînt soluțiile diferite de 1 ale ecuației (10). Aceste soluții au fost determinate. Rezultă că soluțiile ecuației (12) sînt date de formula (11), în care luăm

$$k = 1, 2, ..., n-1.$$

Deci rădăcinile ecuației (12) sînt puterile de grade $1, 2, ..., n-1$ ale rădăcinii primitive U_1. În particular, U_1 este o rădăcină a ecuației (12).

Exercițiu. Să se arate că produsul a două rădăcini de ordinul n ale unității și inversa unei rădăcini de ordinul n a unității sînt rădăcini de ordinul n ale unității.

Exemple. 1. Rădăcinile de ordinul 3 ale unității sînt

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},\ \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Exerciții

1. Fie $1, U_1$ și U_2 rădăcinile de ordinul trei ale unității. Să se arate că $U_1 = \overline{U}_2$ și $(U_1)^2 = (U_1)^{-1} = U_2$, $(U_2)^2 = (U_2)^{-1} = U_1$.

2. Să se arate că $1, U_1$ și U_2 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral înscris în cercul unitate $\mathcal{C}(0, 1)$.

3. Să se indice rădăcinile ecuației

$$Z^2 + Z + 1 = 0.$$

4. Să se arate că rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex nenul z sînt afixele vîrfurilor unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul $C(0, R)$, $R = |z|^{1/n}$.

5. Să se determine și să se reprezinte geometric rădăcinile de ordinul patru ale unității.

6. Se știe că numărul complex Z verifică ecuația $Z^4 = z$; să se arate că numerele $-Z, iZ$ și $-iZ$ verifică aceeași ecuație.

Aplicație. Să se calculeze $z = (1 - 2i)^4$ și să se deducă expresiile rădăcinilor de ordinul patru din $-7 + 24i$.

Soluție. Avem

$$z = 1 + 4(-2i) + 6(-2i)^2 + 4(-2i)^3 + (-2i)^4 = -7 + 24\,i.$$

Rezultă că rădăcinile de ordinul patru din $-7 + 24\,i$ sînt următoarele numere complexe

$$1 - 2i,\quad -1 + 2i,\quad 2 + i,\quad -2 - i,$$

care se obțin din $1 - 2i$ înmulțindu-l cu -1, i și $-i$.

Exerciții

1. Să notăm prin L_n lungimea laturilor unui poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc de rază R. Să se demonstreze formulele:

$$L_3 = R\sqrt{3},\quad L_4 = R\sqrt{2},\quad L_5 = \frac{1}{2} R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\quad L_6 = R,\quad L_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$L_{10} = \frac{1}{2} R(\sqrt{5} - 1),\quad L_{12} = \frac{1}{2} R(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Pentru fiecare din aceste poligoane, să se determine raza cercului înscris.

2. Să se stabilească următoarele formule:

$$\operatorname{tg} 7°30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2,$$

$$\sin 9° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}\right),\quad \cos 9° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}}\right),$$

$$\sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),\quad \cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$\sin 18° = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}),\quad \cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}),$$

$$\sin 27° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right),\quad \cos 27° = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right),$$

$$\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},\quad \cos 36° = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

3. Să se determine rădăcinile unității de ordinele 5, 6, 8, 10 și 12.

6. Interpretări geometrice ale unor relații între numere complexe

Să alegem, într-un plan α, un sistem de coordonate carteziene ortogonale, definit de reperul $(\vec{a}, \vec{b})$, unde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, OA \perp OB, |OA| \equiv |OB| \equiv m$.

Fiecărui punct P din planul α i se asociază un cuplu de numere reale (x, y), unde x este abscisa lui P iar y este ordonata lui P. Reciproc, fiecărui cuplu de numere reale (x, y) i se asociază un punct $P \in \alpha$, astfel încît x este abscisa lui P, iar y este ordonata lui P (fig. IV.6).

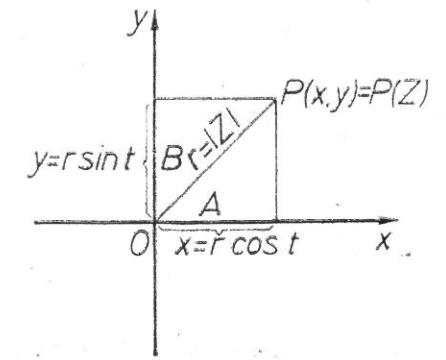


Fig. IV.6

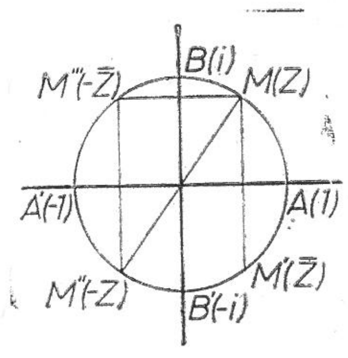


Fig. IV.7

Vom asocia acuma punctului $P(x, y)$ numărul complex $z = x + iy$ și vom spune că z este *afixul* punctului P.

Din felul în care am definit aceste aplicații, rezultă următoarele:

Aplicațiile $P \to (x, y)$, $(x, y) \to z = x + iy$, $P \to z$ sînt bijective.

Afixul punctului O este numărul complex 0.

Afixul punctului A este numărul complex 1.

Afixul punctului B este numărul complex i.

Afixele punctelor de pe axa OA sînt numere reale, iar afixele punctelor de pe axa OB sînt numere pur imaginare.

Fie z afixul unui punct M din planul α. Dacă notăm prin M', M'' și M''', punctele avînd ca afixe numerele $\bar{z}$, respectiv $-z$ și $-\bar{z}$, atunci (fig. IV.7).

Punctul $M'(\bar{z})$ este simetricul lui $M(z)$ față de axa OA.

Punctul $M''(-z)$ este simetricul lui $M(z)$ față de originea O.

Punctul $M'''(-\bar{z})$ este simetricul lui M'' față de OA și al lui M față de OB.

Punctul $A'(-1, 0)$ are afixul -1, iar punctul B' are afixul $-i$.

Dacă z și z' sînt afixele a două puncte M, M', atunci $z + z'$ va fi afixul acelui punct P, pentru care figura $OMPM'$ este un paralelogram, dacă presupunem că punctele O, M, M' nu sînt coliniare (fig. IV.8)

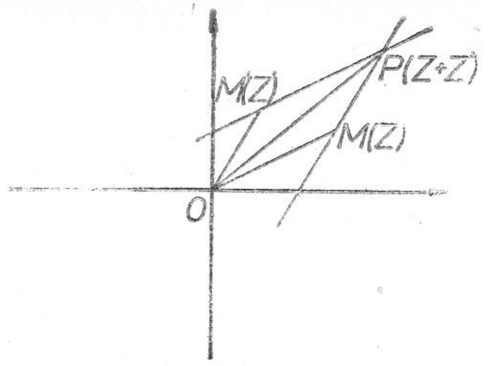


Fig. IV.8

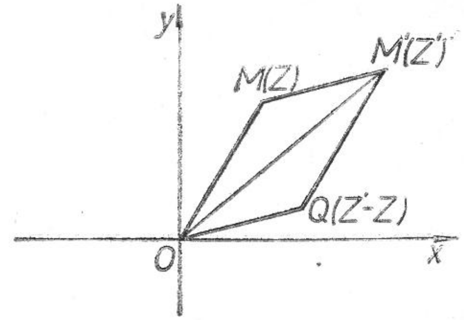


Fig. IV.9

În aceeași ipoteză ($M' \notin OM$), numărul $z' - z$ este afixul acelui punct Q, pentru care figura $OMM'Q$ este un paralelogram (fig. IV.9)

Modulul afixului z al unui punct M este egal cu distanța $d(O, M)$, măsurată cu ajutorul etalonului $|OA|$. Punctele al căror afix au modulul egal cu un număr pozitiv dat, sînt situate pe cercul cu centrul în originea O și de rază egală cu numărul pozitiv dat.

Punctele situate pe cercul de centru O și de rază 1 au ca afixe numere complexe de modul 1.

Punctele ale căror afixe au argumentul egal cu un număr real dat sînt situate pe o dreaptă trecînd prin originea O.

Fie M un punct astfel ca $d(O, M) = 1$ și fie z afixul lui M și fie t argumentul redus al lui M. Atunci t este egal cu lungimea arcului de cerc, situat pe cercul $C = C(0, 1)$ și avînd extremitățile A și M, parcurs de la A la M în sens de la A la B (fig. IV.10). Dacă $t \leqslant \pi$, numărul t reprezintă măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOM}$.

Raportul a două numere complexe nenule z și z' este real dacă și numai dacă punctele $M(z)$, $M'(z')$, care au z și z' ca afixe, sînt coliniare cu O, deci dacă $M' \in OM$.

Dacă raportul z/z' este pozitiv, atunci semidreptele $|OM$, $|OM'$ coincid, iar dacă acest raport este negativ, atunci semidreptele $|OM$, $|OM'$ sînt opuse.

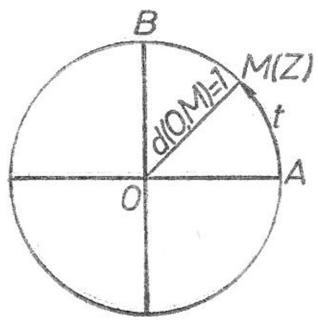


Fig. IV.10

Dacă $\arg (z/z') < \pi$, atunci măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOM'}$ este egală cu $\arg(z/z')$.

Dacă punctele M, M' au afixele z și z', atunci $d(M, M') = |z - z'|$.

Fie M, M' și P punctele de afixe z, z' și $z + z'$. Avem

$$d(M', P) = |z| = d(O, M), \ |z'| = d(O, M'),$$
$$|z + z'| = d(O, P).$$

Egalitatea

(1) $$|z + z'| = |z| + |z'|$$

este deci echivalentă cu relația

$$d(O, P) = d(O, M') + d(M', P).$$

care are loc numai dacă $M' \in |OP|$. În acest caz, punctele O, M, M', P sînt coliniare. Rezultă că egalitatea (1) este echivalentă cu relația

$$M' \in |OM.$$

În mod asemănător se arată că egalitatea

$$|z - z'| = |z| + |z'|$$

este echivalentă cu relația

$$O \in |MM'|.$$

Aplicații
(pentru cercuri)

Dacă avem două puncte P și Q de afixe p respectiv q, avem

(1) $$\cos \widehat{POQ} = \cos\arg \frac{p}{q} = \cos(\arg p - \arg q) = \cos(\arg q - \arg p),$$

deoarece măsura în radiani a unghiului $\widehat{POQ}$ este egală cu cel mai mic dintre numerele $\arg(p/q)$, $2\pi - \arg(p/q)$ și aceste numere au același cosinus (fig. IV.11). Avem de asemenea

$$\sin \widehat{POQ} = \pm \sin(\arg p - \arg q).$$

Fie m, p, q afixele a trei puncte distincte M, P, Q din planul p și fie P', Q' punctele de afixe $p - m$, respectiv $q - m$. Avem atunci (fig. IV.12)

(2) $$\widehat{PMQ} \equiv \widehat{P'OQ'}, \ \cos \widehat{PMQ} = \cos \widehat{P'OQ'} = \cos\arg \frac{p - m}{q - m}, \ \sin \widehat{PMQ} =$$
$$= \pm \sin\arg \frac{p - m}{q - m}.$$

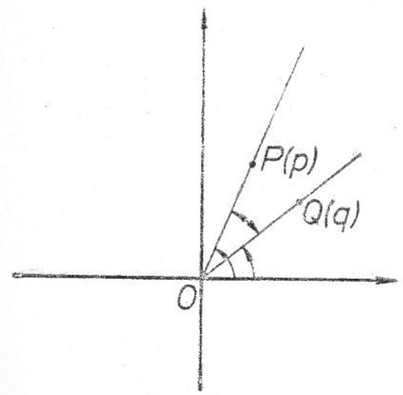


Fig. IV. 11

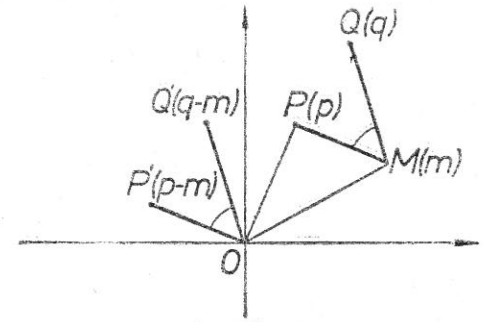


Fig. IV. 12

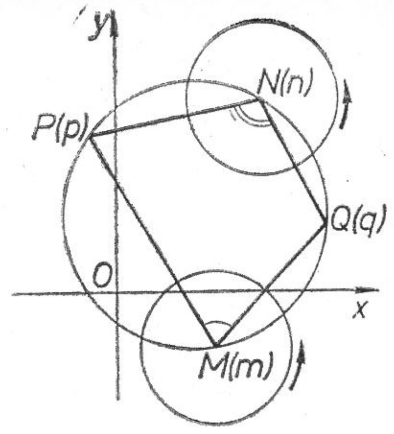


Fig. IV. 13

Din această formulă putem deduce condiția pe care trebuie s-o satisfacă afixele a patru puncte M, P, N, Q, pentru ca figura $MPNQ$ să fie un patrulater inscriptibil. Într-adevăr, pentru ca $MPNQ$ să fie un patrulater inscriptibil, trebuie și este suficient să avem (fig. IV.13).

$$\text{măs}\,\widehat{PMQ} = \pi - \text{măs}\,\widehat{PNQ}$$

sau

$$(3)\quad \cos\widehat{PMQ} = -\cos\widehat{PNQ},\ \sin\widehat{PMQ} = \sin\widehat{PNQ}.$$

Dacă notăm prin m, n, p, q afixele punctelor M, N, P, Q, din egalitățile (2) și (3) deducem (fig. IV.13)

$$(4)\quad \operatorname{cosarg}\frac{p-m}{q-m} = -\operatorname{cosarg}\frac{p-n}{q-n},\ -\operatorname{sinarg}\frac{p-m}{q-m} = \operatorname{sinarg}\frac{p-n}{q-n}.$$

Dacă notăm prin u și v rapoartele

$$u = \frac{p-m}{q-m},\quad v = \frac{p-n}{q-n},$$

atunci condițiile (4) devin

$$(5)\quad \operatorname{cosarg} u = -\operatorname{cosarg} v,\quad -\operatorname{sinarg} u = \operatorname{sinarg} v.$$

Ultimele formule arată că punctele U, V, avînd afixele u și v, sînt situate pe două semidrepte $|OU$, $|OV$ situate în prelungire, deci astfel încît avem $O \in |UV|$ (fig. IV.14). Aceasta înseamnă că diferența $\arg u - \arg v$ este egală cu π sau cu $-\pi$ și că $\left|\arg \frac{u}{v}\right| = \pi$; rezultă că $\frac{u}{v}$ trebuie să fie un număr real negativ. Reciproc, dacă raportul $\frac{u}{v}$ este un număr real negativ, atunci relațiile (5) și deci și (4) sînt verificate și punctele M, N, P, Q formează un patrulater inscriptibil $MPNQ$. Deci:

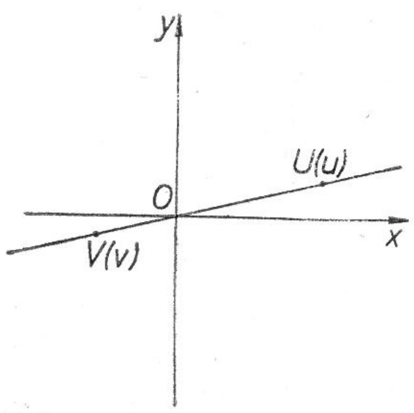


Fig. IV. 14

Condiția necesară și suficientă ca figura **MPNQ** *să fie un patrulater inscriptibil este ca afixele punctelor* **M, P, N, Q** *să verifice condiția*

$$(6)\quad \frac{p-m}{q-m} : \frac{p-n}{q-n} < 0.$$

Condiția (6) mai poate fi scrisă sub forma

$$(7)\quad (q-n)(p-m) = r(q-m)(n-p),\qquad r \in \mathbb{R},\ r > 0.$$

Formulele (7) arată că punctele E și F, de afixe $(q-n)(p-m)$ respectiv $(q-m)(n-p)$, sînt situate pe o aceeași semidreaptă cu originea O, deci că avem $|OE = |OF$. Punctul G, de afix $(q-n)(p-m) + (q-m)(n-p) = -(q-p)(m-n)$, se va găsi pe aceeași semidreaptă și vom avea

$$d(O, G) = d(O, E) + d(O, F).$$

Rezultă că dacă relația (6) este verificată, deci *dacă $MPNQ$ este un patrulater inscriptibil, atunci avem*

$$|q-p| \cdot |m-n| = |q-n| \cdot |p-m| + |q-m| \cdot |n-p|$$

sau

$$(8)\quad d(P, Q)\, d(M, N) = d(N, Q)\, d(M, P) + d(M, Q)\, d(N, P).$$

Formula (8) este o relație verificată de diagonalele $|PQ|$, $|MN|$ și de laturile $|NQ|$, $|QM|$, $|MP|$, $|PN|$ ale unui patrulater inscriptibil oarecare $MPNQ$. Această formulă a fost descoperită de *Ptolomeu*.

Exercițiu. Să se arate că dacă patru puncte distincte M, N, P, Q au afixele m, n, p, q atunci o condiție necesară și suficientă ca cele patru puncte să fie coliniare sau conciclice este ca biraportul

$$\frac{m-p}{n-p} : \frac{m-q}{n-q}$$

să fie un număr real. Dacă figura $QNPM$ este un patrulater inscriptibil, atunci biraportul precedent este un număr real negativ.

Aplicație.

T e o r e m a l u i P o m p e i u. **Fie** Q, M, N, P **patru puncte în planul** p **și fie** q, m, n, p **afixele acestor puncte.** Avem identitatea

$$(1)\quad (q-m)(n-p) + (q-n)(p-m) + (q-p)(m-n) = 0.$$

Să notăm

$$(2)\quad a = (q-m)(n-p),\ b = (q-n)(p-m),\ c = (q-p)(m-n).$$

Avem atunci

$$a + b + c = 0.$$

Fie E, F, O punctele de afixe a, respectiv $a + b$ și $a + b + c = 0$. Dacă punctele O, E, F nu sînt coliniare, atunci ele formează un triunghi, avînd lungimile laturilor egale cu modulele numerelor a, b, c (fig. IV.15). Dacă O, E, F sînt coliniare, spunem că ele formează un *triunghi degenerat*.

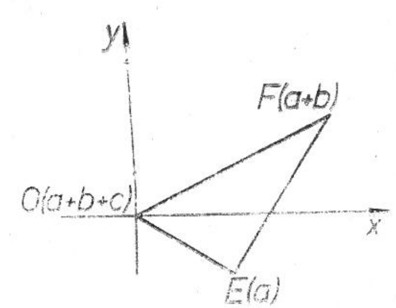


Fig. IV. 15

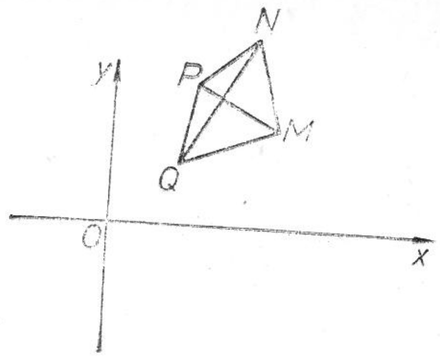


Fig. IV. 16

Din relațiile (2) rezultă că avem

(3) $|a| = d(Q, M)\, d(N, P), |b| = d(Q, N)\, d(M, P), |c| = d(Q, P)\, d(M, N)$.

Am demonstrat următoarea (fig. IV.16)

T e o r e m ă. Dacă avem un punct Q în planul unui triunghi MNP, atunci produsele dintre distanțele de la Q la vîrfurile triunghiului MNP cu lungimile laturilor opuse acestor vîrfuri sînt egale cu lungimile laturilor unui nou triunghi, eventual degenerat.

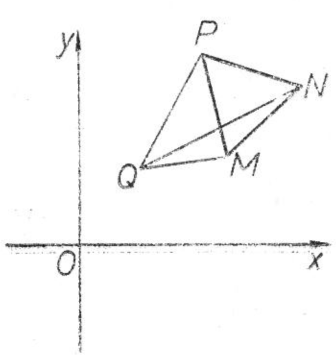


Fig. IV.17

În particular, dacă triunghiul MNP este echilateral, deci dacă (fig. IV.17)

$$d(M, N) = d(N, P) = d(M, P),$$

atunci numerele $|a|, |b|, |c|$ sînt proporționale cu distanțele de la punctul Q la vîrfurile triunghiului MNP.

T e o r e m a l u i P o m p e i u. Distanțele de la un punct din planul unui triunghi echilateral, la vîrfurile acelui triunghi, sînt egale cu lungimile laturilor unui alt triunghi, care poate fi eventual degenerat.

Capitolul V

Geometrie euclidiană în spațiu

1. Geometrie experimentală și geometrie abstractă

Așa cum s-a arătat în clasa a IX-a, geometria a apărut ca știință experimentală cu mai mult de 4 000 de ani în urmă. După acumularea unui mare număr de proprietăți geometrice legate de distanțe, segmente, rapoarte de segmente, arii sau volume și de unghiuri, oamenii de știință ai antichității, începînd cu matematicienii și filozofii greci, au pus problema construirii unei discipline abstracte, care să aibă la bază un sistem de noțiuni legate de anumite obiecte din spațiul fizic și de proprietăți ale acestor obiecte, stabilite pe baza unui mare număr de experiențe, și care să se dezvolte apoi pe baza unor reguli de gîndire incontestabile. În acest fel, a apărut simultan geometria euclidiană, aritmetica și logica, întemeietorii acestor științe fiind Thales, Pitagora, Eudoxus, Teetet, Platon, Aristotel, Euclid, Arhimede și Apollonius.

În mod paradoxal, după elaborarea acestor științe, pe care le-au îmbogățit cu rezultate și metode de demonstrații care uimesc și astăzi pe cei care studiază Știința antichității, ei au abandonat izvorul experimental care i-a inspirat, aderînd la punctul de vedere al lui Aristotel, care susținea că Universul în care trăim este alcătuit dintr-un sistem finit de sfere concentrice de cristal, pe care sînt așezați aștrii de pe bolta cerească.

Concepția lui Aristotel a dominat gîndirea științifică multe sute de ani, pînă cînd un savant italian, Galileo Galilei, și un învățat englez, Isaac Newton, au pus bazele unei noi teorii a Universului. Potrivit acestei teorii, există un spațiu absolut cu trei dimensiuni, care conține toate corpurile din Univers și în care aceste corpuri se deplasează conform unor legi generale. Una din aceste legi afirmă că, dacă un corp material este izolat de toate celelalte corpuri, sau dacă este suficient de depărtat de acestea pentru ca el să nu sufere nici o influență, atunci acel corp se va deplasa, în spațiul absolut, în linie dreaptă, cu o viteză constantă.

Galilei și Newton au admis că liniile drepte și distanțele în spațiul absolut au proprietățile cuprinse în Geometria lui Euclid și au formulat legile fizice descoperite de ei, folosind noțiunile și proprietățile acestei geometrii. Lucrarea fundamentală a lui Newton, intitulată „Philosophiae naturalis principia mathematica", apărută în anul 1686 (tradusă în limba română în anul 1956 de V. Marian, sub titlul „Principiile matematice ale filozofiei naturale", Ed. Academiei R.P.R.), poate fi considerată ca o continuare a cărților lui Euclid, datorită asemănării în ce privește modul de înlănțuire a definițiilor, postulatelor și propozițiilor și modul de prezentare a demonstrațiilor.

Spațiul absolut al lui Newton a stat la baza întregii fizici clasice, pînă la începutul secolului nostru; dar după descoperirea particulelor care intră în componența atomilor (electroni, protoni, neutroni) și a unor noi galaxii în Univers, care au pus în evidență proprietăți neașteptate și imposibil de formulat cu ajutorul noțiunilor clasice, s-a pus problema reexaminării ipotezelor care stăteau la baza Științei clasice, și în particular a Geometriei.

Această reexaminare a avut rezultate importante pe două direcții: Pe de o parte, s-au cristalizat ipotezele care stau la baza geometriei euclidiene. Rolul principal în această direcție a fost îndeplinit de David Hilbert, prin lucrarea sa „Grundlagen der Geometrie" (Bazele geometriei), apărută în 12 ediții, începînd din anul 1899. În această lucrare, Hilbert arată că întreaga geometrie euclidiană poate fi construită plecînd de la trei noțiuni fundamentale, ce nu se definesc (puncte, drepte și plane) și de la trei relații fundamentale (de incidență, de ordine și de congruență) și admițînd un sistem de 20 de axiome, care leagă între ele noțiunile și relațiile fundamentale. În paralel s-a dezvoltat Teoria mulțimilor și Logica matematică, care au permis construcția pe baze riguroase a unor noi geometrii, care au cuprins geometriile neeuclidiene ale lui Bolyai și Lobacevski și pe cea a lui Riemann, apoi geometriile proiective, geometria spațiilor Riemann și multe altele.

Toate aceste descoperiri și elaborări au intrat rapid în gîndirea și limbajul fizicienilor acestui secol, dornici a găsi geometria cea mai apropiată de structura spațiului fizic. Drept urmare, au apărut numeroase lucrări, din cele mai îndrăznețe, care au avut ca rezultat o îmbinare a geometriei cu fizica, asemănătoare celeia din vremea lui Galilei și Newton, dar îmbrățișînd o gamă de noțiuni, fenomene și modele mult lărgită. Din aceste realizări și ipoteze, știința viitorului va păstra desigur o mare parte, dar va da uitării o altă parte.

Cum trebuie instruit omul modern, viitor om de știință sau tehnician, pentru a se putea înscrie pe linia realizărilor durabile? Pentru aceasta, este necesară o cultură vastă, încadrată într-o gîndire logică.

În ce privește studiul geometriei, cunoașterea temeinică a geometriei euclidiene, care rămîne model de comparație pentru orice altă geometrie și cadru natural pentru multe ramuri ale Științei și Tehnicii moderne, este o necesitate. Cunoașterea geometriei euclidiene înseamnă cunoașterea ipotezelor care stau la baza acestei discipline, apoi cunoașterea celor mai importante teoreme ce pot fi demonstrate pe baza ipotezelor admise, precum și a limitelor în care aceste teoreme pot fi verificate experimental, sau în care aceste teoreme pot fi admise în activitatea practică.

Manualul de față caută să răspundă la primele aspecte. În ce privește limitele validității experimentale, elevii vor primi informațiile corespunzătoare urmărind celelalte manuale consacrate științelor naturii.

Lucrări practice

1. Fixați pe o foaie de hîrtie două puncte A, B. Trasați segmentul $|AB|$. Măsurați cu ajutorul unei rigle gradate lungimea segmentului $|AB|$. Prelungiți segmentul $|AB|$ dincolo de B cu un segment de 1 cm și dincolo de A cu un segment de 5 cm.

2. Desenați două drepte și indicați punctul lor de intersecție.

3. Uniți două puncte alese la întîmplare pe o foaie de hîrtie printr-o linie oarecare și așezați o ață astfel încît să se suprapună pe acea linie. Măsurați lungimea aței și apoi lungimea segmentului definit de cele două puncte. Care dintre cele două lungimi este mai mare?

4. Desenați zece segmente $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DE|$, $|EF|$, $|FG|$, $|GH|$, $|HI|$, $|IJ|$, $|JK|$ astfel încît extremitățile lor să fie puncte coliniare și ordinea lor pe dreapta care le conține să coincidă cu ordinea alfabetică a literelor care le desemnează. Măsurați lungimile fiecăruia din cele zece segmente, calculați suma acestor zece lungimi și comparați cu lungimea segmentului $|AK|$. Explicați rezultatul.

5. Desenați segmente de 2,3 cm; 7,1 cm; 9,2 cm. Construiți segmente care să reprezinte suma celor trei segmente construite.

6. Construiți un segment a de 8,8 cm și un segment b de 6,9 cm. Construiți apoi un segment congurent cu segmentul $a - b$.

7. Construiți la întîmplare un segment a și construiți apoi segmente congruente cu $3a$, $4{,}5\ a$, $a/5$, $a/7$, $a/10$.

8. Care este raportul segmentelor a, b, știind că a are 4,8 cm, iar b 1,2 cm?

9. Construiți cercuri de raze de 1 cm, de 3,5 cm, de 10 cm și de 15 cm. Indicați pentru fiecare din cercurile construite cîte un punct interior și cîte un punct exterior.

10. Fixați pe o hîrtie un punct A și arătați care este locul geometric al punctelor care au distanța la A egală cu 1 (cm).

11. Desenați pe două foi de hîrtie două cercuri avînd razele de 1 cm. Încercați apoi să suprapuneți cele două cercuri unul peste celălalt.

12. Trasați două corzi paralele $|AB|$, $|A'B'|$ într-un cerc C. Rotind apoi cercul C în jurul centrului său, arătați că putem suprapune arcul $\widehat{B'B}$ peste arcul $\widehat{AA'}$.

13. Construiți într-un cerc avînd raza de 1 cm o coardă de 1,5 cm.

14. Indicați la întîmplare un arc $\widehat{AB}$ pe un cerc K și construiți apoi un arc de lungime dublă, în același cerc.

15. Construiți un cerc la întîmplare. Fixînd apoi un punct A pe acest cerc, construiți un triunghi echilateral, un pătrat și un pentagon regulat, astfel ca aceste poligoane să aibă toate vîrfurile pe cercul construit la început și astfel ca A să fie vîrf comun.

16. Construiți un triunghi echilateral avînd laturile de lungime 3 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi.

17. Construiți un triunghi cu laturile de 1,5 cm, 2 cm și 2,5 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi.

18. Construiți un triunghi cu laturile de 9 cm, 10 cm și 11 cm. Măsurați unghiurile acestui triunghi. Trasați apoi medianele și bisectoarele aceluiași triunghi.

19. Confecționați un disc circular din carton astfel ca raza discului să fie de 10 cm. Rostogoliți apoi discul pe masă, astfel încît să urmeze o linie dreaptă, fără să alunece. Marcînd un punct pe disc, notați pe linia dreaptă două poziții succesive ocupate de punctul marcat pe cerc.

20. Cîte rotații complete va face discul de la lucrarea 19, dacă discul parcurge pe linia dreaptă un segment de 3 m?

21. Tulpina unui copac poate fi înfășurată cu o sfoară lungă de 3 m, dar nu poate fi înfășurată cu o sfoară mai scurtă. Care este diametrul acelui copac în porțiunea lui cea mai subțire?

22. Construiți un dreptunghi $ABCD$ dintr-un material nedeformabil și trasați axele lui de simetrie. Rotiți apoi aceste dreptunghi în jurul uneia din axe. Ce descriu laturile dreptunghiului în timpul unei rotații complete?

23. Rotiți un disc circular în jurul unui diametru al său. Ce descrie marginea discului în timpul unei rotații complete? Dar după o rotație de 180°?

24. Introduceți un tetraedru regulat cu muchiile de 10 cm într-un vas cu apă gradat. Măsurați volumul tetraedrului urmărind pe gradație cu cît s-a ridicat nivelul apei.

25. Repetați experiența, considerînd în locul tetraedrului o minge de rază cunoscută, apoi un con circular drept și un cilindru. Verificați în fiecare caz formulele cunoscute, care dau volumele acestor corpuri.

26. Construiți din carton 20 triunghiuri echilaterale cu laturile de lungime de 3 cm. Alcătuiți cu aceste triunghiuri un tetraedru, apoi un octaedru și un icosaedru, luînd patru, respectiv opt și 20 de triunghiuri și lipindu-le după laturi, astfel ca fiecare triunghi să fie vecin cu exact alte trei triunghiuri.

27. Construiți din carton un cub, apoi o piramidă pentagonală și o prismă patrulateră. Calculați apoi volumele acestor corpuri folosind metoda indicată mai sus, deci folosind un vas cu apă.

28. Construiți din carton un unghi diedru de 45°, apoi unul de 30° și unul de 60°. Indicați în fiecare caz unghiuri plane care reprezintă unghiurile diedre construite.

29. Confecționați din sîrmă de oțel opt vergele rectilinii și notați aceste vergele prin a, b, c, d, a', b', c' și d'. Fixați într-un fel vergelele $a, b, c,$ apoi vergelele a', b', c' astfel ca ultimele trei să se sprijine pe fiecare din primele trei. Așezați apoi vergelele d, d' astfel ca d să se sprijine pe a', b' și c', iar d' să se sprijine pe a, b, c. Ce se poate spune despre vergelele d și d'?

30. Într-un vas de formă cubică înalt de 1 m introduceți un număr cît mai mare de mingi de diametru de 30 cm, astfel ca vasul să poată fi acoperit, fără a presa mingile. Cîte mingi ați putut introduce?

31. Cu ajutorul unor plăci de traforaj și a unor vergele de sîrmă confecționați două linii drepte perpendiculare, o linie perpendiculară pe un plan și două plane perpendiculare. Puneți în evidență trei plane perpendiculare două cîte două.

32. Realizați un model care să conțină o linie dreaptă d, care face un unghi de 30° cu un plan. Arătați apoi o dreaptă în acel plan, care să facă un unghi de 60° cu linia dreaptă d.

33. Construiți un triunghi la intimplare și calculați suma unghiurilor sale.

34. Pămîntul se rotește în jurul axei sale, efectuînd o rotație completă în 24 ore. Cu ce unghi se rotește Pămîntul într-o oră, admițînd că viteza de rotație este constantă?

R: $360^0 : 24 = 15°$.

35. Care este lungimea unui arc de meridian terestru de 1°, știind că lungimea unui cerc meridian întreg este de 4 0000000 m.

R: 111,111 km.

36. Care este lungimea unui arc de meridian de 1'?

R: 1852 m (mila marină)

37. Să se calculeze suprafața și volumul globului terestru, admițînd că acesta este o sferă de rază 6378164 m (raza Ecuatorului) sau de rază 6356780 m (raza unui meridian).

38. Să se calculeze viteza medie cu care se deplasează Pămîntul pe orbita sa, admițînd că el parcurge, în 365 zile, 5 ore, 48 minute și 46 secunde, o orbită circulară cu raza de 149598500 km.

2. Axiomele de incidență

Se presupune că punctele formează o mulțime S, numită *spațiu*. Dreptele și planele sînt submulțimi particulare ale mulțimii S și aceste submulțimi au următoarele proprietăți:

I.1. **Prin orice două puncte trece o dreaptă.**

I.2. **Prin orice două puncte distincte trece o singură dreaptă.**

I.3. **Orice dreaptă conține cel puțin două puncte. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare. Există cel puțin un plan.**

I.4. **Prin orice trei puncte necoliniare trece un plan.**

I.5. **Prin orice trei puncte necoliniare trece un singur plan.**

I.6. **Dacă o dreaptă d are două puncte distincte situate într-un plan p, atunci toate punctele dreptei d sînt situate în planul p.**

I.7. **Dacă două plane au un punct comun, atunci cele două plane mai au cel puțin un al doilea punct comun.**

I.8. **Există patru puncte nesituate într-un același plan.**

Exerciții

1. Să se arate că dacă o dreaptă d nu este conținută într-un plan p, atunci intersecția $d \cap p$ este fie mulțimea vidă, fie este formată dintr-un singur punct.

2. Să se arate că dacă p, p' sînt două plane distincte, atunci intersecția $p \cap p'$ este fie mulțimea vidă, fie este o dreaptă.

3. Să se arate că dacă d este dreaptă, atunci există cel puțin un punct nesituat pe această dreaptă.

4. Să se arate că dacă p este un plan, atunci există cel puțin un punct nesituat în planul p.

5. Să se arate că dacă d este o dreaptă și dacă A este un punct nesituat pe d, atunci există un plan și unul singur care conține dreapta d și punctul A.

6. Să se arate că dacă dreptele d, d' au un punct comun, atunci există un plan p, care să conțină aceste drepte. Planul p este unic, dacă dreptele d, d' sînt distincte.

7. Fie p, p', p'' trei plane astfel ca intersecția $p \cap p' \cap p''$ să conțină un singur punct. Să se arate că fiecare din intersecțiile $p \cap p'$, $p \cap p''$, $p' \cap p''$ este o dreaptă și că dreptele date de aceste intersecții sînt concurente, dar necoplanare.

8. Fie M o mulţime de drepte, astfel ca orice două drepte din mulţimea M să aibă intersecţia nevidă, dar oricare trei din aceste drepte să aibă intersecţia vidă. Să se arate că există un plan care conţine toate dreptele mulţimii M.

9. Fie M o mulţime de drepte, astfel ca oricare două drepte din mulţimea M să aibă intersecţia nevidă şi astfel ca să nu existe niciun plan care să conţină toate dreptele mulţimii M. Să se arate că există un punct care aparţine fiecărei drepte din mulţimea M.

10. Să se arate că există patru plane, astfel ca intersecţiile acestor plane, luate cîte două, să fie drepte, intersecţiile acestor plane luate trei cîte trei să fie formate din cîte un punct, iar intersecţia celor patru plane să fie mulţimea vidă. Care este numărul dreptelor şi care este numărul punctelor date de intersecţiile considerate?

Indicaţie. Se consideră patru puncte necoplanare. Fiecare trei din aceste puncte va determina un plan şi se obţin astfel patru plane avînd proprietăţile cerute.

3. Axiomele de ordonare

II.1. **Dacă un punct B se găseşte între punctele A şi C, atunci punctele A, B, C sînt coliniare şi distincte şi punctul B se găseşte între C şi A.**

II.2. **Fiind date două puncte distincte A, B există un punct C astfel încît B să se găsească între A şi C.**

II.3. **Fiind date trei puncte coliniare şi distincte A, B, C astfel încît B se află între A şi C, A nu se poate afla între B şi C, iar C nu se poate afla între A şi B.**

II.4. **(Axioma lui Pasch). Fiind date, într-un acelaşi plan, trei puncte necoliniare A, B, C şi o dreaptă d, astfel ca d să treacă printr-un punct situat între B şi C, dar d să nu treacă prin nici unul din punctele A, B, C, dreapta d va trece fie printr-un punct situat între A şi B, fie printr-un punct situat între A şi C.**

Reamintim că, fiind date două puncte distincte A, B, am notat prin $|AB|$ mulţimea punctelor situate între A şi B şi că am numit această mulţime: *segmentul* deschis de extremităţi A, B. Avem $|AB| = |BA| \subset AB$.

A p l i c a ţ i e. Fie A, B, C trei puncte necoliniare şi fie $M \in |AC|$, $N \in |AB|$. Să se arate că segmentele $|BM|$ şi $|CN|$ au un punct comun.

Soluţie. Aplicînd axioma lui Pasch triunghiului ABM şi secantei CN, obţinem un punct $P \in CN \cap |BM|$, deoarece dreapta CN intersectează latura $|AB|$, dar nu intersectează latura $|AM|$. Aplicînd apoi aceeaşi axiomă triunghiului ACN şi secantei BM, deducem că există un punct $Q \in BM \cap |CN|$. Avem $P \in CN \cap BM$, $Q \in CN \cap BM$. Dar dreptele BM, CN sînt distincte, deci ele au un singur punct comun. Rezultă $Q = P$ şi atunci $P \in |BM| \cap |CN|$.

Exerciţii

1. Dacă A, B, C sînt trei puncte coliniare şi distincte, astfel încît A nu este între B şi C, iar C nu este între A şi B, cu siguranţă B va fi între A şi C.

(Indicaţie. Se construiesc punctele E, F, G, H astfel ca $E \notin AB$, $E \in |BF|$, $G \in AE \cap |CF|$, $H \in CE \cap |AF|$ şi se arată că $E \in |AG|$ şi că $B \in |AC|$ (fig. V.1).)

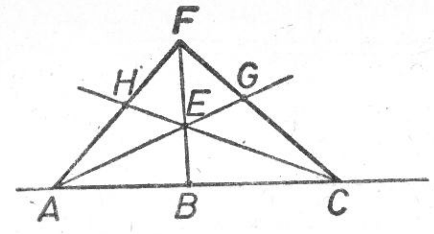


Fig. V.1

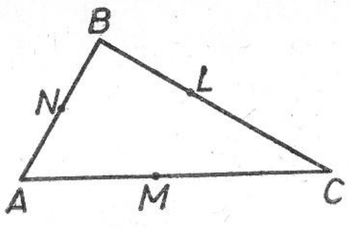


Fig. V.2

2. Fie A, B, C trei puncte necoliniare şi fie punctele $L \in |BC|$, $M \in |AC|$, $N \in |AB|$. Să se arate că L, M, N nu pot fi coliniare.

(Indicaţie. Se presupune că L, M, N ar fi coliniare şi, pentru a fixa ideile, se consideră cazul $M \in |LN|$. Aplicînd axioma lui Pasch triunghiului BLN şi secantei AC, se obţine o contradicţie (fig. V.2).)

3. Dacă A, B sînt două puncte distincte, să se arate că $|AB| \neq \emptyset$.

(Indicaţie. Se construiesc punctele E, F, G astfel ca $E \notin AB, E \in |AF|, B \in |FG|$. Aplicînd axioma lui Pasch, se obţine un punct $P \in |AB| \cap GE$, (fig. V.3).)

4. Să se demonstreze că relaţiile $B \in |AC|$, $C \in |BD|$ implică $C \in |AD|$ şi $B \in |AD|$, (fig. V.4).

(Indicaţie. Se consideră puncte E, F, G, H astfel ca $E \notin AB, E \in |BF|, G \in AE \cap |FC|, H \in |FC| \cap DE$. Aplicînd axioma lui Pasch, se arată apoi că $E \in |AG|$, $H \in |ED|$ şi $C \in |AD|$. Permutînd A cu D şi B cu C, se obţine $B \in |AD|$).

5. Să se demonstreze că relaţiile $B \in |AC|$, $C \in |AD|$ implică relaţiile $C \in |BD|$ şi $B \in |AD|$.

(Indicaţie. Se consideră puncte E, F, G astfel ca $E \notin AB, E \in |BF|, G \in AE \cap |FC|$, se arată că $E \in |AG|$, apoi se consideră $H \in DE \cap |FC|$ şi se arată că $C \in |BD|$. Comparînd cu $B \in |AC|$ şi aplicînd implicaţia precedentă, se obţine $B \in |AD|$, (fig. V.4).)

6. Să se arate că relaţiile $B \in |AC|$, $B \in |AD|$ implică $A \notin |CD|$, $B \notin |CD|$.

(Indicaţie. Prin reducere la absurd, utilizînd implicaţiile 4,5.)

7. Fie A, O, B trei puncte pe o dreaptă d, astfel ca $O \in |AB|$. Notăm $d' = \{P \in d;\ O \in |BP|\}$, $d'' = \{Q \in d;\ O \in |AQ|\}$.

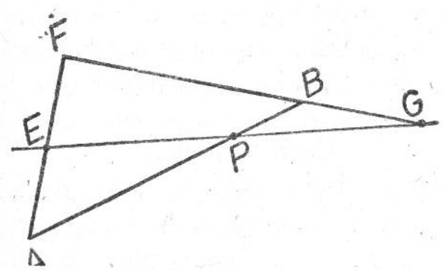


Fig. V.3

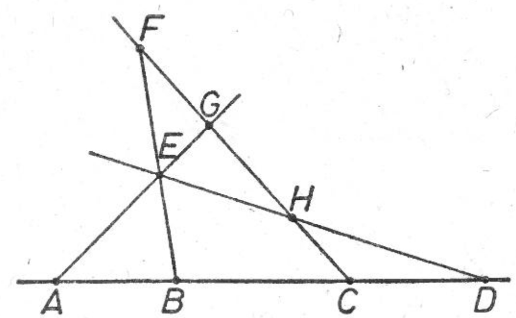


Fig. V.4

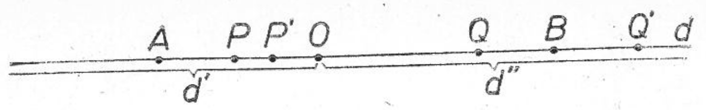


Fig. V.5

Să se arate că relațiile $P \in d'$, $P' \in d'$, $Q \in d''$, $Q' \in d''$ implică

$$O \notin |PP'|,\ O \notin |QQ'|,\ O \in |PQ|, \text{ (fig. V.5).}$$

Reamintim că mulțimile d', d'' constituie semidreptele limitate de punctul O pe dreapta d. Notații: $d' = |OA$, $d'' = |OB$.

8. Păstrînd notațiile de la ex. 7, să se arate că

$$A \in d',\ B \in d'',\ d' \cap d'' = \varnothing,\ d' \cup d'' = d - \{O\}.$$

9. Fie d o dreaptă conținută în planul p. Fie punctele $A \notin d$, $O \in d$, $B \in p$ astfel ca $O \in |AB|$. Considerăm mulțimile (fig. V.6)

$$p' = \{P \in p;\ |BP| \cap d \neq \varnothing\},\ p'' = \{Q \in p;\ |AQ| \cap d \neq \varnothing\}.$$

Să se arate că $A \in p'$, $B \in p''$, $p' \cap p'' = \varnothing$, $p' \cup p'' = p - d$ și că relațiile $P \in p'$, $P' \in p'$, $Q \in p''$, $Q' \in p''$ implică $|PP'| \cap d = \varnothing$, $|QQ'| \cap d = \varnothing$ și $|PQ| \cap d \neq \varnothing$.

Reamintim că mulțimile p', p'' sînt semiplanele limitate de dreapta d în planul p. Notații: $p' = |dA$, $p'' = |dB$.

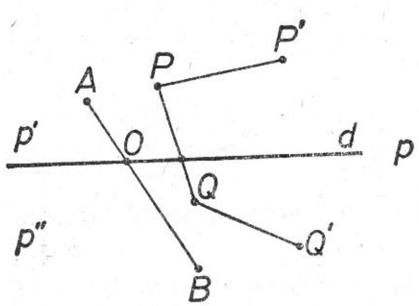


Fig. V.6

4. Semispații

Fie p un plan și fie punctele $O \in p$, $A \notin p$ și B, astfel ca $O \in |AB|$. Considerăm mulțimile (fig. V.7):

$$(1)\quad S' = \{P \in S;\ |BP| \cap p \neq \varnothing\},\quad S'' = \{Q \in S;\ |AQ| \cap p \neq \varnothing\}.$$

Reamintim că S este *spațiul*, deci mulțimea tuturor punctelor luate în considerare. Mulțimile S', S'' vor fi numite *semispațiile* limitate de planul p. Semispațiile S', S'' au proprietăți analoage semidreptelor și semiplanelor. Mai precis, avem următoarea

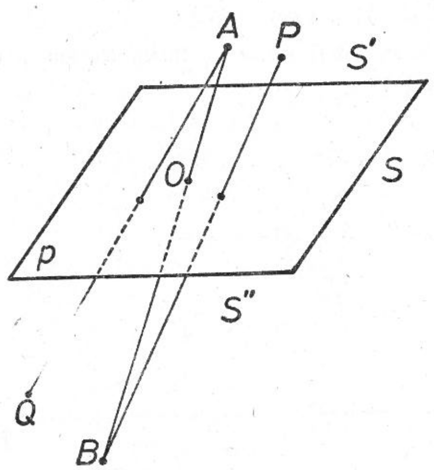


Fig. V.7

T e o r e m ă. Mulțimile S', S'' definite de formulele (1) au următoarele proprietăți:

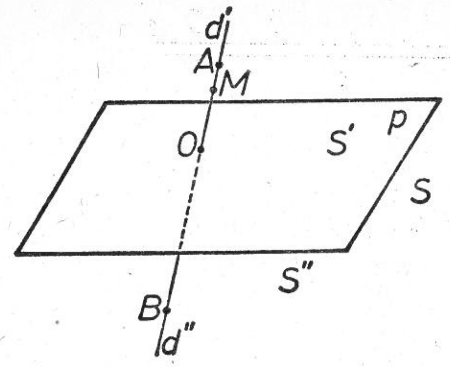


Fig. V.8

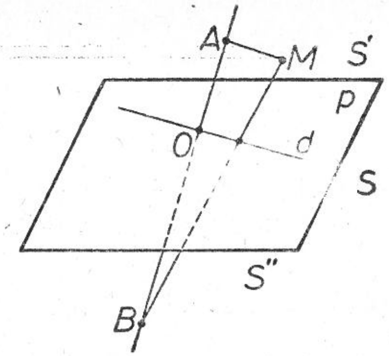


Fig. V.9

1. $S = S' \cup S'' \cup p$, $S' \cap S'' = \varnothing$, $p \cap S' = \varnothing$ $p \cap S'' = \varnothing$.

2. **Dacă** $M \in S'$, $M' \in S'$, $N \in S''$, $N' \in S''$, **atunci**

$$|MM'| \cap p = |NN'| \cap p = \varnothing,\ |MN| \cap p \neq \varnothing.$$

*Demonstrație**. 1. Fie M un punct exterior planului p. Dacă $M \in AB$, (fig. V.8), și dacă notăm $d' = |OA$, $d'' = |OB$, avem $AB = d' \cup d'' \cup \{O\}$, $M \neq O$, deci $M \in d'$ sau $M \in d''$; în primul caz, $O \in |BM|$ și deci $M \in S'$. Dacă $M \in d''$, vom avea $O \in |AM|$ și deci $M \in S''$. Rezultă relația

$$(2)\qquad AB \cap (S - p) \subset S' \cup S''.$$

Dacă $M \notin AB$ (fig. V.9), punctele A, B, M aparțin unui plan q, care conține și punctul $O \in AB \cap p$. Avem $A \notin p$, deci $p \neq q$. Comparînd cu $O \in p \cup q$, deducem că planele p, q au ca intersecție o dreaptă d astfel ca $O \in d$.

Dreapta d nu trece prin nici unul din vîrfurile triunghiului ABM și trece prin punctul O, care aparține laturii $|AB|$. Din axioma lui Pasch rezultă că dreapta d intersectează una din laturile $|AM|$, $|BM|$. Dacă d intersectează latura $|AM|$, avem $M \in S''$, iar dacă d intersectează latura $|BM|$, avem $M \in S'$. Deci orice punct $M \in S - p$ se găsește în una din submulțimile S', S''. Prin urmare, avem $S - p \subset S' \cup S''$. Din faptul că dreapta d nu poate intersecta simultan toate laturile triunghiului ABM, rezultă că $S' \cap S'' = \varnothing$. În acest fel, am demonstrat relațiile de la punctul 1.

2. Fie M, M' două puncte din S'. Dacă $B \notin MM'$, punctele B, M, M' formează un triunghi BMM' și aparțin unui plan unic q, astfel ca intersecția $p \cap q$ este $\varnothing$ sau o dreaptă d (fig. V. 10). În al doilea caz, dreapta d nu trece prin nici unul din punctele B, M, M' și trece prin două puncte situate pe cîte una din laturile $|BM|$, $|BM'|$, deoarece $M \in S'$ și $M' \in S'$. Rezultă că intersecția $|MM'| \cap d$ este vidă. Dar $|MM'| \subset q$, $|MM'| \cap p \subset (q \cap p) = d$, deci $|MM'| \cap p \subset |MM'| \cap d = \varnothing$.

În același mod se arată că, oricare ar fi punctele N, N' din S'' astfel ca $A \notin NN'$, avem $|NN'| \cap p = \varnothing$.

* facultativ

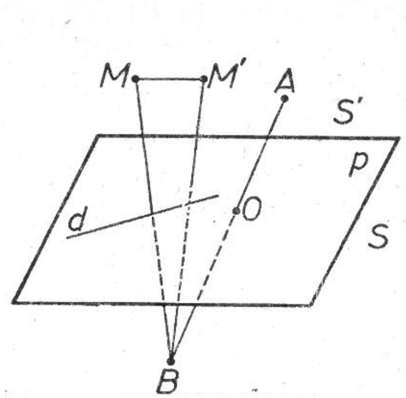


Fig. V.10

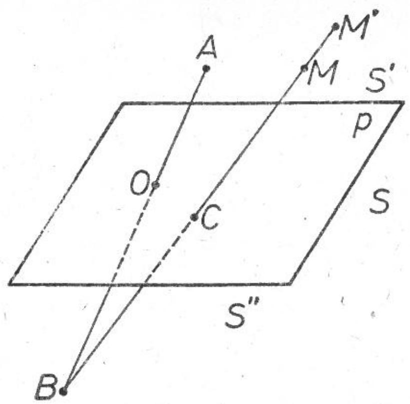


Fig. V.11

Dacă $M \in S'$, $M' \in S'$ și dacă $B \in MM'$, segmentele $|BM|$, $|BM'|$ au un punct comun $C \in p$, deci $C \in |BM|$ și $C \in |BM'|$ (fig. V.11). Rezultă că $C \notin |MM'|$. Atunci din relațiile $MM' \cap p = \{C\}$ rezultă că $|MM'| \cap p = \varnothing$

În același fel se arată că dacă avem două puncte $N \in S''$, $N' \in S''$ astfel ca $A \in NN'$, atunci $|NN'| \cap p = \varnothing$.

Să considerăm acuma două puncte $M \in S'$, $N \in S''$. Trebuie să arătăm că $|MN| \cap p \neq \varnothing$. Sînt posibile mai multe cazuri.

Dacă $M = A$, avem $|MN| \cap p = |AN| \cap p \neq \varnothing$, deoarece $N \in S''$.

Dacă $M \neq A$, punctele A, M, N sînt distincte; dacă $A \in MN$ (fig. V.12) intersecția $AN \cap p$ este formată dintr-un singur punct C și avem $C \in |AN|$, $C \notin |AM|$, deoarece $A \in S'$ și $M \in S'$. Avem deci fie $M \in |AC|$ fie $A \in |MC|$, În fiecare din aceste cazuri, folosind relația $C \in |AN|$, deducem $C \in |MN|$, deci $|MN| \cap p = \{C\} \neq \varnothing$.

Dacă punctele A, M, N sînt necoliniare, (fig. V.13), ele determină un plan q, care are în comun cu planul p punctul $Q \in |AN| \cap p$. Rezultă că intersecția

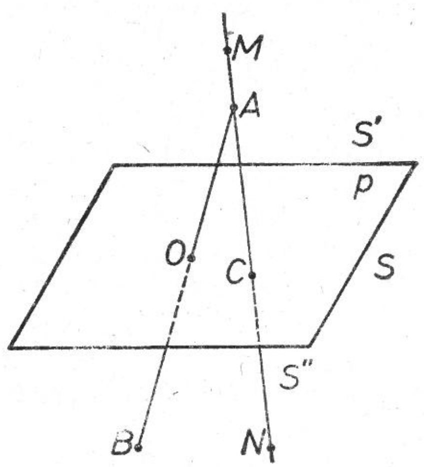


Fig. V.12

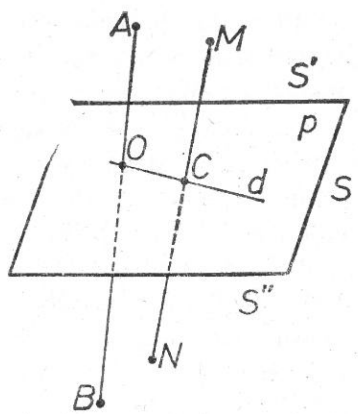


Fig. V.13

planelor p și q este o dreaptă d. Această dreaptă intersectează latura $|AN|$ a triunghiului AMN, dar nu intersectează latura $|AM|$. Din axioma lui Pasch deducem că dreapta d intersectează latura $|MN|$ într-un punct C'. Avem

$$C \in |MN| \cap p, \text{ deci } |MN| \cap p \neq \varnothing.$$

Teorema este astfel demonstrată.

Mulțimile S', S'' vor fi notate $S' = |pA$, $S'' = |pB$. Avem deci

$$A \in |pA,\ B \in |pB,\ S = |pA \cup |pB \cup p,\ |pA \cap |pB = \varnothing.$$

Despre punctele din semispațiul $|pA$ vom spune că se găsesc de aceeași parte cu A față de planul p; în mod analog, semispațiul $|pB$ este format din punctele situate de aceeași parte cu B, față de planul p.

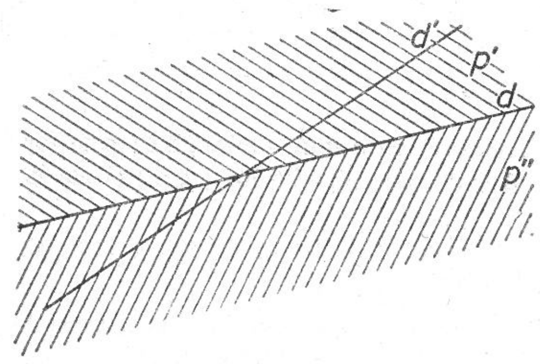


Fig. V.14

Exerciții

1. Fie d, d' două drepte concurente și fie p planul ce conține aceste drepte. Fie apoi p', p'' semiplanele limitate de dreapta d în planul p. Să se arate că intersecțiile $d' \cap p'$, $d' \cap p''$ coincid cu semidreptele limitate pe dreapta d' de punctul de intersecție al dreptelor d, d' (fig. V.14).

2. Fie d o dreaptă și fie p, q două plane astfel ca $d \not\subset q$, $p \neq q$ și intersecțiile $d \cap q$ și $p \cap q$ să fie nevide. Să se arate că: 1) intersecțiile lui d cu semispațiile limitate de planul q sînt semidrepte și 2) intersecțiile lui p cu aceleași semispații sînt semiplane (fig. V.15). De cine sînt limitate aceste semidrepte și aceste semiplane?

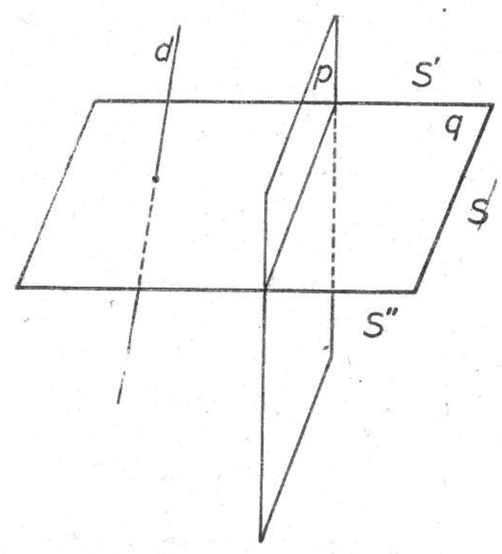


Fig. V.15

3. Fie d o dreaptă și fie p, q două plane astfel ca $d \cap q = \varnothing$ și $p \cap q = \varnothing$. Fie punctele $A \in d$ și $B \in p$. Să se arate că

$$d \subset |qA,\ p \subset |qB.$$

4. Fie $|pA$, $|qB$ două semispații astfel ca $p \neq q$, $|pA \subset |qB$ sau $|pA \cap |qB = \varnothing$. Să se arate că $p \cap q = \varnothing$, (fig. V.16 și V.17).

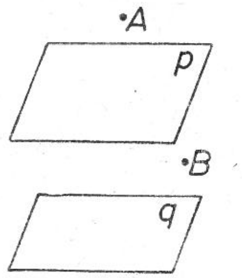
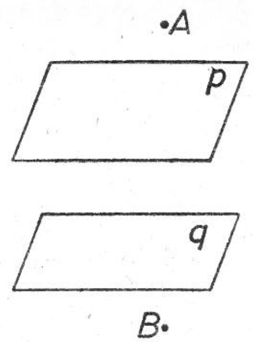


Fig. V.16



ig. V.17

5. Figuri remarcabile în spaţiu

Definiţii.

Dacă A, B sînt puncte distincte, definim *segmentul închis* $[AB]$ prin formula $[AB] = |AB| \cup \{A, B\}$; A, B sînt extremităţile lui $|AB|$ şi ale lui $[AB]$.

Dacă $s = |OA$ este o semidreaptă, definim *semidreapta închisă* $[OA$ prin formula $[OA = |OA \cup \{O\}$; O este originea lui $|OA$ şi a lui $[OA$.

Dacă $|dA$ este un semiplan, definim *semiplanul închis* $[dA$ prin formula $[dA = |dA \cup d$; d este dreapta ce limitează semiplanul $|dA$ sau $[dA$.

Dacă $|pA$ este un semispaţiu limitat de planul p, definim *semispaţiul închis* $[pA$ prin formula $[pA = |pA \cup p$; p va fi planul ce limitează şi semispaţiul închis $[pA$.

Fie p', q' două semiplane limitate de o aceeaşi dreaptă d. Mulţimea $\{p', q'\}$ va fi notată $\widehat{p'q'}$ şi va fi numită *unghiul diedru* definit de semiplanele p', q'. Aceste semiplane vor fi numite *feţele* unghiului diedru, iar dreapta d va fi numită *muchia* unghiului diedru $\widehat{p'q'}$ (fig. V. 18).

Un unghi diedru $\widehat{p'q'}$ va fi numit *unghi diedru nul*, dacă $p' = q'$. Vom spune că unghiul diedru $\widehat{p'q'}$ este *plat*, dacă feţele lui sînt situate într-un acelaşi plan p şi dacă reuniunea $p' \cup q' \cup d$ este egală cu acest plan, d fiind muchea unghiului diedru $\widehat{p'q'}$.

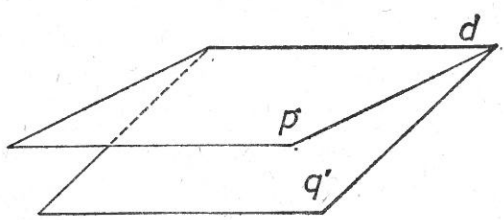


Fig. V.18

Un *unghi diedru propriu* este un unghi diedru, care nu este nici nul nici plat.

Dacă $\widehat{p'q'}$ este un unghi diedru propriu, avînd muchea d şi

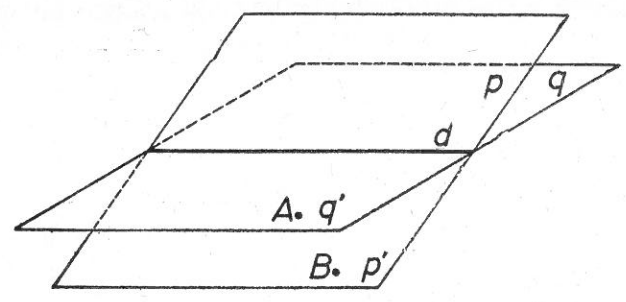


Fig. V.19

dacă p, q sînt planele ce conţin semiplanele p', respectiv q', *interiorul* unghiului diedru $\widehat{p'q'}$ este intersecţia semispaţiului limitat de p, care conţine faţa q', cu semispaţiul care conţine p' şi care este limitat de planul q. Dacă $A \in q'$ şi $B \in p'$ putem scrie (fig. V. 19)

$$\text{Int } \widehat{p'q'} = |pA \cap |qB.$$

Se numeşte *mulţime convexă* în spaţiul S orice mulţime M conţinută în S, care are proprietatea:

$$A \in M, \ B \in M, A \neq B \Rightarrow |AB| \subset M.$$

Exerciţiu. Să se arate că segmentele, segmentele închise, semidreptele, semidreptele închise, semiplanele, semiplanele închise, semispaţiile, semispaţiile închise, interiorul unui unghi diedru propriu şi interiorul unui unghi diedru propriu, la care se adaugă una din feţe sau ambele feţe, sau muchea, sînt mulţimi convexe.

În general, orice intersecţie de mulţimi convexe este o mulţime convexă. De exemplu, dacă M, M' sînt două mulţimi convexe şi dacă A, B sînt două puncte situate şi în M şi în M', atunci vom avea $|AB| \subset M$ şi $|AB| \subset M'$, deci $|AB| \subset M \cap M'$. Aceasta arată că intersecţia $M \cap M'$ este o mulţime convexă.

Să dăm unele exemple.

Fie a, b, c trei semidrepte necoplanare, avînd aceeaşi origine O. Luînd aceste semidrepte în ordinea a, b, c, se obţine un triplet (a, b, c) care va fi numit *unghi triedru* şi va fi notat $\widehat{abc}$. Punctul O va fi numit *vîrful* unghiului triedru $\widehat{abc}$, iar semidreptele a, b, c vor fi numite *muchiile* lui $\widehat{abc}$ (fig. V.20).

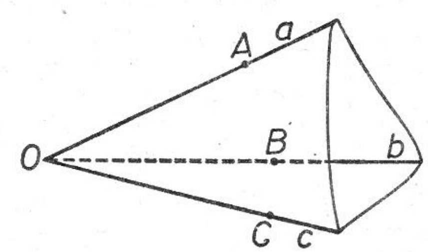


Fig.V.20

Fiind dat unghiul triedru $\widehat{abc}$, să considerăm planele $p = bc$, $q = ca$, $r = ab$, unde bc reprezintă planul ce conţine semidreptele b, c. Dacă alegem punctele

$A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, planul p va fi planul ce conţine punctele O, B, C, q va fi planul ce conţine punctele O, A, C iar r va fi planul ce conţine punctele O, A, B. Putem considera semispaţiile

$$|pA,\ |qB,\ |rC.$$

Intersecţia $|pA \cap |qB \cap |rC$ se numeşte *interiorul* unghiului triedru $\widehat{abc}$. Interioarele unghiurilor $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ vor fi numite *feţele* unghiului triedru $\widehat{abc}$.

Interiorul unui unghi triedru este o mulţime convexă, deoarece este o intersecţie de trei mulţimi convexe.

Exerciţiu. Dacă adăugăm interiorului unui unghi triedru vîrful, una sau mai multe muchii şi una sau mai multe feţe, avînd grijă să adăugăm, odată cu două muchii şi faţa definită de aceste muchii, obţinem alte mulţimi convexe.

Fie p, q două plane *paralele*, adică două plane avînd intersecţia $p \cap q = \varnothing$. Considerăm punctele $A \in p$, $B \in q$ şi semispaţiile $|pB$, $|qA$. Avem $q \subset |pB$ şi $p \subset |qA$. Intersecţia $|pB \cap |qA$ este o mulţime convexă, care va fi numită *zona* limitată de planele paralele p, q.

6. Axiome de congruenţă

Se presupune că anumite perechi de segmente $|AB|$, $|CD|$ sînt legate prin relaţia „$|AB|$ este congruent cu $|CD|$", care corespunde situaţiei intuitive: segmentul $|AB|$ are ac eaşi mărime cu segmentul $|CD|$. Se mai presupune că anumite perechi de unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ se găsesc în relaţia „$\widehat{hk}$ este congruent cu $\widehat{mn}$". Relaţiile de congruenţă ale segmentelor şi unghiurilor au următoarele proprietăţi, care se admit fără demonstraţie.

III.1. **(Axioma purtării congruente a segmentelor.) Fiind date un segment $|AB|$ şi o semidreaptă s cu originea O, există pe s un punct P şi numai unul, astfel ca $|AB| \equiv |OP|$.**

III.2. **Orice segment este congruent cu el însuşi. Dacă segmentul $|AB|$ este congruent cu segmentul $|CD|$, atunci $|CD|$ este congruent cu $|AB|$. Dacă $|AB|$, $|CD|$, $|EF|$ sînt segmente astfel încît $|AB|$ este congruent cu $|CD|$ şi $|CD|$ este congruent cu $|EF|$, atunci $|AB|$ este congruent cu $|EF|$.**

III. 3. **(Axioma de adunare a segmentelor.) Fiind date segmentele $|AC|$, $|A'C'|$ şi punctele $B \in |AC|$, $B' \in |A'C'|$ astfel ca**

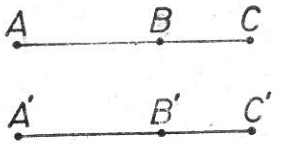


Fig. V.21

$$|AB| \equiv |A'B'|,\quad |BC| \equiv |B'C'|,$$

avem $|AC| \equiv |A'C'|$, (fig. V. 21).

III.4. **(Axioma purtării congruente a unghiurilor.) Fiind date un unghi propriu $\widehat{hk}$, un semiplan u**

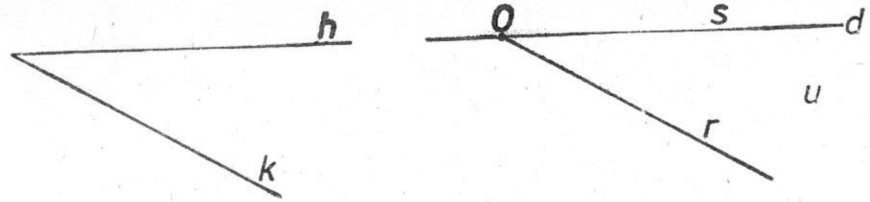


Fig. V.22

limitat de dreapta d şi o semidreaptă $s \subset d$, cu originea O, există o semidreaptă r şi numai una, astfel ca să avem $r \subset u$, r să aibă originea O şi $\widehat{rs} \equiv \widehat{hk}$ (fig. V.22). **Orice unghi este congruent cu el însuşi.**

III.5. **Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca**

$$(1) \qquad \hat{A} \equiv \hat{A}',\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|.$$

În aceste condiţii, avem $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ (fig. V.23).

Observaţie. Aplicînd axioma III.5 triunghiurilor ACB, $A'C'B'$, obţinem şi $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Deci, în definitiv, axioma III.5 arată că, în ipotezele (1), avem $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ şi $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.

Definiţie. *Fie* $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$, $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ **două sisteme ordonate formate din cîte n puncte. Vom spune că sistemele P, Q sînt congruente, dacă avem relaţiile**

$$|P_iP_j| \equiv |Q_iQ_j|,\quad \widehat{P_iP_jP_k} \equiv \widehat{Q_iQ_jQ_k},$$

oricare ar fi indicii distincţi i, j, k, aleşi din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dacă aceste relaţii sînt satisfăcute, scriem $P \equiv Q$.

Dacă $n = 3$, sistemele P, Q sînt triunghiuri, în cazul în care punctele care formează fiecare din aceste sisteme sînt necoliniare. În acest caz, folosim notaţiile prescurtate $P = P_1P_2P_3$, $Q = Q_1Q_2Q_3$.

În clasa a IX-a, am demonstrat patru teoreme de congruenţă pentru triunghiuri. Aceste teoreme arată că triunghiurile $P = P_1P_2P_3$, $Q = Q_1Q_2Q_3$ sînt congruente în fiecare din următoarele situaţii:

1. $\hat{P}_1 \equiv \hat{Q}_1$, $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|$, $|P_1P_3| \equiv |Q_1Q_3|$;

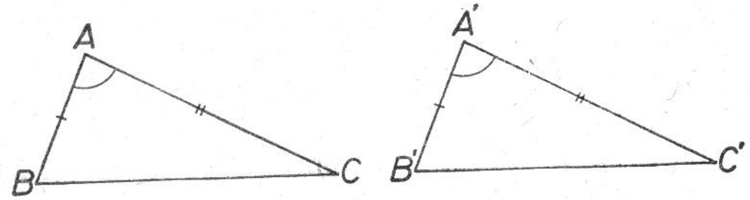


Fig. V.23

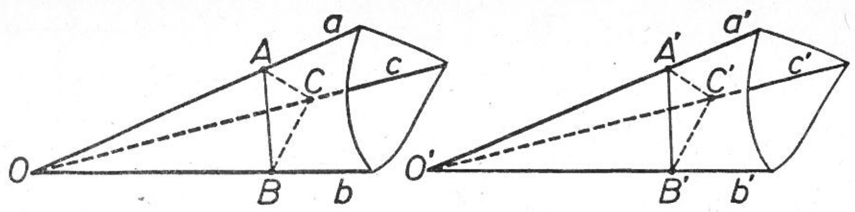


Fig. V.24

2. $\hat{P}_1 \equiv \hat{Q}_1,\ \hat{P}_2 \equiv \hat{Q}_2,\ |P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|$;
3. $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|,\ |P_2P_3| \equiv |Q_2Q_3|,\ |P_3P_1| \equiv |Q_3Q_1|$;
4. $|P_1P_2| \equiv |Q_1Q_2|,\ \hat{P}_1 \equiv \hat{Q}_1,\ \hat{P}_3 \equiv \hat{Q}_3$.

D e f i n i ț i e. **Fiind date două unghiuri triedre $\widehat{abc}$, $\widehat{a'b'c'}$, vom spune că aceste unghiuri sînt congruente dacă avem** (fig. V.24):

$$\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'},\ \widehat{bc} \equiv \widehat{b'c'},\ \widehat{ca} \equiv \widehat{c'a'}.$$

Fie O respectiv O' vîrfurile celor două unghiuri triedre și fie punctele $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $A' \in a'$, $B' \in b'$, $C' \in c'$ astfel ca

$$|OA| \equiv |O'A'|,\ |OB| \equiv |O'B'|,\ |OC| \equiv |O'C'|.$$

Aplicînd teorema I de congruență a triunghiurilor, deducem relațiile

$$|AB| \equiv |A'B'|,\ |BC| \equiv |B'C'|,\ |CA| \equiv |C'A'|;$$

aplicînd apoi teorema a III-a de congruență, deducem că sistemul de puncte (O, A, B, C) este congruent cu sistemul (O', A', B', C').

Punctele O, A, B, C sînt necoplanare, deoarece dreptele care conțin semidreptele a, b, c sînt necoplanare.

Un sistem ordonat format din patru puncte necoplanare O, A, B, C definește un *tetraedru*. Punctele O, A, B, C se numesc vîrfurile tetraedrului (O, A, B, C), segmentele $|OA|, |OB|, |OC|, |AB|, |BC|, |CA|$ se numesc m u c h i i l e iar interioarele triunghiurilor OAB, OBC, OCA, ABC se numesc *fețele* lui (O, A, B, C), (fig. V.25).

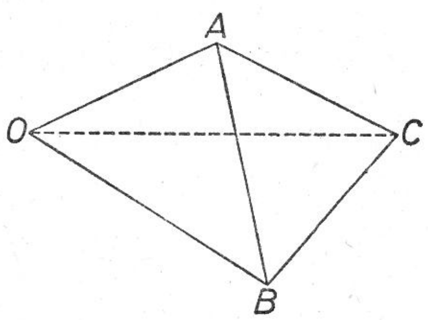


Fig. V.25

Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C, convenim să notăm prin (ABC) planul ce conține aceste puncte.

Fiind dat un tetraedru (O,A,B,C), putem considera cele patru plane care conțin fețele lui:

$$p = (OBC),\ q = (OCA),\ r = (OAB),\ h = (ABC).$$

Să considerăm semispațiile

$$S_O = |hO,\ S_A = |pA,\ S_B = |qB,\ S_C = |rC.$$

Avem $A \in S_A$, $B \in S_B$, $C \in S_C$, $O \in S_O$.

Definim *interiorul* tetraedrului (O, A, B, C) prin formula

$$\mathrm{Int}(O, A, B, C) = S_O \cap S_A \cap S_B \cap S_C.$$

Fiind intersecția a patru semispații, *interiorul oricărui tetraedru este o mulțime convexă.*

Putem acuma să introducem noțiunea de *simplex*. Vom defini 0-simplexe, 1-simplexe, 2-simplexe și 3-simplexe.

D e f i n i ț i i. **Un 0-simplex este o mulțime $\{A\}$ formată dintr-un singur punct. Un 1-simplex este o mulțime de forma $[A\ B] = |AB| \cup \{A, B\}$, deci un 1-simplex este un segment închis. Un 2-simplex este o mulțime de forma**

$$[A, B, C] = \mathrm{Int}\ ABC \cup |AB| \cup |BC| \cup |CA| \cup \{A, B, C\},$$

unde ABC este un triunghi. Un 3-simplex este o mulțime de forma

$$[O\ A\ B\ C] = \mathrm{Int}\,(O, A, B, C) \cup [A\ B\ C] \cup [O\ A\ B] \cup [O\ B\ C] \cup [O\ C\ A],$$

unde (O, A, B, C) este un tetraedru.

Punctele O, A, B, C se numesc *vîrfuri* ale simplexelor astfel definite.

Două simplexe distincte se numesc *incidente*, dacă vîrfurile unuia din ele se găsesc printre vîrfurile celuilalt. (fig. V.26).

Două simplexe se numesc *disjuncte*, dacă intersecția lor este mulțimea vidă (fig. V.27).

Două simplexe distincte se numesc *adiacente*, dacă intersecția lor este un simplex incident cu fiecare din cele două simplexe (fig. V.28).

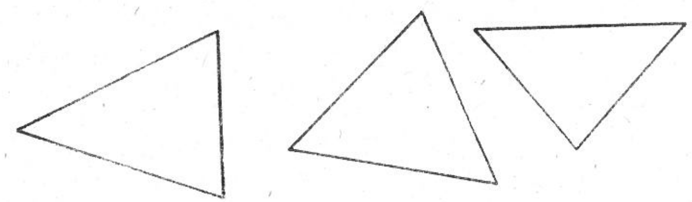


Fig. V.27

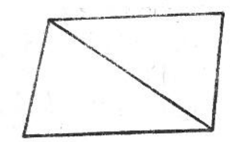


Fig. V.28

7. Drepte și plane perpendiculare

Reamintim că două drepte concurente AB, AC se zic perpendiculare, dacă unghiul $\widehat{BAC}$ este congruent cu un suplement al său. O dreaptă nu poate fi perpendiculară pe ea însăși.

Fie d o dreaptă și A un punct nesituat pe d. Alegem două puncte distincte B, C pe dreapta d. Să notăm prin p planul care conține punctul A și punctele B, C. Acest plan va conține întreaga dreaptă d, deoarece d și p au două puncte comune.

Ne propunem să construim în planul p, perpendiculara pe dreapta d care trece prin punctul A. Pentru aceasta, considerăm semidreapta s, care are originea în B, care este situată în planul p, de partea opusă lui A față de d și

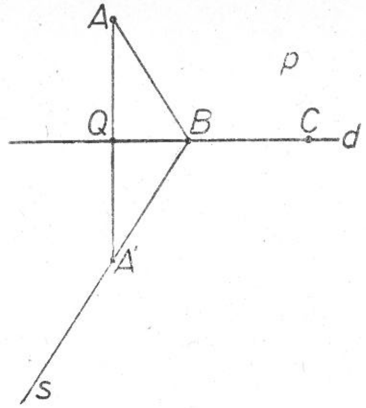


Fig. V.29

astfel ca s să formeze cu semidreapta $|BC$ un unghi congruent cu unghiul $\widehat{ABC}$. Axioma III.4 ne asigură că semidreapta s, avînd proprietățile indicate, există și este unică (fig. V.29).

Pe semidreapta s considerăm acel punct A', pentru care $|BA| \equiv |BA'|$. Axioma III.1 asigură existența și unicitatea punctului A' avînd proprietățile indicate. Punctele A și A' se găsesc în semiplane opuse față de dreapta d. Rezultă că segmentul $|AA'|$ are un punct comun cu dreapta d. Fie Q acest punct.

Triunghiurile ABQ, $A'BQ$ sînt congruente, în virtutea teoremei I de congruență. Rezultă $\widehat{BQA} \equiv \widehat{BQA'}$. Dar unghiurile $\widehat{BQA}$, $\widehat{BQA'}$ sînt suplementare deci unghiul $\widehat{BQA}$ este drept. Aceasta înseamnă că dreptele AQ și d sînt perpendiculare.

Dreapta AQ este *singura perpendiculară* ce se poate duce în planul p, din punctul A, pe dreapta d, deoarece nu există nici un triunghi cu două unghiuri drepte.

Construcția indicată arată că *există unghiuri drepte*.

Știind că orice unghi congruent cu un unghi drept este un unghi drept, putem arăta că, fiind date un plan p, (fig. V.30) o dreaptă $d \subset p$ și un punct P pe d, există o dreaptă în planul p, perpendiculară pe d și trecînd prin punctul P. Într-adevăr, alegînd un punct $R \in d$ diferit de P, construim, în planul p, trecînd prin dreapta d, de o parte fixată a lui d, o semidreaptă s astfel ca s să formeze cu semidreapta $|PR$ un unghi congruent cu un unghi drept, construit așa cum s-a arătat. Atunci unghiul format de s și de $|PR$ va fi drept. Dreapta care conține semidreapta s este perpendiculara ridicată în punctul P, pe dreapta d, în planul p.

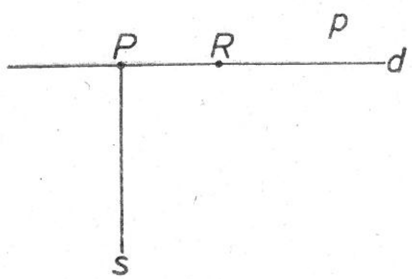


Fig. V.30

Definiție. **Vom spune că o dreaptă d este perpendiculară pe un plan p dacă d și p au un punct comun P și dacă orice dreaptă a, trecînd prin P și conținută în planul p, este perpendiculară pe dreapta d** (fig. V.31).

Teoremă. **Fie d, a, b trei[1] drepte concurente într-un punct P, astfel ca**

[1] Reamintim că, potrivit convențiilor făcute, cînd spunem „Fie d, a, b trei drepte, subînțelegem că aceste drepte sînt distincte (altfel numărul lor nu ar fi 3!).

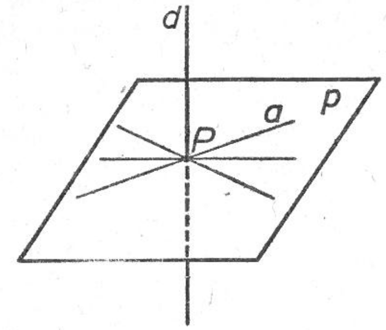


Fig. V.31

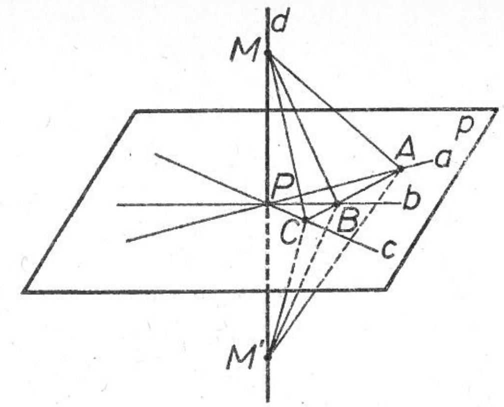


Fig. V.32

$d \perp a$ și $d \perp b$. Fie p planul ce conține dreptele a, b. Atunci, pentru orice dreaptă c, astfel ca $P \in c \subset p$, avem $d \perp c$.

Demonstrație. Dreptele a și c conțin puncte situate de o parte și de alta a dreptei b. Să alegem atunci două puncte $A \in a$ și $C \in c$ astfel ca A și C să se găsească în semiplane opuse față de dreapta b. În acest caz, există un punct $B \in b \cap |AC|$. Fie M, M' două puncte pe dreapta d astfel ca $P \in |MM'|$ și $|PM| \equiv |PM'|$, (fig. V.32).

Triunghiurile BMP, $BM'P$ sînt congruente în virtutea teoremei 1, deoarece $d \perp b$. De asemenea sînt congruente triunghiurile AMP, $AM'P$. Rezultă relațiile

(1) $$|MA| \equiv |M'A|, \quad |MB| \equiv |M'B|;$$

deducem atunci că și triunghiurile ABM, ABM' sînt congruente, în virtutea teoremei 1 de congruență. Deci avem

(2) $$\widehat{MAB} \equiv \widehat{M'AB}.$$

Rezultă $ACM \equiv ACM'$, deci $|MC| \equiv |M'C|$. Atunci $CMP \equiv CM'P$, deci avem

$$\widehat{MPC} \equiv \widehat{M'PC}.$$

Dar aceste ultime unghiuri sînt suplementare. Deci $\widehat{MPC}$ este un unghi drept, deci $d \perp c$.

*Demonstrația dată de Euclid**. După ce am construit punctele A, B, C așa cum s-a arătat, construim punctele A', B', C' astfel încît P să fie mijlocul

* **Facultativ.**

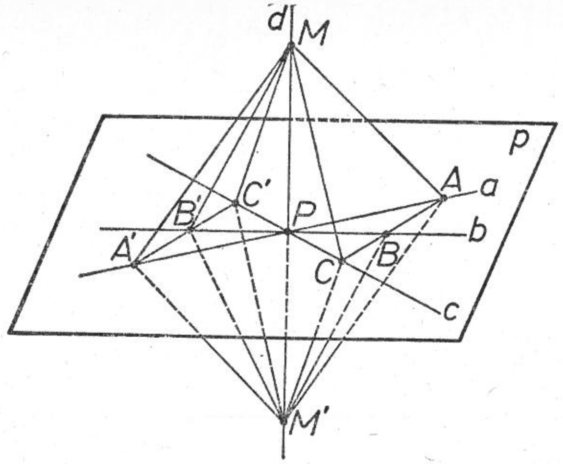


Fig. V.33

comun al segmentelor $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$. În acest caz, punctele A', B', C' aparțin planului p și avem congruențele următoare, care se deduc în același mod ca mai sus: (fig. V.33)

$|MA| \equiv |MA'|$, $|MB| \equiv$
$\equiv |MB'|$, $|AB| \equiv |A'B'|$,

$\widehat{MAB} \equiv \widehat{MA'B'}$, $\widehat{MAC} \equiv$
$\equiv \widehat{MA'C'}$, $|AC| \equiv |A'C'|$,
$MAC \equiv MA'C'$, $|MC| \equiv |MC'|$.

Ultima congruență arată că triunghiul MCC' este isoscel, deci că $MC'C \equiv MCC'$. Rezultă $\widehat{MPC} \equiv \widehat{MPC'}$, deci $\widehat{MPC}$ este un unghi drept, deci $d \perp c$.

Problemă rezolvată. Fie P un punct pe dreapta d. Prin d ducem toate planele posibile q și, în fiecare din aceste plane, considerăm acea dreaptă a_q, pentru care $P \in a_q \perp d$. Cînd q variază, dreapta a_q descrie un plan p perpendicular în P pe dreapta d (fig. V.34), deci: reuniunea dreptelor a_q este un plan p și $P \in p \perp d$.

Demonstrație. Există cel puțin două plane distincte q' și q'', care conțin dreapta d. Fie a' respectiv a'' dreptele definite prin relațiile

$$P \in a' \perp d,\ P \in a'' \perp d,\ a' \subset q',\ a'' \subset q''.$$

Fie p planul ce conține dreptele a', a''. Din teorema precedentă, rezultă că d este perpendiculară pe orice dreaptă c, astfel ca $P \in c \subset p$.

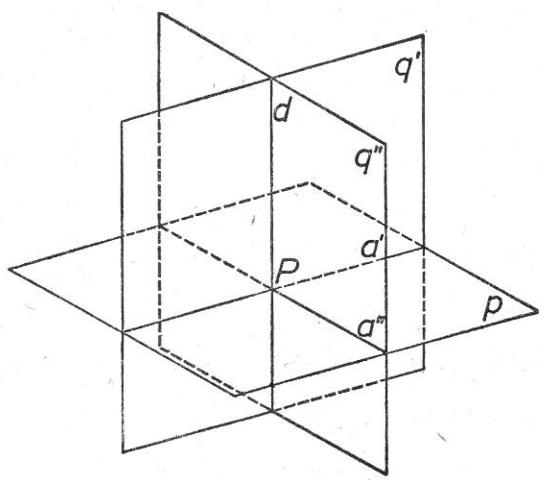


Fig. V.34

Să arătăm că planul p conține toate dreptele perpendiculare pe dreapta d și trecînd prin punctul P.

Fie a o astfel de dreaptă, deci $P \in a \perp d$ (fig. V.35). Dreptele a și d aparțin unui plan q. Planele p, q au punctul comun P, deci aceste două plane au ca intersecție o dreaptă b. Avem $P \in b \subset p$, deci $b \perp d$. Rezultă că, în planul q, avem două drepte a și b, conținînd punctul P și amîndouă perpendiculare pe dreapta d din q. Rezultă $a = b$, deci $a \subset p$.

Deci am arătat că planul p conține toate dreptele duse prin P și perpendiculare pe dreapta d.

Rezultatul stabilit mai poate fi formulat în modul următor:

Teoremă. Fiind dat un punct P pe o dreaptă d, există un plan p, astfel ca

$$P \in p \perp d.$$

Planul p avînd aceste proprietăți este unic, (fig. V.36).

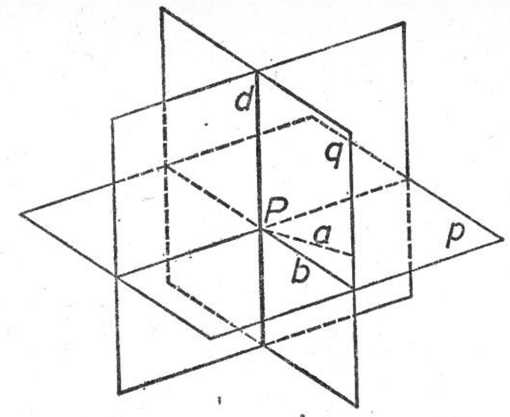


Fig. V.35

Problemă rezolvată. Fie M un punct, d o dreaptă și p un plan astfel ca

$$M \notin p,\ d \subset p.$$

Fie MC perpendiculara dusă prin punctul M pe dreapta d, cu $C \in d$. Fie c perpendiculara dusă în planul p, prin punctul C, pe dreapta d. Fie MP perpendiculara dusă din M pe dreapta c. Atunci MP este perpendiculară pe planul p.

Demonstrație. Putem presupune că $P \in c$, deci $P \in p$ (fig. V.37). Fie M' punctul astfel ca $P \in |MM'|$ și $|MP| \equiv |M'P|$. Triunghiurile MPC, $M'PC$ sînt dreptunghice în P și congruente. Rezultă $|MC| \equiv |M'C|$. Din $MC \perp d$, $PC \perp d$, rezultă $M'C \perp d$, deci pentru orice punct $A \in d$, $A \neq C$, triunghiurile MCA, $M'CA$ sînt dreptunghice și congruente. Deci avem $|MA| \equiv$

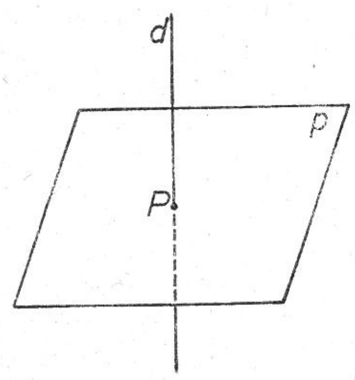


Fig. V.36

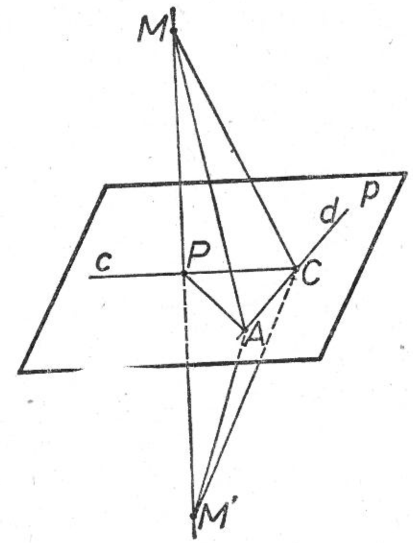


Fig. V.37

$\equiv |M'A|$. Atunci şi triunghiurile MPA, $M'PA$ sînt congruente. În acest caz, $\widehat{MPA} \equiv \widehat{M'PA}$, deci $\widehat{MPA}$ este un unghi drept şi rezultă $MP \perp PA$. Din $MP \perp PC$, $MP \perp PA$ rezultă că dreapta MP este perpendiculară pe planul p. Proprietatea astfel demonstrată arată că:

Dacă M este un punct exterior unui plan p, atunci există o dreaptă h, care trece prin M şi care este perpendiculară pe planul p.

Vom demonstra următoarea

Teoremă. **Prin orice punct M, exterior unui plan p, se poate duce o singură dreaptă perpendiculară pe planul p.**

Demonstraţie. (Prin reducere la absurd). Presupunem că prin punctul $M \notin p$ se pot duce două drepte h, k perpendiculare pe planul p. Fie P, Q punctele de intersecţie ale planului p cu dreptele h, k. Dacă $h \neq k$, avem $P \neq Q$, deoarece din $P = Q$ ar rezulta $h = MP = MQ = k$. Rezultă că MPQ este un triunghi. Acest triunghi ar avea două unghiuri drepte, deoarece $h \perp PQ$ şi $k \perp QP$. Un astfel de triunghi nu poate exista. Deci $h = k$.

Problemă rezolvată. Fie d dreaptă perpendiculară pe planul p în punctul A şi fie q un plan trecînd prin d. Planele p, q au ca intersecţie o dreaptă a. Fie punctele $B \in a$, $B \neq A$, şi $Q \in q$, astfel ca $BQ \perp a$. Atunci dreapta BQ este perpendiculară pe planul p (fig. V.38).

Demonstraţie. Fie c dreapta avînd proprietăţile

$$A \in c, \quad c \subset p, \quad c \perp a.$$

Din formulele $c \perp d$, $c \perp a$ deducem că dreapta c este perpendiculară pe planul q în punctul A, deoarece este perpendiculară pe două drepte distincte, situate în planul q şi conţinînd punctul A. Avem atunci $c \perp AQ$. Fie Q' punctul de pe dreapta BQ, astfel ca

$$B \in |QQ'|, \quad |BQ| \equiv |BQ'|.$$

Avem $Q' \in BQ \subset q$, deci $Q' \in q$. Prin urmare, $c \perp AQ'$.

Fie C un punct pe dreapta c, diferit de A.

Triunghiurile ABQ, ABQ' sînt congruente, avînd unghiurile din B drepte şi catetele congruente două cîte două. Deci $|AQ| \equiv |AQ'|$.

Triunghiurile ACQ, ACQ' sînt dreptunghice în A şi au catetele congruente două cîte două. Rezultă $|CQ| \equiv |CQ'|$.

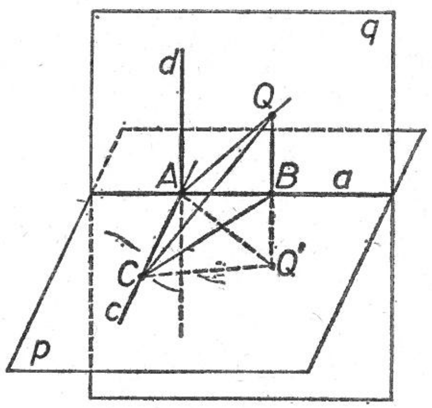


Fig. V.38

Triunghiurile CBQ, CBQ' sînt congruente, avînd laturile congruente două cîte două. Rezultă $\widehat{CBQ} \equiv \widehat{CBQ'}$. Dar aceste unghiuri sînt suplementare. Aceasta înseamnă că $\widehat{CBQ}$ este un unghi drept şi deci $BQ \perp BC$. În acest caz, dreapta BQ este perpendiculară pe dreptele distincte BA, BC, deci BQ este perpendiculară în B pe planul p.

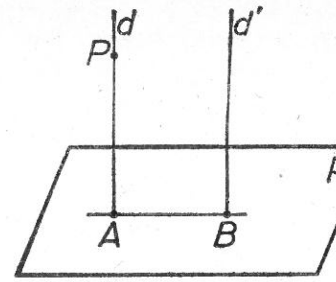


Fig. V.39

Corolar. Fiind dat un punct B într-un plan p, există cel puţin o dreaptă d', perpendiculară în B pe planul p (fig. V.39).

Demonstraţie. Fie P un punct nesituat în planul p. Prin P ducem dreapta d, perpendiculară pe planul p. Fie $A \in d \cap p$ şi fie q planul ce trece prin punctele P, A, B. Dreapta d', din planul q, care trece prin B şi care este perpendiculară pe dreapta BA din planul q, este, potrivit teoremei precedente, perpendiculară pe planul p.

Teoremă. Fiind dat un punct B într-un plan p, există o singură dreaptă care să treacă prin B şi care să fie perpendiculară pe planul p.

Demonstraţie. Să presupunem că există două drepte distincte d', d'' astfel ca (fig. V.40)

$$B \in d' \perp p, \quad B \in d'' \perp p.$$

În acest caz, dreptele d', d'' aparţin unui plan q, deoarece două drepte concurente aparţin unui aceluiaşi plan. Planele p, q sînt distincte, deoarece $d' \subset q$ şi $d' \perp p$. Atunci intersecţia planelor p, q este o dreaptă a, ce conţine punctul B. Am obţinut în acest fel trei drepte a, d', d'', coplanare şi astfel ca $a \perp d'$, $a \perp d''$, deoarece $a \subset p$, $d' \perp p$, $d'' \perp p$. Dar, într-un plan q, se poate duce o singură perpendiculară într-un punct B la o dreaptă a. Deci avem $d' = d''$, contrar ipotezei: $d' \neq d''$. Deci prin B trece o singură dreaptă perpendiculară pe planul p.

Corolar. Fie d, d' două drepte distincte, perpendiculare pe un acelaşi plan p. Atunci d, d' sînt coplanare (fig. V.41).

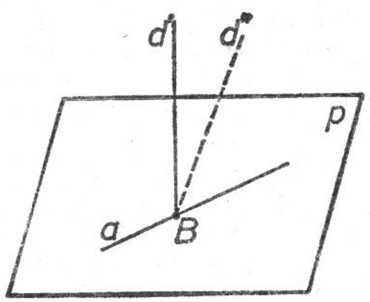


Fig. V.40

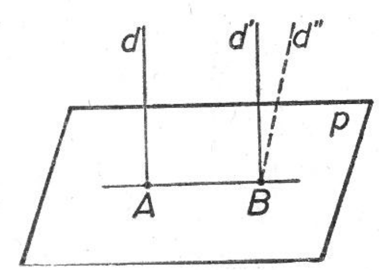


Fig. V.41

8

Demonstrație. Fie punctele $A \in d \cap p$, $B \in d' \cap p$ și fie q planul ce conține dreapta d și punctul B. Perpendiculara d'' din planul q, pe dreapta AB, ridicată în punctul B, este perpendiculară pe planul p. Dintr-o teoremă precedentă rezultă $d'' = d'$, deci avem $d' \subset q$. Dar și $d \subset q$, deci dreptele d, d' sînt coplanare.

T e o r e m ă. Dacă dreptele d, d' sînt distincte și perpendiculare pe un același plan p, atunci d, d' sînt drepte paralele.[1]

Demonstrație. Am arătat că dreptele d, d' se găsesc într-un plan q. Dar aceste drepte sînt perpendiculare pe dreapta AB din planul q, unde $A \in d \cap p$ și $B \in d' \cap p$. Deci dreptele d, d' nu sînt concurente, deoarece în planul q nu există nici un triunghi cu două unghiuri drepte. Deci d, d' sînt drepte coplanare și nesecante, deci aceste drepte sînt paralele.

Să considerăm o dreaptă d și fie A, B două puncte distincte pe această dreaptă. În fiecare plan q, ce conține dreapta d, să considerăm dreptele a_q, b_q astfel ca (fig. V.42):

$$A \in a_q \subset q,\quad a_q \perp AB,\quad B \in b_q \subset q,\quad b_q \perp AB.$$

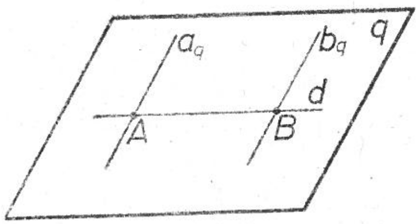


Fig. V.42

Dreptele a_q, b_q sînt paralele, deoarece sînt coplanare și distincte și sînt perpendiculare pe dreapta AB din planul lor.

Am arătat că atunci cînd planul q variază, astfel încît să conțină mereu dreapta d, dreptele a_q rămîn într-un plan fix p, anume în planul perpendicular în A pe dreapta d. La fel se arată că dreptele b_q vor aparține planului r, perpendicular în B pe aceeași dreaptă d.

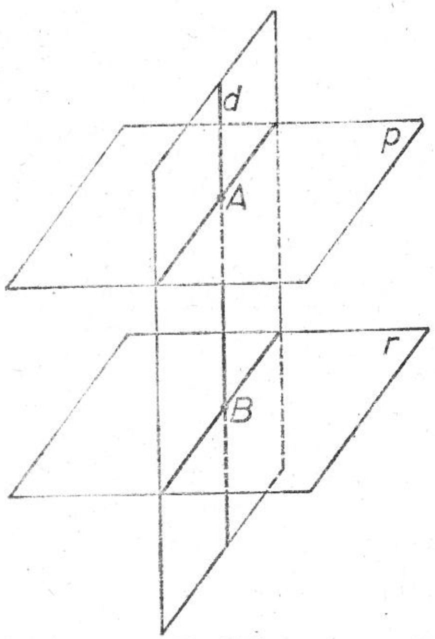


Fig. V.43

Problemă rezolvată. Fie A, B două puncte distincte ale unei drepte d și fie p, r planele perpendiculare pe dreapta d și trecînd respectiv prin punctele A, B. Atunci intersecția $p \cap r$ este mulțimea vidă (fig. V.43).

Demonstrație. Să presupunem că există un punct P, comun planelor p, r.

[1] Reamintim că două drepte se zic *paralele*, dacă sînt coplanare și nesecante (disjuncte).

Avem $d \cap p = \{A\}$, $d \cap r = \{B\}$, deci $P \notin d$. Atunci punctele P, A, B aparțin unui plan q. Avem $d \subset q$, deoarece $A \in d \cap q$, $B \in d \cap q$ și $A \neq B$. Apoi $\perp AP$ și $d \perp BP$, deoarece d este perpendiculară pe planul $p \supset AP$ și pe planul $r \supset BP$. S-a format în acest fel triunghiul PAB, avînd două unghiuri drepte, în A și B. Aceasta nu se poate, deci nu există nici un punct comun planelor p, r.

Teorema demonstrată anterior poate fi formulată în modul următor:
Două plane perpendiculare pe o aceeași dreaptă, în două puncte distincte, sînt nesecante.

D e f i n i ț i e. Numim plane paralele orice două plane, care nu au nici un punct comun.

Atunci avem următoarea

T e o r e m ă. Două plane perpendiculare pe o aceeași dreaptă, în două puncte distincte, sînt paralele.

T e o r e m ă. Fie d o dreaptă și fie A un punct nesituat pe d. Există un unic plan p, astfel ca $A \in p$ și $p \perp d$, (fig. V.44).

Demonstrație. Dacă un plan p verifică condițiile din teoremă, atunci p intersectează dreapta d într-un punct B și avem $d \perp AB$. Deci B este punctul în care dreapta d este intersectată de dreapta perpendiculară, dusă din A pe d. Știm că prin B trece un singur plan perpendicular pe dreapta d. Rezultă că există un singur plan p, cu proprietățile $A \in p$, $p \perp d$ și că acest plan se obține în modul următor: se consideră dreapta AB dusă prin A și perpendiculară pe d; presupunînd că $B \in d$, se consideră apoi planul p, care trece prin B și care este perpendicular pe dreapta d. Acest plan va conține dreapta AB, deci și punctul A.

D e f i n i ț i e. Fiind date două plane p, q, spunem că aceste plane sînt perpendiculare, dacă există trei drepte a, b, c, avînd un punct comun și astfel ca (fig. V.45):

$$p \cap q = c,\; a \subset p,\; b \subset q,\; a \perp c,\; b \perp c,\; a \perp b.$$

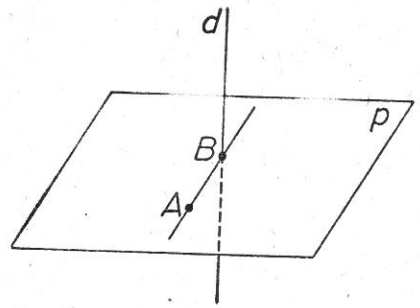


Fig. V.44

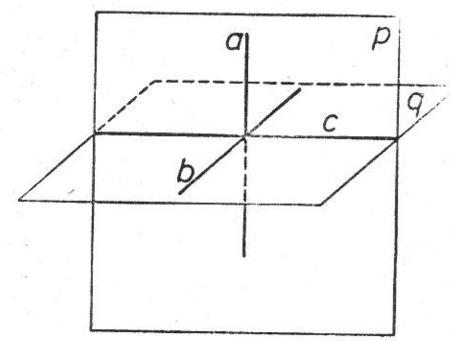


Fig. V.45

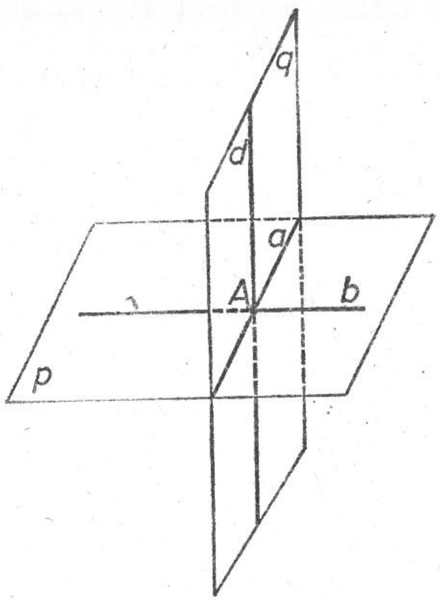


Fig. V.46

Teoremă. Fie p un plan și fie d o dreaptă perpendiculară pe planul p. Atunci orice plan q, care conține dreapta d, este perpendicular pe planul p, (fig. V.46).

Demonstrație. Fie A punctul de intersecție a planului p și dreptei d.

Fiind dat un plan q, astfel ca $d \subset q$, să considerăm dreapta $a = p \cap q$ și fie b dreapta situată în planul p și perpendiculară în A pe dreapta a. Dreptele a, b, d au punctul comun A și sînt perpendiculare două cîte două. În plus, avem $a = p \cap q$, $d \subset q$ și $b \subset p$. Rezultă că planele p, q sînt perpendiculare.

Extinderea noțiunii de perpendicularitate a două drepte, la cazul perechilor de drepte necoplanare.

Într-o definiție anterioară, am considerat perpendiculare două drepte secante AB, AC, pentru care unghiul $\widehat{BAC}$ este drept, deci congruent cu un suplement al său. Aceasta înseamnă că dreapta AC se găsește în planul dus prin A perpendicular pe dreapta AB.

Definiție. **Vom spune că două drepte necoplanare d și e sînt perpendiculare, dacă dreapta d aparține unui plan p, care este perpendicular pe dreapta e. Vom scrie și în acest caz, $d \perp e$.**

Exerciții recapitulative.

Convenim să notăm prin $a, b, c, d, a', b', c', d'$ drepte, prin $A, B, ..., M, N, P, Q, R, ...$ puncte și prin $p, q, r, s, p', q', r', s'$ plane. În formulele următoare, să se înlocuiască semnul „o" printr-unul din semnele $\perp$, $\in$, $\neq$, $\subset$ astfel încît să se obțină propoziți demonstrabile și să se dea demonstrațiile corespunzătoare.

1. $d \perp a,\ d \perp b, d \circ c,\ P \in a \cap b \cap c \Rightarrow a, b, c$ coplanare.

2. $M \notin p, C \in d \subset p,\ MC \perp d, C \in c \subset p, c \circ d, M \in b, b \perp c \Rightarrow b \perp p$.

3. $P \in a \cap b \cap c, a \cup b \cup c \subset p, d \circ a, d \perp b, a \neq b \Rightarrow d \perp c$.

4. $A \in p \cap d, p \perp d, d \subset q, a = p \cap q, B \in a, B \neq A,\ Q \circ q, BQ \perp a \Rightarrow BQ \perp p$.

5. $A \in d, B \in d, A \circ B, A \in p, p \perp d, B \in q, q \perp d \Rightarrow p \cap q = \emptyset$.

6. $A = A$ și $d = d \Rightarrow$ există un singur plan p astfel ca $A \circ p$ și $p \perp d$.

7. $d \perp p, d \circ q \Rightarrow p \perp q$.

Exerciții

1. Să se arate că există trei drepte a, b, c, avînd un punct comun și perpendiculare două cîte două (fig. V. 47).

2. Fie a, b, c, d patru drepte avînd un punct comun și astfel ca d să fie perpendiculară pe fiecare din dreptele a, b, c. Să se arate că dreptele a, b, c sînt coplanare (fig. V.48).

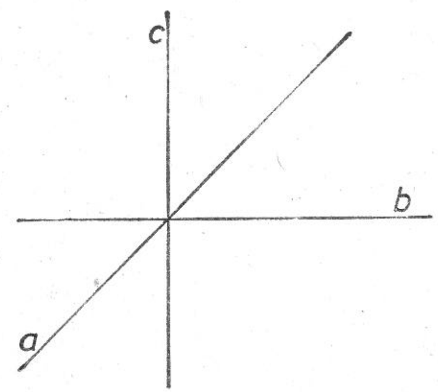


Fig. V.47

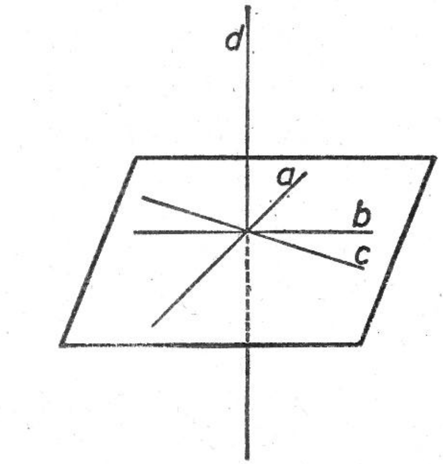


Fig. V.48

3. Să se arate că nu există patru drepte, avînd un punct comun și perpendiculare două cîte două.

4. Să se arate că există o mulțime D, de drepte, astfel ca prin fiecare punct A din spațiu să treacă o dreaptă și una singură din mulțimea D, și astfel ca orice două drepte distincte din D să fie paralele.

(Indicație. Se consideră un plan p și se notează prin D mulțimea dreptelor care sînt perpendiculare pe planul p (fig. V.49)).

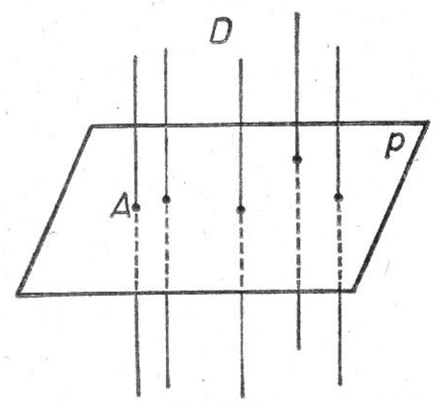


Fig. V.49

5. Să se arate că există o mulțime P, de plane, astfel ca prin orice punct A să treacă un plan și unul singur din mulțimea P și astfel ca orice două plane distincte din mulțimea P să fie paralele.

(Indicație. Se consideră o dreaptă d și se notează prin P mulțimea planelor care sînt perpendiculare pe dreapta d (fig. V.50).)

6. Să se arate că dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan p, atunci intersecția $d \cap p$ conține un singur punct. Să se deducă că d nu este conținută în planul p (fig. V.51).

7. Fie O, A, B, C patru puncte necoplanare și fie M punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului ABC. Să se arate că dacă dreapta OM este perpendiculară pe

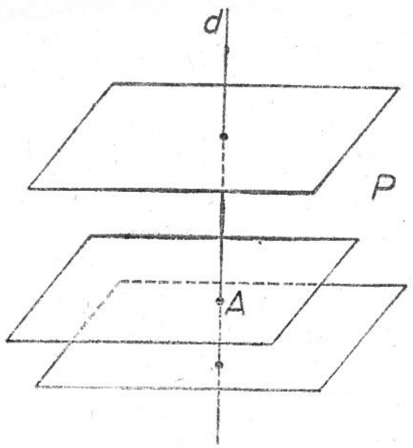


Fig. V.50

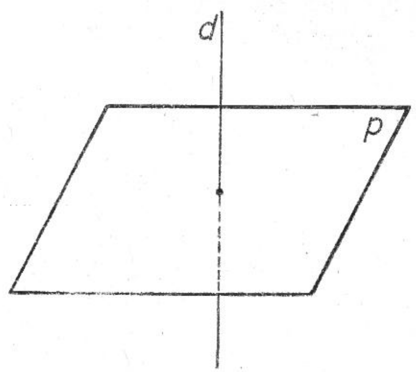


Fig. V.51

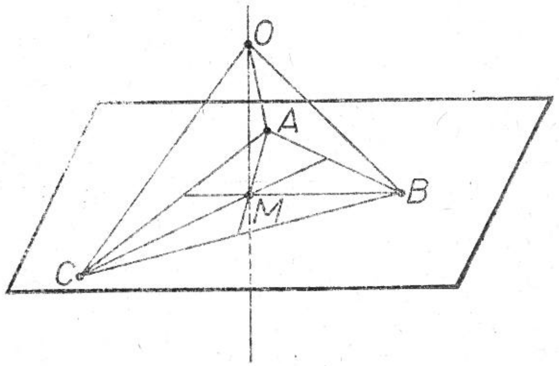


Fig. V.52

planul ce conţine punctele A, B, C, atunci avem

$|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$ (fig. V.52).

8. Fie O, A, B, C patru puncte necoplanare astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$. Să se arate că dreapta care trece prin punctul O şi care este perpendiculară pe planul ce conţine punctele A, B, C, trece prin punctul de intersecţie al mediatoarelor triunghiului ABC.

(*Indicaţie* pentru exerciţiile 7 şi 8. Se consideră triunghiurile dreptungice OAM, OBM, OCM şi se arată ce aceste triunghiuri sînt congruente două cîte două.)

9. Să se arate că relaţia de perpendicularitate a două drepte necoplanare este simetrică, deci că $d \perp e$ implică $e \perp d$.

8. Proiecţii ortogonale

Fie d o dreaptă. Fiecărui punct A din spaţiu i se asociază un unic punct A', situat pe dreapta d, astfel ca:

1. Dacă $A \in d$, atunci $A' = A$.
2. Dacă $A \notin d$, atunci dreapta AA' este perpendiculară pe dreapta d.

Punctul A' se numeşte *proiecţia ortogonală* a punctului A pe dreapta d. Cînd nu există pericol de confuzie, se mai spune că A' este *proiecţia* punctului A pe dreapta d, (fig. V.53).

Dacă p este un plan perpendicular pe dreapta d într-un punct B, atunci proiecţiile ortogonale ale tuturor punctelor din planul p, pe dreapta d, coincid cu

punctul B; reciproc, dacă un punct A are ca proiecţie ortogonală pe dreapta d punctul B; atunci $A \in p$, (fig. V.54).

Fie dat un plan q. Fiecărui plan A nesituat în planul q, i se asociază un unic punct A'', situat în planul q, astfel ca $AA'' \perp q$. Punctul A'' se numeşte *proiecţia ortogonală* (sau proiecţia) *punctului A pe planul q*. Dacă $A \in q$, proiecţia lui A pe planul q va fi punctul A însuşi, (fig. V.55).

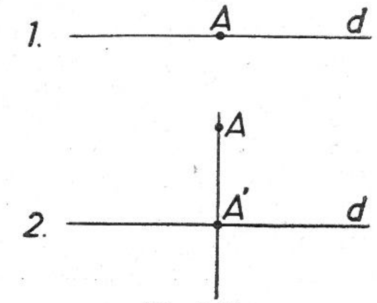


Fig. V.53

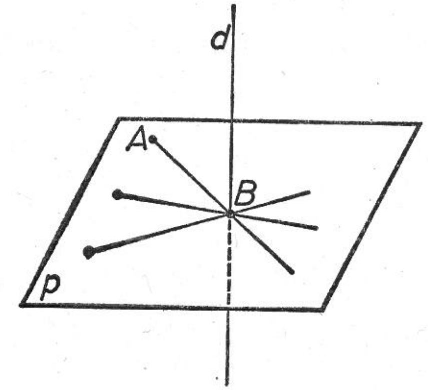


Fig. V.54

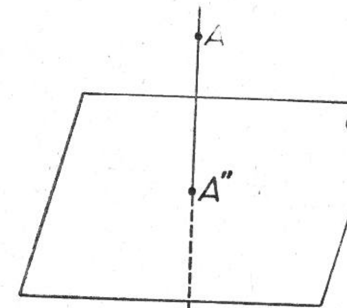


Fig. V.55

Dacă a este o dreaptă perpendiculară pe planul q, atunci toate punctele dreptei a vor avea ca proiecţie pe planul q punctul de intersecţie al dreptei a cu planul q. Reciproc, orice punct A, care are ca proiecţie pe planul q un anumit punct $B \in q$, se găseşte pe dreapta dusă prin B perpendicular pe planul q.

Vom folosi următoarele notaţii:

Pentru proiecţia punctului A pe planul q : $A'' = \mathrm{pr}_q A$.

Pentru proiecţia punctului A pe dreapta d : $A' = \mathrm{pr}_d A$.

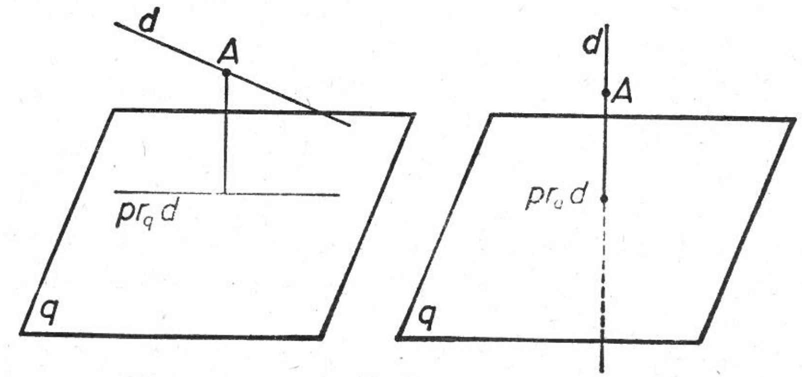


Fig. V.56

Exercițiu. Fie d o dreaptă și q un plan. Să se arate că mulțimea

$$\mathrm{pr}_q d = \{\mathrm{pr}_q A;\ A \in d\}$$

este o dreaptă sau o mulțime formată dintr-un singur punct, după cum d nu este perpendiculară pe q sau este perpendiculară pe acest plan (fig. V.56).

9. Teorema celor trei perpendiculare

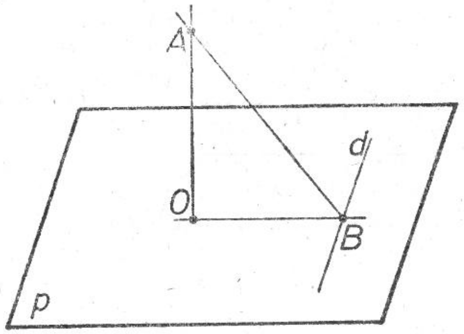


Fig. V.57

Teoremă. Fie p un plan, d o dreaptă conținută în acest plan și fie punctele $A \notin p$, $O \in p$, $O \notin d$, $B \in d$. Sînt adevărate implicațiile (fig. V.57):

1. $AB \perp d,\ OB \perp d,\ AO \perp OB \Rightarrow AO \perp p$.
2. $AO \perp p,\ AB \perp d \Rightarrow OB \perp d,\ AO \perp OB$.
3. $AO \perp p,\ OB \perp d \Rightarrow AB \perp d$.

Demonstrație. Implicația 1 a fost demonstrată la pag. 11.

Implicația 2 se demonstrează în modul următor: notăm prin a dreapta ce trece prin B, (fig. V.58) care este perpendiculară pe dreapta d și care este conținută în planul p. Fie O' punctul de pe dreapta a, pentru care $AO' \perp a$. Atunci $AO' \perp p$. Dar prin A trece o singură dreaptă perpendiculară pe planul p. Deci avem $AO' = AO$ și atunci $\{O'\} = AO' \cap p = AO \cap p = \{O\}$, deci $O' = O$. Atunci $a = BO' = BO$, deci $BO \perp d$. Relația $AO \perp OB$ rezultă din $AO \perp p$ și $OB \subset p$.

Pentru a demonstra implicația 3, fie B' punctul de pe dreapta d, pentru care avem $AB' \perp d$. Fie b dreapta definită prin condițiile (fig. V.59)

$$B' \in b,\ b \subset p,\ b \perp d.$$

Fie O'' punctul de pe dreapta b, pentru care $AO'' \perp b$. Atunci dreapta AO'' este perpendiculară pe planul p. Dar din punctul A se poate duce o singură

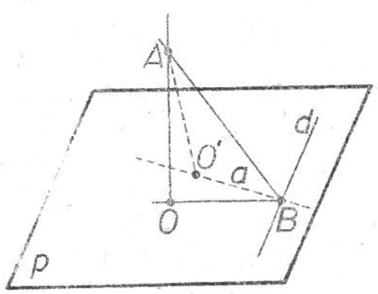


Fig. V.58

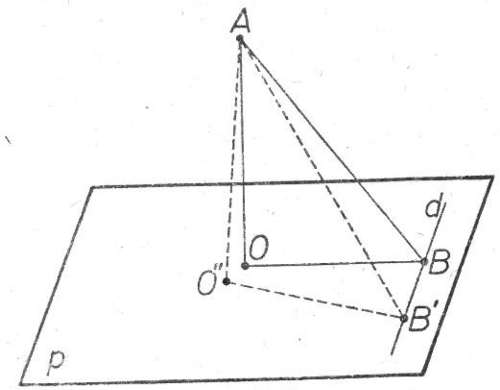


Fig. V.59

dreaptă perpendiculară pe planul p. **Rezultă $AO'' = AO$ și deci $O'' = O$.** Relațiile $OB \perp d$, $OB' \perp d$ arată că $B' = B$, deci avem $AB \perp d$.

Folosind noțiunea de proiecție ortogonală, putem formula implicațiile din teorema precedentă sub forma:

1. $B = \mathrm{pr}_d A,\ B = \mathrm{pr}_d O,\ O = \mathrm{pr}_{OB} A \Rightarrow O = \mathrm{pr}_p A$.
2. $O = \mathrm{pr}_p A,\ B = \mathrm{pr}_d A \Rightarrow B = \mathrm{pr}_d O,\ O = \mathrm{pr}_{OB} A$,
3. $O = \mathrm{pr}_p A,\ B = \mathrm{pr}_d O \Rightarrow B = \mathrm{pr}_d A$.

Implicația 3 este cunoscută sub numele de *teorema celor trei perpendiculare*. Implicațiile 1 și 2 sînt proprietăți reciproce ale acestei teoreme. Să reținem teorema celor trei perpendiculare sub forma:

$$\boxed{A \notin p, O \in p, O \notin d, B \in d, AO \perp p, OB \perp d \Rightarrow AB \perp d.}$$

Exerciții

1. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel ca $AB \perp CD$. Considerăm punctele $P \in CD$, $M \in BP$ astfel ca $AP \perp CD$ și $AM \perp BP$. Să se arate că $BM \perp CD$ și $AM \perp (BCD)$.

2. Păstrînd notațiile din exercițiul precedent, mai presupunem că $AD \perp BC$, $AC \perp BD$. Să se arate că M este ortocentrul triunghiului BCD.

3. Păstrînd ipotezele din exercițiul 2, să se arate că dreptele care unesc punctele A, B, C, D cu ortocentrele triunghiurilor BCD, ACD, ABD, BCA sînt perpendiculare pe planele acestor triunghiuri și concurente.

4. Fie a, b, c trei drepte necoplanare concurente într-un punct P și fie planele p, q, r astfel ca $a = q \cap r$, $b = r \cap p$ și $c = p \cap q$. Să se arate că dacă $r \perp c$ și $q \perp b$, atunci $a \perp p$.

5. Fie a, b două drepte neparalele. Să se arate că prin fiecare punct A trece o singură dreaptă d, perpendiculară pe fiecare din dreptele a, b.

(*Indicație.* Se consideră planele duse prin A și perpendiculare pe dreptele a, respectiv b. Aceste plane au ca intersecție dreapta căutată.)

6. Fiind date un plan p și o dreaptă d, să se arate că există cel puțin un plan q astfel ca $d \subset q$ și $q \perp p$. În ce caz există un singur astfel de plan?

(**R.** Planul q este unic dacă și numai dacă dreapta d nu este perpendiculară pe planul p.)

10. Inegalități geometrice
(PENTRU CERCURI DE ELEVI)

Reamintim următoarele definiții:

Fiind date două segmente a, b, spunem că a este *mai mare* decît b dacă există trei puncte coliniare O, A, B astfel ca $B \in |OA|$, $a \equiv |OA|$ și $b \equiv |OB|$ (fig. V.60). Spunem că a este *mai mare sau congruent cu* b, în formule $a \geqslant b$, dacă $a > b$ sau dacă $a \equiv b$.

Fiind date două unghiuri proprii u, v, spunem că u este *mai mare* decît v dacă există două unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{hl}$, astfel ca $l \subset \text{Int}\, \widehat{hk}$, $u \equiv \widehat{hk}$ şi $v \equiv \widehat{hl}$ (fig. V.61). Scriem $u \geq v$ dacă u este mai mare decît v sau dacă u este congruent cu v.

Reamintim de asemenea următoarele trei teoreme:

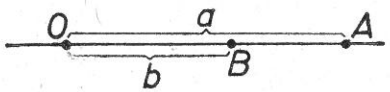


Fig. V.60

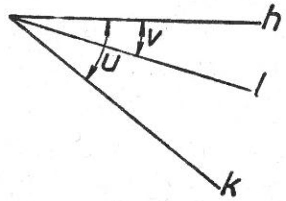


Fig. V.61

Teoremă. **Fiind date trei segmente a, b, c, condiţia necesară şi suficientă pentru ca să existe un triunghi ABC avînd $|AB| \equiv c$, $|BC| \equiv a$, $|CA| \equiv b$, este ca să fie verificate inegalităţile** (fig. V.62)

$$b + c > a,\ c + a > b,\ a + b > c.$$

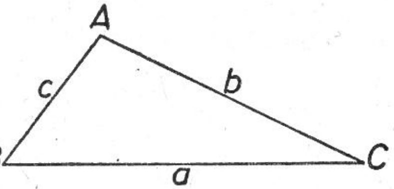


Fig. V.62

Presupunînd că am ordonat segmentele a, b, c în ordinea mărimilor, de exemplu astfel ca $a \geq b \geq c$, condiţiile precedente se reduc la una singură:

$$b + c > a.$$

Teoremă. **Dacă ABC este un triunghi, şi dacă $\hat{A} > \hat{B}$, atunci $|BC| > |AC|$. Reciproc, dacă $|BC| > |CA|$, atunci $\hat{A} > \hat{B}$** (fig. V.63).

Teoremă. **Fie O, A, B, C patru puncte distincte astfel ca $OA \perp OB$ şi $B \in |OC|$. În acest caz, avem $|AC| > |AB|$** (fig. V.64).

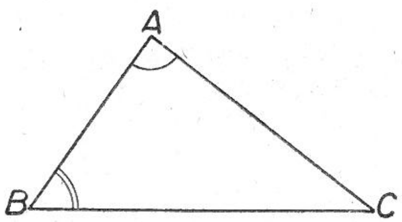


Fig. V.63

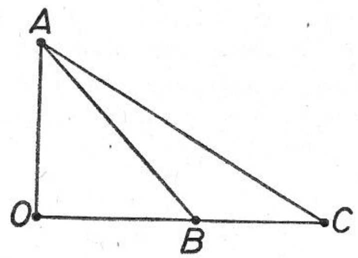


Fig. V.64

Am convenit să spunem că un segment $|OM|$ reprezintă suma segmentelor a, b, dacă există un punct $P \in |OM|$ astfel ca $|OP| \equiv a$ şi $|PM| \equiv b$ (fig. V.65). Dacă segmentele $|OM|$, $|O'M'|$ reprezintă fiecare suma segmentelor a, b, atunci $|OM| \equiv |O'M'|$.

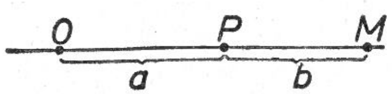


Fig. V.65

Fiind date două unghiuri u, v şi un unghi $\widehat{hm}$, spunem că $\widehat{hm}$ reprezintă

suma unghiurilor u, v, dacă există o semidreaptă k, avînd aceeaşi origine cu semidreptele h şi m şi astfel ca să avem $k \subset \text{Int}\, \widehat{hm}$, $u \equiv \widehat{hk}$ şi $v \equiv \widehat{km}$, (fig. V.66).

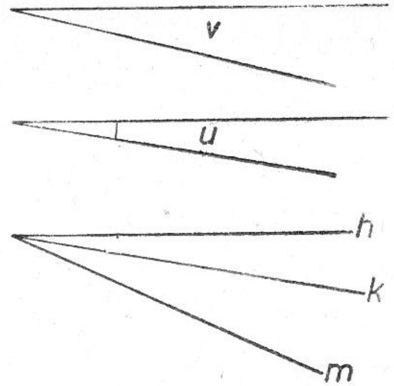


Fig. V.66

Nu orice două unghiuri u, v pot fi adunate în sensul acestei definiţii, deoarece nu există unghiuri mai mari decît un unghi alungit.

Am convenit să considerăm orice unghi alungit ca reprezentînd suma a orice două unghiuri suplementare.

Dacă asociem fiecărui unghi u măsura sa măs u, în grade sau în radiani, relaţia $u > v$ va fi echivalentă cu măs $u >$ măs v, iar dacă unghiul w reprezintă suma unghiurilor u, v, avem măs $w =$ măs u + măs v.

Pentru orice mulţime finită de unghiuri $u_1, u_2, \ldots, u_n$, putem considera suma măsurilor acestor unghiuri, care va fi un număr real.

Convenim să scriem, pentru unghiurile $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m$, relaţia

$$u_1 + \ldots + u_n > v_1 + \ldots + v_m$$

ori de cîte ori avem

$$\text{măs}\, u_1 + \ldots + \text{măs}\, u_n > \text{măs}\, v_1 + \ldots + \text{măs}\, v_m.$$

Exerciţii

1. Fie ABC un triunghi echilateral şi fie AA' înălţimea din A cu $A' \in |BC|$. Să presupunem că $P \in |AA'|$ şi $A \in |QA'|$. În acest caz avem $|BP| < |BC|$ şi $|BQ| > |BC|$ (fig. V.67).

2. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri isoscele, astfel ca

$$|AB| \equiv |AC| \equiv |A'B'| \equiv |A'C'| \text{ şi } \widehat{BAC} < \widehat{B'A'C'}.$$

Atunci $|BC| < |B'C'|$ (fig. V.68).

(*Indicaţie*. Se consideră punctul B'', situat în semiplanul opus lui B faţă de dreapta AC şi astfel ca $|AB''| \equiv |AB|$, $\widehat{B''AB} \equiv \widehat{B'A'C'}$. În triunghiurile $AB''C$ şi $BB''C$ avem $\widehat{BB''C} < \widehat{AB''C} \equiv \widehat{ACB''} < \widehat{BCB''}$, deci $|BC| < |B''B|$. Dar $|BB''| \equiv |B'C'|$).

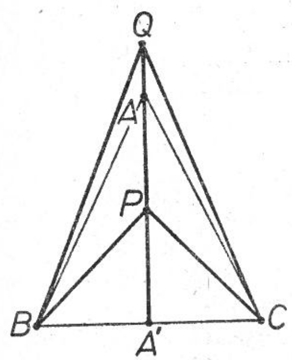


Fig. V.67

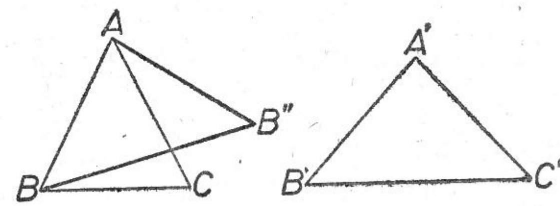


Fig. V.68

3. Fie ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ trei triunghiuri isoscele, astfel ca

$$|AB| \equiv |AC| \equiv |A'B'| \equiv |A'C'| \equiv |A''B''| \equiv |A''C''| \text{ și } \hat{A} + \hat{A'} > \hat{A''}.$$

Să se arate că $|BC| + |B'C'| > |B''C''|$.

(*Indicație*. Se vor trata separat cazurile.

$$\hat{A} + \hat{A'} < 2\text{dr}, \ \hat{A} + \hat{A'} \equiv 2\text{dr}, \ \hat{A} + \hat{A'} > 2\text{dr}.$$

În primul caz, se consideră punctul D, situat de parte opusă lui B' față de $A'C'$ și astfel ca $|A'D| \equiv |A'C'|$, $\widehat{C'A'D} \equiv \widehat{BAC}$. Atunci $|C'D| \equiv |BC|$, $|B'C'| + |C'D| > |B'D| > |B''C''|$, deoarece $\widehat{B'A'D} > \widehat{B''A''C''}$ (fig. V.69).

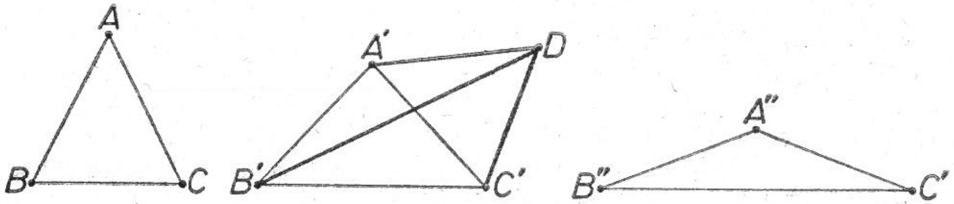


Fig. V.69

În cazul al doilea, vom avea, pentru punctul D construit în același mod, $|B'C'| + |C'D| > |B'D| \equiv 2|AB| \equiv |A''B''| + |A''C''| > |B''C''|$ (fig. V.70).

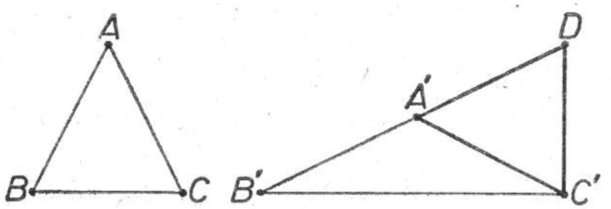


Fig. V.70

Ultimul caz se reduce la cazul al doilea, construind D ca în primul caz și D' astfel ca $A' \in |B'D'|$ și $|A'B'| \equiv |A'D'|$, (fig. V.71).)

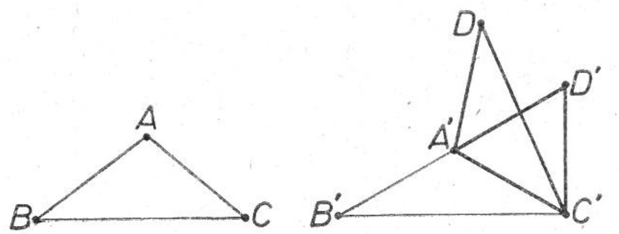


Fig. V.71

T e o r e m ă. Fie O, M, N, A patru puncte necoplanare, astfel ca

$$OM \perp MN, \ OM \perp MA, \ MN \perp NA.$$

Atunci $\widehat{AMN} > \widehat{AON}$ (fig. V.72).

Demonstrație. În triunghiul dreptunghic OAM avem $|OA| > |AM|$. Segmentele $|OA|$, $|AM|$ sînt ipotenuzele triunghiurilor dreptunghice OAN și AMN, care au cateta comună $|AN|$. Unghiurile opuse acestei catete în cele două triunghiuri se află atunci în relația dată în enunțul teoremei.

T e o r e m ă. Fie O, M, A, B patru puncte necoplanare, astfel ca

$$OM \perp MA, \ OM \perp MB, \ |OA| \equiv |OB|.$$

Atunci $|MA| \equiv |MB|$ **și** $\widehat{AMB} > \widehat{AOB}$ (fig. V.73).

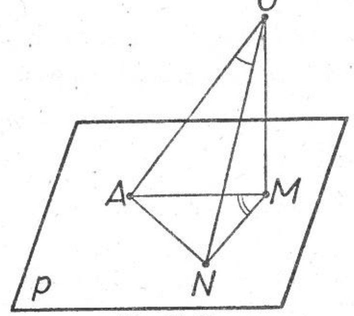


Fig. V.72

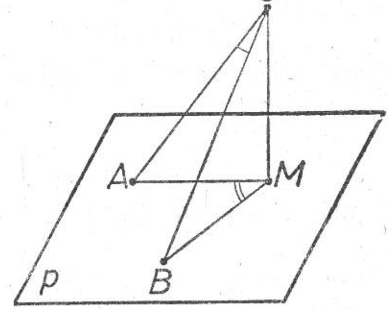


Fig. V.73

Demonstrație. Triunghiurile dreptunghice OMA, OMB sînt congruente, deci au $|MA| \equiv |MB|$. Notînd prin N mijlocul segmentului $|AB|$, teorema precedentă arată că $\widehat{AMN} > \widehat{AON}$. Atunci avem $\widehat{AMB} \equiv 2\widehat{AMN} > 2\widehat{AON} \equiv \equiv \widehat{AOB}$.

T e o r e m ă. Fie O, M, N, A patru puncte necoplanare, astfel ca

$$OM \perp MN, \ OM \perp MA, \ MN \perp NA.$$

Atunci avem $\widehat{OAM} < \widehat{OAN}$ (fig. V.74).

Demonstrație. Se compară triunghiurile dreptunghice OMA, ONA, care au ipotenuza comună $|OA|$ și în care $|ON| > |OM|$. Unghiurile opuse cate-

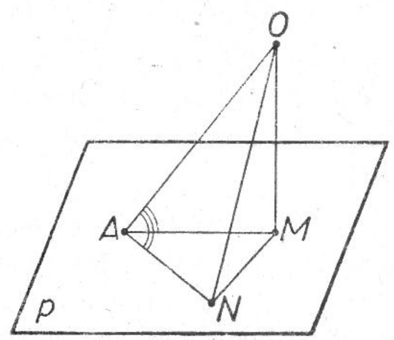


Fig. V.74

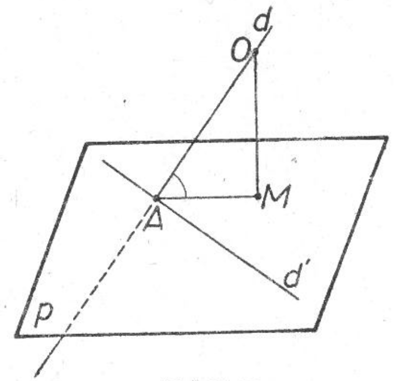


Fig. V.75

telor $|ON|$, $|OM|$ în aceste triunghiuri se vor găsi în relația $\widehat{OAN} > \widehat{OAM}$.

Fie p un plan și fie d o dreaptă astfel ca intersecția $d \cap p$ să fie formată dintr-un singur punct A. Fie O un punct pe dreapta d, diferit de A și fie M proiecția punctului O pe planul p. Triunghiul OMA este dreptunghic în M, deci unghiul $\widehat{OAM}$ este ascuțit. Acest unghi se numește *unghiul format de dreapta d și de planul p*, și va fi notat $\widehat{dp}$ (fig. V.75).

Ultima teoremă arată că *unghiul $\widehat{dp}$ este mai mic decît oricare din unghiurile formate de dreapta d cu o dreaptă d', situată în planul p și conținînd punctul* $A \in d \cap p$.

11. Unghiul a două plane

Pentru a putea defini unghiul a două plane, este necesar să demonstrăm două proprietăți:

Propoziția 1. Fie p un plan și fie A, B două puncte. Notăm prin A', B' proiecțiile ortogonale ale acestor puncte pe planul p și prin A'', B'' punctele pentru care avem

$$A' \in |AA''|, \ |AA'| \equiv |A'A''|, \ B' \in |BB''|, \ |BB'| \equiv |B'B''|.$$

În aceste condiții, avem $|A''B''| \equiv |AB|$ (fig. V.76).

Demonstrație. Punctele A, B, A', B', A'', B'' sînt situate într-un plan perpendicular pe planul p. Triunghiurile dreptunghice $A'B'B$, $A'B'B''$ sînt congruente, avînd o catetă comună și două catete congruente. Rezultă $|A'B| \equiv |A'B''|$ și $\widehat{BA'B} \equiv \widehat{B''A'B'}$. Deducem de aici că $\widehat{AA'B} \equiv \widehat{A''A'B''}$ și atunci triunghiurile $A'AB$, $A'A''B''$ sînt congruente. Prin urmare, $|AB| \equiv |A''B''|$.

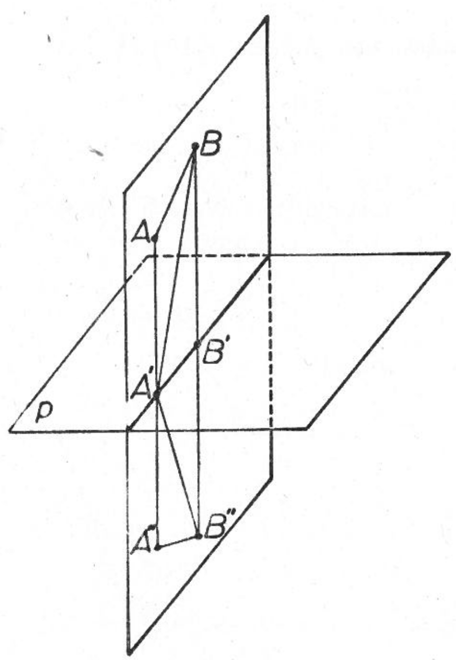


Fig. V.76

Propoziția 2. Fie p, q două plane avînd ca intersecție o dreaptă d; fie O, P două puncte pe dreapta d. Fie p', q' semiplane limitate de dreapta d în planul p, respectiv în planul q. Considerăm punctele $A \in p'$, $B \in p'$, $C \in q'$, $D \in q'$ astfel ca (fig. V.77)

$$AO \perp d, \ CO \perp d, \ BP \perp d, \ DP \perp d.$$

În aceste condiții, avem

$$\widehat{AOC} \equiv \widehat{BPD}.$$

Demonstrație. Putem presupune că am ales punctele A, B, C, D astfel ca

$$|OA| \equiv |OC| \equiv |PB| \equiv |PD|.$$

Fie M mijlocul segmentului $|OP|$ și fie r, s dreptele definite prin relațiile

$$r \subset p, \ s \subset q, \ r \perp d, \ s \perp d, \ M \in r, \ M \in s.$$

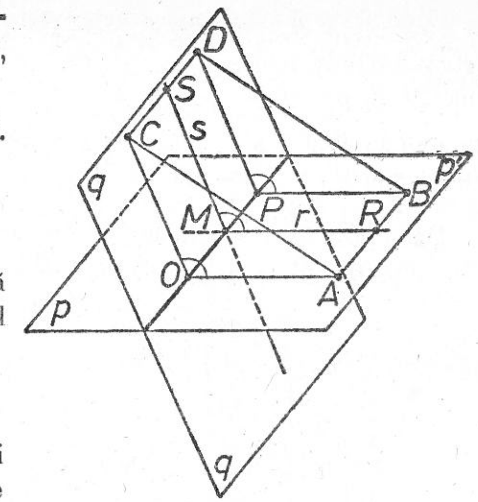


Fig. V.77

Aceste drepte intersectează segmentele $|AB|$, respectiv $|CD|$ în două puncte $R \in r$, $S \in s$, astfel ca

$$\widehat{OMC} \equiv \widehat{PMD}, \ \widehat{MCS} \equiv \widehat{MDS}, \ \widehat{OMA} \equiv \widehat{PMB}, \ \widehat{MAR} \equiv \widehat{MBR}.$$

Rezultă că avem

$$|CS| \equiv |DS|, \ CD \perp s, \ |AR| \equiv |BR|, \ AB \perp r.$$

Aplicînd Propoziția 1 planului ce conține punctele M, R, S și segmentelor $|AC|$, $|BD|$, deducem $|AC| \equiv |BD|$. Atunci triunghiurile AOC, BPD vor fi congruente și deducem $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BPD}$.

În baza Propoziției 2, dăm următoarea

Definiție. Fie p, q două plane avînd ca intersecție o dreaptă d. Fie p', q' două din semiplanele limitate de d în planele p, q astfel ca $p' \subset p$ și $q' \subset q$. Fie O un punct pe d și fie punctele $A \in p'$, $C \in q'$ astfel ca $AO \perp d$ și $CO \perp d$. Spunem atunci că unghiul $\widehat{AOC}$ reprezintă unghiul diedru $\widehat{p'q'}$, format de semiplanele p', q'. (fig. V.78).

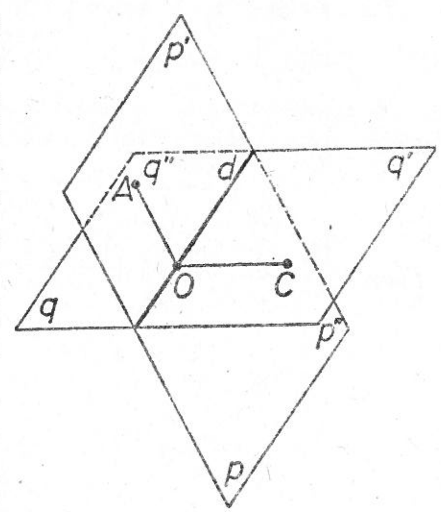


Fig. V.78

Fiind date două plane secante și neperpendiculare p și q, ele formează patru unghiuri diedre $\widehat{p'q'}$, $\widehat{p'q''}$, $\widehat{p''q'}$, $\widehat{p''q''}$ unde p', p'', q', q'' sînt semiplanele limitate în p și q de dreapta $d = p \cap q$. Fie u, v două unghiuri ce reprezintă unghiurile diedre $\widehat{p'q'}$, $\widehat{p'q''}$ și avînd același vîrf. Atunci u și v sînt unghiuri suplementare, deci unul dintre ele este ascuțit. Dacă u este un unghi ascuțit, spunem că *u reprezintă unghiul planelor* p, q (fig. V.79).

Dacă planele p, q sînt perpendiculare, spunem că orice unghi drept reprezintă unghiul planelor p, q (fig. V.80).

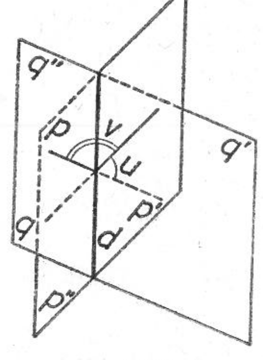


Fig. V.79

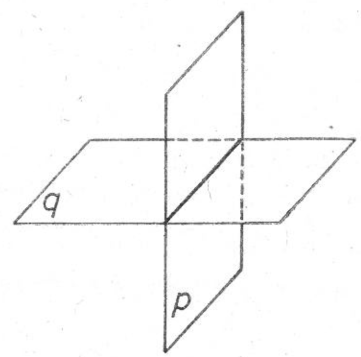


Fig. V.80

12. Teoremele lui Euclid privind unghiurile triedre
(pentru cercuri de elevi)

Am numit *unghi triedru* o mulțime formată din trei semidrepte necoplanare, dar avînd originea comună. Dacă notăm aceste semidrepte prin a, b, c, atunci unghiul triedru format de ele a fost notat $\widehat{abc}$.

T e o r e m a 1. În orice unghi triedru $\widehat{abc}$, avem

(1) $\quad \widehat{ab} + \widehat{bc} > \widehat{ac}$, $\widehat{bc} + \widehat{ca} > \widehat{ba}$, $\widehat{ca} + \widehat{ab} > \widehat{cb}$.

Demonstrație. Dacă unghiurile $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ sînt congruente două cîte două, atunci inegalitățile (1) sînt evidente.

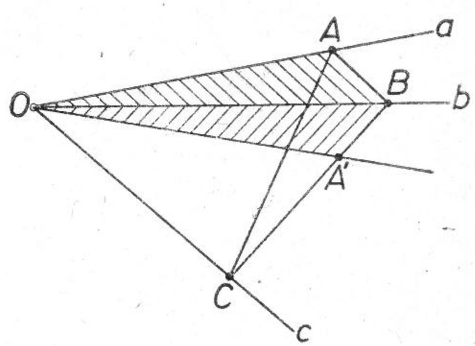


Fig. V.81

Fie O vîrful unghiului triedru $\widehat{abc}$ (fig. V.81).

Dacă unghiurile $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ nu sînt congruente două cîte două, unul dintre ele va fi congruent sau mai mare decît oricare din celelalte două. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $\widehat{bc} \geqslant \widehat{ab}$ și $\widehat{bc} \geqslant \widehat{ca}$. Să alegem punctele $B \in b$, $C \in c$ și $A' \in |BC|$ astfel ca $\widehat{BOA'} \equiv \widehat{ab}$ și

apoi punctul $A \in a$ astfel ca $|OA| \equiv |OA'|$. Triunghiurile AOB, $A'OB$ vor fi atunci congruente și rezultă $|AB| \equiv |A'B|$. Din relația $A' \in |BC|$ rezultă că $|A'B| < |BC|$, iar din triunghiul ABC deducem $|AB| + |AC| > |BC|$. Deci avem

$$|AB| + |AC| > |A'B| + |A'C| > |AB| + |A'C|,$$

și deducem inegalitatea $|AC| > |A'C|$.

Triunghiurile AOC, $A'OC$ sînt legate prin relațiile

$$|OA| \equiv |OA'|,\ |OC| \text{ latură comună},\ |AC| > |A'C|.$$

Rezultă inegalitatea

(2) $$\widehat{AOC} > \widehat{A'OC}.$$

În acest caz, vom avea

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} > \widehat{A'OB} + \widehat{A'OC} \equiv \widehat{BOC}$$

sau $\widehat{ab} + \widehat{ac} > \widehat{bc}$.

Primele două inegalități (1) rezultă din ipoteza $\widehat{bc} \geqslant \widehat{ac}$, $\widehat{bc} \geqslant \widehat{ab}$.

T e o r e m a 2. În orice unghi triedru $\widehat{abc}$ avem

$$\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ca} < 4 \text{ dr.}$$

Demonstrație. Notăm prin O vîrful unghiului triedru $\widehat{abc}$ și alegem punctele $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$. Fie M punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului ABC (fig. V.82).

Punctul M este atunci proiecția ortogonală a punctului O pe planul p al triunghiului ABC, deoarece dacă notăm prin M' punctul $\mathrm{pr}_p\, O$, din triunghiurile dreptunghice și congruente $OM'A$, $OM'B$, $OM'C$ deducem $|M'A| \equiv |M'B| \equiv |M'C|$.

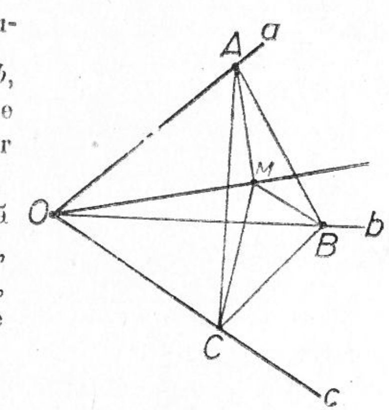


Fig. V.82

Știm că sînt adevărate inegalitățile

(4) $$\widehat{AMB} > \widehat{AOB},\ \widehat{BMC} > \widehat{BOC},\ \widehat{CMA} > \widehat{COA}.$$

Dacă punctul M este interior triunghiului ABC, atunci

$$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMA} \equiv 4 \text{ dr}$$

și inegalitățile (4) conduc la relația (3) (fig. V.83).

Dacă M este exterior triunghiului ABC, de exemplu dacă M se găsește în semiplanul opus lui B față de dreapta AC și dacă $M \in \hat{B}$ atunci (fig. V.84)

$$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} \equiv \widehat{AMC},\ \widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMA} \equiv 2\widehat{AMC} < 4 \text{ dr}$$

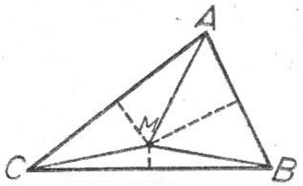


Fig. V.83

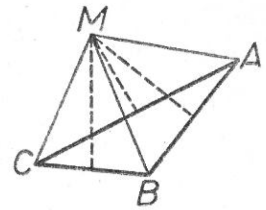


Fig. V.84

și relația (3) va rezulta ca în cazul anterior. Dacă $M \in |BC|$, avem

$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{AMC} = 4$ dr și (3) este încă adevărată.

Exerciții

1. Fie $P_1P_2 \ldots P_n$ un poligon convex situat într-un plan p. Fie A un punct exterior planului p.

Să se arate că suma măsurilor unghiurilor $\widehat{P_1AP_2}$, $\widehat{P_2AP_3}$, ..., $\widehat{P_{n-1}AP_n}$, $\widehat{P_nAP_1}$ este mai mică decît suma măsurilor a patru unghiuri drepte (fig. V.85).

(Indicație (după *Euclid* și *Tartaglia*). Se consideră unghiurile triedre cu vîrfurile în punctele P_i, deci unghiurile de forma $\widehat{a_ir'_ir''_i}$, unde a_i sînt semidreptele $|P_iA$, r'_i sînt semidreptele $|P_iP_{i-1}$ iar r''_i sînt semidreptele $|P_iP_{i+1}$ și unde presupunem că $P_{n+1} = P_1$, $P_n = P_0$. Pentru fiecare din aceste unghiuri triedre avem (fig. V.86).

$$\widehat{AP_iP_{i-1}} + \widehat{AP_iP_{i+1}} > \widehat{P_{i-1}P_iP_{i+1}}.$$

Adunînd aceste relații membru cu membru, obținem că suma unghiurilor de la baze ale triunghiurilor AP_iP_{i-1} este mai mare decît suma unghiurilor poligonului

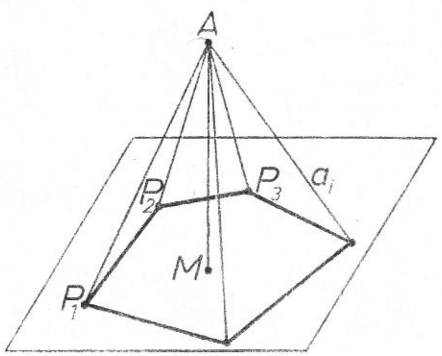


Fig. V.85

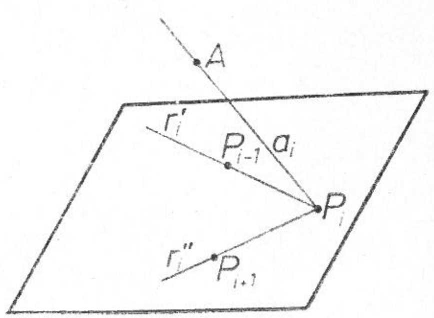


Fig. V.86

$P_1P_2 \ldots P_n$, deci este mai mare decît $2(n-2)$ dr. Se deduce că suma unghiurilor din A ale acelorași triunghiuri este mai mică decît $2n$ dr $- 2(n-2)$ dr $= 4$ dr.)

2. Fie ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ trei triunghiuri isoscele astfel ca

(5) $|AB| \equiv |AC| \equiv |A'B'| \equiv |A'C'| \equiv |A''B''| \equiv |A''C''|$ (fig. V.87).

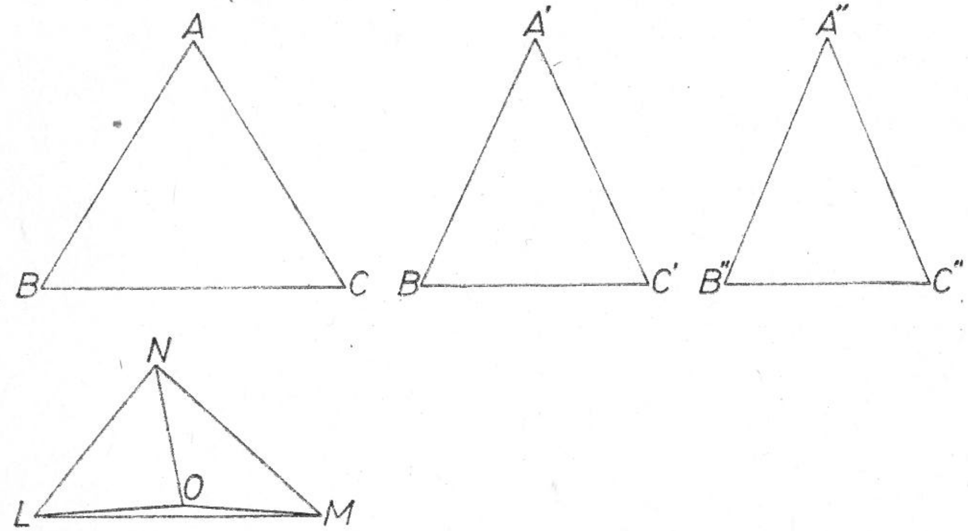


Fig. V.87

(6) $\hat{A} + \hat{A}' > \hat{A}''$, $\hat{A}' + \hat{A}'' > \hat{A}$, $\hat{A}'' + \hat{A} > \hat{A}'$, $\hat{A} + \hat{A}' + \hat{A}'' < 4$ dr.

a) Să se arate că segmentele $|BC|$, $|B'C'|$, $|B''C''|$ sînt congruente cu laturile unui triunghi LMN.

b) Notînd prin O punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului LMN, să se arate că, dacă punctul O este interior triunghiului LMN, atunci $|AB| > |OL|$.

(Indicație (după Euclid). Prima afirmație rezultă din exercițiul 3 de la pag. 124. Pentru a demonstra inegalitatea de la punctul b), se procedează prin reducere la absurd. Presupunînd că $|AB| \equiv |OL|$, se obțin congruențele de triunghiuri

$$ABC \equiv OLM,\ A'B'C' \equiv OMN,\ A''B''C'' \equiv OLN,$$

din care se deduce că, dacă O este interior triunghiului LMN, atunci

$$\hat{A} + \hat{A}' + \hat{A}'' \equiv \widehat{LOM} + \widehat{MON} + \widehat{NOL} \equiv 4 \text{ dr},$$

deci se contrazice ipoteza ultimă de la (6). Dacă se presupune că $|AB| < |OL|$ și că O este interior triunghiului LMN, se consideră punctele L', M', N' pe segmentele $|OL|$, $|OM|$, $|ON|$, astfel ca

$$|OL'| \equiv |OM'| \equiv |ON'| \equiv |AB|.$$

Avem relațiile

$|L'M'| < |LM| \equiv |BC|$, $|M'N'| < |MN| \equiv |B'C'|$, $|N'L'| < |NL| \equiv |B''C''|$

și rezultă, comparînd triunghiurile indicate mai sus, că avem

$$\hat{A} > \widehat{LOM},\ \hat{A}' > \widehat{MON},\ \hat{A}'' > \widehat{NOL}$$

deci $\hat{A} + \hat{A}' + \hat{A}'' > 4$ dr.

Dacă punctul O se găsește pe una din laturi, de exemplu pe $|MN|$, se arată ușor că nu este posibil ca $|AB| \leqslant |OL|$.)

Euclid nu a considerat cazul în care punctul O este exterior triunghiului LMN; acest caz este mult mai greu de rezolvat.

3. În ipotezele admise în exercițiul precedent, să se demonstreze existența unui triedru $\widehat{abc}$, astfel încît $\widehat{ab} \equiv \hat{A}$, $\widehat{bc} \equiv \hat{A}'$, $\widehat{ca} \equiv \hat{A}''$.

(Indicație. Se construiește triunghiul LMN și apoi punctul O. Pe perpendiculara ridicată în punctul O pe planul triunghiului LMN, se consideră un punct P, astfel ca $|PL| \equiv |AB|$. Atunci semidreptele $|PL$, $|PM$, $|PN$ formează un unghi triedru avînd proprietățile cerute.)

4. *(R. Glaser)*. Fiind date trei unghiuri u, v, w astfel ca suma măsurilor acestor unghiuri să nu depășească 2π și suma măsurilor a două oarecare din cele trei unghiuri să fie mai mică decît măsura celui de-al treilea unghi, să se arate că cele trei unghiuri sînt congruente cu unghiurile unui unghi triedru.

(Indicație. Se presupune problema rezolvată și se presupune că $\widehat{abc}$ este un unghi triedru avînd $\widehat{ab} \equiv w$, $\widehat{bc} \equiv u$, $\widehat{ca} \equiv v$. Fie S originea semidreptelor a, b, c și fie $A \in a$. Se proiectează punctul A pe planul semidreptelor b, c. Fie F această proiecție și fie G și E proiecțiile lui F pe dreptele suport ale lui b respectiv c. Pe dreptele FG, FE se iau punctele B, C, exterioare unghiului $\widehat{bc}$ și astfel ca $|EB| \equiv |AE|$, $|GC| \equiv |AG|$, $\widehat{ESB} \equiv v$, $\widehat{GSC} \equiv w$, $|SB| \equiv |SC| \equiv |SA|$. Se construiește triunghiul FDE, dreptunghic în F, astfel ca $|DE| \equiv |EB|$. Se arată atunci că $|FD| \equiv |FA|$.

Se deduce construcția punctului A, după o alegere convenabilă a punctelor S, B, C, F, D, în această ordine.)

13. Proprietăți de paralelism

Numim *drepte paralele* două drepte coplanare, care nu au nici un punct comun (sînt disjuncte sau nesecante).

Reamintim că două mulțimi, care nu au nici un element comun, se zic *disjuncte*. Deci putem spune că două drepte paralele sînt două drepte coplanare și disjuncte.

Două drepte paralele aparțin unui singur plan, deoarece două plane distincte nu pot avea mai mult decît o dreaptă în comun.

Vom nota planul care conține dreptele paralele d, d' prin $d \vee d'$.

În spațiu, există perechi de drepte disjuncte, care nu sînt paralele. De exemplu, două drepte de forma AB, CD, unde A, B, C, D sînt patru puncte necoplanare, sînt disjuncte și neparalele. Două drepte disjuncte, care nu sînt paralele, sînt necoplanare. (fig. V.88).

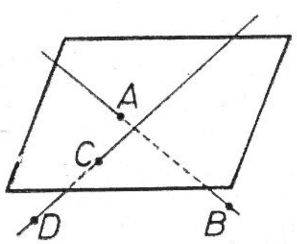


Fig. V.88

Dacă a, b sînt două drepte distincte concurente într-un punct, există un singur plan, care conține aceste drepte. Vom nota acest plan prin $a \vee b$.

De asemenea, dacă avem o dreaptă d și un punct P, exterior dreptei d, există un singur plan care conține punctul P și dreapta d. Notăm acest plan prin $P \vee d$.

Spunem că *două plane p, q sînt paralele, dacă acele plane sînt disjuncte, deci dacă $p \cap q = \Phi$. Un plan p se zice paralel cu o dreaptă d dacă d și p sînt mulțimi disjuncte, deci dacă $d \cap p = \Phi$.*

Două plane distincte sînt fie paralele, fie secante după o dreaptă.

O dreaptă și un plan ce nu conține acea dreaptă sînt fie disjuncte, deci paralele, fie se intersectează într-un singur punct.

Reamintim **postulatul lui Euclid:**

Fiind date un punct P și o dreaptă d, care nu conține punctul P, există o singură dreaptă d', paralelă cu d și conținînd punctul P.

Folosind definițiile date și postulatul lui Euclid, putem demonstra numeroase proprietăți importante. Să dăm cîteva exemple.

1. *Fie d o dreaptă paralelă cu o dreaptă a dintr-un plan p. Atunci dreapta d este paralelă cu planul p sau este conținută în acest plan.*

Demonstrație. Să presupunem că d are un punct comun A cu planul p. Prin punctul A se poate duce o singură paralelă la dreapta a și această paralelă este conținută în planul p. Rezultă că $d \subset p$. Deci, dacă d și p nu sînt disjuncte, avem $d \subset p$. Deci am demonstrat că:

$$\boxed{d \parallel a,\ a \subset p \Rightarrow d \parallel p \text{ sau } d \subset p.}$$

2. *Fie d o dreaptă paralelă cu un plan p și fie q un plan ce conține dreapta d. Atunci planele p, q sînt paralele, sau au ca intersecție o dreaptă paralelă cu dreapta d* (fig. V.89).

Demonstrație. Planele p, q sînt distincte, deoarece q conține d și p nu conține dreapta d. Să presupunem că planele p, q nu sînt paralele. Atunci ele se vor intersecta după o dreaptă d'. Dreptele d, d' se găsesc în planul q. Ele nu pot fi concurente, deoarece $d \cap d' \subset d \cap p = \Phi$. Deci d, d' sînt drepte paralele. Deci am arătat că:

$$\boxed{d \parallel p,\ d \subset q \Rightarrow p \parallel q \text{ sau } (p \cap q) \parallel d.}$$

3. *Fie d o dreaptă paralelă cu un plan p și fie A un punct în planul p. Notăm prin a paralela dusă prin A la dreapta d. Atunci dreapta a este conținută în planul p.* (fig. V.90).

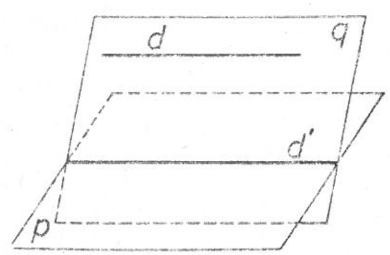


Fig. V.89

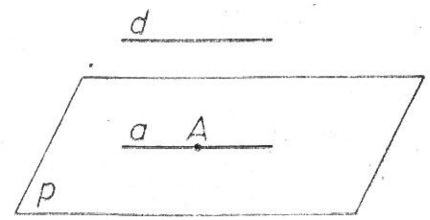


Fig. V.90

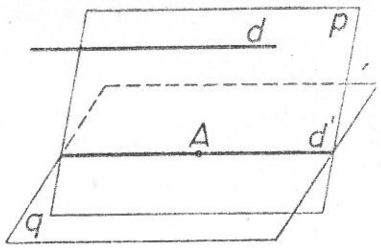


Fig. V.91

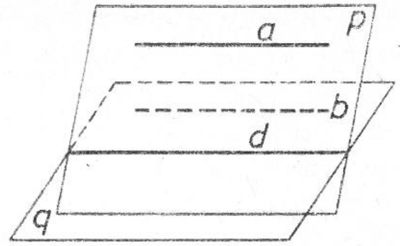


Fig. V.92

Demonstrație. Dreapta d și punctul A aparțin unui plan q. Acest plan intersectează planul p după o dreaptă d', care trece prin A. Proprietatea 2 arată că $d' \parallel d$. Din postulatul lui Euclid rezultă $d' = a$, deci $a \subset p$. Deci am arătat că:

$$\boxed{d \parallel p,\ A \in p,\ a \parallel d,\ A \in a \Rightarrow a \subset p.}$$

4. *Fie p, q două plane paralele cu o dreaptă d. Atunci planele p, q sînt fie paralele, fie ele se intersectează după o dreaptă paralelă cu dreapta d* (fig. V.91).

Demonstrație. Să presupunem că planele p, q nu sînt paralele și că intersecția lor este o dreaptă d'. Fie $A \in d'$. Prin punctul A să ducem dreapta a, paralelă cu d. Din propoziția 3 rezultă $a \subset p$ și $a \subset q$, deci avem $a = p \cap q$. Deci am demonstrat că:

$$\boxed{p \parallel d,\ q \parallel d,\ p \cap q = a \Rightarrow d \parallel a.}$$

5. *Fie a, b două drepte paralele și fie planele p, q astfel ca $a \subset p$ și $b \subset q$ Presupunem că intersecția $p \cap q$ este o dreaptă d; atunci $a \parallel d$ și $b \parallel d$.* (fig. V.92).

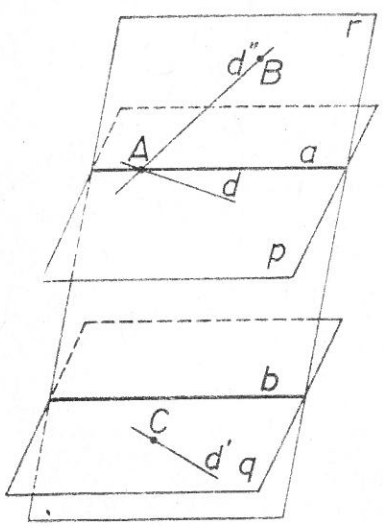


Fig. V.93

Demonstrație. Din proprietatea 1 rezultă $a \parallel q$ și $b \parallel p$. Din proprietatea 2 rezultă $a \parallel d$ și $b \parallel d$.

6. *Fie p, q două plane paralele și fie r un al treilea plan, care intersectează planul p după o dreaptă a. Atunci r va intersecta planul q după o dreaptă b paralelă cu a* (fig. V.93).

Demonstrație. Să demonstrăm în primul rînd că planele q, r nu sînt paralele. Pentru aceasta, să presupunem prin absurd că planele q, r ar fi paralele. Să alegem punctele $A \in a$, $B \in r$ și $C \in q$ astfel ca $B \notin p$. Punctele A, B, C sint situate într-un același plan s. Planul s va intersecta planele p, q, r după trei drepte $d \subset p$, $d' \subset q$ și $d'' = AB \subset r$, astfel ca $C \in d'$ și $A \in d$. Dreptele d, d'

sînt paralele, fiind coplanare și disjuncte, avînd $d \cap d' \subset p \cap q = \Phi$. Dreptele d', d'' sînt de asemenea coplanare și disjuncte, deci paralele. Deci prin A trec două drepte paralele cu dreapta d'. Dreptele d, d'' sînt distincte, deoarece $B \in d''$ și $B \notin d$, deoarece $B \notin p$. Am ajuns la o contradicție, care arată că planele q, r nu sînt paralele. Fie b dreapta lor de intersecție. Avem $a \subset r$, $b \subset r$ și $a \cap b \subset p \cap q = \Phi$, deci dreptele a, b sînt paralele. Am demonstrat că:

$$\boxed{p \parallel q,\ p \cap r = a \Rightarrow q \cap r \neq \Phi,\ (q \cap r) \parallel a.}$$

7. *Dacă două plane distincte p, q sînt paralele cu al treilea plan r, atunci planele p, q sînt paralele între ele* (fig. V.94).

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că planele p, q s-ar intersecta după o dreaptă d. Din propoziția 6 rezultă că planul p va intersecta planul r, care este paralel cu q, după o dreaptă d', ceea ce contrazice ipoteza $p \parallel r$. Deci avem $p \parallel q$. Deci:

$$\boxed{p \neq q,\ p \parallel r,\ q \parallel r \Rightarrow p \parallel q.}$$

8. *Fie d dreapta de intersecție a două plane p, q și fie r un plan paralel cu dreapta d, care intersectează planele p, q după dreptele a, b. Atunci a și b sînt drepte paralele* (fig. V.95).

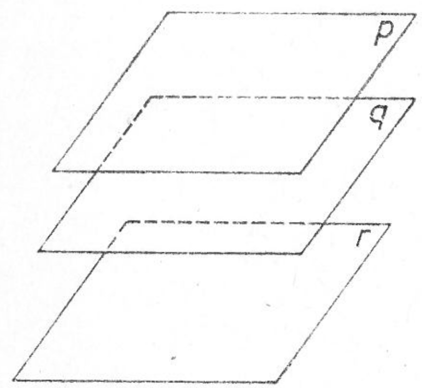


Fig. V.94

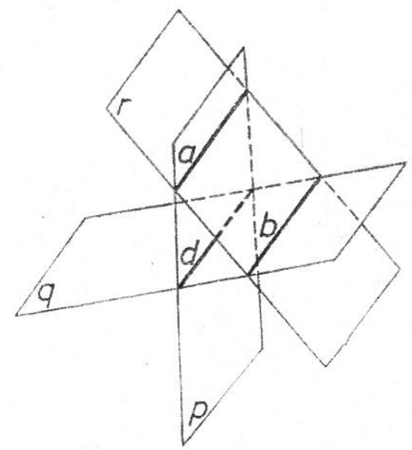


Fig. V.95

Demonstrație. Avem

$$a \cap b \subset p \cap q = d.$$

Dar dreapta d este paralelă cu fiecare din dreptele a, b, deoarece planul r este paralel cu dreapta d (vezi proprietatea 2). Rezultă că dreptele a, b nu au nici un punct comun. Aceste drepte sînt situate în planul r, deci sînt coplanare și disjuncte. Rezultă $a \parallel b$.

9. *Fie d, d', d'' trei drepte distincte, astfel ca d să fie paralelă cu d' şi cu d''. Atunci dreptele d', d'' sînt paralele între ele* (fig. V.96).

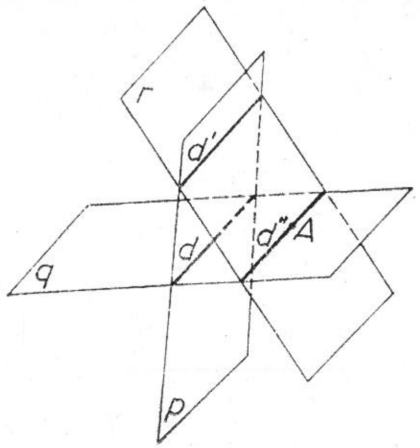


Fig. V.96

Demonstraţie. Dreptele d', d'' sînt disjuncte, deoarece dacă aceste drepte ar avea un punct comun A, prin acest punct ar trece două drepte paralele cu dreapta d, în contradicţie cu postulatul lui Euclid.

Fie A un punct pe dreapta d'' şi fie planele

$$p = d \vee d',\quad q = d \vee d'',\quad r = A \vee d'.$$

Avem $r \parallel d$, $d = p \cap q$.

Din proprietatea 8 rezultă că planul r intersectează planul q după o dreaptă a, paralelă cu dreapta d. Comparînd relaţiile

$$A \in a,\ a \parallel d,\ A \in d'',\ d'' \parallel d$$

şi aplicînd postulatul lui Euclid, deducem $a = d''$. Atunci $d'' \subset r$, deci dreptele d', d'' sînt coplanare. Aceste drepte sînt disjuncte. Rezultă $d' \parallel d''$. Deci am arătat că:

$$\boxed{d \parallel d',\ d \parallel d'',\ d' \neq d'' \Rightarrow d' \parallel d''.}$$

10. *Fie p un plan şi fie A un punct exterior acestui plan. Atunci reuniunea dreptelor care trec prin punctul A şi care sînt paralele cu planul p este un plan q, paralel cu planul p* (fig. V.97).

Demonstraţie. Fie d', d'' două drepte distincte, trecînd prin A şi paralele cu planul p. Dreptele d', d'' aparţin unui plan $q = d' \vee d''$. Planul q este paralel cu planul p, deoarece dacă ar exista un punct M comun acestor plane, ar exista o dreaptă comună a. Dreapta a ar fi concurentă cu cel puţin una din dreptele d', d'', deoarece prin A se poate duce o singură paralelă la a. Dacă a este concurentă cu d', într-un punct P, avem $P \in (d' \cap p)$ ceea ce contrazice ipoteza $d' \parallel p$. La fel, nu putem avea a concurentă cu d''. Deci $p \cap q = \Phi$, deci $p \parallel q$.

Orice dreaptă dusă prin A şi situată în planul q va fi paralelă cu planul p, deoarece orice astfel de dreaptă este disjunctă cu p.

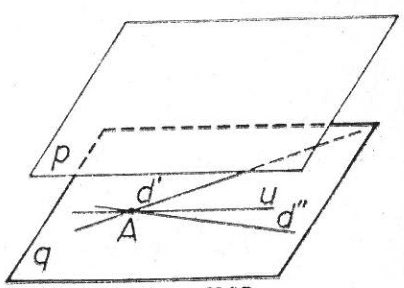


Fig. V.97

Fie u o dreaptă dusă prin A şi paralelă cu planul p (fig. V.98). Vrem să arătăm că u este conţinută în planul q. Să presupunem, prin absurd, că u nu este conţinută în planul q. Prin u să ducem un plan oarecare r. Acest plan va intersecta planul p după o dreaptă a şi planul q după o dreaptă b, astfel încît dreptele b, u sînt paralele cu a. Dar dreptele b, u conţin punctul A. Din postulatul lui Euclid rezultă $u = b$ deci $u \subset q$, contrar ipotezei.

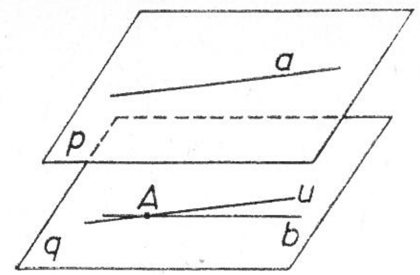


Fig. V.98

Deci am arătat că *planul $q = d' \vee d''$ este reuniunea tuturor dreptelor care trec prin punctul A şi care sînt paralele cu planul p* şi că acest plan este paralel cu planul p.

Din demonstraţia dată putem desprinde şi următoarele proprietăţi:

11. *Dacă un plan q conţine două drepte distincte şi concurente d', d'', paralele cu un plan p, atunci planele p, q sînt paralele.*

12. *Prin orice punct A, exterior unui plan p, trece un plan q, paralel cu planul p* (fig. V.99).

Prin punctul A trece un singur plan paralel cu planul p, deoarece două plane distincte, paralele cu un al treilea plan, sînt paralele între ele (proprietatea 7).

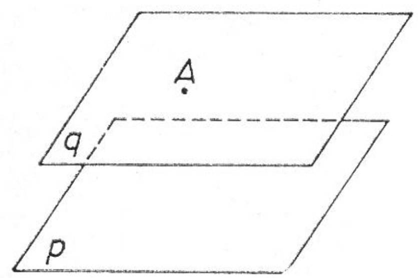


Fig. V.99

Aplicaţia **1.** *Fie d o dreaptă şi p un plan astfel ca intersecţia $p \cap d$ să fie formată dintr-un punct A. Prin fiecare punct N al dreptei d, diferit de punctul A, să ducem planul p_N, paralel cu planul p. Obţinem atunci o mulţime de plane, paralele două cîte două şi astfel încît, prin fiecare punct al spaţiului trece un plan al mulţimii* (fig. V.100).

Dacă intersectăm planele acestei familii cu un plan q, ce nu aparţine familiei considerate, obţinem în planul q o familie de drepte paralele, astfel încît prin fiecare punct al planului q trece o dreaptă din această familie.

A p l i c a ţ i a **2.** *Fie p un plan şi fie d o dreaptă, care intersectează planul p într-un singur punct A. Prin fiecare punct M al planului p, $M \neq A$, să ducem dreapta d_M, care este paralelă cu d şi care trece prin punctul M* (fig. V.101).

Obţinem în acest fel o familie de drepte paralele două cîte două, astfel încît, prin fiecare punct al spaţiului, trece o dreaptă a familiei şi una singură.

Să notăm prin P familia planelor paralele cu planul p, la care să adăugăm planul p, şi să mai notăm prin D familia dreptelor paralele cu dreapta d, la care adăugăm dreapta d.

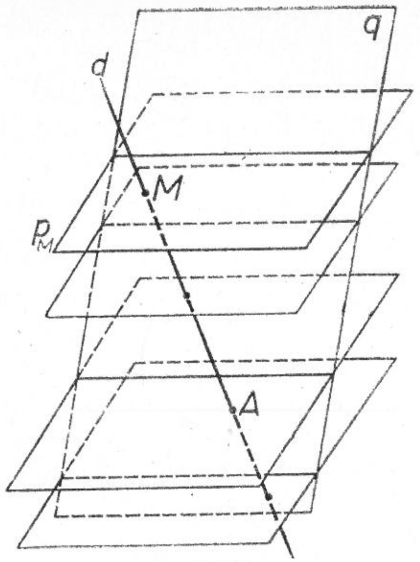


Fig. V.100

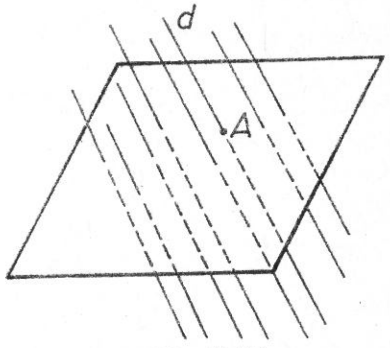


Fig. V.101

Pentru orice punct A din spațiu, există un singur plan $p_A \in P$ și o singură dreaptă $d_A \in D$, astfel ca $A \in p_A$ și $A \in d_A$. Planul p_A intersectează dreapta d într-un punct A', iar dreapta d_A intersectează planul p într-un punct A''. Se spune că A' este proiecția punctului A, pe dreapta d, paralelă cu planul p, și că A'' este proiecția punctului A pe planul p, paralelă cu dreapta d.

Exerciții

I. *Să se formuleze în cuvinte următoarele implicații și să dea demonstrațiile corespunzătoare:*

1. $d \not\subset p, d \parallel a, a \subset p \Rightarrow d \parallel p$.
2. $d \parallel a, a \parallel p, d \not\subset p \Rightarrow d \parallel p$.
3. $d \parallel p, p \parallel q, d \not\subset q \Rightarrow d \parallel q$.
4. $d \parallel p, d \subset q, d' = p \cap q \Rightarrow d \parallel d'$.
5. $d \parallel p, A \in p, a \parallel d, A \in a \Rightarrow a \subset p$.
6. $p \parallel d, q \parallel d, p \cap q = d' \Rightarrow d \parallel d'$.
7. $p \parallel q, p \cap r = a \Rightarrow (q \cap r) \parallel a$.
8. $p \neq q, p \parallel r, q \parallel r \Rightarrow p \parallel q$.
9. $a \parallel b, a \subset p, b \subset q, p \cap q = d, d \neq a \Rightarrow a \parallel d$.
10. $d \parallel d', d \parallel d'', d' \neq d'' \Rightarrow d' \parallel d''$.
11. $p \parallel q, a \subset p \Rightarrow a \parallel q$.
12. $p \parallel q, a \parallel q, a \cap p \neq \varnothing \Rightarrow a \subset p$.
13. $a \parallel q, b \parallel q, \{P\} = a \cap b, a \cup b \subset p \Rightarrow p \parallel q$.
14. $p \parallel r, q \parallel r, p \cap q \neq \varnothing \Rightarrow p = q$.
15. $a \parallel b, a \perp d \Rightarrow b \perp d$.
16. $a \parallel b, a \perp p \Rightarrow b \perp p$.
17. $a \perp p, p \parallel q \Rightarrow a \perp q$.

II. *Fie O, A, B, C patru puncte astfel ca $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ și fie*

$$a = d(O, A), b = d(O, B), c = d(O, C).$$

1. *Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC în funcție de a, b, c.*
2. *Să se calculeze aria S_{ABC} a triunghiului ABC și să se demonstreze relația*

$$S^2_{ABC} = S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCA}.$$

3. *Să se arate că proiecția ortogonală a punctului O pe planul (ABC) este ortocentrul H al triunghiului ABC.*
4. *Să se calculeze distanța $d(O, H)$.*

III. *Două drepte d, d' intersectează trei plane paralele p, q, r în puncte P, Q, R, respectiv P', Q', R'. Să se demonstreze teorema lui Thales în spațiu:* $\dfrac{|RP|}{|RQ|} = \dfrac{|R'P'|}{|R'Q'|}$.

(*Indicație.* Se duce prin P' paralela d'' la dreapta d și se consideră punctele de intersecție ale dreptei d'' cu planele q și r. Teorema lui Thales în spațiu se reduce astfel la teorema lui Thales plană.)

IV. *Fie a, b două drepte neparalele. Să se arate că prin fiecare punct al spațiului trece un plan paralel cu a și cu b, și o dreaptă perpendiculară pe a și pe b.*

V. *Să se arate că reuniunea dreptelor care întîlnesc o dreaptă d și care sînt perpendiculare pe un plan p este un plan perpendicular pe planul p, sau $d \perp p$.*

VI. *Fie a, b două drepte necoplanare. Să se arate că există numai două puncte $A \in a$ și $B \in b$ astfel ca $AB \perp a$ și $AB \perp b$.*

(*Indicație.* Se consideră planul p astfel ca $a \subset p$ și $b \parallel p$ și se proiectează dreapta b pe planul p. Notînd prin b' dreapta obținută, punctul A va fi dat de intersecția $a \cap b'$, iar B va fi proiecția lui A pe b.)

VII. *Fie p un plan și fie ABC un triunghi astfel ca $BC \parallel p$. Să presupunem că unghiul u reprezintă unghiul dintre planele p, (ABC). Să se arate că aria proiecției ortogonale a triunghiului ABC pe planul p este egală cu produsul dintre aria lui ABC și $\cos u$, presupunînd $u <$ dr.*

VIII. *Să se generalizeze proprietatea de la exercițiul VII, lăsînd la o parte ipoteza $BC \parallel p$.*

IX. *Să se arate că pătratul lungimii unui segment este egal cu semisuma pătratelor lungimilor proiecțiilor acelui segment pe trei plane p, q, r, știind că aceste plane sînt perpendiculare două cîte două.*

X. 1. *Fie $\widehat{abc}$ un unghi triedru. Notăm prin $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ unghiurile fețelor și prin $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ unghiurile diedre ale acestui unghi triedru, de exemplu $\hat{a} = \widehat{bc}$, $\hat{A}$ = unghiul diedru al fețelor cu muchia a. Să se arate că*

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{a}} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{b}} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{c}}.$$

(*Indicație.* Fie O vîrful unghiului triedru $\widehat{abc}$ și fie punctele $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $M \in BC$, $P \in OM$, $Q \in OB$, $R \in OC$ astfel ca $AB \perp OA$, $AC \perp OA$, $OM \perp BC$, $AP \perp OM$, $PQ \perp OB$, $PR \perp OC$. Se arată că $\dfrac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{a}} = \dfrac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{OBC} \sin \hat{b}} = \dfrac{\sin \widehat{AOM}}{\sin \hat{b} \sin \hat{c}}$, $\sin \widehat{AOM} = \sin \hat{B} \sin \hat{c}$.)

2. *Păstrînd notațiile din exercițiul precedent, să se arate că avem*

$$\cos \hat{a} = \cos \hat{b} \cos \hat{c} + \sin \hat{b} \sin \hat{c} \cos \hat{A}.$$

(*Indicație.* Se pleacă de la relația $\cos \hat{A} = \cos \widehat{BAC} = -\cos (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = -\cos (\widehat{ABM} + \widehat{ACM})$.)

Observație. Se constată o asemănare între formulele stabilite în ultimele două exerciții și teorema sinusurilor și teorema cosinusului unui triunghi plan.

Capitolul

VI Vectori în spațiu

1. Operații cu vectori

În prima parte a acestui manual, am introdus noțiunile următoare: vectori legați sau vectori, vectori nuli, vectori coliniari, vectori paraleli, vectori de același sens (paraleli sau coliniari), vectori echipolenți, norma unui vector, unghiul a doi vectori nenuli, produsul scalar a doi vectori arbitrari, produsul unui vector cu un număr real, suma a doi vectori într-un punct, vectori opuși.

Temă. *Să se reamintească definițiile noțiunilor precedente și să se arate că aceste definiții au sens atît pentru vectori într-un plan, cît și pentru vectori în spațiu.*

Exerciții

Notînd prin $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ *vectori în spațiu și prin* $A, B, C, M, N, P, Q, \ldots$ *puncte iar prin* $x, y, z, r, s, t, \ldots$ *numere reale, să se demonstreze următoarele proprietăți generale, deci adevărate fără ipoteze suplimentare făcute asupra elementelor care apar în exprimarea lor:*

1. $\vec{u} + \vec{v}$ (în A) $= \vec{v} + \vec{u}$ (în A)

2. $\vec{u} + \vec{v}$ (în A) $\sim \vec{u} + \vec{v}$ (în B)

3. $[\vec{u} + \vec{v}$ (în A)$] + \vec{w}$ (în A') $= \vec{u} + [\vec{v} + \vec{w}$ (în A'')$]$ (în A')

4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ (în O) $= \overrightarrow{OO}$

5. $x(\vec{u} + \vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$

6. $(x + y)\vec{u} = x\vec{u} + y\vec{u}$

7. $x(y\vec{u}) = (xy)\vec{u}$,

8. $1\vec{u} = \vec{u}$

9. $\vec{u} \sim \vec{u}', \vec{v} \sim \vec{v}' \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v}', \vec{u} + \vec{v}$ (în A) $= \vec{u}' + \vec{v}'$ (în A)

10. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

11. $(x\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (x\vec{v}) = x(\vec{u} \cdot \vec{v})$

12. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} \in \vec{O}$.

Reamintim următoarele convenții:

1) Dacă $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ (în A), scriem $\vec{w} \sim \vec{u} + \vec{v}$.

2) Dacă $\vec{u}$ este un vector nul, scriem $\vec{u} \in \vec{0}$.

2. Teoreme relative la proiecții ortogonale

Fie d o dreaptă într-un plan p. Fiind dat un punct oarecare A în planul p, știm că există o singură dreaptă a, perpendiculară pe d, situată în planul p și conținînd punctul A. Dreapta a intersectează dreapta d într-un punct A', care se numește proiecția ortogonală, sau proiecția punctului A pe dreapta d. Vom folosi notația $A' = \text{pr}_d A$ (fig. VI.1)

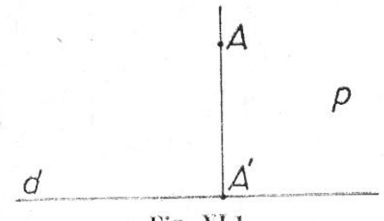


Fig. VI.1

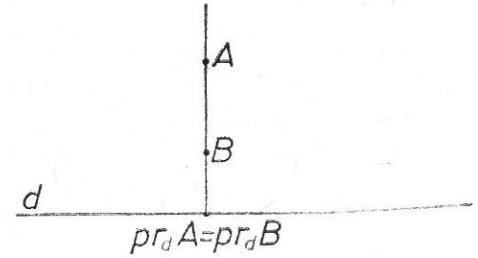


Fig. VI.2

Dacă $A \in d$, avem $A' = A$. Dacă A, B sînt două puncte astfel încît dreapta AB este perpendiculară pe d, atunci $\text{pr}_d A = \text{pr}_d B$ (fig. VI.2).

Fiind dat un vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, definim proiecția $\vec{v}' = \text{pr}_d \vec{v}$ punînd $\vec{v}' = \overrightarrow{A'B'}$, unde $A' = \text{pr}_d A$ și $B' = \text{pr}_d B$ (fig. VI.3).

Dacă vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sînt echipolenți, proiecțiile lor $\vec{u}' = \text{pr}_d \vec{u}$ și $\vec{v}' = \text{pr}_d \vec{v}$ sînt de asemenea doi vectori echipolenți (fig. VI.4).

Fie E și F două puncte distincte pe dreapta d și fie $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.

Vrem să arătăm că, pentru orice vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, coplanar cu $\vec{w}$, avem:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{w} = (\text{pr}_d \vec{u}) \cdot \vec{w}.} \tag{1}$$

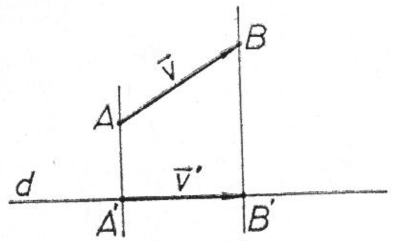


Fig. VI.3

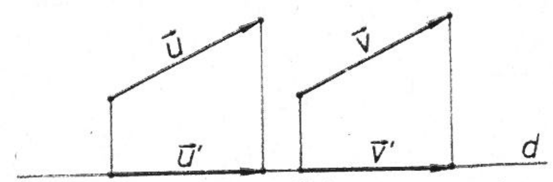


Fig. VI.4

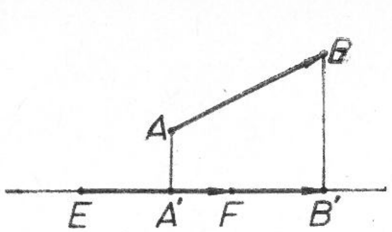


Fig. VI.5

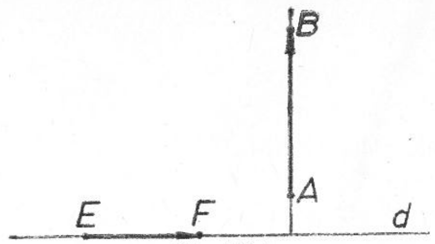


Fig. VI.6

Să punem $A' = pr_d A$ şi $B' = pr_d B$. Trebuie să arătăm că (fig. VI.5)

(2) $$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF}}.$$

Fie t un unghi, care reprezintă unghiul vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{w}$. Dacă t este un unghi drept, atunci $A' = B'$ şi $\cos t = 0$, deci relaţia (2) este verificată, avînd ambii membri egali cu 0 (fig. VI.6).

Dacă t este un unghi obtuz, avem $\cos t < 0$ şi $|A'B'| \equiv -\cos t \cdot |AB|$, deci $\|\overrightarrow{A'B'}\| = -\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\cos t$. Din definiţia produsului scalar a doi vectori deducem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{EF}\|\cos t = -\|\overrightarrow{A'B'}\|\,\|\overrightarrow{EF}\| = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF}$, deoarece vectorii $\overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{EF}$ au sensuri opuse, dacă unghiul t este obtuz (fig. VI.7).

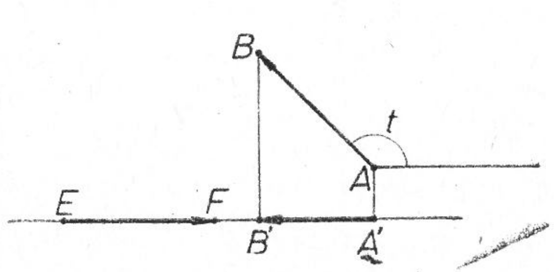


Fig. VI.7

Dacă unghiul t este ascuţit, avem $\cos t>0$, $|A'B'| \equiv \cos t\cdot|AB|$, $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\cos t$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{EF}\|\cos t = \|\overrightarrow{A'B'}\|\cdot\|\overrightarrow{EF}\| = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF}$, deoarece vectorii $\overrightarrow{A'B'}$ şi $\overrightarrow{EF}$ sînt coliniari şi de acelaşi sens (fig. VI.8).

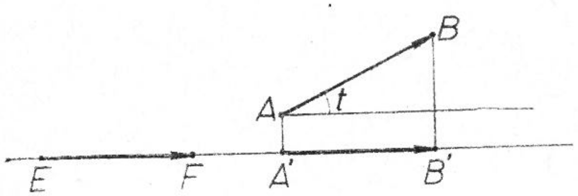


Fig. VI.8

Deci formulele (1) şi (2) sînt demonstrate în toate cazurile.

3. Alte proprietăţi ale produsului scalar

1. Pentru orice doi vectori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ avem

(1) $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}.$$

Demonstraţie. Unghiurile $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ şi $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}})$ sînt suplementare (fig. VI.9), deci $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = -\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}})$. Formula (1) rezultă atunci din definiţia produsului scalar a doi vectori.

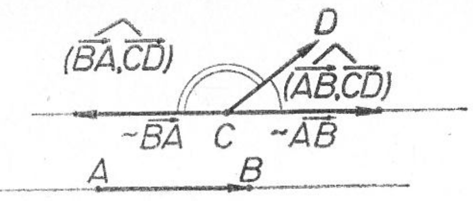


Fig. VI.9

2. Dacă punctele C, D aparţin unei drepte d şi dacă A', B' sînt proiecţiile ortogonale ale punctelor A respectiv B pe dreapta d, atunci

(2) $$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{CD}.}$$

Demonstraţie. Dacă vectorul $\overrightarrow{A'B'}$ este nul, vectorul $\overrightarrow{AB}$ este nul sau perpendicular pe dreapta d şi relaţia (2) este adevărată. Dacă vectorul $\overrightarrow{CD}$ este nul, relaţia (2) este de asemenea adevărată. Să presupunem că vectorii $\overrightarrow{A'B'}$,

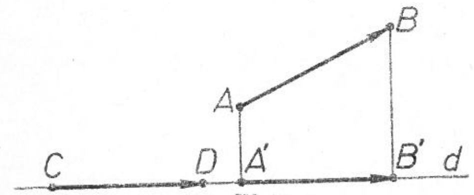


Fig. VI.10

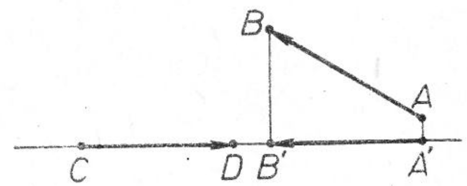


Fig. VI.11

$\overrightarrow{CD}$ sînt nenuli. Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ formează un unghi ascuţit (fig. VI.10), unghiul vectorilor $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ va fi nul şi vom avea $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{A'B'}\|\cdot\|\overrightarrow{CD}\| = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{CD}$. Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ formează un unghi obtuz (fig. VI.11) avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\|\overrightarrow{A'B'}\|\,\|\overrightarrow{CD}\| = \overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{CD}$, deoarece unghiul vectorilor $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ va fi alungit.

3. Oricare ar fi punctele A, B, C, E, F, avem (fig. VI.12):

(3) $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{EF} = 0.$$

Demonstraţie. Să presupunem că punctele E, F aparţin unei drepte d şi fie A', B', C' proiecţiile punctelor A, B, C pe dreapta d. În virtutea proprietăţii (2), relaţia (3) este echivalentă cu relaţia (fig. VI.12)

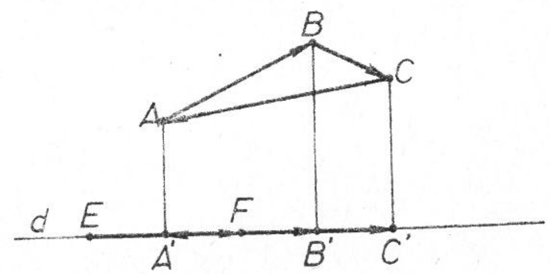


Fig. VI.12

(4) $$\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{EF} = 0.$$

Dacă două din punctele A', B', C' coincid, relația (4) se reduce la (1). Să considerăm atunci cazul în care punctele A', B', C' sînt distincte și să presupunem, pentru a fixa ideile, că $B' \in]A'C'[$. În acest caz, vectorii $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ vor avea același sens, vectorul $\overrightarrow{C'A'}$ va avea sensul opus și $\|\overrightarrow{A'B'}\| + \|\overrightarrow{B'C'}\| = \|\overrightarrow{C'A'}\|$; produsele scalare $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{EF}$ vor avea același semn, iar $\overrightarrow{C'A'}\cdot\overrightarrow{EF}$ va avea semnul opus. Relația (4) rezultă ușor din aceste proprietăți.

Combinînd proprietățile (1) și (3), deducem *proprietatea de aditivitate a produsului scalar:*

4. Oricare ar fi punctele A, B, C, E, F, avem

(5) $$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}.}$$

5. Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ trei vectori coliniari și nenuli, astfel ca

(6) $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}.$$

În acest caz, vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ au același sens și au normele egale (fig. VI.13).

Fig. VI.13

Demonstrație. Dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ar avea sensuri opuse, produsele scalare $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}$ ar avea semne opuse, contrar ipotezei (6). Deci $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ au același sens. Din relația (6) rezultă $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}$; vectorul $\overrightarrow{EF}$ fiind nenul, avem $\overrightarrow{EF} \neq 0$ și rezultă $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$.

Exerciții

1. *Fie punctele A, B, C, D, E, F. Să se arate că* (fig. VI.14)

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EF} = 0$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF}.$$

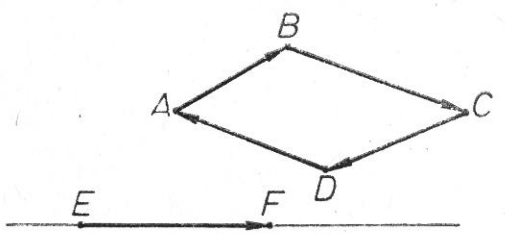


Fig. VI.14

2. *Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se arate că*

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AD}\|^2,$$
$$2\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD},$$
$$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

Dacă notăm $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$,

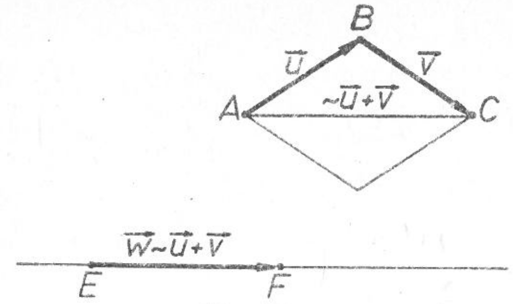


Fig. VI.15

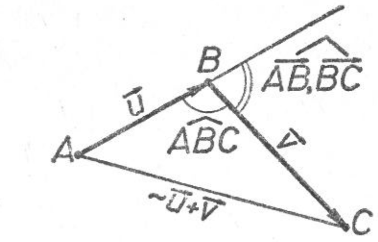


Fig. VI.16

$\vec{w} = \overrightarrow{EF}$, *avem* $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ (în A) *și proprietatea* (5) *de aditivitate a produsului scalar se poate scrie sub forma*

(7) $$\vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} = (\vec{u} + \vec{v})\cdot\vec{w}.$$

În particular, luînd $\vec{w} \sim \vec{u} + \vec{v}$, obținem (fig. VI.15)

$$(\vec{u} + \vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}\cdot(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v}\cdot(\vec{u} + \vec{v}).$$

Folosind proprietatea de simetrie a produsului scalar și aplicînd din nou relația (7), obținem (fig. VI.16):

(8) $$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v})\cdot\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$$

sau

(9) $$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Revenind la notațiile $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{u} + \vec{v} \sim \overrightarrow{AC}$, obținem formula

(10) $$\overrightarrow{AC}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\,\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) + \|\overrightarrow{BC}\|^2 =$$
$$= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\,\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{BC}\|\cos\widehat{ABC}.$$

Folosind notațiile lui Euler relative la triunghiul ABC, $a = \|\overrightarrow{BC}\|$, $b = \|\overrightarrow{CA}\|$, $c = \|\overrightarrow{AB}\|$, obținem *formula lui Pitagora generalizată:*

(11) $$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ac\cos\hat{B}.$$

Exerciții

1. *Fie A, B, C, D, A', B', C', D' vîrfurile unui cub, în care $[ABCD]$ este o față și* $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{BB'} \sim \overrightarrow{CC'} \sim \overrightarrow{DD'}$, $\|\overrightarrow{AA'}\| = 1$. *Să se calculeze prrodusele scalare* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{BD'}$.

R: 1; 2; 1

2. *Fie $[ABCD]$ un tetraedru cu toate muchiile de lungime 1. Să se calculeze produsele scalare* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AM}$, unde *$M$ este mijlocul muchiei* $]BC[$.

R: 0; $\frac{1}{2}$

3. *Fie $[OABCD]$ o piramidă cu baza $[ABCD]$ pătratică. Presupunînd că toate muchiile acestei piramide au lungimea 1, să se calculeze produsele scalare $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$, unde M este mijlocul muchiei $[OB]$.*

R: $\frac{1}{2}$; 0; $-\frac{1}{4}$

4. *Fie $[OABCDE]$ o piramidă avînd ca bază $[ABCDE]$ o suprafață pentagonală regulată și avînd lungimile tuturor muchiilor egale cu 1. Fie M și N mijloacele muchiilor $[AB]$ respectiv $[OB]$, și fie Q proiecția ortogonală a punctului O pe planul (ABC).*

Să se calculeze produsele scalare $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MQ}$.

R: $\frac{1}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$; $\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{\sqrt{5}}{4}$

5. *Să se arate că, oricare ar fi punctele A, B, C, D, avem relația lui Euler*

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

Să se deducă implicațiile

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD};\ DA\perp BC,\ DB\perp AC \Rightarrow DC\perp AB.$$

6. *Să se arate că relațiile $AA'\perp AB\perp BB'$ implică*

$$d(A',B')^2=d(A,B)^2+(\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{BB'})^2.$$

7. *Să se arate că dacă vectori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sînt coliniari sau paraleli, atunci*

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}\sim(\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u}\sim(\vec{w}\cdot\vec{u})\,\vec{v}.$$

8. *Să se arate că dacă punctele A, B, C sînt coliniare, atunci avem pentru orice punct O, relația lui Stewart-Simson.*

$$\|\overrightarrow{OA}\|^2\,\overrightarrow{BC}+\|\overrightarrow{OB}\|^2\,\overrightarrow{CA}+\|\overrightarrow{OC}\|^2\,\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})\,\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$$

4. Exprimarea proiecției unui punct cu ajutorul vectorilor

Aplicația 1. *Proiecția unui punct pe o dreaptă.*

Fie date un punct N și o dreaptă d. Ne propunem să determinăm proiecția ortogonală a punctului N pe dreapta d. Să considerăm în acest scop două puncte distincte M și M' pe dreapta d (fig. VI.17) și să notăm $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$. Un punct oarecare P al dreptei d formează, împreună cu un punct fix O, un vector $\overrightarrow{OP}$ și avem

$$\overrightarrow{OP}\sim\overrightarrow{OM}+r\cdot\vec{u}$$

unde r este acel număr real, pentru care avem

$$\overrightarrow{MP}\sim\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}\sim r\cdot\vec{u}.$$

Dacă P este proiecția ortogonală a punctului N pe dreapta d, avem

$$\overrightarrow{NP}\cdot\vec{u}=0.$$

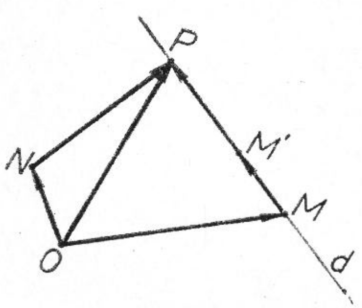


Fig. VI.17

Dar

(1) $$\overrightarrow{NP}\sim\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{ON}\sim\overrightarrow{OM}+r\vec{u}-\overrightarrow{ON},$$

astfel încît obținem condiția

$$\overrightarrow{OM}+r\vec{u}-\overrightarrow{ON})\cdot\vec{u}=0,$$

sau

$$r\cdot\vec{u}\cdot\vec{u}=(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})\cdot\vec{u}=\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}.$$

Deci, dacă P este proiecția punctului N pe dreapta d, avem

(2) $$r=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\frac{\overrightarrow{ON}\cdot\vec{u}-\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}.$$

Aplicația 2. *Simetricul unui punct față de o dreaptă.*

Fie N' simetricul punctului N față de dreapta d (fig. VI.18). Păstrînd notațiile făcute anterior, vom avea, dacă ținem seama de relațiile (1) și (2),

(3) $$\overrightarrow{ON'}\sim\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{ON}+2(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}+r\vec{u})\sim$$
$$\sim-\overrightarrow{ON}+2\frac{\overrightarrow{ON}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}+2\left(\overrightarrow{OM}-\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}\right).$$

Dacă avem un al doilea punct Q și dacă notăm prin Q' simetricul lui Q față de dreapta d, vom avea (fig. VI.19)

(4) $$\overrightarrow{OQ'}\sim-\overrightarrow{OQ}+2\frac{\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\,\vec{u}}\vec{u}+2\left(\overrightarrow{OM}-\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\,\vec{u}}\vec{u}\right).$$

Scăzînd relațiile (3), (4) membru cu membru, obținem

(5) $$\overrightarrow{N'Q'}\sim\overrightarrow{OQ'}-\overrightarrow{ON'}\sim-\overrightarrow{NQ}+2\frac{\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\,\vec{u}}\vec{u}.$$

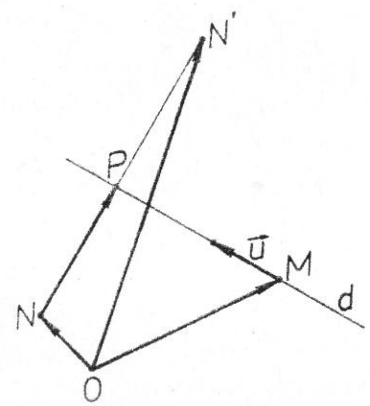


Fig. VI.18

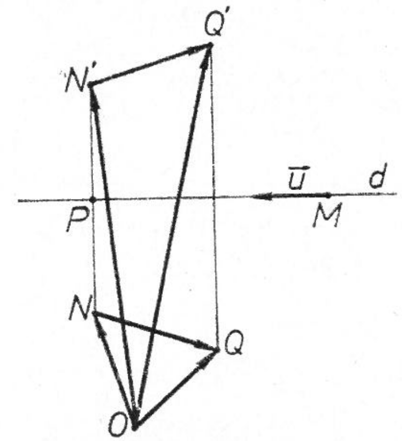


Fig. VI.19

Din formula (5) deducem

$$(6)\qquad \overrightarrow{N'Q'}\cdot\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{NQ} - 4\frac{(\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{u})^2}{\vec{u}\,\vec{u}} + 4\frac{(\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{u})^2}{\vec{u}\,\vec{u}} = \overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{NQ}.$$

Ultima egalitate arată că norma unui vector $\overrightarrow{NQ}$ este egală cu norma vectorului simetric $\overrightarrow{N'Q'}$.

A p l i c a ț i a **3.** *Proiecția unui punct pe un plan.* Fie p un plan și fie N un punct în spațiu. Ne propunem să determinăm proiecția punctului N pe planul p (fig. VI.20).

Fie M, M', M'' trei puncte necoliniare în planul p și fie vectorii

$$\vec{u} = \overrightarrow{MM'},\quad \vec{v} = \overrightarrow{MM''}.$$

Dacă P este un punct oarecare în planul p, există numere reale r, s astfel încît să avem

$$(7)\qquad \overrightarrow{MP} \sim r\vec{u} + s\vec{v}.$$

Dacă P este proiecția punctului N pe planul p, avem

$$(8)\qquad \overrightarrow{NP}\cdot\vec{u} = 0,\quad \overrightarrow{NP}\cdot\vec{v} = 0.$$

Dar $\overrightarrow{NP} \sim \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} + r\vec{u} + s\vec{v}$, astfel încît condițiile (8) se scriu

$$(9)\qquad \overrightarrow{NM}\cdot\vec{u} + r\vec{u}^2 + s\vec{u}\cdot\vec{v} = 0,$$
$$\overrightarrow{NM}\cdot\vec{v} + r\vec{u}\cdot\vec{v} + s\vec{v}^2 = 0.$$

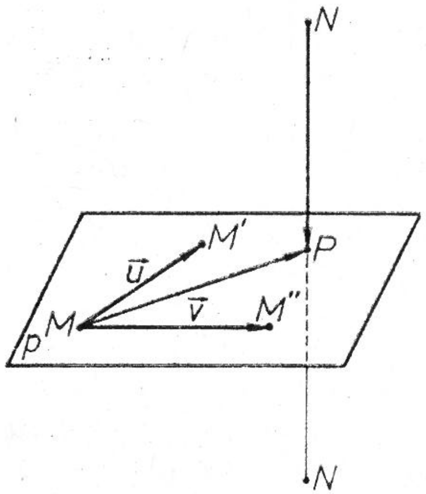


Fig. VI.20

Dacă triunghiul $MM'M''$ este dreptunghic în M și are catetele de lungime 1, deci dacă reperul $(\vec{u}, \vec{v})$ este ortogonal și normat:

$$\vec{u}^2 = \vec{v}^2 = 1,\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0,$$

condițiile (9) devin

$$\overrightarrow{NM}\cdot\vec{u} + r\vec{u}^2 = 0,\quad \overrightarrow{NM}\cdot\vec{v} + s\vec{v}^2 = 0$$

și rezultă

$$(10)\qquad r = \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u} = (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})\cdot\vec{u} = \overrightarrow{ON}\cdot\vec{u} - \overrightarrow{OM}\cdot\vec{u},$$
$$s = \overrightarrow{MN}\cdot\vec{v} = (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})\cdot\vec{v} = \overrightarrow{ON}\cdot\vec{v} - \overrightarrow{OM}\cdot\vec{v}.$$

Avem atunci

$$(11)\qquad \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \sim \overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{MN}\cdot\vec{v})\vec{v}$$

sau

$$(12)\qquad \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{OM} + (\overrightarrow{ON}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{ON}\cdot\vec{v})\vec{v} - [(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v})\vec{v}].$$

A p l i c a ț i a **4.** *Simetricul unui punct față de un plan.* Dacă notăm prin N' simetricul punctului N față de planul p, avem $\overrightarrow{ON'} \sim \overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{NP} \sim \overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{ON}$ deci

$$(13)\qquad \overrightarrow{ON'} \sim 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} + 2(\overrightarrow{ON}\cdot\vec{u})\vec{u} + 2(\overrightarrow{ON}\cdot\vec{v})\vec{v} - 2[(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v})\vec{v}].$$

Dacă avem un alt punct Q și dacă notăm prin Q' simetricul lui Q față de același plan p, vom putea scrie

$$(14)\qquad \overrightarrow{OQ'} \sim 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + 2[(\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{v})\vec{v}] -$$
$$- 2[(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v})\vec{v}].$$

Scăzînd ecuațiile (13) și (14) membru cu membru, obținem

$$(15)\qquad \overrightarrow{N'Q'} \sim -\overrightarrow{NQ} + 2[(\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\overrightarrow{NQ}\cdot\vec{v})\vec{v}].$$

Ca și în cazul simetriei față de o dreaptă, calculînd pătratul normei vectorului $\overrightarrow{N'Q'}$ obținem

$$\overrightarrow{N'Q'}\cdot\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{NQ},$$

Deci am arătat că, dacă N' și Q' sînt simetricele a două puncte N și Q față de o dreaptă d sau față de un plan p, atunci avem

$$d(N, Q) = d(N', Q'),$$

deci *simetria față de o dreaptă sau față de un plan lasă invariante distanțele dintre puncte.*

A p l i c a ț i a **5.** *Simetria față de un punct.* Fiind dat un punct P și un punct N, simetricul punctului N față de punctul P poate fi definit prin formula

$$\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{ON} \sim 2\overrightarrow{NP} \sim 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \sim 2\overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{ON}.$$

Avem deci

$$\overrightarrow{ON'} \sim -\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}.$$

Dacă $P = O$, rezultă $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$. Avem și în acest caz, pentru orice două puncte N, Q și pentru simetricele lor N', Q'.

$$\overrightarrow{N'Q'} \sim -\overrightarrow{NQ},\quad \overrightarrow{N'Q'}\cdot\overrightarrow{N'Q'} = \overrightarrow{NQ}\cdot\overrightarrow{NQ}.$$

Deci și *simetria față de un punct lasă invariante distanțele dintre puncte.*

5. Repere pe o dreaptă

Fie O și A două puncte distincte pe o dreaptă d. Atunci vectorul $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ este nenul (fig. VI.21).

Definiție. **Se numește reper pe o dreaptă d o mulțime formată dintr-un vector nenul $\vec{a}$, situat pe acea dreaptă. Originea acestui vector se numește originea reperului, iar extremitatea vectorului $\vec{a}$ se numește punctul unitate al reperului.**

O pereche formată dintr-o dreaptă d și dintr-un reper $\{\vec{a}\}$ pe această dreaptă se numește *axă*. Un punct de pe d se mai numește *punct pe axa* $(d, \{\vec{a}\})$, oricare ar fi reperul $\{\vec{a}\}$ ales pe d.

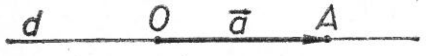


Fig. VI.21

Fie M un punct pe axa $(d, \{\vec{a}\})$. Există un număr real x unic astfel ca

(1) $$\overrightarrow{OM} \sim x \cdot \vec{a} \text{ (fig. VI.22).}$$

Se spune că numărul x, care verifică relația (1), este *abscisa* punctului M pe axa $(d, \{\vec{a}\})$ sau abscisa punctului M față de reperul $\{\vec{a}\}$.

Fie M, N două puncte pe axa $(d, \{\vec{a}\})$ și fie x, y abscisele acestor puncte, astfel încît avem $\overrightarrow{OM} \sim x \cdot \vec{a}$, $\overrightarrow{ON} \sim y \cdot \vec{a}$. În acest caz, scriem $M(x)$ și $N(y)$. Avem (fig. VI.23):

(2) $$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} \sim x\vec{a} - y\vec{a} = (x - y)\vec{a}.$$

Spunem că diferența $x - y$ este *componenta scalară* a vectorului $\overrightarrow{NM}$ față de reperul $\{\vec{a}\}$ sau componenta scalară a vectorului $\overrightarrow{NM}$ pe axa $(d, \{\vec{a}\})$.

Definiție. **Se spune că reperul $\{\vec{a}\}$ pe dreapta d este normat, dacă norma vectorului $\vec{a}$ este egală cu 1.**

În general, dacă punctul $M \in d$ are abscisa x, avem

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = (x\vec{a}) \cdot \vec{a} = x(\vec{a} \cdot \vec{a}) = x \,\|\vec{a}\|^2.$$

Fiind dat un al doilea punct $N(y)$, vom avea $\overrightarrow{ON} \cdot \vec{a} = y \cdot \|\vec{a}\|^2$ și

$$\overrightarrow{NM} \cdot \vec{a} = (x - y)\vec{a} \cdot \vec{a} = (x - y)\,\|\vec{a}\|^2.$$

În cazul unui reper normat, formulele precedente devin

(3) $$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = x, \quad \overrightarrow{NM} \cdot \vec{a} = x - y.$$

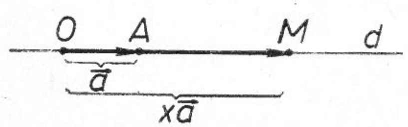


Fig. VI.22

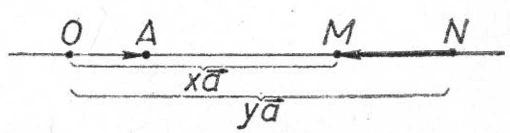


Fig. VI.23

6. Repere carteziene într-un plan

Fie p un plan și fie O, A, B trei puncte necoliniare în acel plan. Atunci vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ au aceeași origine și sînt necoliniari.

Definiție. **Se numește reper cartezian într-un plan orice cuplu $(\vec{a}, \vec{b})$ format din doi vectori din acel plan, care au aceeași origine și care sînt necoliniari.**

Originea comună a vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ se numește *originea* reperului $(\vec{a}, \vec{b})$, iar axele $(OA, \{\vec{a}\})$, $(OB, \{\vec{b}\})$ vor fi numite *axele* reperului $(\vec{a}, \vec{b})$.

Fie M un punct oarecare în planul p, în care a fost fixat reperul $(\vec{a}, \vec{b})$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Fie P, Q punctele în care paralelele duse prin M la dreptele OB, respectiv OA intersectează dreptele OA, respectiv OB (fig. VI.24). Avem

(1) $$\overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}.$$

Știm că există numere reale unic determinate x, y astfel încît să avem

(2) $$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = y \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Numerele x, y se numesc *coordonatele* punctului M față de reperul $(\vec{a}, \vec{b})$. Se mai spune că x este *abscisa* lui M, iar y este *ordonata* lui M.

Formulele (1) și (2) conduc la relația fundamentală

(3) $$\overrightarrow{OM} \sim x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB},$$

care arată legătura dintre un punct și coordonatele sale față de un reper cartezian dat. Dacă M are coordonatele x, y, scriem $M(x, y)$.

Reperul cartezian $(\vec{a}, \vec{b})$ se numește *ortonormat*, dacă

(4) $$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1 \text{ și } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

deci dacă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ sînt ortogonali și unitari (fig. VI.25).

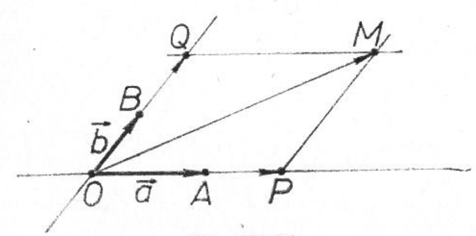


Fig. VI.24

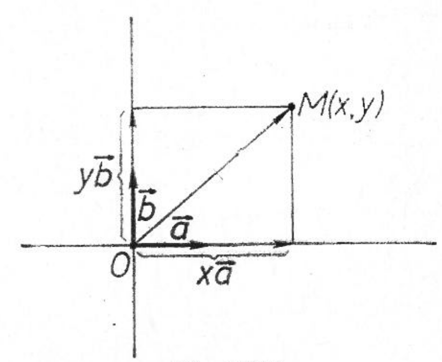


Fig. VI.25

Dacă avem un punct $M(x, y)$, din formulele (3) și (4) deducem

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = x, \quad \overrightarrow{OM} \cdot \vec{b} = y.$$

Să considerăm un vector $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ avînd originea $M(x', y')$ și extremitatea $N(x'', y'')$. Avem (fig. VI.26):

$$\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \sim (x''\vec{a} + y''\vec{b}) - (x'\vec{a} + y'\vec{b})$$

deci

(5) $$\overrightarrow{MN} \sim (x'' - x')\vec{a} + (y'' - y')\vec{b}.$$

Formula (5) exprimă vectorul $\overrightarrow{MN}$, pînă la o echipolență, cu ajutorul diferențelor $x'' - x'$, $y'' - y'$. Aceste diferențe se numesc *componentele scalare* ale vectorului $\overrightarrow{MN}$, relative la reperul $(\vec{a}, \vec{b})$.

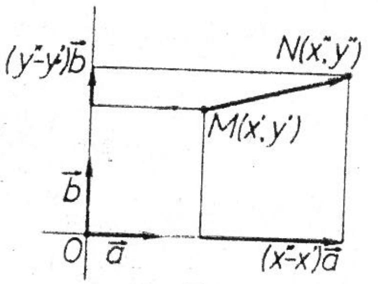


Fig. VI.26

Din formula (5) rezultă că

Doi vectori sînt echipolenți dacă și numai dacă au componentele scalare respectiv egale.

Deci dacă vectorul $\overrightarrow{MN}$ are componentele scalare p, q și dacă vectorul $\overrightarrow{PQ}$ are componentele scalare r, s atunci condiția de echipolență $\overrightarrow{MN} \sim \overrightarrow{PQ}$ este echivalentă cu egalitățile $p = r$, $q = s$.

Dacă vectorul $\overrightarrow{MN}$ are componentele scalare p, q, deci dacă

$$\overrightarrow{MN} \sim p\vec{a} + q\vec{b},$$

și dacă vectorul $\overrightarrow{M'N'}$ are componentele scalare p', q',

$$\overrightarrow{M'N'} \sim p'\vec{a} + q'\vec{b},$$

atunci avem, oricare ar fi punctele în care facem sumele,

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} \sim (p\vec{a} + q\vec{b}) + (p'\vec{a} + q'\vec{b}),$$

deci

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} \sim (p + p')\vec{a} + (q + q')\vec{b};$$

rezultă că *suma a doi vectori are drept componente scalare sumele componentelor scalare ale celor doi sumanzi*, $p + p'$ și $q + q'$.

Dacă $\overrightarrow{MN} \sim p\vec{a} + q\vec{b}$ și dacă x este un număr real, atunci

$$x\,\overrightarrow{MN} \sim x(p\vec{a} + q\vec{b}) \sim (xp)\vec{a} + (xq)\vec{b}.$$

Deci vectorul $x \cdot \overrightarrow{MN}$ are componentele scalare date de produsele xp și xq. Deci:

Prin înmulțirea unui vector cu un număr real x, componentele scalare ale acelui vector se înmulțesc cu numărul real x.

Să considerăm vectorii

$$\overrightarrow{MN} \sim p\,\vec{a} + q\,\vec{b}, \quad \overrightarrow{PQ} \sim m\,\vec{a} + n\,\vec{b}.$$

Folosind proprietățile cunoscute ale produsului scalar, putem scrie

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = (p\vec{a} + q\vec{b}) \cdot (m\vec{a} + n\vec{b}) = mp\,\vec{a}^2 + (np + mq)\vec{a} \cdot \vec{b} + nq\,\vec{b}^2.$$

Dar vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ sînt ortogonali și au normele egale cu 1, deci $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$ și $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Rezultă formula

$$\boxed{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = mp + nq,}$$

care arată că:

Produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor componentelor scalare corespunzătoare ale celor doi vectori.

Prin componente corespunzătoare înțelegem componentele m, p, relative la vectorul $\vec{a}$ și componentele n, q relative la vectorul $\vec{b}$.

În particular, *pătratul normei vectorului $\overrightarrow{MN} \sim p\vec{a} + q\vec{b}$ este egal cu numărul* $p^2 + q^2$, iar pătratul normei vectorului $\overrightarrow{PQ} \sim m\vec{a} + n\vec{b}$ va fi numărul $m^2 + n^2$.

Din formula

$$\boxed{\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}) = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{MN}\|\,\|\overrightarrow{PQ}\|}}$$

deducem o relație, care ne permite să calculăm *unghiul a doi vectori, cunoscînd componentele lor scalare*:

(3′) $$\boxed{\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}) = \frac{mp + nq}{\sqrt{p^2 + q^2}\sqrt{m^2 + n^2}}},$$

Aplicație. Fiind dat un număr real t, notăm prin $F(t)$ punctul de coordonate $x = \cos t$, $y = \sin t$. Punctul $F(t)$ aparține cercului $C = C(0, 1)$ (fig. VI.27).

Fie t și u două numere reale și fie $M = F(t)$, $N = F(u)$ punctele de pe cercul C, care corespund acestor numere. Pentru a obține măsura în radiani a unghiului $\widehat{MON}$, facem diferența $t - u$ și căutăm acel număr întreg k, pentru care

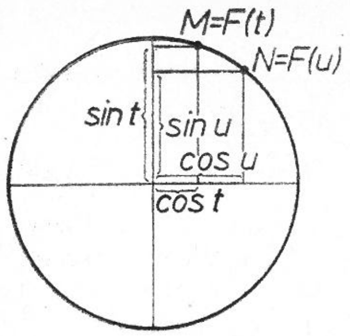


Fig. VI.27

$t - u - 2k\pi \in (-\pi, \pi)$. În acest caz, măsura în radiani a unghiului $\widehat{MON}$ va fi egală cu valoarea absolută a numărului real $t - u - 2k\pi$, deci

(6) $\qquad$ măs $\widehat{MON} = |t - u - 2k\pi|$.

Vectorii $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ au componentele scalare $(\cos t, \sin t)$ respectiv $(\cos u, \sin u)$. Normele acestor vectori sînt egale cu 1. Din formula (5′) deducem, calculînd în două moduri diferite produsul scalar $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = \cos\widehat{MON} = \cos t \cos u + \sin t \sin u$

sau, ținînd seama de (6) și de periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus,

(7) $$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u.$$

Formula (7) este adevărată oricare ar fi numerele reale t și u.

Dacă în formula (2) punem $-u = s$, obținem

(8) $$\cos(t + s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s.$$

Să punem în formula (7) $t = \frac{\pi}{2}$; obținem

(9) $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u,$$

deoarece $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ și $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Dacă în formula (9) notăm $u = v + w$, putem scrie

$$\sin(v + w) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v - w\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\cos w + \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\sin w = \sin v \cos w + \cos v \sin w,$$

deci avem identitatea

$$\sin(v + w) = \sin v \cos w + \cos v \sin w.$$

Dacă în ultima identitate punem $w = -u$, obținem

$$\sin(v - u) = \sin v \cos u - \cos v \sin u$$

Putem rezuma rezultatele obținute sub forma

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(u \pm v) &= \sin u \cos v \pm \cos u \sin v,\\ \cos(u \pm v) &= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v\end{aligned}}$$

unde semnele se corespund.

Aceste formule au fost deduse pe altă cale în clasa a IX-a.

7. Repere carteziene în spațiu

Fie O, A, B, C patru puncte necoplanare. Atunci vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ și $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ au aceeași origine și sînt necoplanari, deci sînt și nenuli.

D e f i n i ț i e. **Se numește reper cartezian în spațiu un sistem ordonat format din trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ necoplanari și avînd aceeași origine. Originea celor trei vectori se numește originea reperului. Dacă $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, se spune că axele $(OA, \{\vec{a}\})$, $(OB, \{\vec{b}\})$, $(OC, \{\vec{c}\})$ sînt axele reperului $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.**

Fie M un punct oarecare în spațiu. Să notăm prin p, q, r planele duse prin M și paralele cu planele (OBC), (OCA) respectiv (OAB). Să considerăm punctele (fig. VI.28):

$P \in OA \cap p$, $Q \in OB \cap q$, $R \in OC \cap r$.

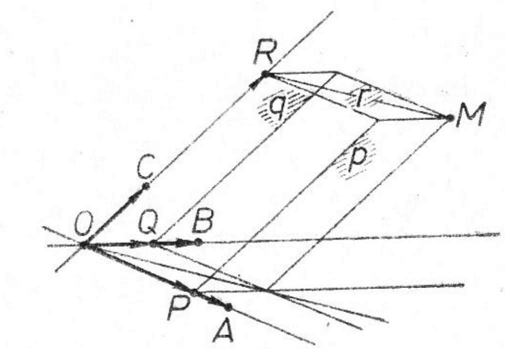


Fig. VI.28

Există numere reale unic determinate x, y, z astfel ca să avem

(1) $$\overrightarrow{OP} \sim x\vec{a},\quad \overrightarrow{OQ} \sim y\vec{b},\quad \overrightarrow{OR} \sim z\vec{c}.$$

Numerele x, y, z, care verifică aceste relații se numesc *coordonatele* punctului M față de reperul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; x este *abscisa* lui M, y este *ordonata* lui M iar z este *cota* lui M. Pentru a exprima că punctul M are coordonatele x, y, z (față de reperul fixat $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$), vom scrie: $M(x, y, z)$.

Avem $\overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$, deci, dacă $M(x, y, z)$ este un punct oarecare, avem

(2) $$\overrightarrow{OM} \sim x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \text{ (fig. VI.29).}$$

Se spune că reperul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ este *ortonormat*, dacă

(3) $$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 0,$$

deci dacă vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sînt unitari și ortogonali doi cîte doi.

În paginile care urmează, *vom considera numai repere ortonormate.*

Din formulele (2) și (3) rezultă *interpretarea coordonatelor* x, y, z cu ajutorul produsului scalar:

(4) $$\boxed{x = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{a},\quad y = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{b},\quad z = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{c}.}$$

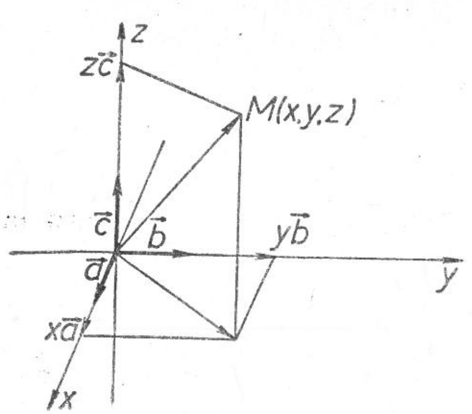


Fig. VI.29

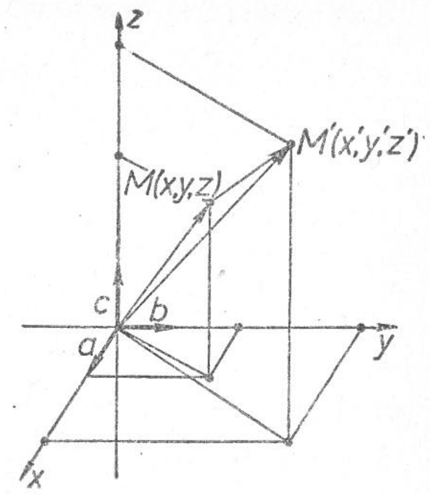


Fig. VI.30

Pentru două puncte $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$ avem (fig. VI.30)

(5) $\overrightarrow{MM'} \sim \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \sim (x' - x)\vec{a} + (y' - y)\vec{b} + (z' - z)\vec{c}.$

Spunem că diferențele $x' - x$, $y' - y$ și $z' - z$ sînt *componentele scalare* ale vectorului $\overrightarrow{MM'}$ față de reperul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. •

Uneori, componentele scalare ale unui vector $\vec{u}$ se notează prin u_x, u_y și u_z. Avem atunci

$$\vec{u} \sim u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c}.$$

Fie $\vec{u}, \vec{v}$ doi vectori arbitrari, de componente u_x, u_y, u_z, respectiv v_x, v_y, v_z. Avem, folosind proprietățile produsului scalar și relațiile (3)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c})(v_x\vec{a} + v_y\vec{b} + v_z\vec{c}) =$$

deci

$$= u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z.$$

Reținem deci formula

(6) $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z,}$

care exprimă *produsul scalar a doi vectori arbitrari, în funcție de componentele lor scalare.*

În particular, dacă $\vec{v} = \vec{u}$, obținem *expresia pătratului normei* unui vector $\vec{u}$ în funcție de componentele scalare ale acelui vector:

(7) $\boxed{\vec{u}^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli, avem

(8) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \dfrac{u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$

Rezultă *condiția de ortogonalitate* a vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$:

(9) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z = 0.$

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli și coliniari sau paraleli, atunci există un număr real r, astfel ca $\vec{v} \sim r\vec{u}$. În acest caz, avem

(10) $v_x = ru_x,\ v_y = ru_y,\ v_z = ru_z.$

În particular, *vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt echipolenți, dacă și numai dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au aceleași componente scalare*, deci dacă:

(11) $v_x = u_x,\ v_y = u_y,\ v_z = u_z.$

Aplicație. Pentru a da o aplicație a formulei (8), să presupunem că punctul M are coordonatele x, y, z și că este diferit de originea O a reperului $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Să notăm prin α, β, γ unghiurile pe care le face semidreapta $|OM$ cu semidreptele $|OA$, $|OB$, $|OC$, (fig. VI.31), deci:

$$\alpha = \widehat{MOA},\quad \beta = \widehat{MOB},\quad \gamma = \widehat{MOC},$$

și cu r norma vectorului $\overrightarrow{OM}$:

$$r = \|\overrightarrow{OM}\| = \mathrm{d}(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Din formula (8) deducem relațiile

(12) $\cos\alpha = \dfrac{x}{r},\quad \cos\beta = \dfrac{y}{r},\quad \cos\gamma = \dfrac{z}{r}.$

Aplicație. Să facem acum o aplicație a formulei (7), care dă pătratul normei unui vector $\vec{u}$ în funcție de componentele acestui vector. Presupunînd că $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, știm că norma lui $\vec{u}$ coincide cu distanța dintre punctele M și N. Avem pe de altă parte, dacă $M(x', y', z')$ și $N(x'', y'', z'')$,

(13) $u_x = x'' - x',\ u_y = y'' - y',\ u_z = z'' - z'$

și rezultă formula care dă *distanța* $\mathrm{d}(M, N)$ *în funcție de coordonatele punctelor* M și N:

(14) $\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{d}(M, N) = \\ &= \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2} \end{aligned}}$

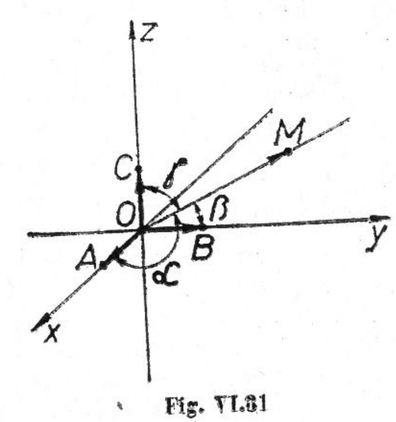


Fig. VI.31

Exerciții

1. Să se reprezinte într-un desen punctele $P(x, y, z)$, ale căror coordonate x, y, z, au valorile absolute egale cu un număr pozitiv dat a.

2. Să se arate că punctele $M(a, a, a)$, $N(-a, a, -a)$, $P(-a, -a, a)$, $Q(a, -a, -a)$ sînt vîrfurile a patru triunghiuri echilaterale. Să se exprime distanța $R = d(O, M)$ funcție de $m = d(M, N)$.

R: $R = \frac{\sqrt{6}}{4} m \; (= \sqrt{3}\, a)$.

3. Să se arate că punctele $U(a, 0, 0)$, $U'(-a, 0, 0)$, $V(0, a, 0)$, $V'(0, -a, 0)$, $W(0, 0, a)$, $W'(0, 0, -a)$ sînt vîrfurile a opt triunghiuri echilaterale. Să se exprime lungimea comună a laturilor acestor triunghiuri în funcție de a.

R: $d(U, V) = \sqrt{2}\, a$.

4. Se consideră punctele:
$A(a, 0, b)$, $A'(a, 0, -b)$, $A''(-a, 0, b)$, $A'''(-a, 0, -b)$, $B(b, a, 0)$, $B'(-b, a, 0)$, $B''(b, -a, 0)$, $B'''(-b, -a, 0)$, $C(0, b, a)$, $C'(0, -b, a)$, $C''(0, b, -a)$, $C'''(0, -b, -a)$. Să se determine b în funcție de a, astfel încît triunghiurile următoare să fie echilaterale: ACC', ABC, ABA', $AA'B''$, $AB''C'$, $A''CC'$, $A''B'C$, $A''A'''B'$, $A''B'''C'$, $BB'C''$, $A'BC''$, $BB'C$, $A'C''C'''$, $A'B''C'''$, $A'''C''C'''$; $A''B'''C'''$, $A'''B'C$, $A'''B'''C'''$; $B''B'''C'$, $C'B''B'''$.

R: $b = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\, a$.

5. Să se scrie coordonatele centrelor de greutate ale triunghiurilor menționate la exercițiul 4. Să se arate că dacă aceste triunghiuri sînt echilaterale, atunci centrele lor de greutate sînt vîrfurile a 12 pentagoane regulate, situate în plane perpendiculare pe dreptele $OA, OA', OA'', OA''', OB, \ldots, OC'''$.

6. Să se exprime distanța $d(O, A)$ în funcție de a și b, folosind notațiile date în exercițiul 4.

R: $d(O, A) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

7. Să se arate că punctele indicate la exercițiul 4 sînt vîrfurile a 12 pentagoane regulate. Să se scrie coordonatele centrelor acestor pentagoane.

8. Produs vectorial asociat unui reper

Fie $R = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ un reper cartezian ortonormat format din vectorii

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB},\ \vec{c} = \overrightarrow{OC}.$$

Vom nota prin V mulțimea vectorilor de forma $\overrightarrow{OP}$, deci a vectorilor avînd punctul O ca origine.

D e f i n i ț i e. **Se numește produs vectorial asociat reperului R o operație notată**

(1) $$(\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} \times \vec{v},$$

care asociază fiecărui cuplu de vectori $(\vec{u}, \vec{v})$ un vector $\vec{u} \times \vec{v} \in V$, numit produsul vectorial al vectorului $\vec{u}$ cu vectorul $\vec{v}$ și care este un vector cu originea O, astfel încît să fie verificate următoarele proprietăți:

I. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$, $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b}$.

II. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$,

III. $(r\vec{u} + s\vec{v}) \times \vec{w} = r\vec{u} \times \vec{w} + s\vec{v} \times \vec{w}$,

pentru orice vectori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ și orice numere reale r, s.

IV. **Dacă $\vec{u} \sim \vec{u}'$ și $\vec{v} \sim \vec{v}'$, atunci $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u}' \times \vec{v}'$.**

Fiind dați doi vectori

$$\vec{u} \sim u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c},\quad \vec{v} = v_x\vec{a} + v_y\vec{b} + v_z\vec{c}$$

vom avea

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c}) \times (v_x\vec{a} + v_y\vec{b} + v_z\vec{c}) =$$
$$= u_xv_x(\vec{a} \times \vec{a}) + u_xv_y(\vec{a} \times \vec{b}) + u_xv_z(\vec{a} \times \vec{c}) +$$
$$+ u_yv_x(\vec{b} \times \vec{a}) + u_yv_y(\vec{b} \times \vec{b}) + u_yv_z(\vec{b} \times \vec{c}) +$$
$$+ u_zv_x(\vec{c} \times \vec{a}) + u_zv_y(\vec{c} \times \vec{b}) + u_zv_z(\vec{c} \times \vec{c}).$$

Din condiția II rezultă $\vec{u} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{u}$, deci avem $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, oricare ar fi vectorul $\vec{u}$. În particular, avem

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}.$$

Formula precedentă devine, dacă ținem seama de II, și de I,

(2) $$\vec{u} \times \vec{v} = (u_yv_z - u_zv_y)\vec{a} + (u_zv_x - u_xv_z)\vec{b} + (u_xv_y - u_yv_x)\vec{c}.$$

Deci produsul vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ al vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ are componentele scalare date de formulele:

(3) $$\boxed{w_x = u_yv_z - u_zv_y,\quad w_y = u_zv_x - u_xv_z,\quad w_z = u_xv_y - u_yv_x.}$$

Este suficient să memorăm prima din aceste formule, deoarece celelalte două se obțin din prima, făcînd permutări circulare ale literelor x, y, z, deci făcînd înlocuirile

$$x \longrightarrow y,\quad y \longrightarrow z,\quad z \longrightarrow x.$$

P r o p o z i ț i e. Produsul vectorial a doi vectori $\vec{u}, \vec{v}$ este un vector ortogonal fiecăruia din vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$, (fig. VI.32).

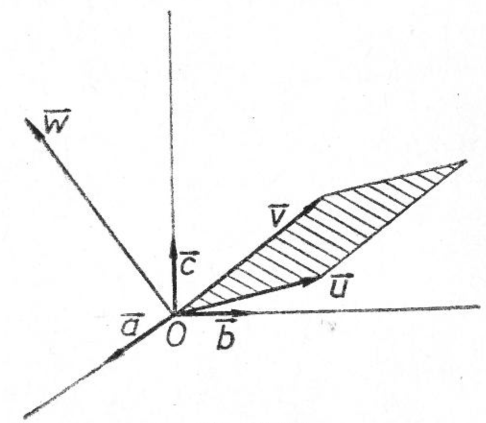


Fig. VI.32

Demonstrație. Avem, folosind relațiile (3),

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0,\ \vec{v}\cdot\vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$$

deci vectorul $\vec{w}$ este ortogonal pe fiecare din vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

Să calculăm pătratul normei vectorului $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$. Folosind din nou formulele (3), obținem:

$$\vec{w}\cdot\vec{w} = w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = (u_y v_z - u_z v_y)^2 + (u_z v_x - u_x v_z)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2 =$$

$$= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)^2 =$$

$$= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\cos^2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) =$$

$$= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1-\cos^2(\widehat{\vec{u},\vec{v}})) = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\sin^2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}).$$

Rezultă formula fundamentală:

$$\boxed{\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|,} \tag{4}$$

care arată că *norma produsului vectorial a doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori.*

În particular, ***produsul vectorial a doi vectori coliniari sau paraleli este nul,*** **deoarece sinusul unghiului făcut de doi astfel de vectori este nul.**

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt ortogonali, avem $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 1$ și rezultă că:

Norma produsului vectorial a doi vectori perpendiculari este egală cu produsul normelor celor doi vectori.

În particular:

Produsul vectorial a doi vectori ortogonali și unitari este un vector unitar, perpendicular pe planul primilor doi vectori.

Exerciții

1. Să se calculeze produsele vectoriale

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}),\ (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}),\ (2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

2. Fiind dat vectorul $\vec{u}\sim u_x\vec{a}+u_y\vec{b}+u_z\vec{c}$, să se determine produsele

$$\vec{a}\times\vec{u},\ \vec{b}\times\vec{u},\ \vec{c}\times\vec{u}.$$

3. Folosind formulele

$$\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|},\quad \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}$$

să se determine sinusurile și cosinusurile unghiurilor pe care le face vectorul $\vec{u} = u_x\vec{a} + u_y\vec{b} + u_z\vec{c}$ cu fiecare din vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Caz particular, $\vec{u}\sim\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$.

4. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ trei vectori arbitrari. Să se demonstreze identitatea

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{t} = (\vec{v}\times\vec{t})\cdot\vec{u} = (\vec{t}\times\vec{u})\cdot\vec{v}.$$

5. Să se calculeze numerele date de produsele mixte

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a},\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

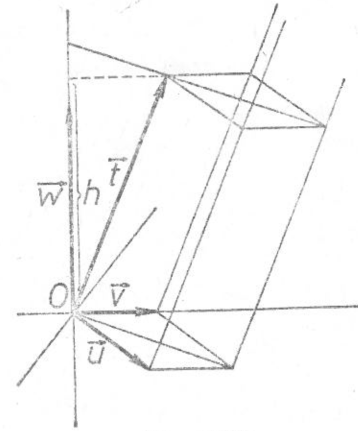


Fig. VI.33

Aplicație. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ trei vectori necoplanari cu originea în punctul O. Vrem să dăm o interpretare geometrică produsului mixt $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{t}$, (fig. VI.33).

Soluție. Știm că produsul vectorial $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ este un vector perpendicular pe planul vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ și că norma lui $\vec{w}$ este egală cu aria paralelogramului care poate fi construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}$. Produsul scalar $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{t} = \vec{w}\cdot\vec{t}$ va fi egal, abstracție făcînd de semn, cu produsul dintre norma vectorului $\vec{w}$ și norma proiecției vectorului $\vec{t}$ pe suportul lui $\vec{w}$. Dar norma proiecției vectorului $\vec{t}$ pe suportul vectorului $\vec{w}$ este egală cu înălțimea h a paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$, dacă se consideră ca bază a acestui paralelipiped paralelogramul definit de $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Rezultă că *valoarea absolută a produsului mixt $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{t}$ este egală cu produsul dintre aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}$, și înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$.* Deci:

Valoarea absolută a produsului mixt $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{t}$ format cu trei vectori necoplanari, avînd aceeași origine, este egală cu volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$.

Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori unitari $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ și ortogonali $(\vec{u}\cdot\vec{v} = 0)$ și fie $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$. Vectorul $\vec{w}$ este unitar și este perpendicular pe fiecare din vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Există numai doi vectori să spunem $\vec{w}'$ și $\vec{w}''$, care să fie unitari, cu originea O și perpendiculari pe doi vectori liniar independenți dați $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

Vectorul $\vec{w}$ este unul din cei doi vectori $\vec{w}'$, $\vec{w}''$. Se pune problema de a decide cu care din vectorii $\vec{w}'$, $\vec{w}''$ este egal vectorul $\vec{w}$?

Mai general, dacă avem doi vectori nenuli, necoliniari şi neparaleli $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ produsul vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ este un vector cu originea O, perpendicular pe fiecare din vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ şi avînd norma egală cu aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{u}'$, $\vec{v}' \in \vec{V}$, unde $\vec{u}' \sim \vec{u}$, $\vec{v}' \sim \vec{v}$. Există doi vectori, să spunem $\vec{w}'$ şi $\vec{w}''$, care au aceste proprietăţi şi trebuie să decidem: cu care din aceşti doi vectori este egal vectorul $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$?

În fiecare caz, vectorul $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ este determinat analitic prin componentele sale, care sînt date de formulele (3). Deci aceste formule sînt acelea care ne permit să spunem care din vectorii $\vec{w}'$, $\vec{w}''$, într-un caz dat, reprezintă produsul vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

Exerciţii

1. Fie $\vec{u}, \vec{v}$ doi vectori unitari şi ortogonali. Fie $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Să se arate că

$$\vec{w} \times \vec{u} = \vec{v}, \ \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u}.$$

(*Indicaţie.* Din formulele (3) se deduce că vectorul $\vec{w} \times \vec{u}$ are componentele

$$(u_y^2 + u_z^2)v_x + u_x(-v_y u_y - u_z v_z) = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)v_x + u_x(-u_x v_x - u_y v_y - u_z v_z) = v_x,$$
$$(u_z^2 + u_x^2)v_y + u_y(-u_z v_z, - u_x v_x) = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)v_y + u_y(-u_x v_x - u_y v_y - u_z v_z) = v_y,$$
$$(u_x^2 + u_y^2)v_z + u_z(-u_x v_x - u_y v_y) = (u_x^2 + u_y^2 + u_x^2)v_z + u_z(-u_x v_x - u_y v_y - u_z v_z) = v_z.)$$

2. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$ trei vectori arbitrari. Să se demonstreze identitatea

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{t} = -(\vec{t} \cdot \vec{v})\,\vec{u} + (\vec{t} \cdot \vec{u})\vec{v}.$$

(*Indicaţie.* Se folosesc formulele (3) pentru calcularea produselor vectoriale care apar în membrul stîng al relaţiei date.)

Definiţie. Fie $R' = (\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$ **un reper cartezian arbitrar. Spunem că reperul** R' **este orientat pozitiv** (în raport cu reperul R, cu ajutorul căruia am definit produsul scalar) **dacă produsele mixte** (egale între ele)

$$(\vec{a}' \times \vec{b}') \cdot \vec{c}' = (\vec{b}' \times \vec{c}') \cdot \vec{a}' = (\vec{c}' \times \vec{a}') \cdot \vec{b}'$$

sînt pozitive. Dacă aceste produse sînt negative, se spune că R' **este orientat negativ.**

Exerciţii

1. Să se arate că reperul R este orientat pozitiv.

2. Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt doi vectori necoliniari, avînd originea în O, şi dacă $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, atunci tripletul $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ este un reper cartezian orientat pozitiv.

3. Dacă reperul $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ este orientat pozitiv, atunci reperele

$$(-\vec{u}, \vec{v}, \vec{w},)\ (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}),\ (-\vec{u}, -\vec{v}, -\vec{w})$$

sînt orientate negativ, iar reperele

$$(-\vec{u}, -\vec{v}, \vec{w}),\ (\vec{v}, \vec{u}, -\vec{w}),\ (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}),\ (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}),\ (\vec{u}, -\vec{v}, -\vec{w})$$

sînt orientate pozitiv.

4. Să se calculeze volumul paralelipipedului care are muchiile $|OM|$, $|ON|$, $|OP|$, unde $M(1, -1, 1)$, $N(2, 3, -1)$ şi $P(-1, 0, 1)$.

Din definiţiile date, rezultă că reperele carteziene în spaţiu sînt de două feluri: repere orientate pozitiv şi repere orientate negativ.

Intuitiv, putem distinge cele două feluri de repere în modul următor. Să presupunem că avem un reper R' cu originea într-un punct O' şi format din vectorii $\vec{a}' = \overrightarrow{O'A'}$, $\vec{b}' = \overrightarrow{O'B'}$, $\vec{c}' = \overrightarrow{O'C'}$. Să presupunem că un observator stă în picioare pe planul $(O'B'C')$, de aceeaşi parte cu punctul A' şi că îşi roteşte privirea de la dreapta la stînga. Dacă, în momentul iniţial, privirea observatorului este îndreptată spre vectorul $\vec{b}'$ şi dacă după o rotaţie de cel mult 180°, observatorul va ajunge cu privirea în sensul vectorului $\vec{c}'$, atunci spunem că reperul R' este orientat pozitiv, (în raport cu reperul format dintr-un vector vertical, avînd sensul de la observator în sus, şi din alţi doi vectori, daţi de mîinile dreaptă şi stîngă ale observatorului, aşezate astfel încît să formeze un unghi drept.)

Orientarea reperelor în spaţiu joacă un rol esenţial în formularea unui mare număr de legi din Electricitate, Magnetism, Astronomie etc.

9. Vectori alunecători. Momentele vectorilor

Dacă asupra unui corp rigid K acţionează o forţă $\vec{F}$, avînd punctul de aplicaţie A, se demonstrează experimental că efectul forţei $\vec{F}$ nu se schimbă, dacă înlocuim forţa $\vec{F}$ cu o forţă $\vec{F}'$, astfel ca $\vec{F} \sim \vec{F}'$ şi astfel ca punctul de aplicaţie A' al forţei $\vec{F}'$ să se găsească pe suportul lui $\vec{F}$.

Fiind dat un vector $\vec{F}$, situat pe o dreaptă d, notăm prin $\{\{\vec{F}\}\}$ mulţimea tuturor vectorilor $\vec{F}'$, care sînt echipolenţi cu $\vec{F}$ şi care aparţin dreptei d.

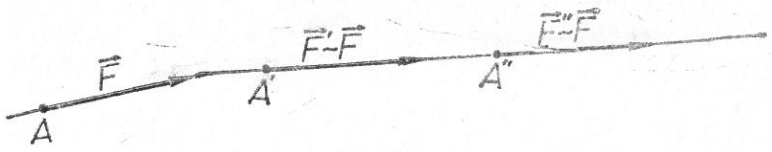


Fig. VI.34

Vom spune că $\{\{\vec F\}\}$ este *vectorul alunecător* definit de vectorul (legat) $\vec F$, (fig. VI.34).

Doi vectori nenuli definesc același vector alunecător, dacă sînt coliniari și echipolenți. Vom exprima faptul că vectorii $\vec F$ și $\vec F'$ sînt coliniari și echipolenți prin scrierea $\vec F \approx \vec F'$.

Definiție. Fie $\vec F$ un vector cu originea într-un punct A și fie Q un punct oarecare în spațiu. Presupunem fixat reperul cartezian ortonormat, cu ajutorul căruia am definit produsul vectorial.

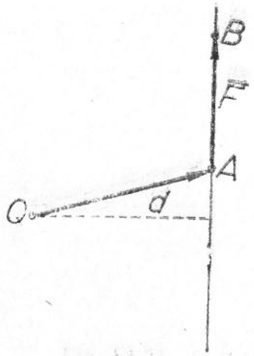


Fig. VI.35

Definiție. Dacă vectorul $\vec F$ are originea într-un punct A, se definește momentul $\vec M$ al lui $\vec F$ față de punctul Q în modul următor: $\vec M$ este vectorul definit prin formula (fig. VI.35):

(1) $$\vec M = M(Q, \vec F) = \overrightarrow{QA} \times \vec F.$$

Propoziție. Dacă vectorii $\vec F$ și $\vec F'$ sînt coliniari și echipolenți, avem

(2) $$M(Q, \vec F) = M(Q, \vec F').$$

Demonstrație. Fie A, A' originile vectorilor $\vec F$ și $\vec F'$. Avem (fig. VI.36):

$$M(Q, \vec F) - M(Q, \vec F') = \overrightarrow{QA} \times \vec F - \overrightarrow{QA'} \times \vec F' = \overrightarrow{QA} \times \vec F - (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AA'}) \times \vec F' = \overrightarrow{QA} \times \vec F - \overrightarrow{QA} \times \vec F' - \overrightarrow{AA'} \times \vec F' \in \vec 0,$$

deoarece avem $\overrightarrow{QA} \times \vec F = \overrightarrow{QA} \times \vec F'$ vectorii $\vec F, \vec F'$ fiind echipolenți, și $\overrightarrow{AA'} \times \vec F' \in \vec 0$, vectorii $\overrightarrow{AA'}, \vec F'$ fiind coliniari. Deci $M(Q, \vec F) = M(Q, \vec F')$.

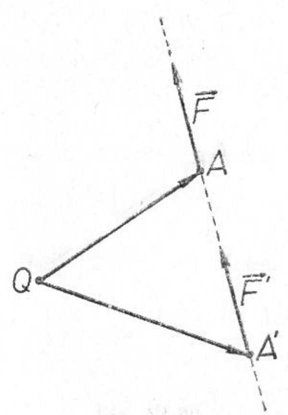


Fig. VI.36

Propoziție. Norma momentului $M(Q, \vec F)$ este egală cu produsul dintre norma vectorului $\vec F$ și distanța de la punctul Q la suportul vectorului $\vec F$.

Demonstrație (fig. VI.35). Norma vectorului $M(Q, \vec F) = \overrightarrow{QA} \times \vec F$ este egală cu aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{AQ}$, $\vec F = \overrightarrow{AB}$ și este egală cu produsul dintre norma lui $\vec F$ și distanța d de la Q la dreapta AB.

Compararea momentelor unui vector $\vec F = \overrightarrow{AB}$ în raport cu două puncte Q și Q'. Avem

$$M(Q, \vec F) = \overrightarrow{QA} \times \vec F, \quad M(Q', \vec F) = \overrightarrow{Q'A} \times \vec F,$$

deci

$$M(Q', \vec F) = (\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QQ'}) \times \vec F = \overrightarrow{QA} \times \vec F - \overrightarrow{QQ'} \times \vec F = M(Q, \vec F) - \overrightarrow{QQ'} \times \vec F.$$

Dacă notăm prin $\vec F'$ vectorul echipolent cu $\vec F$ și care are originea Q', avem $\overrightarrow{QQ'} \times \vec F = \overrightarrow{QQ'} \times \vec F' = M(Q, \vec F')$, astfel încît formula precedentă devine

$$M(Q', \vec F) = M(Q, \vec F) - M(Q, \vec F').$$

Deci momentul vectorului $\vec F$ față de punctul Q' este egal cu momentul lui $\vec F$ față de Q minus momentul față de Q al unui vector echipolent cu $\vec F$ și avînd originea Q'.

Exerciții

1. Fie $\vec u$ și $\vec v$ doi vectori avînd suporții concurenți și fie Q un punct oarecare. Să se arate că

$$M(Q, \vec u + \vec v) = M(Q, \vec u) + M(Q, \vec v).$$

2. Fie vectorii $\vec u = \overrightarrow{UU'}$, $\vec v = \overrightarrow{VV'}$ și fie Q, Q' două puncte oarecare. Să se arate că

$$M(Q', \vec u) + M(Q', \vec v) = M(Q, \vec u) + M(Q, \vec v) - M[Q, \vec u + \vec v \text{ (în } Q')].$$

Noțiunea de moment al unui vector este deosebit de importantă pentru Mecanică și Fizică. În mecanică, această noțiune permite formularea unor condiții necesare și suficiente, pe care trebuie să le verifice un sistem de forțe aplicate asupra unui corp rigid, pentru ca acel corp să fie în echilibru sub acțiunea forțelor sistemului. Considerarea momentului vitezei unei particule conduce la obținerea unor legi de conservare, fundamentale pentru studiul mișcării acelei particule.

Definiție. Se numește cuplu, orice pereche de vectori alunecători $\{\{\vec u\}\}$ și $\{\{\vec v\}\}$, astfel ca $\vec u$ și $\vec v$ să fie paraleli, de sensuri opuse și cu normele egale. Suma vectorilor unui cuplu este vectorul nul.

Totuși, aplicînd un cuplu unui corp rigid, acesta nu va fi în echilibru. Efectul cuplului $(\{\{\vec{u}\}\}, \{\{\vec{v}\}\})$ asupra corpului considerat este măsurat de *momentul cuplului*, dat de suma $M(Q, \vec{u}) + M(Q, \vec{v})$. Din ultimul exercițiu și din relația $\vec{u} + \vec{v} \sim \vec{O}$ rezultă că suma $M(Q, \vec{u}) + M(Q, \vec{v})$ nu depinde de alegerea punctului Q.

Exercițiu. Fie $(\vec{u}, \vec{v})$ un cuplu și fie Q, Q' două puncte oarecare. Să se arate că

$$M(Q, \vec{u}) + M(Q, \vec{v}) = M(Q', \vec{u}) + M(Q', \vec{v}).$$

(Indicație. Se va folosi egalitatea stabilită în exercițiul precedent.)

10. Probleme rezolvate

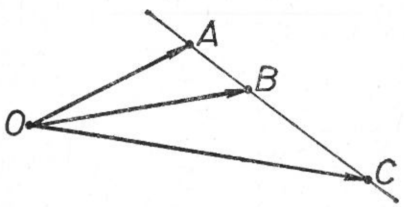


Fig. VI.37

Problema 1. *Fie O, A, B, patru puncte astfel ca $\vec{AC} = x\vec{AB}$, unde x este un număr real diferit de 1. Să se arate că* (fig. VI.37)

$$\vec{OA} \sim \frac{\vec{OC} - x\vec{OB}}{1 - x}.$$

Rezolvare. Din relațiile $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$, $\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$ rezultă $\vec{OC} - x \cdot \vec{OB} \sim$
$\sim (\vec{OA} + \vec{AC}) - x \cdot (\vec{OA} + \vec{AB}) = (1 - x) \cdot \vec{OA} + (\vec{AC} - x \cdot \vec{AB}) = (1 - x)\vec{OA}$.

Împărțind ambii membri ai relației $\vec{OC} - x \cdot \vec{OB} = (1 - x) \cdot \vec{OA}$ prin $1 - x$, se obține relația din enunț.

Problema 2. *Să se exprime aria unui triunghi în funcție de lungimile laturilor.*

Soluție. Fie $a = \| \vec{BC} \|$, $b = \| \vec{CA} \|$, $c = \| \vec{AB} \|$ lungimile laturilor triunghiului ABC. Vom arăta că $4S^2 = a^2c^2 - (\vec{BA} \cdot \vec{BC})^2$. Pe de altă parte, avem

$$2\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \| \vec{BA} \|^2 + \| \vec{BC} \|^2 - (\vec{BA} - \vec{BC})^2 = c^2 + a^2 - b^2,$$

deci putem scrie

$$16S^2 = 4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2 = (2ac + c^2 + a^2 - b^2)(2ac - c^2 - a^2 + b^2) =$$
$$= (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c).$$

Dacă notăm prin $2p$ perimetrul triunghiului ABC, vom avea

$2p = a + b + c$, $2(p - a) = b + c - a$, $2(p - b) = c + a - b$, $2(p - c) = a + b - c$

și formula precedentă devine

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Rezultă *formula lui Heron:*

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Exerciții

1. Să se calculeze aria unui triunghi avînd lungimile laturilor $a = 10$, $b = 4$, $c = 7$.

2. Să se calculeze aria unui paralelogram avînd lungimile laturilor $a = 10$, $b = 9$ și lungimea diagonalei $d = 2$.

Problema 3. Fie D un punct pe suportul BC al laturii $|BC|$ a triunghiului ABC astfel ca $\vec{DB} = k\,\vec{DC}$. Să se exprime $\| \vec{AD} \|$ cu ajutorul lungimilor a, b, c și a raportului k.

Soluție. Avem $\vec{AD} = \dfrac{\vec{AB} - k\vec{AC}}{1 - k}$, deci

$$\vec{AD}^2 = \frac{\vec{AB}^2 - 2k\vec{AB} \cdot \vec{AC} + k^2\vec{AC}^2}{(1 - k)^2} = \frac{c^2 - k(b^2 + c^2 - a^2) + k^2b^2}{(1 - k)^2}$$

1. Să se calculeze lungimea medianei și lungimea bisectoarei duse prin vîrful A în triunghiul ABC, pînă la intersecția cu latura BC.

(Indicație. Pentru mediană, se ia $k = -1$ și se obține

$$4m_A^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2, \quad m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Pentru bisectoare, $k = -\dfrac{c}{b}$ și rezultă pentru lungimea bisectoarei

$$\beta_A = \sqrt{bc(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}/(b + c).)$$

2. Să se calculeze cosinusul unghiului $\hat{A}$ al unui triunghi ABC, în care $a = 7$ și $b = c = 4$.

3. Să se calculeze cosinusurile unghiurilor triunghiului ABC, care are lungimile laturilor $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$.

4. Să se arate că unghiul $\hat{A}$ al unui triunghi ABC, în care $b^2 + c^2 < a^2$, este obtuz.

5. Să se indice unghiurile ascuțite ale triunghiului ABC, care are $a = m$, $b = n$ și $c = m + n - 1$, unde m și n sînt numere întregi mai mari decît 1.

Problema 4. Să se exprime aria unui triunghi ABC cu ajutorul vectorilor $\vec{BA}$, $\vec{BC}$.

Soluție. Să notăm prin AA', $A' \in BC$, înălțimea din A și să notăm

$$a = \| \vec{BC} \|, c = \| \vec{BA} \|, d = \| \vec{BA'} \|, h = \| \vec{AA'} \|.$$

Aria triunghiului ABC este dată de formula

$$2S = ah.$$

Avem $ad = |\vec{BA} \cdot \vec{BC}|$, $h^2 = c^2 - d^2$, $a^2h^2 = a^2c^2 - a^2d^2$, deci

(1) $$4S^2 = \| \vec{BA} \|^2 \cdot \| \vec{BC} \|^2 - (\vec{BA} \cdot \vec{BC})^2.$$

Rezultă următoarea formulă pentru calculul ariei S:

(2) $$2S = \sqrt{\| \vec{BA} \|^2 \cdot \| \vec{BC} \|^2 - (\vec{BA} \cdot \vec{BC})^2}.$$

Din relația (1) deducem că avem, pentru orice pereche de vectori $\vec{u} = \vec{BC}$, $\vec{v} = \vec{BA}$,

$$\| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \geqslant 0$$

sau

(3) $$\| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \geqslant |\vec{u} \cdot \vec{v}|.$$

Inegalitatea (3) se numește inegalitatea lui Schwartz-Cauchy-Buniakowsky.

1. Să se arate că punctele A, B, C sînt coliniare dacă și numai dacă

$$\| \vec{BA} \|^2 \cdot \| \vec{BC} \|^2 = (\vec{BA} \cdot \vec{BC})^2.$$

2. Să se arate că aria paralelogramului $ABCD$ este dată de formula

$$S(ABCD) = \sqrt{\| \vec{BA} \|^2 \cdot \| \vec{BC} \|^2 - (\vec{BA} \cdot \vec{BC})^2}.$$

3. Să se determine aria unui paralelogram avînd laturile $\| \vec{BA} \| = 3$, $\| \vec{BC} \| = 4$ și măs $\widehat{ABC} = 135°$.

(Avem $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -12 \cos 45° = -6\sqrt{2}$; avem $S = 6\sqrt{2}$).

11. Vectori de poziție

Fie O un punct fixat. Fiecărui punct M i se poate asocia în mod biunivoc vectorul $\overrightarrow{OM}$, care se numește *vectorul de poziție al punctului M* (față de originea fixată O) (fig. VI.38).

Fig. VI.38

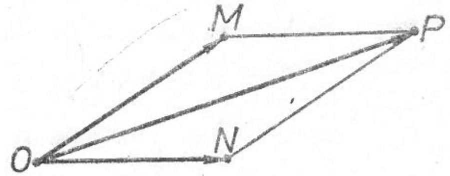


Fig. VI.39

Definim suma a doi vectori de poziție $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ punînd (fig. VI.39)

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \text{ (în } O\text{)},$$

deci $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ este acel vector $\overrightarrow{OP}$, pentru care $\overrightarrow{MP} \sim \overrightarrow{ON}$ sau $\overrightarrow{NP} \sim \overrightarrow{OM}$.

Cu această definiție, operația de adunare a vectorilor de poziție este o operație comutativă și asociativă, care admite vectorul nul $\overrightarrow{OO}$ ca element neutru. Vom nota $\vec{0} = \overrightarrow{OO}$.

Dacă notăm prin M' simetricul punctului M față de O, vom avea

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO},$$

deci orice vector de poziție are un opus față de adunare. Notăm

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}.$$

Fiind dat un vector de poziție $\overrightarrow{OM}$ și un număr real k, produsul $k \cdot \overrightarrow{OM}$ este un vector de poziție, avînd norma $\| k \cdot \overrightarrow{OM} \| = |k| \cdot \| \overrightarrow{OM} \|$. Dacă $\overrightarrow{OM}$ este vector nenul și dacă $k \neq 0$, atunci $k \cdot \overrightarrow{OM}$ este vector nenul coliniar cu $\overrightarrow{OM}$. Deci punînd $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, punctele O, M, M' vor fi coliniare.

Dacă $k > 0$, semidreptele $|OM$, $|OM'$ coincid, iar dacă $k < 0$, semidreptele $|OM$, $|OM'$ sînt opuse.

Din definițiile și proprietățile pe care le cunoaștem pînă acuma, dacă notăm prin $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... vectori de poziție, față de o origine fixată O, putem scrie următoarele formule

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$,
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$,
5. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$,

6. $(k + l) \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{u}$,
7. $(k \cdot l) \cdot u = k \cdot (l \cdot u)$
8. $1 \cdot u = u$.

D e f i n i ț i e. **O mulțime M, înzestrată cu o operație de compunere internă, notată cu semnul $+$, și cu o operație de compunere externă, de înmulțire cu numere reale, astfel încît să fie verificate proprietățile 1—8, se numește spațiu vectorial real.**

Putem spune, din cele arătate, că:

Vectorii de poziție ai punctelor din spațiu, în care s-a fixat o origine, formează un spațiu vectorial real.

Produsul scalar, definit pentru doi vectori oarecare, poate fi aplicat și vectorilor de poziție. Avem proprietățile:

1'. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \in \mathbf{R}$,

2'. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,

3'. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geqslant 0$,

4'. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ dacă și numai dacă $\vec{u} = \vec{0}$.

5'. $(\vec{k} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Un spațiu vectorial, înzestrat cu o operație, care asociază fiecărei perechi de vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$ un număr real $\vec{u} \cdot \vec{v}$, astfel încît să fie verificate proprietățile 1'—5' se numește *spațiu vectorial euclidian.*

Din considerațiile anterioare rezultă că:

Vectorii de poziție ai punctelor din spațiu, în care s-a fixat o origine, formează un spațiu vectorial euclidian.

12. Vectori liberi

Fie $\overrightarrow{AB}$ un vector. Mulțimea vectorilor echipolenți cu vectorul $\overrightarrow{AB}$, se numește *vectorul liber* definit de $\overrightarrow{AB}$. Vom nota această mulțime prin $\{\overrightarrow{AB}\}$. Avem $\overrightarrow{AB} \in \{\overrightarrow{AB}\}$, deoarece $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu el însuși.

Exercițiu. Dacă $\overrightarrow{A'B'}$ este un vector echipolent cu $\overrightarrow{AB}$, avem $\{\overrightarrow{A'B'}\} = \{\overrightarrow{AB}\}$.

Vom nota prin $\vec{0}$ mulțimea tuturor vectorilor nuli; aceștia sînt echipolenți între ei, deci $\vec{0}$ este un vector liber.

Dacă avem doi vectori $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$, este definită suma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (in O), pentru orice punct O. Dacă avem alte puncte A', B', C', D', O' astfel ca $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{C'D'} \sim \overrightarrow{CD}$, atunci

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) \sim \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'} \text{ (în } O'),$$

deci avem implicația

$$\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{C'D'} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) \sim \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'} \text{ (în } O').$$

Această implicație arată că putem defini suma a doi vectori liberi prin formula

$$\{\overrightarrow{AB}\} + \{\overrightarrow{CD}\} = \{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O)\}.$$

Dacă r este un număr real și dacă $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt doi vectori echipolenți, avem $r \cdot \overrightarrow{AB} \sim r \cdot \overrightarrow{A'B'}$. Aceasta arată că putem defini produsul unui număr real r cu un vector liber $\{\overrightarrow{AB}\}$ punînd

$$r \cdot \{\overrightarrow{AB}\} = \{r \cdot \overrightarrow{AB}\}.$$

Datorită faptului că produsul scalar a doi vectori nu se schimbă dacă înlocuim cei doi vectori prin doi vectori echipolenți lor, rezultă că putem defini produsul scalar a doi vectori liberi $\{\overrightarrow{AB}\}$, $\{\overrightarrow{CD}\}$ punînd

$$\{\overrightarrow{AB}\} \cdot \{\overrightarrow{CD}\} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Operațiile de adunare, de înmulțire cu un număr real și de produs scalar a vectorilor liberi au proprietățile **1—8** și **1'—5'** arătate pentru vectorii de poziție. Rezultă că:

Vectorii liberi ai spațiului formează un spațiu vectorial euclidian.

13. Aplicații geometrice
(pentru cercuri de elevi)

1. *Condiții de coliniaritate a trei puncte.*

Dacă punctele A, B, C sînt coliniare, vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vor fi coliniari; deci există un număr real r astfel ca

(1) $$\overrightarrow{AC} = r \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Folosind o formulă stabilită anterior, putem scrie (fig. VI.40).

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \text{ (în } A) = r\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \text{ (în } A).$$

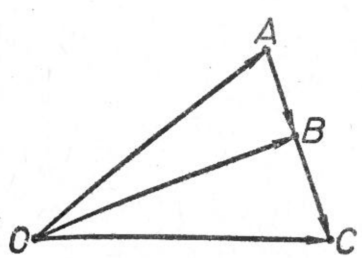


Fig. VI.40

Rezultă că avem

$$\overrightarrow{OC} - r \cdot \overrightarrow{OB} + (r - 1)\overrightarrow{OA} = \text{vector nul}$$

sau

(2) $$\overrightarrow{OC} \sim r \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - r) \cdot \overrightarrow{OA}.$$

Deci, dacă punctele A, B, C sînt coliniare, există un număr real r astfel încît să fie verificată relația (2).

Reciproc, dacă relația (2) este verificată putem deduce relația (1), care arată că punctele A, B, C sînt coliniare.

Dacă $r = 1$, avem $C = B$.

Dacă presupunem $r \neq 1$, din formula (2) rezultă

(3) $$\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OC} - r \cdot \overrightarrow{OB}}{1 - r}.$$

Formula (1) arată că r este raportul în care punctul A împarte segmentul $|BC|$.

În concluzie:

Fiecare din formulele (1), (2), (3) *constituie o condiție necesară și suficientă ca punctele* A, B, C *să fie coliniare. În aceste formule,* r *reprezintă raportul în care punctul* A *împarte segmentul* | BC | *și este deci un număr care nu depinde de alegerea punctului* O.

Dacă notăm $q = 1 - r$, $s = -1$, avem

(4) $$q + r + s = 0$$

și ecuația (2) se poate scrie

(5) $$q \cdot \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{OB} + s \cdot \overrightarrow{OC} \in \vec{0}.$$

Deci:

O condiție necesară pentru ca punctele A, B C, să fie coliniare este să existe trei numere reale q, r, s, nu toate nule, dar avînd suma 0, *astfel încît să fie verificată relația* (5).

Condiția obținută este și suficientă, deoarece numerele q, r, s ne fiind toate nule, putem împărți aceste numere cu unul dintre ele, care nu este nul, și obținem atunci o relație de forma (2), în care C este eventual înlocuit prin A sau B.

2. Teorema lui Menelaus (directă și reciprocă).

Pentru a da o aplicație a acestor rezultate, să considerăm un punct O, un triunghi PQR și alte trei puncte P', Q', R', astfel ca $P' \in QR$, $Q' \in RP$, $R' \in PQ$. Să considerăm numerele reale q, p, r, pentru care avem

(6) $$\overrightarrow{P'Q} = p \cdot \overrightarrow{P'R},\ \overrightarrow{Q'R} = q \cdot \overrightarrow{Q'P},\ \overrightarrow{R'P} = r \cdot \overrightarrow{R'Q}.$$

Vrem să aflăm condiția necesară și suficientă pe care trebuie să o îndeplinească numerele p, q, r, pentru ca punctele P', Q', R' să fie coliniare. Vom presupune că punctele P', Q', R' sînt diferite de P, Q, R.

Numerele p, q, r, nu depind de alegerea punctului O. Să alegem atunci $O = P'$ (fig. VI.41). Din formulele (6) obținem, folosind formula (3),

(7) $$\overrightarrow{OQ} = p \cdot \overrightarrow{OR},$$

(8) $$\overrightarrow{OQ'} = \frac{\overrightarrow{OR} - q \cdot \overrightarrow{OP}}{1 - q},$$

$$\overrightarrow{OR'} = \frac{\overrightarrow{OP} - r \cdot \overrightarrow{OQ}}{1 - r} = \frac{\overrightarrow{OP} - rp \cdot \overrightarrow{OR}}{1 - r}.$$

Folosind (7), am eliminat vectorul $\overrightarrow{OQ}$.

Punctele $O = P'$, Q', R' sînt coliniare, dacă există un număr real k, astfel ca $\overrightarrow{OQ'} = k \cdot \overrightarrow{OR'}$. Rezultă condiția

$$(1 - r)\,(\overrightarrow{OR} - q \cdot \overrightarrow{OP}) = k(1 - q)\,(\overrightarrow{OP} - rp\ \overrightarrow{OR}.)$$

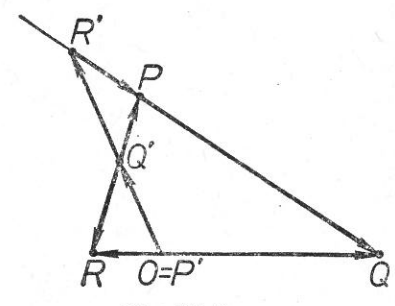


Fig. VI.41

Punctele O, P, R nu pot fi coliniare; ultima egalitate conduce la relațiile

$$-(1-r)q = k(1-q),\ 1-r = -krp(1-q).$$

Eliminînd k, obținem

$$pqr = 1.$$

Am obținut

Teorema lui Menelaus. Condiția necesară și suficientă pentru ca trei puncte P', Q', R', situate pe laturile unui triunghi PQR să fie coliniare, este ca numerele $p, q\ r$ care verifică relațiile

$$(9)\quad \overrightarrow{P'Q} = p\cdot\overrightarrow{P'R},\ \overrightarrow{Q'R} = q\cdot\overrightarrow{Q'P},\ \overrightarrow{R'P} = r\cdot\overrightarrow{R'Q}$$

să verifice condiția $pqr = 1$.

Teorema lui Menelaus se mai numește *teorema celor șase mărimi.*

3. *Teorema lui Ceva.*

Să ne punem acuma problema de a afla condiția pe care trebuie să o îndeplinească rapoartele p, q, r, pentru ca dreptele PP', QQ', RR' să fie concurente.

Numerele p, q, r fiind independente de alegerea punctului O, să alegem pentru O punctul de concurență al dreptelor PP', QQ', RR'.

În acest caz, vor exista trei numere reale a, b, c, astfel ca

$$(10)\quad \overrightarrow{OP'} = a\cdot\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OQ'} = b\cdot\overrightarrow{OQ},\ \overrightarrow{OR'} = c\cdot\overrightarrow{OR}.$$

Pe de altă parte, folosind relațiile (6) și formula (3), obținem

$$(1-p)\cdot\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OQ} - p\cdot\overrightarrow{OR},\ (1-q)\cdot\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OR} - q\cdot\overrightarrow{OP},\ (1-r)\cdot\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OP} - r\cdot\overrightarrow{OQ}.$$

Introducînd în formulele (10), ajungem la ecuațiile

$$\overrightarrow{OQ} - p\cdot\overrightarrow{OR} = a(1-p)\cdot\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OR} - q\cdot\overrightarrow{OP} = b(1-q)\cdot\overrightarrow{OQ},\ \overrightarrow{OP} - r\cdot\overrightarrow{OQ} = c(1-r)\cdot\overrightarrow{OR}.$$

Prima din aceste ecuații dă $\overrightarrow{OQ} = p\cdot\overrightarrow{OR} + a(1-p)\cdot\overrightarrow{OP}$. Introducînd această expresie în celelalte două ecuații, avem

$$\overrightarrow{OR} - q\cdot\overrightarrow{OP} = b(1-q)p\cdot\overrightarrow{OR} + ab(1-p)(1-q)\cdot\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OP} - rp\cdot\overrightarrow{OR} - ar(1-p)\cdot$$
$$\cdot\overrightarrow{OP} = c(1-r)\overrightarrow{OR}.$$

Grupînd termenii convenabili, putem scrie aceste relații sub forma

$$[1-bp(1-q)]\cdot\overrightarrow{OR} = [q + ab(1-p)(1-q)]\cdot\overrightarrow{OP},\ [1-ar(1-p)]\cdot\overrightarrow{OP} = [rp +$$
$$+ c(1-r)]\cdot\overrightarrow{OR}.$$

Dar vectorii $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OR}$ sînt necoliniari, deci trebuie să avem

$$1 - bp(1-q) = 0,\ q + ab(1-p)(1-q) = 0,\ 1 - ar(1-p) = 0,\ rp + c(1-r) = 0.$$

Eliminînd în primele trei din aceste relații numerele a, b, obținem $pqr = -1$. Am demonstrat

Teorema lui Ceva. Fiind date punctele P', Q', R' pe laturile triunghiului PQR, astfel ca aceste puncte să fie diferite de P, Q, R și astfel ca dreptele PP', QQ', RR' să fie concurente, rapoartele p, q, r, în care aceste puncte împart segmentele $|QR|$, $|RP|$, $|PQ|$, verifică relația

$$(11)\quad pqr = -1.$$

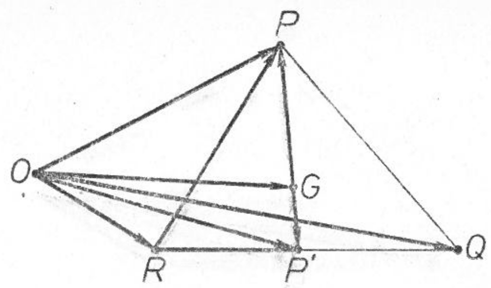


Fig. VI.42

Rezultă că dintre rapoartele p, q, r, unul sau trei sînt negative.

Să indicăm alte aplicații ale formulei (3).

4. Dacă A este mijlocul segmentului $|BC|$, avem $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$, deci $r = -1$ și formula (3) devine

$$(12)\quad \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

5. Fie PQR un triunghi și fie P' mijlocul segmentului $|QR|$ (fig. VI.42).

Oricare ar fi punctul O, a vom avea $\overrightarrow{OP'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$.

Fie G punctul de pe segmentul $|PP'|$, pentru care $\overrightarrow{GP} = -2\overrightarrow{GP'}$. Formula (3) pentru $r = -2$ dă

$$(13)\quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}).$$

G este punctul de pe mediana $|PP'|$, care împarte această mediană în raportul $\overrightarrow{GP}/\overrightarrow{GP'} = -2$. Formula (13) fiind simetrică în P, Q, R, considerarea celorlalte două mediane $|QQ'|$, $|RR'|$ va arăta că același punct G împarte și aceste mediane în raportul -2. Obținem astfel o nouă demonstrație a proprietății de concurență a medianelor unui triunghi oarecare.

Dacă $O = G$, formula (13) devine

$$(14)\quad \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}.$$

6. Fie $PQRS$ un patrulater și fie M, N mijloacele segmentelor $|PQ|$, $|RS|$. Avem, oricare ar fi punctul O,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}),\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}).$$

Dacă notăm prin H mijlocul segmentului $|MN|$, avem

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}).$$

Din simetria acestei formule în P, Q, R, S deducem că H este mijlocul segmentului care are drept extremități mijloacele segmentelor $|QR|$, $|PS|$ sau ale segmentului $|PR|$ $|QS|$.

Dacă $O = H$, ultima formulă devine

$$\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{HQ} + \overrightarrow{HR} + \overrightarrow{HS} = \vec{0}.$$

H este *centrul de greutate* al patrulaterului $PQRS$.

7. Să generalizăm aceste proprietăți. Fie $A_1A_2\ldots A_m$, $B_1B_2\ldots B_n$ două poligoane și fie O un punct în spațiu. Definim centrul de greutate al fiecăruia din aceste poligoane, punînd

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_m}),$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \ldots + \overrightarrow{OB_n}).$$

Fie I punctul de pe segmentul $[GH]$, pentru care avem $\vec{IG} = -\frac{n}{m}\cdot\vec{IH}$. Din formula (3) se obține pentru $\vec{OI}$ expresia

$$\vec{OI} = \frac{1}{m+n}(\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_m} + \vec{OB_1} + \dots + \vec{OB_n}).$$

Rezultă că I este centrul de greutate al poligonului $A_1 \dots B_n$. Punctul I nu se schimbă, dacă schimbăm punctul O sau dacă permutăm între ele punctele $A_1, \dots, B_n$.

8. *Teorema lui Desargues.* Fie într-un plan triunghiurile ABC, $A'B'C'$ astfel ca dreptele AA', BB', CC' să fie distincte și concurente într-un punct O. Definim punctele A'', B'', C'' prin formulele:

$$\{A''\} = BC \cap B'C', \quad \{B''\} = CA \cap C'A', \quad \{C''\} = AB \cap A'B'.$$

Atunci punctele A'', B'', C'' sînt coliniare.

Demonstrație. Din ipoteză rezultă că există numere reale p, q, r astfel ca

$$\vec{OA'} = p\vec{OA}, \quad \vec{OB'} = q\vec{OB}, \quad \vec{OC'} = r\vec{OC}.$$

Să notăm prin u, v, w, u', v', w' rapoartele în care punctele A'', B'', C'' împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, respectiv $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$. Vom avea relațiile

$$\vec{OA''} = \frac{\vec{OB} - u\vec{OC}}{1-u} = \frac{\vec{OB'} - u'\vec{OC'}}{1-u'} = \frac{q\vec{OB} - ru'\vec{OC}}{1-u'},$$

$$\vec{OB''} = \frac{\vec{OC} - v\vec{OA}}{1-v} = \frac{\vec{OC'} - v'\vec{OA'}}{1-v'} = \frac{r\vec{OC} - pv'\vec{OA}}{1-v'},$$

$$\vec{OC''} = \frac{\vec{OA} - w\vec{OB}}{1-w} = \frac{\vec{OA'} - w'\vec{OB'}}{1-w'} = \frac{p\vec{OA} - qw'\vec{OB}}{1-w'}.$$

Vectorii $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ fiind necoliniari doi cîte doi, din aceste relații deducem egalitățile

$$1 - u' = q(1-u), \quad 1 - v' = r(1-v), \quad 1 - w' = p(1-w),$$
$$u(1-u') = ru'(1-u), \quad v(1-v') = pv'(1-v), \quad w(1-w') = qw'(1-w).$$

Din aceste egalități se deduce că

$$u' = \frac{1-q}{1-r}, \quad v' = \frac{1-r}{1-p}, \quad w' = \frac{1-p}{1-q},$$

Deci $u'v'w' = 1$. Din reciproca teoremei lui Menelaus deducem că punctele A'', B'', C'' sînt coliniare.

Să observăm că relațiile scrise mai sus implică formulele

$$qu = ru', \quad rv = pv', \quad pw = qw'.$$

14. Aplicații în mecanică

În Mecanică, o forță se reprezintă printr-un vector legat, originea vectorului fiind punctul de aplicație al forței.

Dacă asupra unui *corp rigid* (nedeformabil) K se aplică o forță $\vec{F}$ într-un punct A, efectul aplicării acestei forțe nu se schimbă, dacă înlocuim vectorul $\vec{F}$ printr-un vector $\vec{F'}$, echipolent cu $\vec{F}$ și avînd același suport cu $\vec{F}$.

Dacă asupra corpului K se aplică două forțe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, în același punct A, atunci efectul aplicării acestor forțe nu se schimbă, dacă înlocuim perechea celor două forțe prin suma lor, luată în punctul A.

Aceste proprietăți sînt legi fizice, verificate experimental. Ele au condus la definirea sumei a doi vectori, așa cum am arătat, și la considerarea relației de echipolență a vectorilor.

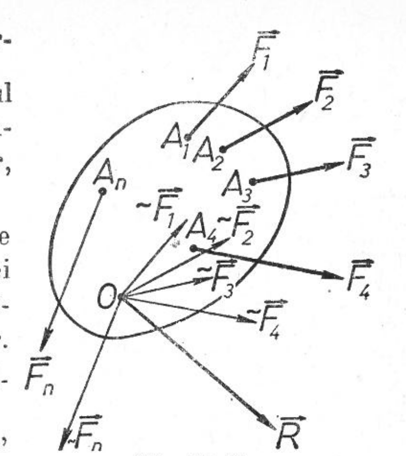


Fig. VI.43

Dacă asupra corpului K se aplică mai multe forțe $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$, în diferite puncte $A_1, \dots, A_n$, și dacă se fixează un punct O, suma $\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$ (în O), (fig. VI.43) se numește *rezultanta în O*, a vectorilor $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$. Dacă notăm prin $\vec{R}_0$ această rezultantă, efectul aplicării forței $\vec{R}_0$ în punctul O nu este în general același cu efectul aplicării forțelor $\vec{F}_i$ în punctele A_i. Pentru a obține același efect, se arată că trebuie să mai aplicăm corpului K un *cuplu*. Prin definiție, un cuplu este un sistem de doi vectori legați $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, avînd suporții AB, CD paraleli, normele egale și sensurile opuse.

Exemple. 1. *Pentru a face o aplicație la Mecanică, să ne propunem să calculăm norma rezultantei a două forțe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, care fac între ele unghiul α. Norma rezultantei $\vec{R}_0$ nu depinde de punctul O și avem*

$$\vec{R}_0^2 = \vec{R}_0 \cdot \vec{R}_0 = \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_1 + \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_2$$

deci

$$\vec{R}_0^2 = \vec{F}_1^2 + \vec{F}_2^2 + 2\,\|\vec{F}_1\| \cdot \|\vec{F}_2\| \cos\alpha.$$

2. *Dacă trei forțe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, aplicate într-un punct O al unui corp K sînt în echilibru, atunci există trei puncte P_1, P_2, P_3 astfel ca*

$$\vec{P_1P_2} \sim \vec{F}_3, \quad \vec{P_2P_3} \sim \vec{F}_1, \quad \vec{P_3P_1} \sim \vec{F}_2.$$

Exercițiu. Dacă un punct mobil M parcurge un segment $[A\ B]$, de la A la B, sub acțiunea unei forțe constante $\vec{F}$ se spune că $\vec{F}$ efectuează un lucru mecanic

$$L_{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{F}.$$

Să se arate că dacă M parcurge linia frîntă $[ABC]$, atunci (fig. VI.44)

$$L_{AB} + L_{BC} = L_{AC}.$$

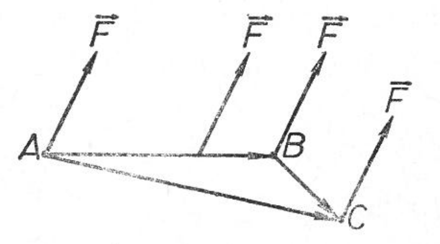


Fig. VI.44

Fig. VI.45

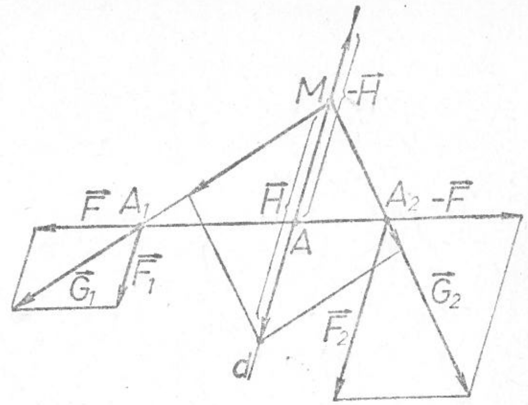


Fig. VI.46

A p l i c a ț i a 1. *În capetele A_1, A_2 ale unei bare rigide se aplică două forțe $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, paralele și de același sens, dar neegale. Să se determine un punct $O \in$ $\in |A_1A_2|$ și o forță $\vec{F}'$, care aplicată în O, să facă echilibru cu $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$* (fig. VI.45).

Soluție. Aplicăm în A_1 și A_2 forțele $\vec{F}$, $-\vec{F}$ respectiv. Efectul forțelor $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ aplicate în A_1 și A_2 este același cu al forțelor $\vec{G}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}$, $\vec{G}_2 = \vec{F}_2 - \vec{F}$, aplicate în A_1 și A_2 (fig. VI.46).

Suporții forțelor $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ se intersectează într-un punct M. Efectul forțelor $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ este același cu efectul forței $\vec{H} = (\vec{G}_1 + \vec{G}_2)$ (în M). Fie d suportul forței $\vec{H}$ și fie $\{A\} = d \cap A_1A_2$. Avem $A \in |A_1A_2|$. Aplicînd forța $-\vec{H}$ în punctul A, obținem sistemul de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, -\vec{H}$, care este în echilibru. Avem $d \parallel \vec{F}_1 \parallel \vec{F}_2$, deci triunghiurile formate de $\vec{F}_1$, $\vec{G}_1$ și $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MA_1}$ sînt asemenea; rezultă

$$\frac{|AA_1|}{|AM|} = \frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{F}_1\|}.$$

La fel

$$\frac{|AA_2|}{|AM|} = \frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{F}_2\|}.$$

Rezultă

$$\frac{|AA_1|}{|AA_2|} = \frac{\|\vec{F}_2\|}{\|\vec{F}_1\|}.$$

Rezultă că A împarte segmentul $[A_1A_2]$ în raportul $\|\vec{F}_2\| / \|\vec{F}_1\|$, ceea ce permite determinarea lui A pe segmentul $|A_1A_2|$.

Observație. Dacă forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ au sensuri opuse și mărimi diferite, punctul A va fi exterior segmentului $|A_1A_2|$.

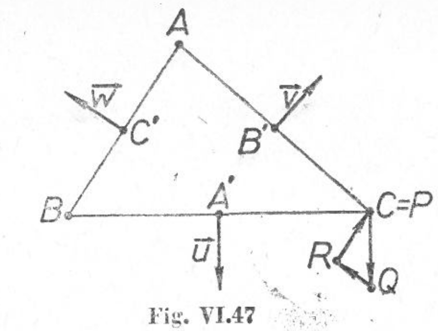


Fig. VI.47

A p l i c a ț i a 2. *Fie ABC un triunghi rigid și fie A', B', C' mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. În punctele A', B', C' se aplică trei forțe $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ perpendiculare pe laturi, dirijate spre exteriorul triunghiului și avînd mărimile proporționale cu laturile. Să se arate că cele trei forțe fac echilibru* (fig. VI.47).

Soluție. Vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sînt echipolenți cu vectorii $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RP}$, unde PQR este un triunghi care se obține din triunghiul ABC printr-o rotație de unghi drept în jurul unuia din vîrfuri și apoi printr-o omotetie.

A p l i c a ț i a 3. *Să se generalizeze ultima problemă, considerînd un poligon oarecare.*

Soluție. Se consideră forțe perpendiculare cîte unei laturi, proporționale cu laturile și orientate spre exteriorul poligonului. Cu n vectori echipolenți acestor forțe se formează un poligon asemenea cu primul poligon.

Exercițiu. Se consideră un paralelogram rigid $ABCD$ și se aplică în punctele A, B, C, D forțe proporționale respectiv cu vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$. Să se arate că aceste forțe fac echilibru (fig. VI.48).

A p l i c a ț i a 4. *Fie $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$ trei tije avînd greutățile proporționale cu lungimile lor. Să se determine centrul de greutate al sistemului celor trei tije* (fig. VI.49).

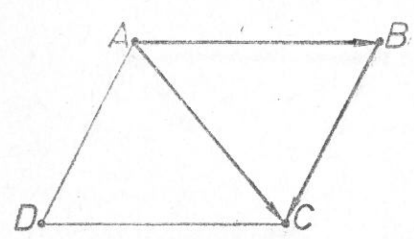


Fig. VI.48

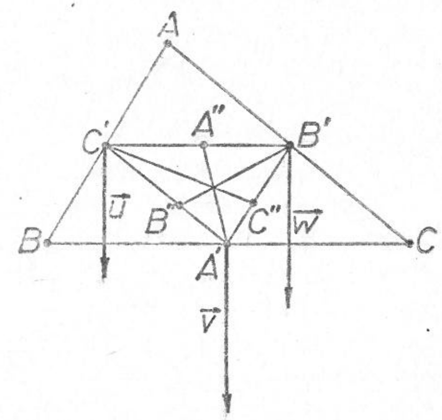


Fig. VI.49

Soluție. Pentru a afla centrul de greutate, considerăm că în mijloacele C', A', B' ale laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ sînt aplicate trei forțe $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, avînd mărimile proporționale cu lungimile laturilor. Sistemul forțelor $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ poate fi înlocuit cu un sistem de forțe $\vec{w}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{u}$, aplicate în punctele A'', B'', C'', astfel ca

$$A'' \in |B'C'|, \quad \frac{|A''B'|}{|A''C'|}=\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|}=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|A'B'|}{|A'C'|}.$$

Rezultă că $|A'A''$ este bisectoarea unghiului $\widehat{B'A'C'}$. Centrul de greutate căutat J se va afla pe segmentul $|A'A''|$. În mod analog, vom arăta că J se află și pe celelalte bisectoare ale triunghiului $A'B'C'$, deci J este intersecția bisectoarelor triunghiului $A'B'C'$.

Aplicația 5. *Să se determine centrul de greutate G al unei plăci omogene limitate de un patrulater ABCD.*

Soluție. Fie g_C, g_A, g_D, g_B centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, BCD, ABC, ACD. Atunci

$$G \in g_A g_C \cap g_B g_D.$$

15. Aplicație în astronomie

Mișcarea aparentă a planetelor (pentru cercuri de elevi)

Se știe astăzi că planetele sistemului nostru solar descriu orbite eliptice, situate, în plane înclinate față de planul orbitei Pămîntului, cu excepția planetei Pluto, cu cel mult 7° și avînd toate unul din focare în Soare.

Într-o primă aproximație, putem presupune că orbitele planetelor sînt cercuri concentrice aflate într-un același plan, centrul acestor cercuri găsindu-se în Soare. Pentru a urmări mișcarea unei planete J, să spunem Jupiter, pe bolta cerească, va trebui să ținem seama că mișcarea diurnă de rotație a Pămîntului în jurul axei sale complică traiectoria aparentă a planetei J. Pentru a elimina această complicație, vom înregistra poziția planetei J pe bolta cerească, mai multe nopți la rînd, la o aceeași oră. Vom constata atunci că traiectoria planetei J este încă destul de complicată. Explicația este dată de faptul că, față de un observator situat pe Pămînt, mișcarea lui J apare ca o compunere a două mișcări de rotație, una a lui J față de Soarele S și alta aparentă, a Soarelui față de Pămînt. Prin urmare, traiectoria lui J poate fi descrisă ca traiectoria unui mobil, care se rotește pe un cerc E de rază $r=d(S, P)$, al cărui centru se rotește, la rîndul său, pe un cerc D, de centru P și rază $R=d(J, S)$ (fig. VI.50, VI.51).

De asemenea, putem descompune mișcarea aparentă a planetei J față de Pămînt, considerînd că J se rotește pe un cerc D', de rază R, al cărui centru se rotește, la rîndul său, pe un cerc E' de rază r și de centru P.

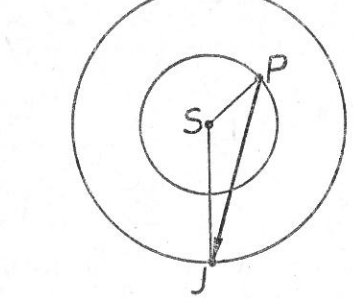


Fig. VI.50

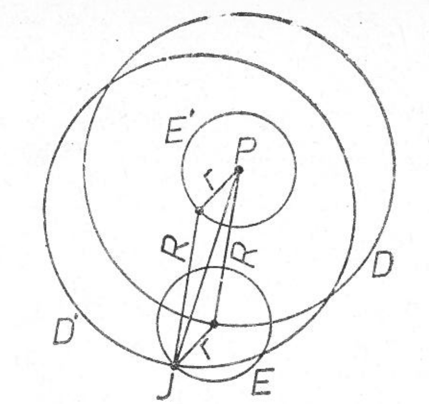


Fig. VI.51

Ptolomeu a considerat, pentru fiecare planetă, ca cerc mobil, cercul de rază mai mică, iar ca cerc fix, cel de rază mai mare. Echivalența celor două descompuneri a fost pusă în evidență de *Tycho Brahe*, care a deschis astfel drumul clar spre modelul heliocentric al lui Copernic; acesta a mutat centrul cercurilor fixe din P în Soarele S.

Dacă admitem că P_1 și J_1 descriu traiectoriile p, j în jurul Soarelui (fig. VI.52), traiectoria aparentă $J'=J'_1J'_2\dots$ a lui J față de P este dată de oricare din figurile VI.53, VI.54.

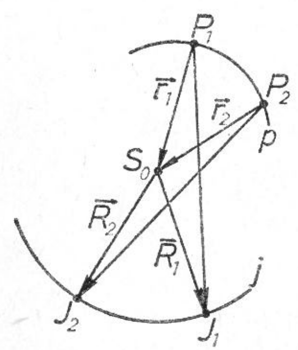


Fig. VI.52

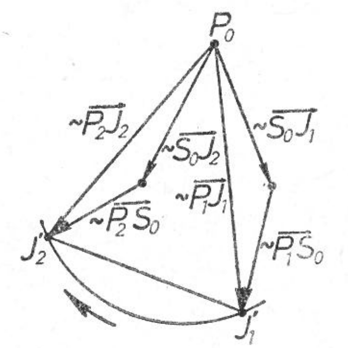


Fig. VI.53

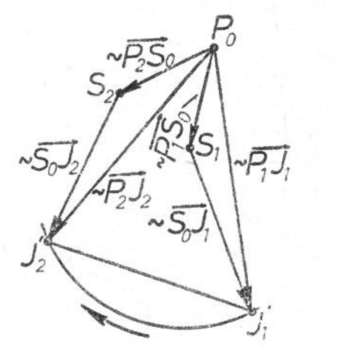


Fig. VI.54

16. Exerciții

1. Să se enunțe și să se demonstreze reciproca teoremei lui Desargues.

2. Să se enunțe și să se demonstreze reciproca teoremei lui Ceva.

3. Fie PQR un triunghi și fie punctele $P'\in QR$, $P''\in QR$, $Q'\in PR$, $R'\in PQ$ diferite de P, Q, R și astfel ca dreptele PP', QQ' RR' să fie concurente, iar punctele P'', Q', R', să fie coliniare. Să se arate că există un număr real r astfel încît să avem

$$\overrightarrow{P'Q} \sim r\overrightarrow{P'R},\ \overrightarrow{P''Q} \sim -r\,\overrightarrow{P''R}.$$

Cine va fi PP'' dacă QQ', RR' sînt bisectoarele unghiurilor $\hat{Q}$, $\hat{R}$ ale triunghiului PQR?

4. Fie PQR un triunghi și fie punctele $P', P'' \in QR$, $Q', Q'' \in PR$, $R', R'' \in PQ$ diferite de P, Q, R și astfel ca P', P'' să fie simetrice față de mijlocul segmentului $|QR|$, Q' și Q'' să fie simetrice față de mijlocul segmentului $|RP|$, iar R' și R'' să fie simetrice față de mijlocul segmentului $|PQ|$. Să se arate că P'', Q'', R'' sînt coliniare dacă și numai dacă P', Q', R' sînt coliniare și că dreptele PP'', QQ'', RR'' sînt concurente, dacă și numai dacă PP', QQ', RR' sînt concurente.

5. Fie O, O', A, B patru puncte distincte astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv |O'A| \equiv |O'B|$. Să se arate că dreptele $OA, O'B$ sînt paralele și că dreptele OO', AB sînt perpendiculare.

6. Fie OAB un triunghi isoscel ($|OA| \equiv |OB|$) și fie M mijlocul segmentului $|AB|$. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \sim 2\overrightarrow{OM}$.

7. Fie punctele A, B, C, D, O, M astfel încît dreptele AB, CD sînt perpendiculare în M și $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \equiv |OD|$. Să se arate că

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}.$$

8. Fie A, B, C, D patru puncte fixe într-un plan și fie M un punct mobil în același plan. Fie M_1 simetricul lui M față de A, M_2 simetricul lui M_1 față de B, M_3 simetricul lui M_2 față de C și M_4 simetricul lui M_3 față de D. Să se arate că vectorul $\overrightarrow{MM_4}$ este echipolent cu un vector fix. Să se indice condițiile în care avem $M_4 = M$.

9. Să se arate că oricare ar fi punctele A, B, C, D într-un plan, avem

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

10. Fie O, A, B trei puncte fixe într-un plan p, $A \neq B$. Să se determine locul geometric al punctelor M, pentru care avem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \text{const.}$

11. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB \perp CD$ și fie E, F mijloacele laturilor $|AD|$, $|BC|$. Să se arate că avem

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD},\ 4\overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2,\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

12. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trei vectori liberi, astfel ca $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Să se arate că există puncte A, B, C astfel ca $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, $\overrightarrow{CA} \in \vec{w}$.

13. Să se arate că, dacă $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, atunci

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})^2 \vec{b}^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \vec{c}^2 + (\vec{b} \cdot \vec{c})^2 \vec{a}^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 \vec{c}^2 + 2(\vec{c} \cdot \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

14. Fie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trei vectori liberi astfel ca $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ și fie

$$\vec{a}' = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},\ \vec{b}' = (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a},\ \vec{c}' = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}.$$

Să se arate că există puncte A, B, C, A', B', C' astfel ca

$$\overrightarrow{BC} \in \vec{a},\ \overrightarrow{CA} \in \vec{b},\ \overrightarrow{AB} \in \vec{c},\ \overrightarrow{B'C'} \in \vec{a}',\ \overrightarrow{C'A'} \in \vec{b}',\ \overrightarrow{A'B'} \in \vec{c}'$$

și că triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt asemenea (M. Chiriță).

15. Fie OAB un triunghi și k un număr real. Se consideră punctul P pentru care $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BA}$. Să se determine x și y astfel ca $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Cum trebuie ales k pentru ca P să fie între A și B? Care este locul geometric al punctelor P, pentru care $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$, cînd k parcurge mulțimea **R** a numerelor reale?

R: $x = k, y = 1 - k$; dreapta AB.

16. Să se arate că dacă AD este bisectoare în triunghiul ABC, atunci

$$\|\overrightarrow{AC}\|(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \|\overrightarrow{AB}\|(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}).$$

17. Fie într-un plan reperul ortogonal $(\vec{i}, \vec{j})$. Se consideră vectorii $\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = b\vec{j}$, $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$. Să se determine componentele vectorului $\overrightarrow{OP}$, față de reperul $(\vec{i}, \vec{j})$.

R: $x = ka$, $y = (1 - k)b$.

18. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și fie M un punct în planul acestui triunghi. Să se arate că

$$2(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}) = 9\overrightarrow{MG}^2 - \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2.$$

19. Fie ABC un triunghi și fie $ABDE$, $ACFG$ pătratele construite pe laturile $|AB|$, $|AC|$ în exteriorul triunghiului ABC. Să se arate că $CE \perp BG$.

Indicație. Se arată că $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$ scriind $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}$.

20. Se consideră un dreptunghi $ABCD$. Să se determine locul geometric al punctelor M din planul dreptunghiului $ABCD$, pentru care

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\|.$$

R: dreaptă.

21. Fie P, Q două puncte oarecare, într-un plan p. Să se determine locul geometric al punctelor M din planul p, pentru care $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ are o valoare dată k.

Indicație. Se consideră mijlocul O al segmentului $|PQ|$, dacă $P \neq Q$. Se arată că $\overrightarrow{OM}^2 = k + \overrightarrow{OP}^2$. Locul geometric căutat este un cerc, un punct sau mulțimea vidă.

22. Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan p, să se determine locul geometric al punctelor M din planul p, pentru care

$$(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}) = k,$$

unde k este un număr dat. Caz particular: $ABCD$ este un dreptunghi.

Indicație. Se consideră punctele P, Q, care împart segmentele $|AB|$, $|CD|$ în raportul -3. Locul geometric căutat este fie un cerc cu centrul în O, mijlocul segmentului $|PQ|$ fie $\{O\}$, fie $\varnothing$. În cazul particular, O este centrul dreptunghiului.

Capitolul
VII
Suprafețe poliedrale și corpuri poliedrale

1. Aria unei suprafețe poligonale

Fie P un poligon convex, situat într-un plan p. Vom nota prin $[P]$ mulțimea $\text{Int}\ P \cup P$. Deci $[P]$ este reuniunea dintre interiorul lui P, laturile lui P și vîrfurile lui P, (fig. VII.1).

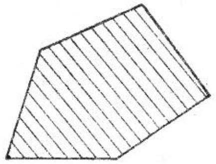


Fig. VII.1

D e f i n i ț i e. **O mulțime de forma $[P] = P \cup \text{Int}\ P$, unde P este un poligon convex, va fi numită suprafață poligonală. Vom spune că P este frontiera suprafeței poligonale $[P]$ și că suprafața $[P]$ este limitată de poligonul P.**

O suprafață limitată de un trilater va fi numită suprafață *triunghiulară* sau *suprafață trilateră*. O suprafață limitată de un patrulater convex va fi numită *suprafață patrulateră*.

În acest paragraf, vom arăta cum se poate defini și calcula aria unei suprafețe poligonale.

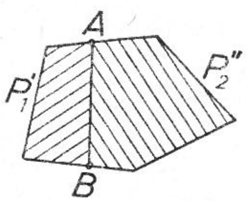


Fig. VII.2

Fie P, P', P'' trei poligoane *convexe* astfel ca (fig. VII.2):

1. Intersecția $P' \cap P''$ este un segment $[AB]$ avînd capetele $A \in P$, $B \in P$.
2. $\text{Int}\ P' \cap \text{Int}\ P'' = \emptyset$.
3. $\text{Int}\ P = \text{Int}\ P' \cup \text{Int}\ P'' \cup |AB|$.

D e f i n i ț i e. **Vom spune că suprafețele poligonale $[P']$, $[P'']$ realizează o descompunere a suprafeței $[P]$ dacă poligoanele P', P'' îndeplinesc condițiile 1, 2, 3 date mai sus. În aceste condiții vom scrie**

$$[P] = [P'] + [P''] \text{ sau } [P] - [P'] = [P''].$$

Exerciții

1. Să se arate că dacă suprafețele poligonale $[P']$, $[P'']$ realizează o descompunere a suprafeței poligonale $[P]$, atunci

$$\text{Int}\ P \neq \text{Int}\ P' \cup \text{Int}\ P''.$$

2. Să se arate că dacă poligoanele P, P', P'' îndeplinesc condițiile 1, 2, 3, atunci

$$P = (P' \cup P'') - |AB|.$$

Prin descompuneri succesive, o suprafață poligonală poate fi descompusă într-un număr oricît de mare de suprafețe poligonale. Scrierea

$$[P] = [P_1] + [P_2] + ... + [P_k]$$

indică faptul că suprafața poligonală $[P]$ a fost descompusă în suprafețele poligonale $[P_1]$, $[P_2]$, ..., $[P_k]$, (fig. VII.3).

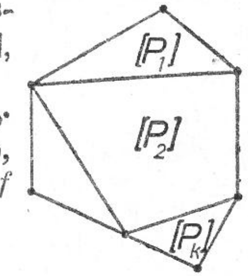


Fig. VII.3

D e f i n i ț i e. **Fie M și M' două mulțimi de puncte. Spunem că aceste mulțimi sînt congruente, dacă există cel puțin o aplicație bijectivă f de la M la M', astfel ca relațiile**

$$A \in M,\ B \in M,\ A' = f(A),\ B' = f(B)$$

să implice egalitatea

$$d(A, B) = d(A', B').$$

Dacă două segmente $|AB|$, $|A'B'|$ sînt congruente, atunci putem asocia fiecărui punct $P \in |AB|$ acel punct $P' \in |A'B'|$, pentru care avem $d(A', P') = d(A, P)$. Dacă avem un al doilea punct $Q \in |AB|$ și dacă alegem $Q' \in |A'B'|$ astfel ca $d(A', Q') = d(A, Q)$, atunci vom avea $d(P, Q) = d(P', Q')$.

Deci două segmente congruente în sensul cunoscut de noi de la începutul manualului, sînt congruente și după ultima definiție, dacă se consideră cele două segmente ca mulțimi M și M'.

Exerciții

1. Să se arate că dacă două poligoane convexe P, P' sînt congruente, atunci suprafețele poligonale limitate de cele două poligoane sînt de asemenea congruente.

2. Fie M o mulțime de puncte și fie $\vec{v}$ un vector în spațiu. Să asociem fiecărui punct $A \in M$ acel punct $A' = f(A)$, pentru care avem $\overrightarrow{AA'} \sim \vec{v}$. Fie M' mulțimea punctelor $A' = f(A)$, ce corespund punctelor $A \in M$. Să se arate că mulțimile M și M' sînt congruente.

3. Să se arate că două plane arbitrare sînt mulțimi congruente.

4. Să se arate că două drepte sau două semidrepte, sau două semiplane, formează perechi de mulțimi congruente.

D e f i n i ț i e. **Fie $S = [P]$, $S' = [P']$ două suprafețe poligonale. Vom spune că suprafețele S, S' sînt congruente prin descompunere, dacă putem descompune cele două suprafețe într-un același număr de suprafețe poligonale, congruente două cîte două:**

$$S = S_1 + ... + S_p,\quad S' = S'_1 + ... + S'_p,$$

$$S_1 \equiv S'_1, ..., S_p \equiv S'_p.$$

Vom exprima faptul că suprafețele poligonale S și S' sînt congruente prin descompunere în felul următor: S (d) S', (fig. VII.4).

Două suprafețe poligonale S, S' vor fi numite *congruente prin completare*, dacă există două perechi de suprafețe poligonale congruente prin descompunere:

$$T\,(\mathrm{d})\,T',\quad U\,(\mathrm{d})\,U',$$

astfel încît să avem

$$U = S + T,\ U' = S' + T',$$

unde relația $U = S + T$ înseamnă că suprafața poligonală U a fost împărțită în suprafețele poligonale S și T, cu ajutorul unui segment interior suprafeței U și avînd capetele pe poligonul care limitează pe U (fig. VII.5,6).

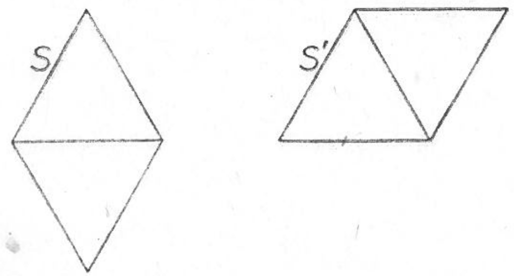


Fig. VII.4

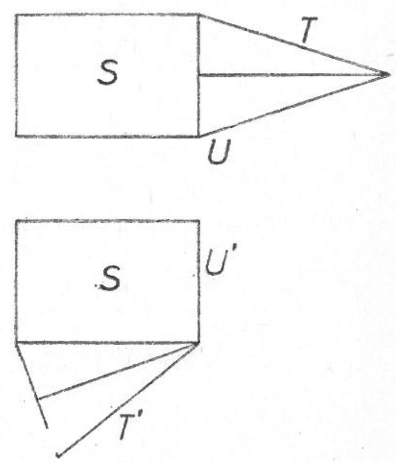


Fig. VII.5

Dacă suprafețele S, S' sînt congruente prin completare, vom exprima acest fapt scriind: S (c) S''.

Următoarele implicații sînt ușor de dovedit și lăsăm verificarea lor ca exerciții:

1. $S\,(\mathrm{d})\,S' \Rightarrow S\,(\mathrm{c})\,S'$.

2. $S\,(\mathrm{d})\,S',\ T\,(\mathrm{d})\,T' \Rightarrow S + T\,(\mathrm{d})\,S' + T'$.

3. $S\,(\mathrm{d})\,S',\ S'\,(\mathrm{d})\,S'' \Rightarrow S\,(\mathrm{d})\,S''$.

4. *Dacă suprafețele poligonale S, S' sînt congruente prin descompunere și dacă suprafețele T, T' sînt de asemenea congruente prin descompunere și dacă $T \subset S$, $T' \subset S'$, atunci suprafețele $S - T$ și $S' - T'$ sînt congruente prin completare.* Pe scurt:

$$S\,(\mathrm{d})\,S',\ T\,(\mathrm{d})\,T',\ S \supset T,\ S' \supset T' \Rightarrow S - T\,(\mathrm{c})\,S' - T'.$$

Vom da acuma unele exemple simple de suprafețe congruente prin descompunere sau prin completare.

5. *Fie $ABCD$, $A'B'C'D'$ două paralelograme, astfel ca*

$$|AB| \equiv |A'B'|,\ AB = A'B',\ CD = C'D'.$$

În acest caz, suprafețele limitate de cele două paralelograme sînt congruente prin completare, (fig. VII.6).

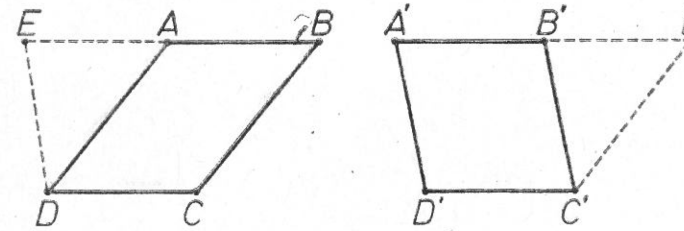


Fig. VII.6

Demonstrație. Să considerăm punctele $E \in AB$, $E' \in AB$ astfel ca $DE \parallel A'D'$ și $C'E' \parallel BC$. Avem atunci

$$[BCDE]\,(\mathrm{d})\,[E'C'D'A'],\ ADE \equiv E'C'B',$$

$$[ABCD] + [ADE] = [BCDE],\ [A'B'C'D'] + [E'C'B'] = [A'E'C'D']$$

și rezultă $[ABCD]\,(\mathrm{c})\,[A'B'C'D']$.

6. *Fie ABC un triunghi și fie D, E mijloacele laturilor $|AC|$ respectiv $|BC|$. Fie F punctul de intersecție al dreptei DE cu paralela dusă prin B la AC. Atunci suprafețele limitate de trilaterul $[ABC]$ și de paralelogramul $ABFD$ sînt congruente prin descompunere, $[ABC]\,(\mathrm{d})\,[ABFD]$.*

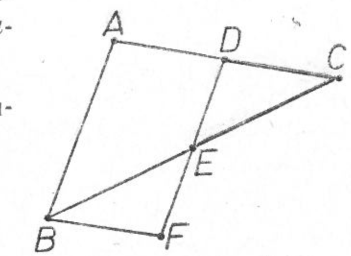


Fig. VII.7

Demonstrație (fig. VII.7). Avem descompunerile

$$[ABC] = [ABED] + [CDE],$$
$$[ABFD] = [ABED] + [BFE],$$
$$CDE \equiv BFE$$

și rezultă $[ABC]\,(\mathrm{d})\,[ABFD]$.

1. Fie $ABCD$ un paralelogram și fie punctele $E \in |BD|$, $M \in |AB|$, $N \in |CD|$, $E \in PQ \cap MN$, $P \in |AD|$, $Q \in |BC|$. Să se arate că dacă $MN \parallel AD$ și $PQ \parallel AB$, atunci:

$$[AMEP]\,(\mathrm{c})\,[CQEN],\ (\text{fig. VII.8}).$$

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $AC \perp BC$. Considerăm pătratul $ACDE$ și dreptunghiul $AGKI$, astfel ca $|AG| \equiv |AB|$, $I \in |AB|$ și $CI \perp AB$. Să se arate că, (fig. VII.9):

$$[ACDE]\,(\mathrm{c})\,[IAGK].$$

(*Indicație.* Se consideră paralelogramul $ABFE$ și se observă că $[ACDE]\,(\mathrm{c})\,[ABFE]$ și $EAB \equiv CAG$, $EABF \equiv CAGH$, $CAI \equiv HGK$).

3. Fie $ABCD$ un trapez ($AB \parallel CD$) și fie M mijlocul laturii $|BC|$. Paralela dusă prin M la AD intersectează dreptele CD, AB în punctele F respectiv E. Să se arate că (fig. VII.10):

$$[ABCD]\,(\mathrm{d})\,[ADFE].$$

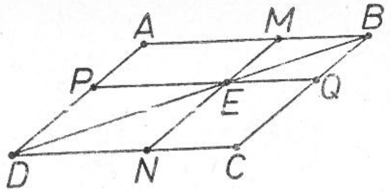


Fig. VII.8

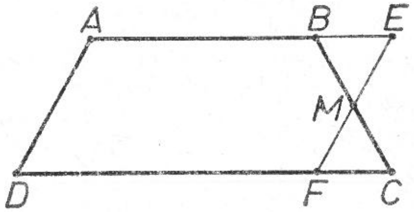


Fig. VII.10

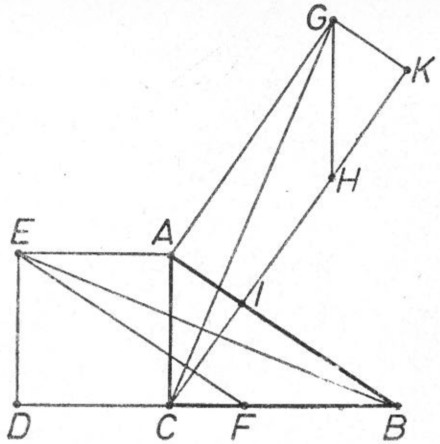


Fig. VII.9

D e f i n i ț i e. Numim descompunere elementară a suprafeței $[ABC]$, limitată de un trilater ABC, orice descompunere dată de un segment care are o extremitate într-unul din vîrfurile A, B, C și cealaltă extremitate pe latura opusă acelui vîrf (fig. VII.11).

Exercițiu. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC. Să se arate că produsele

$$d(B, C)\, d(A, A'),\ d(C, A)\, d(B, B'),\ d(A, B)\, d(C, C')$$

sînt egale între ele.

D e f i n i ț i e. Aria unei suprafețe triunghiulare $[ABC]$ este dată de formula

$$\sigma(ABC) = \frac{1}{2}\, d(B, C)\, d(A, A') = \frac{1}{2}\, d(C, A)\, d(B, B') = \frac{1}{2}\, d(A, B)\, d(C, C').$$

Exerciții

1. Să se arate că dacă $[ABD]$, $[ACD]$ dau o descompunere elementară a suprafeței triunghiulare $[ABC]$, $D \in \,]BC[$, atunci (fig. VII.12):

$$\sigma(ABC) = \sigma(ABD) + \sigma(ACD).$$

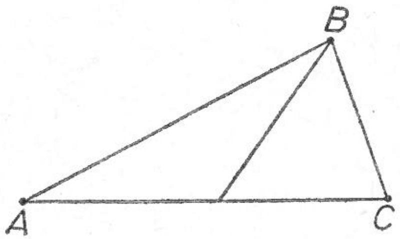


Fig. VII.11

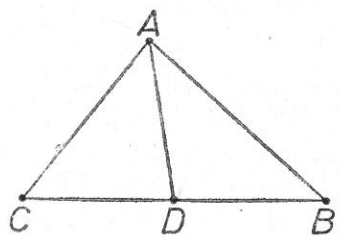


Fig. VII.12

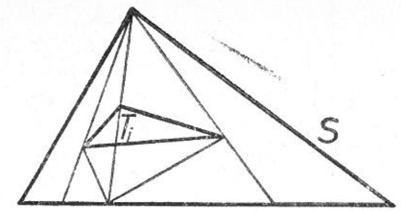


Fig. VII.13

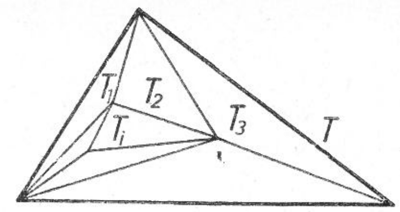


Fig. VII.14

2. Fie $T_1, T_2, \ldots, T_k$ suprafețe triunghiulare definind o descompunere a unei suprafețe triunghiulare S. Să se arate, pe exemple, că suprafețele $T_1, \ldots, T_k$ admit descompuneri elementare repetate, astfel ca suprafețele rezultate prin aceste descompuneri să poată fi obținute direct, prin descompuneri elementare succesive aplicate suprafeței S.

(Indicație. Figurile VII.13 și 14 dau exemple de tipul cerut. Elevii vor da alte exemple; ideea este de a trasa segmente care au ca extremități cîte un vîrf al triunghiului T și care trec printr-un vîrf al unui triunghi T_i.

3. Fie $T_1, \ldots, T_k$ suprafețe triunghiulare definind o descompunere a suprafeței triunghiulare S. Să se arate că aria suprafeței S este egală cu suma ariilor suprafețelor $T_1, \ldots, T_k$.

(Indicație. Se descompune fiecare din triunghiurile $T_1, \ldots, T_k$ astfel încît să se obțină o descompunere de tipul indicat în exercițiul 2. Apoi se aplică exercițiul 1.)

Sîntem acuma în măsură să definim aria unei suprafețe poligonale arbitrare. Fie P un poligon convex și fie $[P]$ suprafața poligonală limitată de P. Ducînd un număr de diagonale, putem descompune suprafața $[P]$ într-un număr finit de suprafețe triunghiulare (fig. VII. 15). Putem atunci defini aria suprafeței $[P]$ ca fiind egală cu suma ariilor suprafețelor triunghiulare din descompunerea considerată. Dar trebuie observat că putem face descompunerea suprafeței $[P]$ în mai multe moduri. Pentru ca definiția dată să aibă sens, ea nu trebuie să depindă de descompunerea făcută.

Din rezultatele stabilite anterior, rezultă că, oricum am descompune suprafața $[P]$ în suprafețe triunghiulare, suma ariilor suprafețelor unei astfel de descompuneri are o aceeași valoare, independentă de descompunerea aleasă. Această sumă a ariilor suprafețelor triunghiulare ale unei descompuneri a suprafeței poligonale $[P]$ se va numi *aria suprafeței poligonale* $[P]$.

Dacă avem două descompuneri ale suprafeței $[P]$ în suprafețe triunghiulare (fig. VII.16)

$$[P] = T_1 + T_2 + \ldots + T_r = T_1' + T_2' + \ldots + T_s',$$

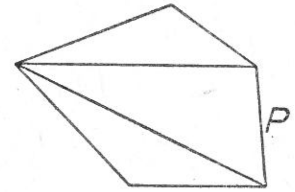


Fig. VII.15

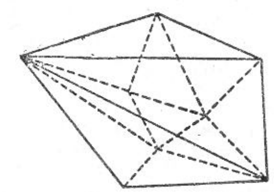


Fig. VII.16

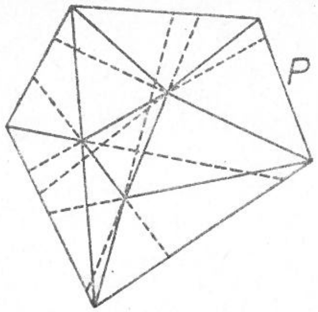


Fig. VII.17

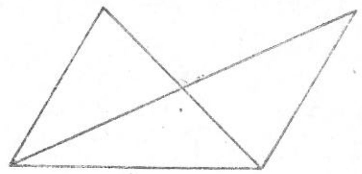


Fig. VII.18

putem obține o nouă descompunere a suprafeței $[P]$ prelungind laturile triunghiurilor care limitează suprafețele T_j, T'_j, pînă întîlnim poligonul P. Segmentele astfel obținute vor împărți suprafața $[P]$ în suprafețe triunghiulare și patrulatere. Mai departe, vom putea împărți fiecare suprafață patrulateră în cîte două suprafețe triunghiulare, ducînd cîte o diagonală. Se obține atunci o descompunere a suprafeței Int P în suprafețe triunghiulare, care se poate obține din fiecare din descompunerile inițiale, prin descompuneri elementare succesive (fig. VII.17). Dacă ținem seama de faptul că aria unei suprafețe triunghiulare este egală cu suma ariilor suprafețelor rezultate printr-o descompunere elementară, și dacă aplicăm această proprietate fiecărui triunghi al fiecăreia din descompunerile considerate, deducem că suma ariilor triunghiurilor fiecăreia din descompunerile considerate este aceeași în fiecare caz. Aceasta arată că definiția dată ariei unei suprafețe poligonale S, ca sumă a ariilor suprafețelor triunghiulare ale unei descompuneri (în suprafețe triunghiulare) a suprafeței S, *este independentă de descompunerea considerată.*

Exerciți

1. Să se arate că două suprafețe triunghiulare congruente prin descompunere au ariile egale (fig. VII.18).

2. Să se arate că dacă două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ au bazele $|BC|$, $|B'C'|$ congruente și ariile egale, atunci înălțimile din A și A' sînt de asemenea congruente, (fig. VII.19).

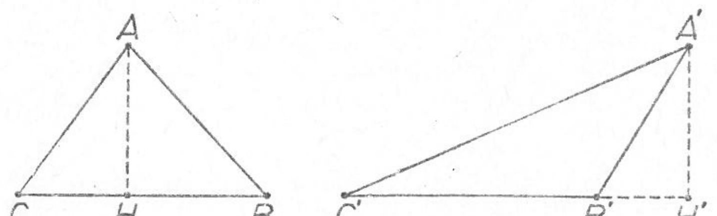


Fig. VII.19

3. Să se arate că aria unui trapez este egală cu produsul dintre distanța între laturile paralele și semisuma lungimilor acestor laturi (fig. VII.20).

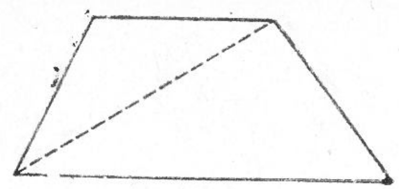


Fig. VII.20

4. Să se arate că dacă P este un poligon convex cu n, $n>3$ laturi, atunci există un poligon P', cu n-1 laturi, congruent prin completare cu P.

(*Indicație.* Se aleg patru vîrfuri succesive A, B, C, D în poligonul P, și se intersectează dreapta DC cu paralela dusă prin B la AC. Se obține punctul de intersecție M. Triunghiurile ABC, AMC limitează suprafețe congruente prin completare, deoarece au aceeași bază $|AC|$ și înălțimile din B și M congruente. Înlocuind triunghiul ABC cu AMC și apoi considerînd $|MD|$ ca latură, se obține un poligon P' cu n-1 laturi, congruent prin completare cu P (fig. VII.21)).

5. Să se arate că, oricare ar fi poligonul P, există un triunghi T, astfel ca suprafețele limitate de P și de T să fie congruente prin completare. Triunghiul T poate fi ales astfel ca una din laturile sale să aibă o lungime dată.

(*Indicație.* Prima afirmație se obține aplicînd de n-3 ori proprietatea stabilită prin ex. 4. Pentru ultima afirmație, se consideră un triunghi ABC, care limitează o suprafață S, congruentă prin completare cu $[P]$; pe semidreapta $|AB$ se consideră segmentul $|AB'|$ de lungimea dată și se duce paralela BC' la $B'C$, unde $C' \in AC$ (fig. VII.22)).

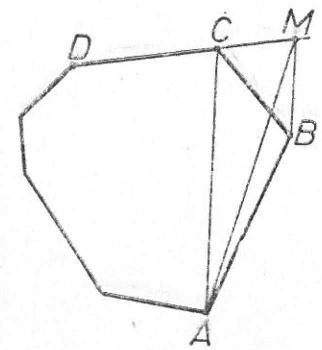


Fig. VII.21

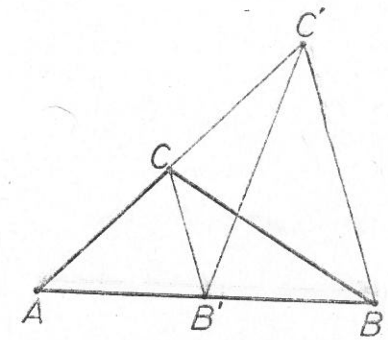


Fig. VII.22

Fie S, S' două suprafețe poligonale avînd ariile egale. Fiecare din aceste suprafețe este congruentă prin completare cu o suprafață triunghiulară. Fie T respectiv T' suprafețe triunghiulare congruente prin completare cu S și S'. Atunci aria lui T va fi egală cu aria lui T'. Putem presupune că triunghiurile care limitează suprafețele T, T' sînt congruente, deoarece două triunghiuri cu ariile egale sînt congruente prin completare cu două triunghiuri congruente între ele. Rezultă că *două suprafețe poligonale de arii egale sînt congruente prin completare cu un același triunghi*, deci sînt congruente prin completare una cu cealaltă.

Fie S, S' două suprafețe poligonale ce nu sînt congruente prin completare. Din proprietatea precedentă rezultă că S și S' au ariile neegale. Deci:

Dacă două suprafețe poligonale nu sînt congruente prin completare, atunci ele au ariile diferite.

Exerciții

1. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea și fie k raportul de asemănare, deci

$$k = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

În acest caz, raportul ariilor suprafețelor limitate de trilaterele ABC, $A'B'C'$ este egal cu k^2.

2. Fie P, P' două poligoane asemenea și fie S, S' suprafețele limitate de ele. Atunci raportul ariilor suprafețelor S, S' este egal cu pătratul raportului de asemănare a poligoanelor S, S'.

3. Să se exprime aria suprafeței limitate de un poligon regulat cu n laturi în funcție de n și de raza cercului circumscris poligonului, și apoi în funcție de n și de raza cercului înscris poligonului.

(Indicație. Se vor folosi funcții trigonometrice).

4. Să se arate că două suprafețe poligonale congruente prin descompunere au ariile egale.

În încheierea acestui paragraf, vom menționa o teoremă importantă datorată lui F. Bolyai, tatăl lui I. Bolyai, unul din descoperitorii geometriilor neeuclidiene:

Dacă două suprafețe poligonale au ariile egale, atunci cele două suprafețe sînt congruente prin descompunere.

Demonstrațiile proprietăților date mai sus, cu excepția teoremei lui F. Bolyai, pot fi făcute utilizînd numai axiomele de incidență, ordonare și congruență și axioma de paralelism, împreună cu consecințele ce rezultă din aceste axiome. Hilbert a arătat că, pentru demonstrarea teoremei lui F. Bolyai, este necesară introducerea axiomei lui Arhimede (cap. I, § 15).

2. Suprafețe poliedrale

Suprafețele poliedrale constituie o clasă importantă de figuri în spațiu. Această clasă conține o mare varietate de posibilități, deosebit de interesante.

Vom începe prin a descrie cele mai simple tipuri de suprafețe poliedrale.

Suprafețe poliedrale conice. Să considerăm $n+1$ puncte distincte O, A_1, $A_2, \ldots, A_n$ nesituate în același plan, astfel ca interioarele triunghiurilor (fig. VII.23).

(1) $$OA_1A_2,\ OA_2A_3, \ldots,$$
$$OA_iA_{i+1},\ OA_{i+1}A_{i+2}, \ldots, OA_{n-1}A_n,\ OA_nA_1$$

să fie disjuncte două cîte două. În acest caz, vom spune că mulțimea dată de reuniunea interioarelor triunghiurilor (1), a laturilor acestor triunghiuri și a vîrfurilor lor, este o *suprafață poliedrală conică.*

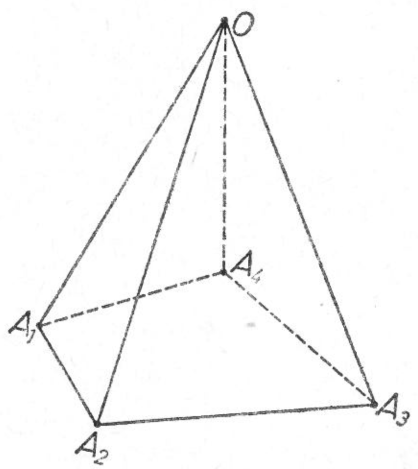


Fig. VII.23

Reamintim că o *suprafață poligonală* este limitată de un poligon convex P și este dată de reuniunea interiorului poligonului P cu laturile și cu mulțimea vîrfurilor lui P (fig. VII.24).

Suprafețele poligonale sînt suprafețe poliedrale particulare.

O suprafață poliedrală conică este o reuniune de suprafețe trilatere, avînd un vîrf comun și astfel ca intersecția a două oarecare din aceste suprafețe trilatere se reduce la acest vîrf sau este o latură comună.

Noțiunea de suprafață poliedrală conică poate fi generalizată, înlocuind triunghiurile prin poligoane convexe.

Definiție. Vom numi stea de centru O orice reuniune de suprafețe poligonale $S_1, S_2, \ldots, S_i, S_{i+1}, \ldots, S_n$, avînd următoarele proprietăți: (fig. VII.25):

1. *Poligoanele care limitează suprafețele S_i au punctul O ca vîrf comun.*

2. *Intersecțiile $S_1 \cap S_2$, $S_2 \cap S_3, \ldots, S_{i-1} \cap S_i, \ldots, S_{n-1} \cap S_n$, $S_n \cap S_1$ sînt formate din cîte o latură comună, închisă la capete.*

3. *Intersecțiile $S_i \cap S_j$, diferite de cele ce apar în condiția 2, se reduc la vîrful comun O.*

4. *Suprafețele $S_1, \ldots, S_n$ nu sînt situate în același plan,* și $n > 2$.

Suprafețele $S_1, \ldots, S_n$ au fiecare o frontieră și un interior.

Vom nota prin $F(T)$ poligonul care limitează suprafața poligonală T și prin $\overset{\circ}{T} = T - F(T)$ interiorul lui T.

Fie W o mulțime finită de suprafețe poligonale, $W = \{S_1, \ldots, S_k\}$. Vom spune că W este un sistem de suprafețe. Pentru fiecare indice i, vom nota prin $F(S_i)$ poligonul care limitează suprafața poligonală S_i. Laturile închise ale poligoanelor $F(S_i)$ vor fi numite *muchii* ale sistemului de suprafețe W, iar vîrfurile poligoanelor $F(S_i)$ vor fi numite *vîrfuri* ale lui W. Mulțimile S_i vor fi numite fețe închise, iar mulțimile $\overset{\circ}{S}_i = S_i - F(S_i)$ vor fi numite *fețe deschise* ale sistemului W.

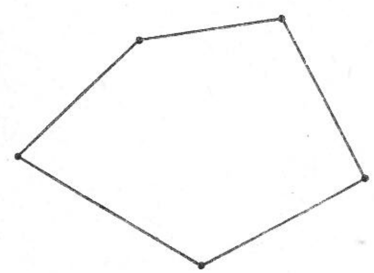


Fig. VII.24

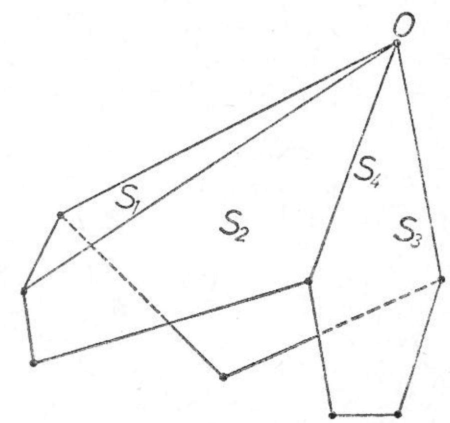


Fig. VII.25

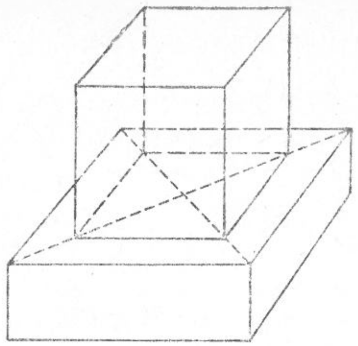


Fig. VII.26

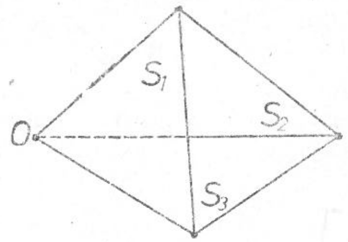


Fig. VII.27

D e f i n i ț i e. **Se numește suprafață poliedrală închisă orice sistem de suprafețe poligonale $W = \{S_1, ..., S_k\}$, care îndeplinește următoarele condiții:**

I. Fețele deschise ale sistemului W sînt disjuncte două cîte două și intersecția a două fețe închise ale lui W este fie o muchie comună fie un vîrf comun, fie mulțimea vidă.

II. Pentru fiecare vîrf al lui W, fețele lui W care conțin acel vîrf formează o stea.

III. Dacă scoatem din W o parte oarecare din fețele sale, se obține un sistem W', care nu mai verifică ambele condiții I și II.

Exerciții

1. Să se dea un exemplu de sistem de suprafețe poligonale care verifică condiția I (fig. VII.26).

2. Să se dea un exemplu de sistem W care nu verifică condiția I, (fig. VII. 27).

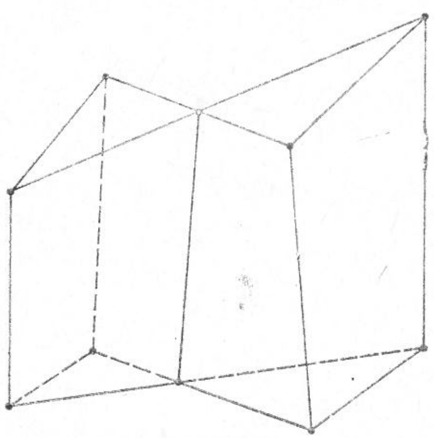


Fig. VII.28

3. Să se dea exemplu de sistem W care nu verifică condiția III (fig. VII.28).

4. Să se dea exemplu de sistem W care verifică condițiile I, II și III.

5. Din condiția II să se deducă că fiecare muchie a sistemului w este latură la exact două fețe ale lui W.

6. Să se dea exemple de sisteme W, care verifică două din condițiile I, II, III, dar nu verifică a treia din aceste condiții.

7. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Să se arate că suprafețele poligonale limitate de trilaterele ABC, BCD, CDA, ABD formează o suprafață poliedrală închisă (fig. VII.29).

D e f i n i ț i e. **Suprafețele poliedrale închise formate din patru fețe se numesc suprafețe tetraedrale.**

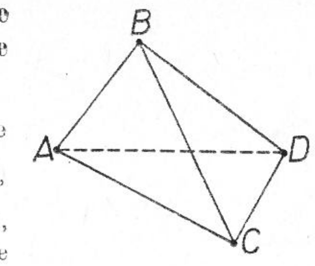


Fig. VII.29

8. Fie $ABCD$, $A'B'C'D'$ două paralelograme situate în două plane paralele, astfel ca vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ să fie echipolenți doi cîte doi. Se formează atunci, pe lîngă cele două paralelograme, alte patru paralelograme $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$. Să se arate că cele șase paralelograme limitează șase suprafețe patrulatere, care formează o suprafață poliedrală închisă. Să se indice numărul muchiilor acestei suprafețe (fig. VII.30).

D e f i n i ț i e. **O suprafață poliedrală cu șase fețe, situate două cîte două în plane paralele, se numește suprafață paralelipipedică.**

9. Fie P un poligon cu n vîrfuri $A_1, ..., A_n$, situat într-un plan p, și fie O un punct exterior planului p. Să se arate că sistemul de suprafețe poligonale (fig. VII.31).

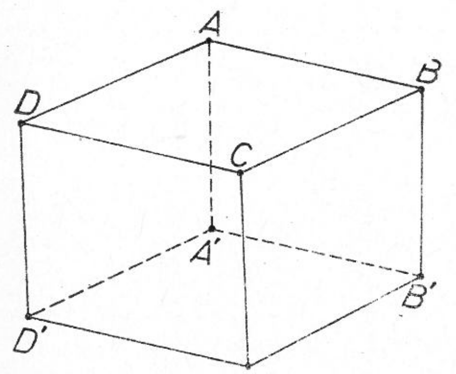


Fig. VII.30

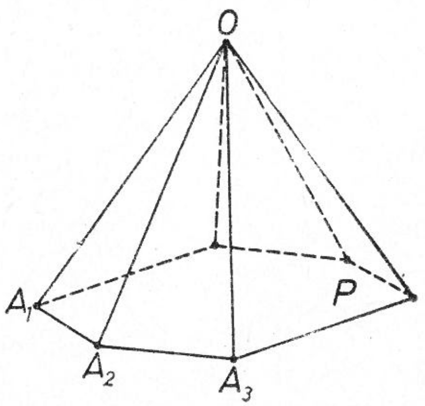


Fig. VII.31

$$W = \{OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_{n-1}A_n, OA_nA_1, P\}$$

este o suprafață poliedrală închisă, care conține o suprafață poliedrală conică.

D e f i n i ț i e. **O suprafață poliedrală închisă, formată dintr-o suprafață poligonală $[P]$ și dintr-o suprafață poliedrală conică, se numește suprafață piramidală. Dacă poligonul P are n vîrfuri, atunci suprafața piramidală va avea $n + 1$ vîrfuri. Dacă $n > 3$, vîrful suprafeței piramidale care nu aparține poligonului P se numește vîrful piramidei, iar suprafața $[P]$ se numește baza piramidei.**

10. Să se arate că, pentru orice număr întreg $n \geqslant 3$, există o suprafață poliedrală închisă, avînd $n + 2$ vîrfuri, $3n$ muchii și $2n$ fețe trilatere.

(*Indicație*. Se consideră reuniunea a două suprafețe piramidale avînd aceeași bază și se scoate interiorul bazei comune (fig. VII.32).)

11. Fie $P = A_1A_2 \dots A_n$, $P' = A'_1A'_2 \dots A'_n$ două poligoane convexe situate în două plane paralele, astfel ca vectorii $\overrightarrow{A_1A'_1}$, $\overrightarrow{A_2A'_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nA'_n}$ să fie paraleli doi cîte doi. Să se arate că suprafețele poligonale $[P]$, $[P']$ sînt fețe ale unei suprafețe poliedrale închise cu $n + 2$ fețe, din care n fețe sînt fețe patrulatere limitate de paralelograme (fig. VII.33).

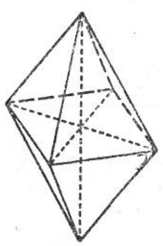


Fig. VII.32

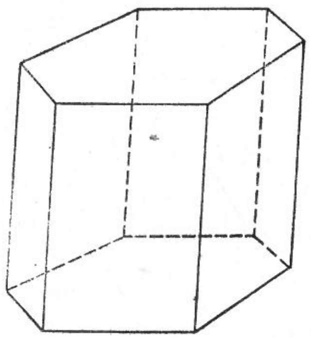


Fig. VII.33

Definiție. **O suprafață poliedrală închisă, formată din $n + 2$ fețe, din care n sînt limitate de paralelograme, se numește suprafață prismatică.**

O suprafață prismatică are două fețe poligonale situate în două plane paralele, și celelalte fețe sînt limitate de paralelograme.

Dacă $n \neq 4$, fețele care nu sînt limitate de paralelograme se numesc *bazele* suprafeței prismatice, iar fețele limitate de paralelograme se numesc *fețe laterale.*

Dacă $n = 4$, suprafața prismatică se numește *patrulateră*. Paralelipipedele sînt suprafețe prismatice patrulatere particulare, în care toate fețele sînt limitate de paralelograme.

O suprafață prismatică avînd bazele trilatere, se numește *suprafață prismatică trilateră* sau triunghiulară.

Uneori, suprafețele piramidale sînt numite piramide, iar suprafețele prismatice sînt numite prisme. Dar tot piramide, respectiv prisme, sînt numite, în aceleași texte, și solidele limitate de aceste suprafețe. Este însă necesar să se facă distincție între suprafețe și solide, atît în limbajul adoptat, cît și în conținutul textelor geometrice. În consecință, vom vorbi despre suprafețe piramidale, prismatice, conice etc. și apoi de corpuri (sau solide) piramidale, prismatice, conice etc.

Suprafețele piramidale și suprafețele prismatice avînd bazele convexe, fac parte dintr-o clasă importantă de suprafețe poliedrale, fiind *suprafețe poliedrale convexe.*

Definiție. **O suprafață poliedrală $W = \{S_1, \dots, S_k\}$ se numește convexă, dacă, pentru fiecare indice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, interioarele suprafețelor S_j, $j \neq i$, sînt situate de o aceeași parte a planului care conține suprafața** S_i (fig. VII.34).

Exercițiu. Să se arate că suprafețele poliedrale piramidale prismatice avînd baze convexe sînt suprafețe poliedrale convexe.

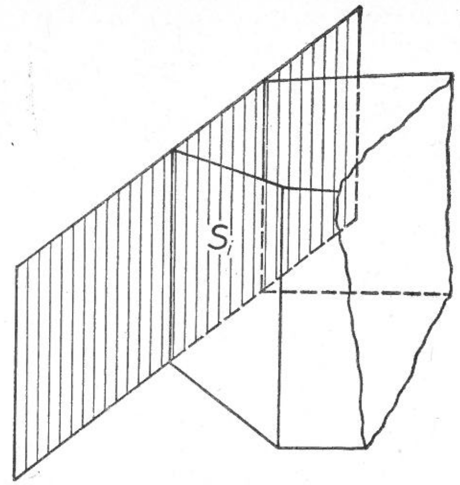


Fig. VII.34

Suprafețele poliedrale convexe sînt foarte variate. Ele se întîlnesc frecvent în Natură, de exemplu sub formă de *cristale*. Există 32 de clase de cristale, care se împart în 6 sisteme cristalografice, care au următoarele denumiri: sistemul regulat, sistemul tetragonal, sistemul hexagonal, sistemul rombic, sistemul monoclin și sistemul triclin. Primul sistem conține 5 clase, al doilea 7 clase și următoarele 7, respectiv 8, 3 și 2 clase. Aceste sisteme se disting prin numărul de plane de simetrie, și prin numărul de axe de simetrie ale fiecărui cristal. Proprietățile de simetrie ale unui cristal se manifestă prin proprietăți fizice ale corpurilor care cristalizează. Astfel comportarea unei raze de lumină care străbate o substanță aflată în stare cristalină depinde de sistemul și de clasa cristalelor care apar în acea substanță. Figurile 35—47 reprezintă cristale din cele 6 sisteme cristalografice.

Există și suprafețe poliedrale neconvexe. De exemplu, dacă se consideră un cub (paralelipiped cu muchiile congruente două cîte două și paralele sau perpendiculare două cîte două) și dacă O este un punct interior cubului și dacă $ABCD$ este poligonul care limitează una din fețele cubului, atunci putem

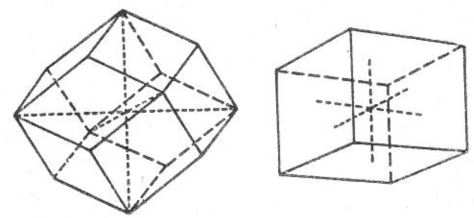


Fig. VII.35 a

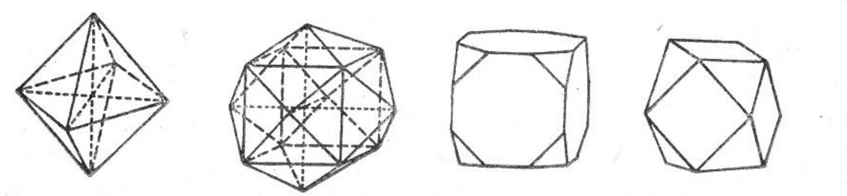


Fig. VII.35 b

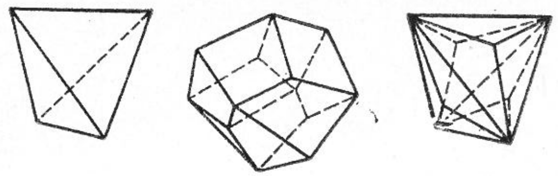


Fig. VII.36

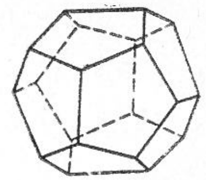


Fig. VII.37

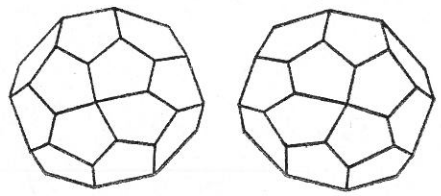


Fig. VII.38

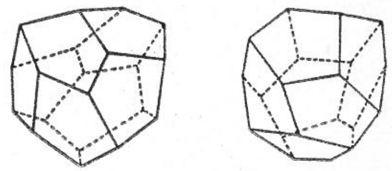


Fig. VII.39

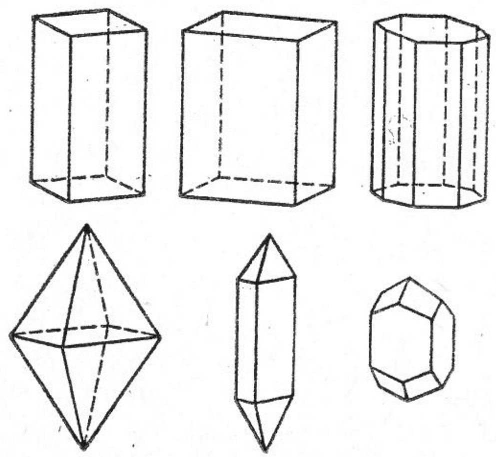


Fig. VII.40

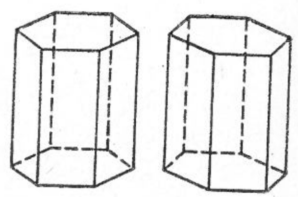


Fig. VII.41

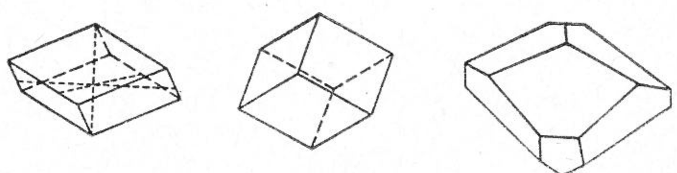


Fig. VII. 42

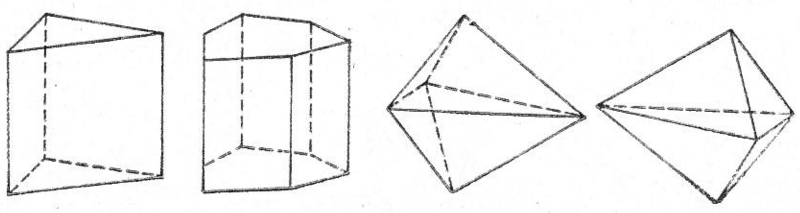


Fig. VII.43

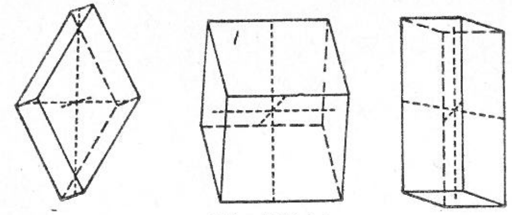


Fig. VII.44

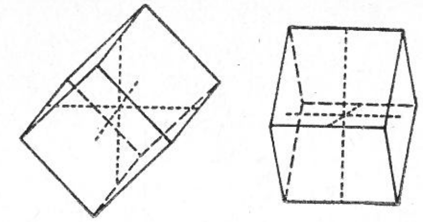


Fig. VII.45

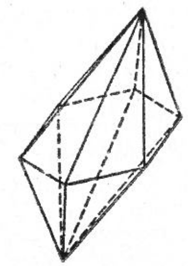


Fig. VII.46

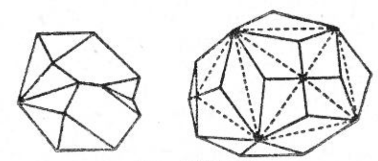


Fig. VII.47

obține o suprafață poliedrală neconvexă, scoțînd din cub fața $[ABCD]$ și punînd în locul ei fețele trilatere $[OAB]$, $[OBC]$ $[OCD]$, $[ODA]$ (fig. VII.48).

Exerciții

1. Să se arate că suprața poliedrală construită mai sus este neconvexă, adică nu este convexă.

2. Să se arate că dacă suprafețele poligonale $S_1, ..., S_k$ formează o suprafață poliedrală, atunci $k \geqslant 4$ și suprafețele $S_1, ..., S_k$ sînt necoplanare.

3. Să se construiască suprafețe poliedrale cu cinci vîrfuri și suprafețe poliedrale cu șase vîrfuri. Să se arate că printre aceste suprafețe, există atît suprafețe convexe, cît și suprafețe neconvexe.

Figura VII.49 reprezintă o suprafață poliedrală cu 12 fețe $[AA'B'B]$, $[BB'C'C]$, $[CC'D'D]$, $[DD'A'A]$, $[ABLK]$, $[A'B'LK]$, $[B'C'ML]$, $[BCML]$,

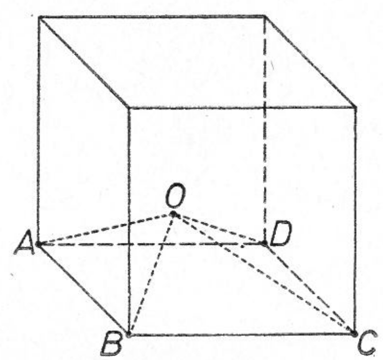


Fig. VII.48

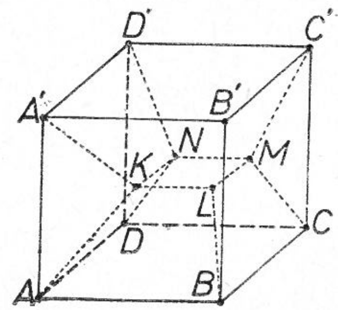


Fig. VII.49

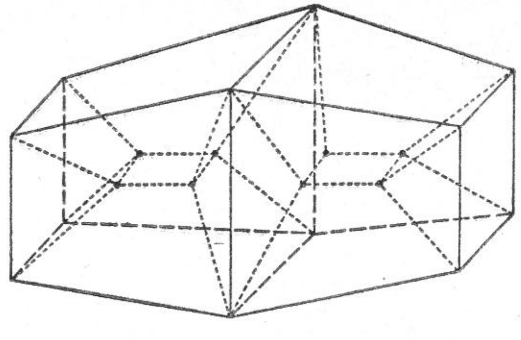


Fig. VII.50

$[CDNM]$, $[C'D'NM]$, $[DAKN]$, $[D'A'KN]$, 12 vîrfuri și 24 muchii; figura VII.50 reprezintă o suprafață poliedrală cu 22 fețe, 44 muchii și 20 vîrfuri.

Complemente (facultativ)

Suprafețele poliedrale se deosebesc prin numărul de fețe, F, numărul de muchii M, numărul de vîrfuri V, prin numărul de laturi al fiecărei fețe, prin numărul de muchii care pleacă din fiecare vîrf, numărul de fețe care au un vîrf dat ca vîrf comun și prin mărimea fiecărei fețe și a fiecărei muchii.

Dacă nu ne interesează mărimea unei suprafețe poliedrale, ci numai forma ei, adică felul în care se îmbină fețele acelei suprafețe două cîte două, putem reprezenta suprafețele poliedrale cu ajutorul unor scheme, în modul următor:

Să presupunem că o suprafață poliedrală W are F fețe $S_1, ..., S_F$, apoi M muchii $L_1, ..., L_M$ și V vîrfuri $P_1, ..., P_V$. Să reprezentăm atunci aceste elemente prin $F + M + V$ puncte așezate într-un același plan (fig. VII.51). Convenim să notăm aceste puncte prin aceleași litere, cu aceeași indici pe care i-am folosit pentru notarea fețelor, muchiilor și vîrfurilor corespunzătoare. Apoi unim fiecare punct L_i cu cele două puncte, care reprezintă cele două fețe ce au L_i ca latură; și unim apoi punctul L_i cu cele două puncte, care reprezintă cele două capete ale muchiei L_i. Figura astfel obținută va fi numită *diagrama* asociată suprafeței poliedrale W. O așezare atentă a punctelor diagramei conduce uneori la configurații interesante.

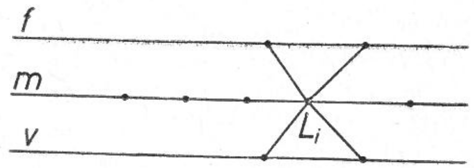


Fig. VII.51

Cunoașterea diagramei asociate unei suprafețe poliedrale permite construirea acelei suprafețe, ca formă, dar nu ca mărime.

Exerciții

1. Să se deseneze diagrama asociată unei suprafețe tetraedrale, deci unei suprafețe cu patru fețe, șase muchii și patru vîrfuri.

2. Să se deseneze o suprafață poliedrală W știind că diagrama asociată acestei suprafețe este cea dată în figura VII.52.

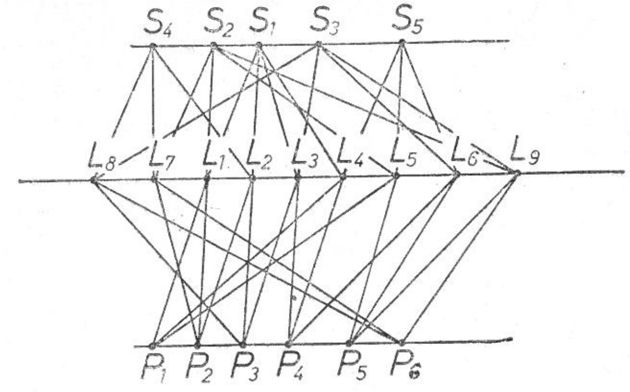


Fig. VII.52

Exerciții

1. Să se arate că nu se pot construi în spațiu șase puncte A, B, C, A', B', C' astfel, încît trilaterele ABC, $AA'C'$, $AA'B'$, $AB'C'$, $CC'B'$, $CC'A'$, $CA'B$, $BB'A'$, $BB'C'$, $BC'A$ să limiteze fețele unei suprafețe poliedrale.

(Indicație. Se va da o demonstrație experimentală).

2. Există suprafețe poliedrale avînd numai fețe triunghiulare și numărul acestora fiind 5?

3. Fie $[OABC]$ un tetraedru și fie A', B', C', A'', B'', C'' mijloacele muchiilor $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$, $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Să se arate că tetraedrele $[OA'B'C']$, $[A'AC''B'']$, $[B'C''BA'']$, $[C'B''A''C]$ sînt congruente două cîte două. Să se descompună apoi octaedrul $[A'B'C'A''B''C'']$ în perechi de piramide congruente. Cîte astfel de descompuneri există?

4. Fie P, P' două corpuri poliedrale convexe avînd ca mulțimi de vîrfuri mulțimile V și V'. Să se arate că dacă mulțimile V, V' sînt congruente, atunci și mulțimile P, P' sînt congruente.

5. Să se descompună un cub în șase piramide congruente două cîte două.

3. Corpuri convexe

Fie $W = \{S_1, ..., S_k\}$ o suprafață poliedrală convexă. Notăm prin p_i planul care conține fața S_i și prin E_i semispațiul închis, care conține fețele lui W și care este limitat de planul p_i, pentru $i = 1, 2, ..., k$.

Definiție. **Se numește corp convex limitat de suprafața poliedrală W intersecția $K(W)$ a semispațiilor închise $E_1, ..., E_k$, care conțin fețele lui W și sînt limitate de planele ce conțin cîte o față a lui W. Deci**

$$K(W) = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_k. \tag{1}$$

Dacă notăm $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_k$, spunem că S este frontiera corpului convex $K(W)$ și că mulțimea $I(W) = K(W) - S$ este interiorul lui W sau interiorul lui $K(W)$.

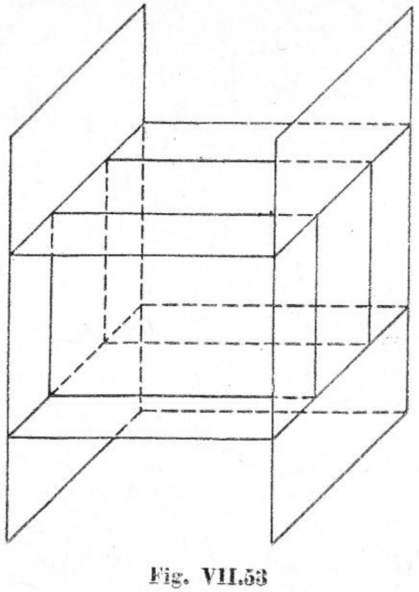


Fig. VII.53

T e o r e m ă. Orice corp convex, limitat de o suprafață poliedrală convexă, și interiorul unui astfel de corp sînt mulțimi convexe (fig. VII.53).

Demonstrație. Orice corp convex de forma $K(W)$ este o intersecție de semispații închise, deci de mulțimi convexe. Dar orice intersecție de mulțimi convexe este o mulțime convexă. Deci $K(W)$ este o mulțime convexă.

Faptul că și interiorul unui corp convex $K(W)$ este o mulțime convexă rezultă din următoarea

P r o p o z i ț i e. Interiorul I al unui corp convex $K(W)$ este egal cu intersecția semispațiilor deschise E'_i, care sînt limitate de planele p_i ale fețelor suprafeței W și care sînt conținute în semispațiile închise din intersecția (1), $E'_i \subset E_i$, $i = 1, 2, ..., k$.

Exerciții

1. Să se arate că dacă dintr-un corp convex $K(W)$ se scoate una sau mai multe fețe închise ale suprafeței W, mulțimea rămasă este convexă.

2. Fie M un punct interior corpului convex $K(W)$ și fie d o dreaptă ce trece prin M. Să se arate că d intersectează frontiera S a lui $K(W)$ în două puncte A, B astfel încît $]AB[\subset K(W) - S$ (fig. VII.54).

3. Fie $K(W)$ un corp convex și fie E un semispațiu închis limitat de un plan ce trece printr-un punct interior lui $K(W)$. Să se arate că intersecția $K(W) \cap E$ este un corp convex asociat unei suprafețe poliedrale W'. Să se arate apoi că mulțimea $K(W) -$ $- K(W')$ este convexă, dar nu este un corp convex. Ce trebuie să adăugăm mulțimii $K(W) - K(W')$ pentru a obține un corp convex? (fig. VII.55).

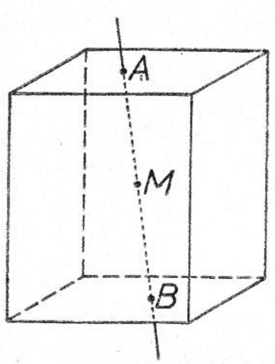


Fig. VII.54

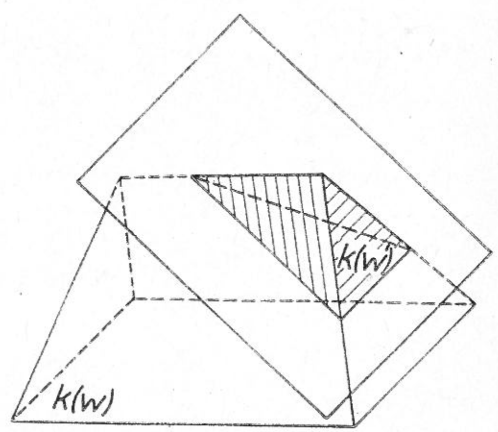


Fig. VII.55

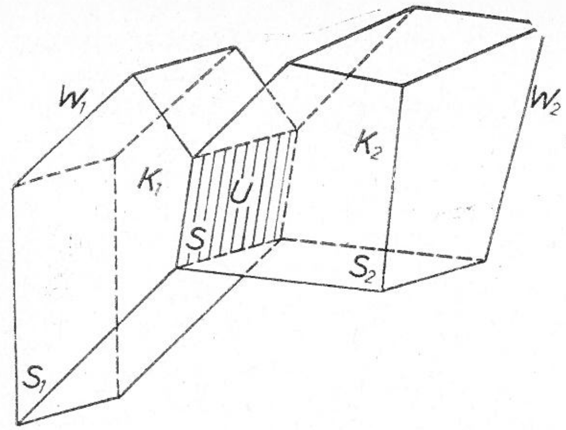


Fig. VII.56

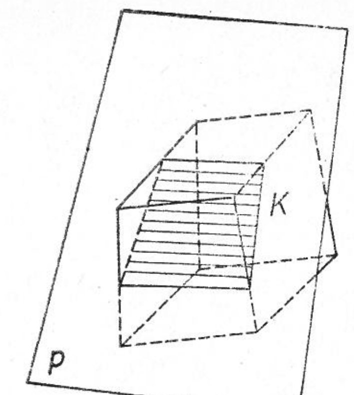


Fig. VII.57

4. Fie K_1, K_2 două corpuri convexe, asociate suprafețelor poliedrale convexe W_1, W_2, și avînd frontierele S_1 respectiv S_2. Presupunem că intersecția $k_1 \cap k_2$ este o față comună S și să notăm prin U interiorul acestei fețe. Să se arate că fețele din $W_1 \cup W_2$, diferite de S, formează o suprafață poliedrală W, astfel încît reuniunea fețelor lui W este egală cu mulțimea $(S_1 \cup S_2) - U$ (fig. VII.56).

(Indicație. Pentru rezolvarea acestor probleme, elevii vor începe prin a considera cazul unuia din corpurile convexe cele mai simple, de exemplu vor presupune că suprafața care limitează corpul convex este un paralelipiped, o suprafață prismatică sau o suprafață piramidală. Se recomandă, ca și în alte situații, confecționarea de modele în spațiu).

5. Fie K un corp convex asociat unei suprafețe poliedrale și fie p un plan ce trece printr-un punct interior lui K. Să se arate că intersecția $K \cap p$ este o suprafață poligonală convexă (fig. VII.57).

6. Fie $K(W)$, $K(W')$ două corpuri convexe asociate suprafețelor poliedrale convexe W și W'. Să se arate că dacă cele două corpuri convexe au un punct interior comun, atunci intersecția lor este corpul convex al unei a treia suprafețe poliedrale convexe. Să se exemplifice acest rezultat, considerînd cazurile unor corpuri convexe cît mai simple (fig. VII. 58, 59).

7. Fie W, W' două suprafețe poliedrale convexe, avînd o față comună S_0. Ce condiție trebuie să îndeplinească cele două suprafețe, pentru ca reuniunea $K(W) \cup K(W')$ să fie un corp convex asociat unei suprafețe poliedrale?

(Indicație. Se vor căuta condițiile în care suprafața poliedrală $W'' = (W \cup$ $\cup W') - S_0$ este convexă (fig. VII. 60.)

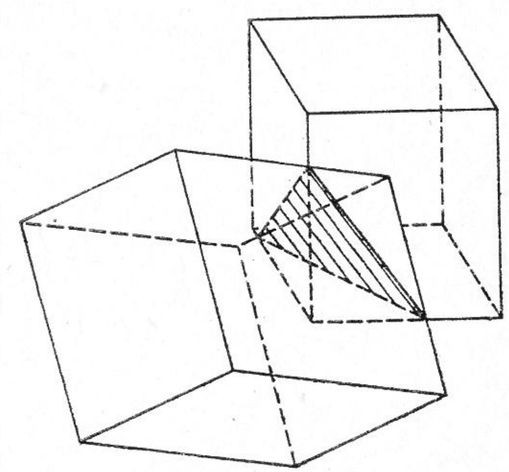


Fig. VII.58

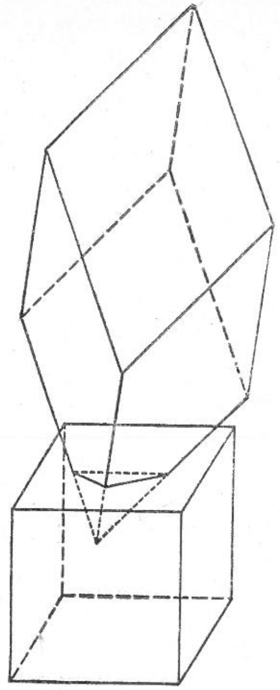


Fig. VII.59

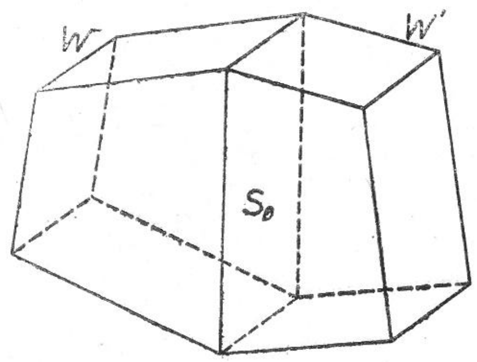


Fig. VII.60

4. Volumele corpurilor convexe

Pentru a defini și calcula volumele corpurilor convexe, vom urma o cale asemănătoare cu cea adoptată în cazul definirii ariilor suprafețelor poligonale convexe.

Definiție. Fie $K_0, K_1, ..., K_r$ un sistem de corpuri convexe astfel încît $K_0 = K_1 \cup ... \cup K_r$. Vom spune că cele r corpuri $K_1, ..., K_r$ realizează o descompunere a corpului K_0 și că ultimul corp este egal cu suma corpurilor $K_1, ..., K_r$, dacă oricare două din corpurile $K_1, ..., K_r$ au interioarele disjuncte. Vom exprima această proprietate prin formula

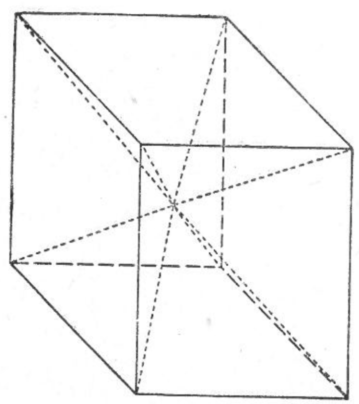


Fig. VII.61

(1) $\quad K_0 = K_1 + ... + K_r$ (fig. VII.61).

Deci relația (1) este echivalentă, prin definiție, cu relațiile

(2) $\quad K_0 = K_1 \cup ... \cup K_r$; $\operatorname{Int} K_i \cap \operatorname{Int} K_j = \emptyset$, dacă $i \neq j$ și $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

În acest paragraf, vom considera numai corpuri convexe asociate unor suprafețe poliedrale. Pentru simplificarea vorbirii, vom numi

poliedru, orice corp convex asociat unei suprafețe poliedrale. Dacă P este poliedrul asociat suprafeței poliedrale $W = \{S_1, ..., S_k\}$, vom spune că $S_1, ... S_k$ sînt *fețele* lui P, iar muchiile lui W vor fi numite *muchii* ale lui P și vîrfurile lui W vor fi numite *vîrfuri* ale lui P.

Definiție. Două poliedre P, P' se zic congruente prin descompunere dacă ele admit două descompuneri

$$P = P_1 + ... + P_r, \quad P' = P'_1 + ... + P'_r,$$

astfel încît, pentru fiecare indice $i \in \{1, ..., r\}$ să avem $P_i \equiv P'_i$, deci poliedrul P_i să fie congruent cu poliedrul P'_i.

Exemplu. Numim paralelipiped un corp convex limitat de o suprafață paralelipipedică. Un paralelipiped P se numește dreptunghic, dacă muchiile sale sînt, două cîte două, fie paralele, fie perpendiculare.

Fie P un paralelipiped dreptunghic avînd muchiile congruente cu trei segmente de forma am, bm, cm, unde m este segmentul etalon, iar a, b, c sînt trei numere raționale pozitive. Fie P' un al doilea paralelipiped dreptunghic, avînd muchiile congruente cu segmentele $a'm$, $b'm$, $c'm$, unde a', b', c' sînt trei numere raționale pozitive. Dacă $abc = a'b'c'$ atunci poliedrele P, P' sînt congruente prin descompunere (fig. VII.62).

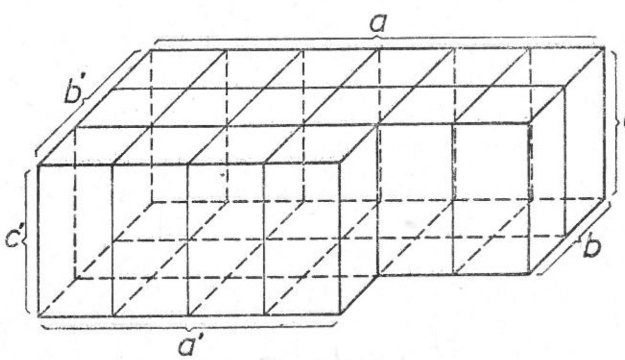


Fig. VII.62

Exerciții

1. Să se demonstreze că două paralelipipede dreptunghice P, P', avînd muchiile congruente cu multipli raționali ai segmentului etalon, astfel ca $abc = a'b'c'$ (unde a, b, c, respectiv a', b', c' sînt lungimile muchiilor lui P și ale lui P'), sînt congruente prin descompunere.

2. Fie $P, P', P_1, P_2, P'_1, P'_2$ șase poliedre astfel ca

$$P = P_1 + P_2, \quad P' = P'_1 + P'_2$$

și astfel ca P'_1 să fie congruent prin descompunere cu P_1, iar P'_2 să fie congruent prin descompunere cu P_2. În acest caz, P' este congruent prin descompunere cu P.

Definiție. Se numește prismă orice corp convex limitat de o suprafață prismatică. Dacă planul bazei suprafeței prismatice este per-

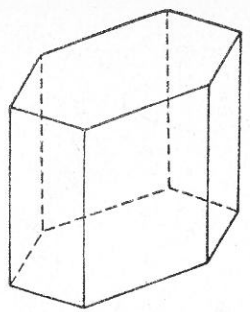


Fig. VII.63

pendicular pe muchiile paralele ale prismei, atunci prisma se numește dreaptă (fig. VII.63)

Exerciții

1. Să se arate că muchiile paralele ale unei prisme sînt congruente două cîte două.

2. Să se arate că două prisme, avînd bazele $[A_1A_2 \dots A_n]$, $[B_1B_2 \dots B_n]$ respectiv $[A'_1A'_2 \dots A'_n]$, $[B'_1B'_2 \dots B'_n]$, astfel ca $A_iB_i = A'_iB'_i$ și $|A_iB_i| \equiv |A'_iB'_i|$ pentru $i = 1,2, \dots, n$, sînt congruente prin descompunere (fig. VII.64).

(*Indicație.* Putem presupune că $A_1 = A'_1$ și $B_1 = B'_1$. În acest caz, planele bazelor celor două prisme dau descompunerile dorite.)

D e f i n i ț i e. Se spune că două poliedre P, P' sînt congruente prin completare dacă există două poliedre Q, Q' astfel încît Q, Q' să fie congruente prin descompunere și $P + Q$, $P' + Q'$ să fie poliedre congruente prin descompunere.

Exerciții

1. Să se arate că dacă poliedrele P, Q, R, P', Q', R' sînt astfel încît: $P = Q + R$, $P' = Q' + R'$, Q este congruent prin descompunere cu Q' și R este congruent prin completare cu R', atunci P este congruent prin completare cu P'.

2. Să se arate că dacă poliedrele P, Q, R, P', Q', R' sînt astfel încît $P = Q + R$, $P' = Q' + R'$, P este congruent prin descompunere cu P' și Q este congruent prin descompunere cu Q', atunci R va fi congruent prin completare cu R',

P r o b l e m ă r e z o l v a t ă. Fie P, P' două paralelipipede avînd baza comună $ABCD$ și astfel încît fețele $PQRS$, $P'Q'R'S'$ opuse acestei fețe în P, respectiv P', să aibă muchiile $|PQ|$, $|P'Q'|$ coliniare; atunci paralelipipedele P, P' sînt congruente prin completare (fig. VII.65).

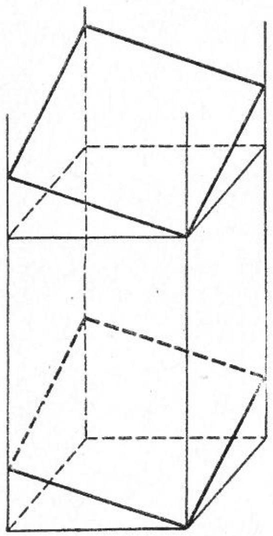


Fig. VII.64

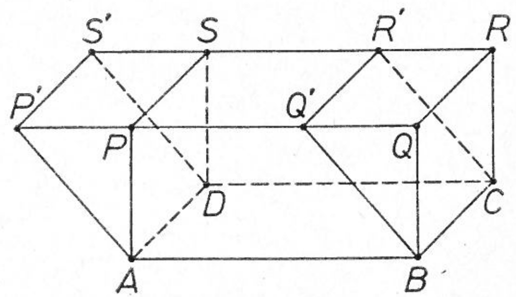


Fig. VII.65

Demonstrație. Presupunem că notațiile vîrfurilor au fost făcute în așa fel, încît $\vec{AP} \sim \vec{BQ} \sim \vec{CR} \sim \vec{DS}$. În acest caz, dacă $PQ = P'Q'$, atunci avem și $\vec{AP'} \sim \vec{BQ'} \sim \vec{CR'} \sim \vec{DS'}$. Prismele cu bazele $[APP']$, $[BQQ']$ și cu muchiile $|AD|$, $|BC|$ sînt congruente. Paralelipipedul P, completat cu a doua prismă, dă același corp convex cu cel dat completînd paralelipipedul P' cu prima prismă. Deci cele două paralelipipede sînt congruente prin completare.

P r o b l e m ă r e z o l v a t ă. Dacă paralelipipedele P, P' au baza comună $[ABCD]$ și dacă fețele $[PQRS]$, $[P'Q'R'S']$, opuse acestei baze, sînt situate în același plan p, atunci cele două paralelipipede sînt congruente prin completare (fig. VII.66).

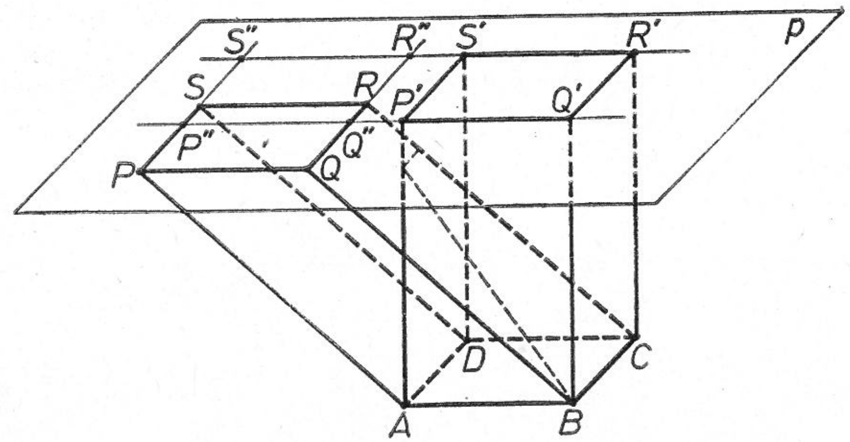


Fig. VII.66

Demonstrație. Presupunem că vîrfurile au fost notate astfel încît

$$\vec{PQ} \sim \vec{P'Q'},\ \vec{AP} \sim \vec{BQ} \sim \vec{CR} \sim \vec{DS}.$$

Atunci avem și $\vec{AP'} \sim \vec{BQ'} \sim \vec{CR'} \sim \vec{DS'}$. Să considerăm punctele

$$P'' \in PS \cap P'Q', Q'' \in RQ \cap Q'P', R'' \in S'R' \cap RQ, S'' \in PS \cap R'S'$$

Paralelogramul $P''Q''R''S''$ limitează o față opusă feței $[ABCD]$ într-un paralelipiped P''. Paralelipipedul P'' se găsește în situația din teorema precedentă, cu fiecare din paralelipipedele P, P'. Deci P'' este congruent prin completare atît cu P, cît și cu P'. Rezultă că P este congruent prin completare cu P'.

P r o b l e m ă r e z o l v a t ă. Orice prismă trilateră este congruentă prin descompunere cu un paralelipiped, care are o muchie comună cu prisma.

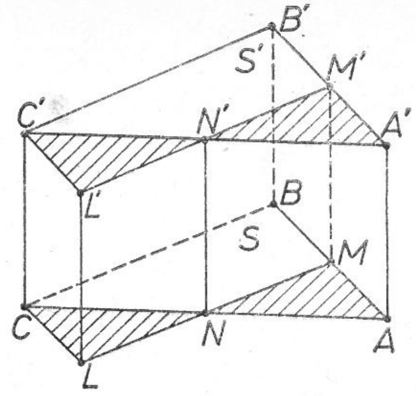


Fig. VII.67

Demonstrație (fig. VII.67). Fie ABC trilaterul care limitează baza S a prismei trilatere P. Notăm prin M și N mijloacele laturilor $|AB|$ respectiv $|AC|$ și prin L intersecția dreptei MN cu paralela dusă prin C la AB. Trilaterele AMN, CLN limitează două fețe congruente ce sînt baze în două prisme de asemenea congruente, avînd o muchie $|AA'|$ comună cu P. Aceste prisme, împreună cu prisma de bază $[BCNM]$, realizează descompunerile dorite ale prismei P și ale paralelipipedului de bază $[BCLM]$, care are muchiile $|BB'|$, $|CC'|$ comune cu P.

P r o b l e m ă r e z o l v a t ă. Două prisme triunghiulare P, P', avînd o bază comună $[ABC]$ și avînd fețele opuse acestei baze situate într-un același plan p sînt congruente prin completare (fig. VII.68, 69).

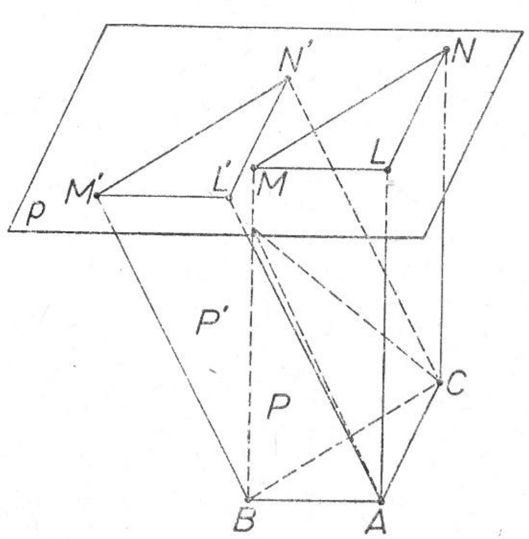


Fig. VII.68

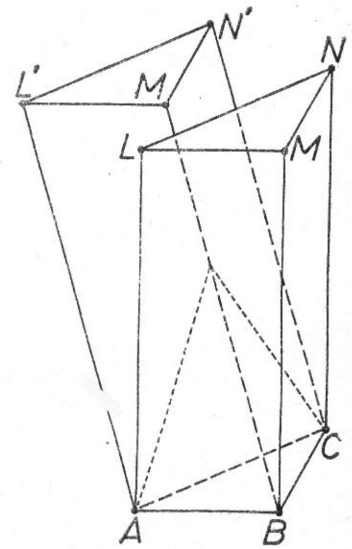


Fig. VII.69

Demonstrație. Fie $|AL|$, $|BM|$, $|CN|$ respectiv $|AL'|$, $|BM'|$, $|CN'|$ muchiile paralele ale prismelor P, P'. Punctele L, M, N, L', M', N' aparțin planului p. Fiecare din cele două prisme este congruentă prin completare cu cîte un paralelipiped Q, respectiv Q' (fig. VII.70) (vezi teorema precedentă). Paralelipipedele Q, Q' au aceeași bază și au fețele opuse acestei fețe situate în planul p. Știm că două astfel de paralelipipede sînt congruente prin completare și rezultă că și P, P' sînt congruente prin completare.

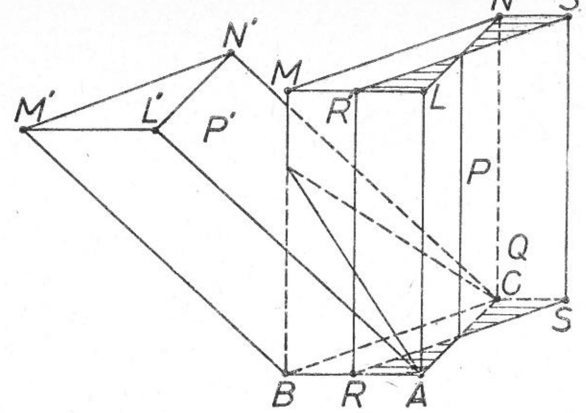


Fig. VII.70

P r o b l e m ă r e z o l v a t ă. Două prisme, avînd o bază comună $[A_1A_2 ...$ $.. A_n]$ și avînd fețele opuse acestei baze situate într-un același plan p, sînt congruente prin completare (fig. VII.71).

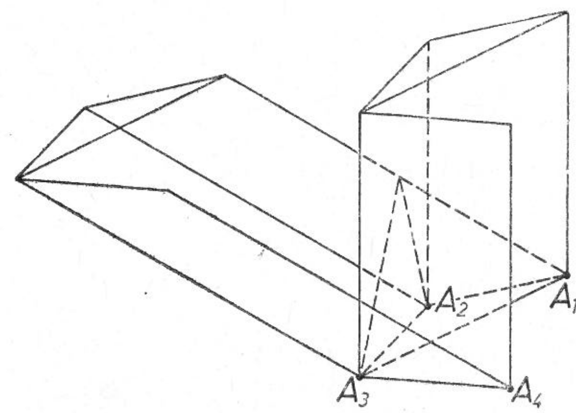


Fig. VII.71

Demonstrație. Dacă descompunem baza $[A_1A_2 ... A_n]$ în suprafețe triunghiulare și dacă descompunem apoi prismele date în prisme triunghiulare avînd aceste suprafețe triunghiulare drept baze, ajungem în situația la care se referă teorema precedentă. Deci prismele triunghiulare ale celor două descompuneri sînt două cîte două congruente prin completare și atunci, prismele date vor fi de asemenea congruente prin completare.

P r o b l e m ă r e z o l v a t ă. Să considerăm două prisme P, P' care au bazele S, S' situate într-un același plan q și congruente prin completare și care au fețele opuse acestor baze situate într-un plan p (paralel cu planul q); **atunci prismele P, P' sînt congruente prin completare** (fig. VII.72).

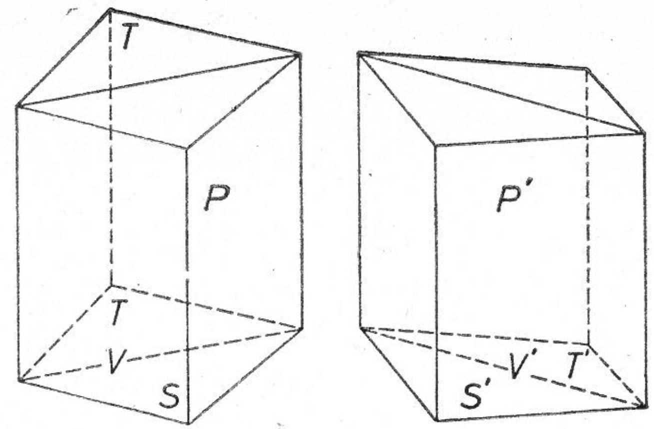


Fig. VII.72

Demonstrație. Prin ipoteză, suprafețele poligonale S și S' sînt congruente prin completare, deci există în planul q două suprafețe poligonale congruente prin descompunere T, T' și alte două suprafețe poligonale de asemenea congruente prin descompunere V, V', astfel ca $S + T = V$ și $S' + T' = V'$. Considerînd prismele avînd aceste suprafețe poligonale ca baze și avînd fețele opuse acestor baze în planul p, obținem patru prisme T_1, V_1, T_1', V_1', astfel ca: $P + T_1 = V_1$, $P' + T_1' = V_1'$, iar (T_1, T_1'), (V_1, V_1') să fie perechi de prisme congruente prin descompunere. Rezultă că prismele P, P' sînt congruente prin completare.

Știm că două suprafețe triunghiulare S, S', care au o latură comună $|AB|$ și înălțimile corespunzătoare acestei laturi congruente, sînt congruente prin completare. Deci dacă $S = [ABC]$, $S' = [A'B'C']$ și dacă $CC' \parallel AB$, atunci S și S' sînt congruente prin completare. Aplicînd teorema demonstrată anterior, deducem următorul

Corolar. Fie P, P' două prisme avînd bazele S, S' situate într-un plan q și fețele opuse acestor fețe situate într-un plan p ($p \parallel q$). Presupunem că $S = [ABC]$, $S' = [ABC']$, $CC' \parallel AB$. Atunci prismele P, P' sînt congruente prin completare. (fig. VII.73).

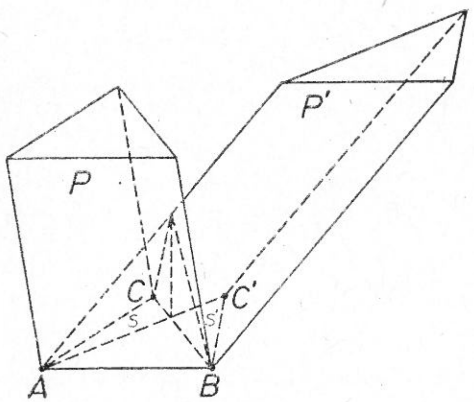
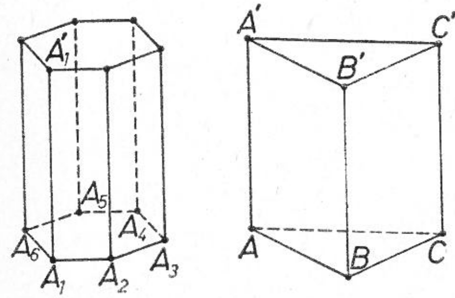


Fig. VII.73

Știm că orice suprafață poligonală este congruentă prin completare cu o suprafață triunghiulară. Dacă P este o prismă cu baza $S = [A_1 \dots A_n]$ și cu muchia $[A_1A_1']$, putem considera în planul lui S un trilater ABC, astfel ca suprafața $[ABC]$ să fie congruentă prin completare cu S și apoi putem considera prisma P' de bază $[ABC]$ și avînd muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ astfel ca $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{A_1A_1'}$. În acest caz, prismele P, P' vor fi congruente prin completare. Rezultă că:



FigVII.74

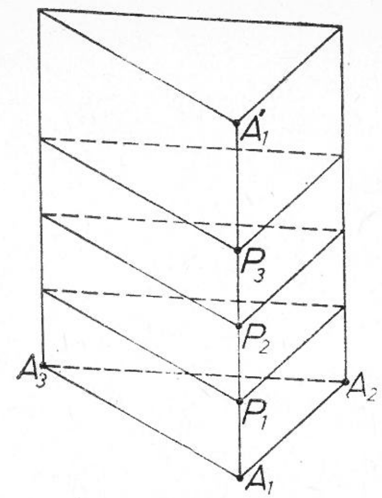


Fig. VII.75

Orice prismă este congruentă prin completare cu o prismă triunghiulară cu aceeași înălțime (fig. VII.74).

Reamintim că înălțimea unei prisme este distanța dintre cele două plane care conțin baza prismei și fața opusă bazei.

Problemă rezolvată. Fie P o prismă avînd baza $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ și muchia $|A_1A_1'|$. Fie P_1, P_2, ..., P_k puncte pe segmentul $|A_1A_1'|$, astfel încît aceste puncte să împartă segmentul $|A_1A_1'|$ în $k + 1$ segmente congruente, $|A_1P_1|$, $|P_1P_2|$, ..., $|P_kA_1'|$. Să ducem prin punctele P_i plane p_i, paralele cu planul bazei S. Atunci planele p_i descompun prisma P în $k + 1$ prisme congruente două cîte două (fig. VII.75).

Demonstrație. Oricare două din cele $k + 1$ prisme se obține una din alta printr-o translație, vectorul translației fiind vectorul $\overrightarrow{A_1P_1}$. Știm că orice translație transformă o figură într-o figură congruentă. Deci oricare două din cele $k + 1$ prisme ale descompunerii considerate sînt congruente (vezi exercițiul 2 de la pag. 183).

Notație. Notînd prin Q una oarecare din prismele descompunerii indicate mai sus, vom exprima faptul că prisma P a fost descompusă într-o sumă de $k + 1$ prisme congruente cu prisma Q scriind

$$P = (k + 1)Q = Q + Q + \dots + Q \quad (k + 1 \text{ ori}).$$

Dacă avem un paralelipiped P avînd muchiile concurente $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$, și dacă împărțim aceste muchii în m, respectiv n și p părți congruente, unde m, n, p sînt numere naturale, și dacă ducem prin punctele de diviziune plane paralele cu fețele paralelipipedului, obținem o descompunere a acestuia în mnp paralelipipede congruente două cîte două. Notînd prin Q unul oarecare din aceste paralelipipede, vom avea

$$P = mnpQ.$$

5. Descompunerea unui tetraedru, după Euclid

(pentru cercurile de elevi)

Problema determinării volumelor corpurilor din spațiu este mult mai complicată decît problema determinării ariilor suprafețelor plane. Una din complicații apare atunci cînd vrem să comparăm volumul unui tetraedru cu volumul unui paralelipiped sau a unei prisme, avînd unele elemente comune cu tetraedrul.

Euclid a abordat această problemă într-un mod deosebit de ingenios. Metoda lui Euclid a constituit punctul de plecare a numeroase teorii matematice moderne. Să descriem metoda lui Euclid, care se bazează pe o anumită descompunere a tetraedrelor și printr-un proces de trecere la limită, ce poate fi urmărit, folosind intuiția geometrică.

Fie A, B, C, D vîrfurile unui tetraedru T (fig. VII.76) și fie E, F, G, H, K, I mijloacele laturilor $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$, $|BD|$, $|BC|$ respectiv $|CD|$. Planele (EFG), (GHI) și $(FGHK)$ descompun tetraedrul T în două tetraedre $[AEFG]$, și $[DGHI]$ și în două prisme triunghiulare, avînd bazele $[BHK]$ și $[GHI]$. Cele două tetraedre sînt congruente, deoarece al doilea se obține din primul prin translația de vector $\overrightarrow{AG}$.

Exercițiu. Să se demonstreze relațiile

$$\overrightarrow{AG} \sim \overrightarrow{EH} \sim \overrightarrow{FI},\ \overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{FK} \sim \overrightarrow{GH},\ \overrightarrow{AF} \sim \overrightarrow{GI} \sim \overrightarrow{EK},\ \overrightarrow{BK} \sim \overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{HI}$$

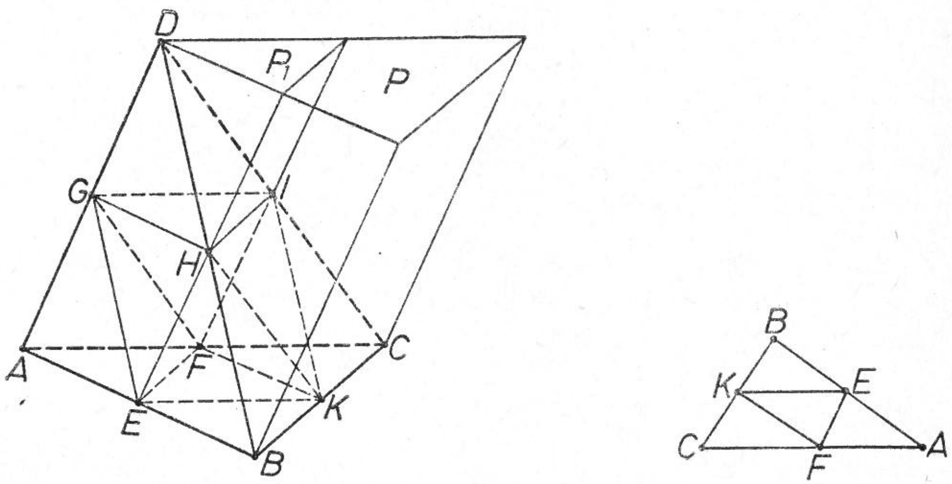


Fig. VII. 76

Tetraedrele $[AEFG]$, $[DGHI]$ sînt conținute în prisma P_1, care are baza $[AEF]$ și muchea $|AD|$. Dacă notăm prin P prisma de bază $[ABC]$ și de muche $|AD|$, atunci această prismă se poate descompune în patru prisme congruente cu prisma P_1, deoarece putem descompune baza $[ABC]$ în patru suprafețe triunghiulare congruente cu $[AEF]$. Rezultă că putem scrie

$$(1) \qquad P = 4P_1,\ P_1 = 2[AEFG] + 2Q_1,$$

unde Q_1 este piramida de vîrf G și de bază $[EFIH]$.

Dacă notăm prin R_1 corpul format de cele două piramide triunghiulare de baze $[BHK]$, $[GHI]$, vom avea

$$(2) \qquad T = 2[AEFG] + R_1 = 2T_1 + R_1,$$

unde $T_1 = [AEFG]$, $T = [ABCD]$.

Descompunerea aplicată tetraedrului T poate fi aplicată tetraedrului T_1. Vom obține formule analoage formulelor (1) și (2):

$$(1') \qquad P_1 = 4P_2,\ P_2 = 2T_2 + 2Q_2,$$

$$(2') \qquad T_1 = 2T_2 + R_2.$$

Continuînd să descompunem tetraedrul T_2, apoi tetraedrul rezultat T_3 și așa mai departe, obținem un șir de relații de forma

$$\begin{array}{ll}
T = 2T_1 + R_1, & T = 2T_1 + R_1, \\
T_1 = 2T_2 + R_2, & 2T_1 = 4T_2 + 2R_2, \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
T_k = 2T_{k+1} + R_{k+1}, & 2^kT_k = 2^{k+1}T_{k+1} + 2^kR_{k+1} \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Adunînd relațiile din ultima coloană membru cu membru, obținem

$$(3) \qquad T = R_1 + 2R_2 + \dots + 2^kR_{k+1} + 2^{k+1}T_{k+1}.$$

Să scriem și formulele analoage formulei (1):

$$(4) \qquad P_k = 4P_{k+1},\ P_{k+1} = 2T_{k+1} + 2Q_{k+1}.$$

Din relațiile

$$P = 4P_1,\ P_1 = 4P_2,\ P_2 = 4P_3, \dots, P_k = 4P_{k+1},$$

deducem că avem

$$(5) \qquad P_{k+1} = 4^{-k-1}\,P = 2^{-2k-2}P.$$

Formula (4) din dreapta și formula (5) dau

$$(6) \qquad 2^{k+1}T_{k+1} = 2^kP_{k+1} - 2^{k+1}Q_{k+1} = 2^{-k-2}P - 2^{k+1}Q_{k+1}.$$

Să examinăm prismele care formează o descompunere a corpului R_1. Prisma de bază $[CFK]$ și muchie $|CI|$, luată de patru ori, dă o descompunere a prismei triunghiulare de bază $[ABC]$ și de muchie $|CI|$. Luînd de opt ori prisma de bază $[CFK]$ și de muchie $|CI|$, obținem deci o descompunere a prismei Q, care are baza $[ABC]$ și muchia $|CD|$. Dar prisma Q are aceeași înălțime și aceeași bază cu prisma P, deci P și Q sînt congruente prin completare. În mod asemănător, se arată că suma a opt prisme congruente cu prisma de bază $[BHK]$ și de muchie $|BE|$ este o prismă congruentă prin completare cu prisma P. Rezultă că avem

$$4R_1 = P.$$

În mod analog, avem, pentru fiecare indice i,

$$4R_i = P_{i-1} = 4^{-i+1}P,$$

deci:

(7) $$R_i = 4^{-i}P.$$

Rezultă că

$$2^{i-1}R_i = 2^{-i-1}P,$$

astfel încît formula (3) poate fi scrisă sub forma

(8) $$T = (2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-k-2})P + (2^{-k-2}P - 2^{k+1}Q_{k+1}),$$

ultima paranteză provenind din aplicarea relației (6).

Să presupunem acuma că avem un al doilea tetraedru T', avînd baza $[A'B'C']$ congruentă prin completare cu $[ABC]$ și avînd aceeași înălțime cu T; deci, dacă presupunem că bazele $[ABC]$, $[A'B'C']$ sînt coplanare, vîrfurile D, D' ale celor două tetraedre T, T' vor fi situate într-un plan paralel cu planul (ABC). Fie P' prisma triunghiulară de bază $[A'B'C']$ și de muchie $|A'D'|$. Atunci *prismele P, P' vor fi congruente prin completare*, deoarece au bazele congruente prin completare și au aceeași înălțime. Pe de altă, pentru tetraedrul T' vom putea scrie o formulă analoagă formulei (8):

(9) $$T' = (2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-k-2})P' + (2^{-k-2}P' - 2^{k+1}Q'_{k+1}).$$

Corpurile P, P' fiind congruente prin completare, sumele

$$S_k = (2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-k-2})P, \quad S'_k = (2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-k-2})P'$$

vor reprezenta două corpuri de asemenea congruente prin completare.

Corpurile T, T' diferă de corpurile S_k, S'_k prin corpuri ce pot fi cuprinse în prismele $2^{-k-2}P$ respectiv $2^{-k-2}P'$, care au bazele $[ABC]$, respectiv $[A'B'C']$ și muchiile $|AD_k| = 2^{-k-2} \cdot |AD|$, $|A'D'_k| = 2^{-k-2} \cdot |A'D'|$.

Definiție. **Spunem că două corpuri T, T' sînt congruente prin descompunere infinită, dacă, pentru orice număr natural k, există corpuri convexe S_k, S'_k, V_k, V'_k astfel încît să avem $T = S_k + V_k$, $T' = S'_k + V'_k$, corpurile S_k, S'_k să fie congruente prin completare, iar corpurile V_k, V'_k să fie cuprinse în două corpuri U_k, U'_k astfel ca $2^k U_k = P$, $2^k U'_k = P$, unde P este un corp convex fixat.**

6. Calculul volumelor

Rezultatele stabilite anterior ne conduc la următoarea

Teoremă (Euclid). Orice două tetraedre T, T', care au bazele congruente prin descompunere și înălțimile egale, sînt congruente prin descompunere infinită.

Aplicație. Fie P o prismă cu baza triunghiulară $[ABC]$ și cu muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$. Tetraedrele $[A'ABC]$, $[A'B'BC]$ și $[A'B'C'C]$ dau o descompunere a prismei P; cele trei tetraedre au două cîte două, perechile de baze ($[AA'B]$, $[A'B'B]$), ($[B'BC]$, $[B'C'C]$) congruente și înălțimile corespunzătoare de asemenea congruente. Deci cele trei tetraedre sînt, două cîte două, congruente prin descompunere infinită (fig. VII.77).

Exercițiu. *Să se arate că, păstrînd notațiile din demonstrația teoremei lui Euclid, distanțele de la punctele A, B' la planul $(A'BC)$ sînt egale.*

Am demonstrat mai sus că:

Orice prismă triunghiulară se poate descompune în suma a trei tetraedre congruente între ele prin descompunere infinită. Unul din aceste tetraedre are în comun cu prisma o bază și înălțimea corespunzătoare.

Fie $[ABCD]$ un tetraedru oarecare și fie punctele $E \in (ABC)$, $F \in (ABD)$, $G \in |AB|$, $H \in |AB|$ astfel ca (fig. VII.78):

$$DE \perp (ABC),\quad CF \perp (ABD),\quad EG \perp AB,\quad FH \perp AB.$$

Vom avea atunci și $DG \perp AB$, $CH \perp AB$, datorită teoremei celor trei perpendiculare. Rezultă $DG \parallel FH$, $GE \parallel HC$, deci unghiurile $\widehat{DGE}$, $\widehat{FHC}$ sînt

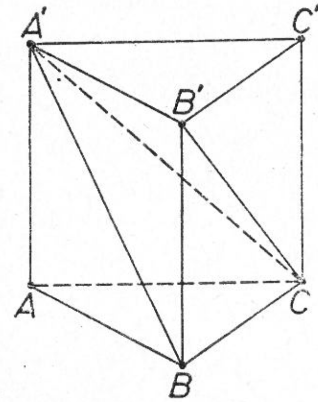


Fig. VII.77

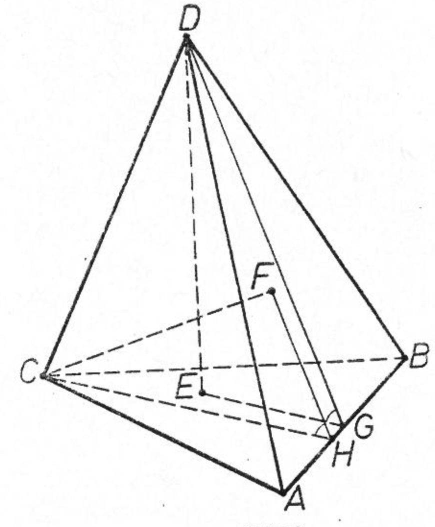


Fig. VII.78

congruente: $\widehat{DGE} \equiv \widehat{FHC}$. Aceasta înseamnă că triunghiurile dreptunghice DGE, CHF sînt asemenea, deci avem

$$\frac{d(D, G)}{d(C, H)} = \frac{d(D, E)}{d(C, F)}$$

sau $d(D, G)\, d(C, F) = d(C, H)\, d(D, E)$; rezultă egalitatea

$$d(C, F)\, d(A, B)\, d(D, G) = d(D, E)\, d(A, B)\, d(C, H)$$

Ultima formulă conduce la egalitatea

$$\text{aria}[ABD] \cdot \text{d}(C, F) = \text{aria}[ABC] \cdot \text{d}(D, E)$$

Deci:

În orice tetraedru, produsul dintre aria unei fețe S și lungimea înălțimii ce cade pe acea față are aceeași valoare, oricum am alege fața S.

Definiție. Volumul unui tetraedru $[ABCD]$ se definește prin formula

$$\boxed{\text{vol}[ABCD] = \frac{1}{3}\, \text{aria}[ABC] \cdot \text{d}(D, E)}$$

unde E este proiecția vîrfului D pe planul feței $[ABC]$.

Exerciții

1. Fie $[ABCD]$ un tetraedru și fie punctul $M \in \,]BC[$. Să se arate că fig. VII.79
$$\text{vol}\,[ABCD] = \text{vol}\,[ABDM] + \text{vol}\,[ACDM].$$

2. Să se arate că orice poliedru (corp poliedral convex) se poate descompune într-o sumă de tetraedre.

(Indicație. Descompunem fiecare față a corpului convex P într-o sumă de suprafețe triunghiulare. Apoi alegem un punct O interior corpului P și formăm toate tetraedrele ce au punctul O ca vîrf și care au ca baze suprafețele triunghiulare rezultate prin descompunerile fețelor.)

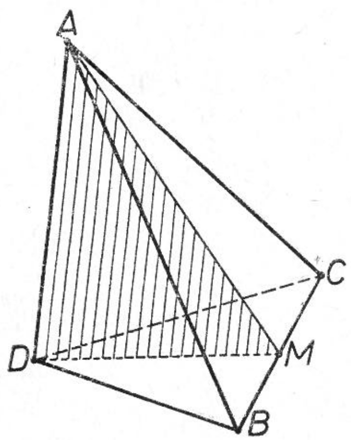


Fig. VII.79

Definiție. Numim descompunere elementară a unui tetraedru o descompunere dată de secționarea tetraedrului cu un plan dus printr-o muchie (fig. VII. 79).

Dacă se aplică unui tetraedru mai multe descompuneri elementare, se obține o descompunere astfel încît volumul tetraedrului inițial va fi egal cu suma volumelor tetraedrelor descompunerii (vezi exercițiul 1 propus anterior).

Propoziție. Fie T un tetraedru și fie p un plan care trece printr-un punct interior lui T. Fie E'' și E' cele două semispații închise limitate de planul p și fie $T' = T \cap E'$, $T'' = T \cap E''$. Corpurile convexe T' și T'' admit descompuneri în tetraedre, astfel încît suma volumelor acestor tetraedre să fie egală cu volumul tetraedrului T.

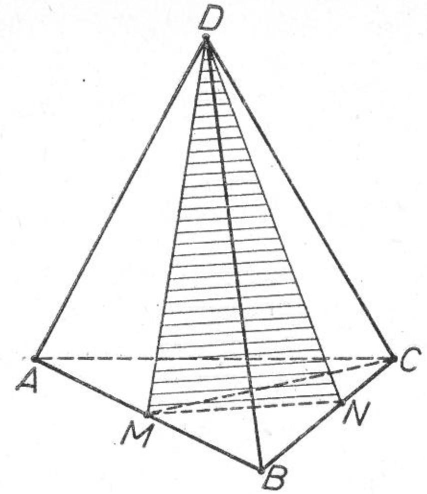


Fig. VII.80

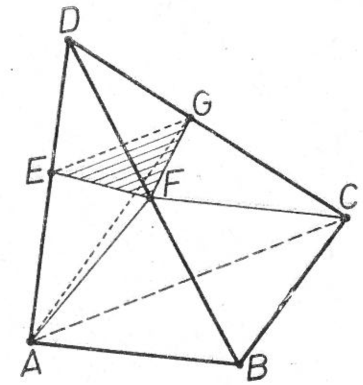


Fig. VII.81

Demonstrație. Planul p poate fi față de T în una din următoarele situații:

1) p poate conține o muchie a lui T. Atunci $T = T' + T''$ este o descompunere elementară a lui T și vol T = vol T' + vol T''.

2) planul p poate trece printr-un vîrf să spunem D al tetraedrului T și prin două puncte M, N situate pe două muchii, să spunem $]BA[$, $]BC[$. Considerînd planul $q = (DMC)$, obținem o descompunere elementară a corpului $T'' = [DAMNC]$ în două tetraedre $[DAMC]$ și $[DMNC]$. Avem (fig. VII. 80)

$$\text{vol}\,[ABCD] = \text{vol.}\,[DAMC] + \text{vol}\,[DMCB] = \text{vol}\,[DAMC] + \text{vol}\,[DMNC] + \text{vol}[DMNB].$$

3) planul p poate intersecta trei muchii concurente $]DA[$, $]DB[$, $]DC[$ în trei puncte E, F, G. Considerînd planele $q = (ACF)$, $r = (AFG)$, obținem o descompunere a corpului $[ABCEFG]$ în trei tetraedre $[AEFG]$, $[ABCF]$, $[AFCG]$ și avem (fig. VII. 81)

$$\text{vol}[ABCD] = \text{vol}[ABCF] + \text{vol}[ACDF] = \text{vol}\,[ABCF] + \text{vol}\,[ACFG] + \text{vol}\,[AEFG] + \text{vol}\,[DEFG].$$

4) planul p poate intersecta patru muchii ale tetraedrului T, să spunem muchiile $]DA[$, $]DB[$, $]CA[$, $]CB[$ în patru puncte E, respectiv H, G, F. (fig. VII. 82). Cele două corpuri în care se descompune tetraedrul $T = [ABCD]$ prin planul p se descompun la rîndul lor în tetraedrele:

$[ABGH], [BFGH], [AEGH], [FGHC], [GCDH], [DEHG]$

și suma volumelor acestor tetraedre este egală cu volumul teraedrului T.

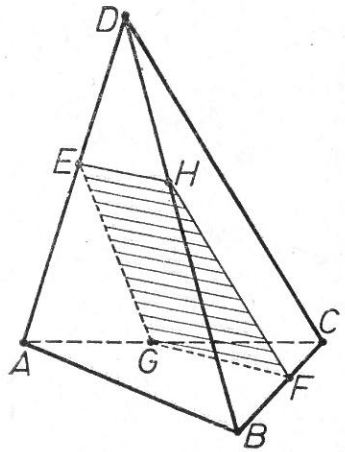


Fig. VII.82

Fiind dată o descompunere arbitrară a unui tetraedru T într-o sumă de tetraedre $T_1, \ldots, T_k$, putem, prin descompuneri elementare succesive ale acestor tetraedre, să obținem o nouă descompunere a lui T, care să poată fi obținută direct, prin descompuneri elementare succesive ale lui T.

Pentru o descompunere elementară, sau pentru o succesiune de astfel de descompuneri, volumul tetraedrului descompus este egal cu suma volumelor tetraedrelor descompunerii. Rezultă că:

Pentru orice descompunere a unui tetraedru într-o sumă de tetraedre, volumul tetraedrului descompus este egal cu suma volumelor tetraedrelor descompunerii.

Acest rezultat ne permite să definim volumul oricărui poliedru ca suma volumelor tetraedrelor unei descompuneri (în tetraedre) a acelui poliedru.

Fie D, D' două descompuneri în tetraedre ale unui aceluiași poliedru P. Prin descompuneri convenabile, în tetraedre, ale elementelor celor două descompuneri D, D', putem obține o a treia descompunere, D'', a poliedrului P. Suma volumelor tetraedrelor descompunerii D'' este egală cu suma volumelor tetraedrelor lui D și cu suma volumelor tetraedrelor lui D'. Rezultă că descompunerile D și D' dau aceeași sumă a volumelor tetraedrelor componente. *Deci suma volumelor tetraedrelor unei descompuneri* (în tetraedre) *a unui poliedru P, nu depinde de acea descompunere.*

Deci definiția dată anterior pentru volumul unui poliedru este independentă de alegerea descompunerii acelui poliedru.

Aplicații. 1. *Volumul unei prisme.* Orice prismă P se descompune într-o sumă de prisme triunghiulare, P_i avînd aceeași înălțime, astfel încît aria bazei prismei P să fie egală cu suma ariilor bazelor prismelor P_i. La rîndul ei, fiecare prismă P_i se descompune într-o sumă de trei tetraedre, avînd volume egale între ele și egale cu a treia parte din produsul ariei bazei cu înălțimea prismei P_i. Rezultă că volumul fiecărei prisme triunghiulare P_i este egal cu produsul dintre aria bazei acelei piramide cu înălțimea acelei piramide. Sumînd după i, obținem:

Volumul unei prisme oarecare este egal cu produsul dintre aria bazei cu înălțimea prismei.

În cazul unei prisme drepte, înălțimea este congruentă cu oricare din muchiile paralele, ce pleacă din vîrfurile bazei. Deci:

Volumul unei prisme drepte este egal cu produsul dintre aria bazei și lungimea muchiilor perpendiculare pe planul bazei.

În cazul unui paralelipiped, obținem:

Volumul unui paralelipiped este egal cu produsul dintre aria uneia dintre fețe cu distanța de la acea față la planul feței opuse.

În cazul mai particular, al unui paralelipiped dreptunghic, avem:

Volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul lungimilor muchiilor ce pleacă dintr-un vîrf al paralelipipedului.

2. *Volumul unei piramide.*

Fie P o piramidă avînd baza $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ și vîrful opus bazei O. Fie h distanța de la punctul O la planul bazei S și fie M un punct interior poligonului $[A_1A_2 \dots A_n]$. Piramida P se descompune într-o sumă de n piramide triunghiulare (fig. VII.83)

$$P_1 = O(MA_1A_2),\ P_2 = O(MA_2A_3), \dots$$
$$\dots,\ P_n = O(MA_nA_1).$$

Piramidele P_i sînt tetraedre de volume date de formulele:

$$3 \text{ vol } P_i = \text{aria}[MA_iA_{i+1}]h,$$
$$(A_{n+1} = A_1),\ i = 1, \dots, n$$

Rezultă formula

$$3 \text{ vol } P = (\text{aria} S) \cdot h, \text{ sau}$$
$$\text{vol } P = \frac{1}{3} h(\text{aria} S).$$

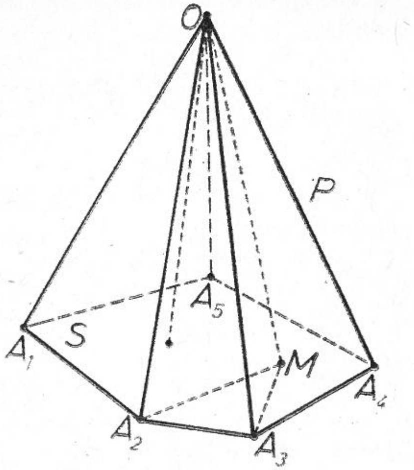


Fig. VII.83

Volumul unei piramide este egal cu a treia parte din produsul dintre aria bazei piramidei și înălțimea h a piramidei.

3. *Volumul unui trunchi de piramidă.*

Fie $P = O(A_1A_2 \dots A_n)$ o piramidă cu baza $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ și vîrful O opus acestei baze. Fie p un plan paralel cu planul bazei S și care intersectează muchiile $|OA_i|$ în punctele A_i', $i = 1, 2, \dots, n$. Fie S' suprafața limitată de poligonul $A_1'A_2', \dots, A_n'$. Să notăm prin Q și Q' proiecțiile punctului O pe planul lui S și pe planul p. Să notăm prin $h = d(O, Q)$, $h' = d(O, Q')$ înălțimile celor două piramide P, $P' = O(A_1'A_2' \dots A_n')$.

Avem perechile de triunghiuri asemenea (fig. VII.84):

$$(OQA_i, OQ'A_i'), (OA_iA_{i+1}, OA_i'A_{i+1}'),$$

din care rezultă egalitățile

$$\frac{|OA_i|}{|OA_i'|} = \frac{|A_iA_{i+1}|}{|A_i'A_{i+1}'|} = \frac{|OQ|}{|OQ'|} = \frac{h}{h'},$$

Rezultă că avem

$$\frac{\text{aria } S}{\text{aria } S'} = \frac{h^2}{h'^2},$$

$$\frac{\text{vol } P}{\text{vol } P'} = \frac{h \text{ aria } S}{h' \text{ aria } S'} = \frac{h^3}{h'^3},$$

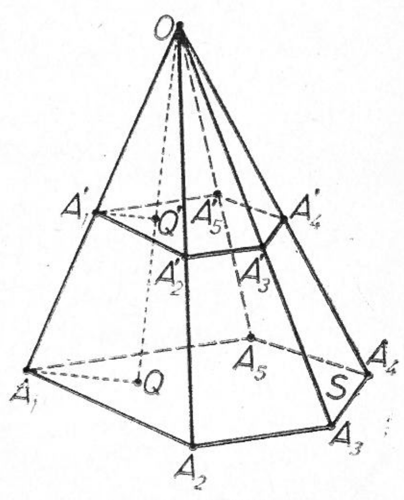


Fig. VII.84

Definiție. **Un corp convex de forma $P - P'$, unde P este o piramidă, iar P' este o a doua**

piramidă, avînd acelaşi vîrf O cu P şi baza $[A'_1 \ldots A'_n]$ paralelă cu baza $[A_1 \ldots A_n]$ a lui P şi astfel ca $A'_i \in |OA_i|$, se numeşte trunchi de piramidă.

Volumul trunchiului de piramidă $P - P'$ va fi dat de formula

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{vol}(P - P') = \mathrm{vol}\,P - \mathrm{vol}\,P'$$

Dacă notăm $d = h - h'$, relaţiile

$$h - h' = d, \quad \frac{h^2}{h'^2} = \frac{S}{S'}$$

conduc la formulele

$$h = \frac{d\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}, \quad h' = \frac{d\sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}.$$

Rezultă

$$\text{(2)} \quad \mathrm{vol}(P - P') = \frac{d}{3(\sqrt{S} - \sqrt{S'})}(S\sqrt{S} - S'\sqrt{S'}) = \frac{d}{3}(S + \sqrt{SS'} + S').$$

Formula (2) dă volumul unui trunchi de piramidă în funcţie de înălţimea $d = h - h'$ şi de ariile bazelor S şi S' (pentru simplificare, s-a notat cu S atît suprafaţa S cît şi aria acestei suprafeţe). Deci:

$$\boxed{\textbf{vol. tr. piramidă} = \frac{d}{3}(S + \sqrt{SS'} + S').}$$

7. Caracteristica euleriană a unei suprafeţe poliedrale
(pentru cercuri de elevi)

Fie $W = \{S_1, \ldots, S_n\}$ o suprafaţă poliedrală. Să notăm prin v numărul vîrfurilor lui W, prin m numărul muchiilor şi prin f numărul feţelor suprafeţei W. Suma algebrică $C = v - m + f$ poartă numele de *caracteristica euleriană* a suprafeţei W.

Se demonstrează că toate suprafeţele poliedrale convexe au caracteristica euleriană egală cu 2.

Exerciţii

1. Să se arate că suprafeţele piramidale şi suprafeţele prismatice au caracteristica euleriană egală cu 2.

2. Fie P, Q, R trei corpuri poliedrale convexe astfel ca $P = Q + R$ şi fie S, S', S'' suprafeţele care limitează aceste corpuri. Să se arate că $C_S + 2 = C_{S'} + C_{S''}$.

3. Să se calculeze caracteristicele euleriene ale suprafeţelor poliedrale ce corespund diferitelor tipuri de cristale. Apoi să se calculeze caracteristicile euleriene ale suprafeţelor poliedrale descrise în paragrafele precedente.

Definiţie. Se numeşte suprafaţă poliedrală regulată orice suprafaţă poliedrală care are toate feţele congruente două cîte două şi pentru care, în jurul fiecărui vîrf, se formează o stea congruentă cu steaua formată în jurul oricărui alt vîrf al suprafeţei.

Se demonstrează că *există numai cinci tipuri de suprafeţe poliedrale regulate*, anume (fig. VII.85):

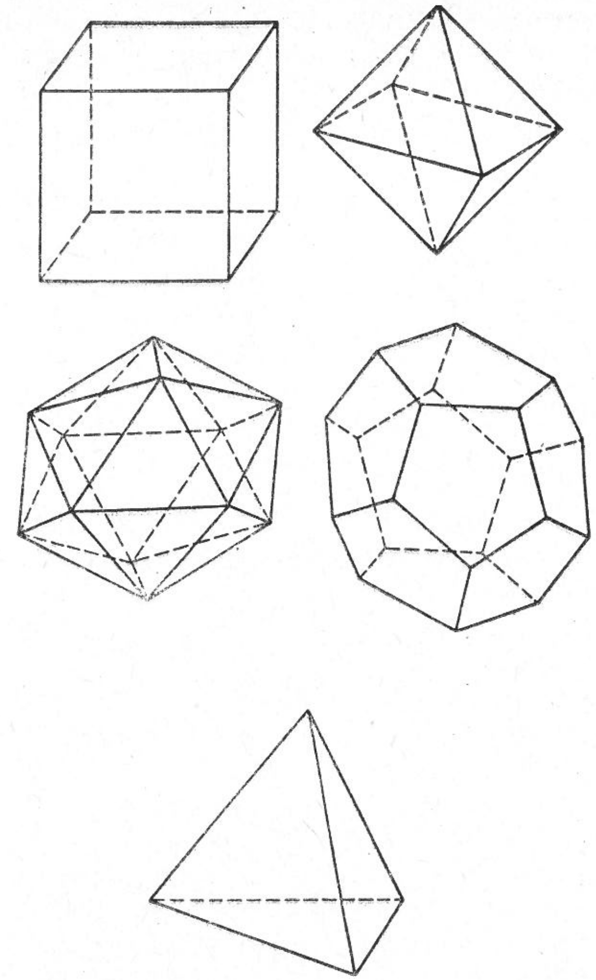


Fig. VII.85

Hexaedrele regulate (suprafeţele cubice), care au şase feţe pătratice, douăsprezece muchii şi opt vîrfuri. Stelele formate în jurul fiecărui vîrf conţin cîte trei feţe, perpendiculare două cîte două.

Octaedrele regulate, formate din opt feţe triunghiulare, douăsprezece muchii şi şase vîrfuri.

Tetraedrele regulate, formate din patru feţe triunghiulare echilatere, şase muchii şi patru vîrfuri.

Dodecaedrele regulate, formate din douăsprezece feţe pentagonale, treizeci de muchii şi douăzeci de vîrfuri.

Icosaedrele regulate, formate din douăzeci de feţe triunghiulare, treizeci de muchii şi douăsprezece vîrfuri.

Existenţa tetraedrelor regulate. Fie ABC un triunghi echilateral, avînd lungimile laturilor egale cu numărul a. Fie O punctul de intersecţie al mediatoarelor acestui triunghi şi fie d perpendiculara ridicată în O pe planul **(*ABC*)**. Pe dreapta d considerăm unul din punctele M, pentru care avem $d(M, A) = a$. Un astfel de punct există, deoarece $d(O, A) < a$, (fig. VII.86).

Exerciții

1. Să se determine distanța $C = d(O, M)$, știind că $d(M, A) = a$.

2. Să se arate că pe dreapta d există numai două puncte situate la distanța C de punctul A.

3. Să se arate că dacă $M \in d$ și $d(M, A) = a$, atunci tetraedrul $[MABC]$ este regulat.

4. Să se determine simetriile care lasă invariant un tetraedru regulat. Se vor determina axele de simetrie, planele de simetrie și centrul de simetrie.

Existența suprafețelor cubice. Fie $ABCD$ un pătrat situat într-un plan p. Să considerăm vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, echipolenți doi cîte doi, perpendiculari pe planul p și avînd normele egale cu lungimea laturii $|AB|$. Punctele $A, B, C, D, A', B', C', D'$ sînt vîrfurile unei suprafețe cubice.

Exercițiu. Să se determine simetriile care lasă invariantă o suprafață cubică. Se vor determina axele de simetrie, centrul de simetrie și planele de simetrie.

Existența octaedrelor regulate. Fie $ABCD$ un pătrat situat într-un plan p și fie d perpendiculara ridicată pe planul p în centrul O al pătratului $ABCD$ (fig. VII.87). Pe dreapta d considerăm punctele E, F, pentru care avem

$$d(E, A) = d(F, A) = d(A, B), O \in |EF|.$$

Punctele A, B, C, D, E, F sînt vîrfurile unui octaedru regulat, ale cărui fețe sînt suprafețele triunghiulare $[EAB]$, $[EBC]$, $[ECD]$, $[EDA]$, $[FAB]$, $[FBC]$, $[FCD]$ și $[FDA]$.

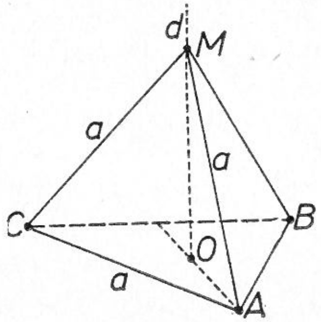


Fig. VII.86

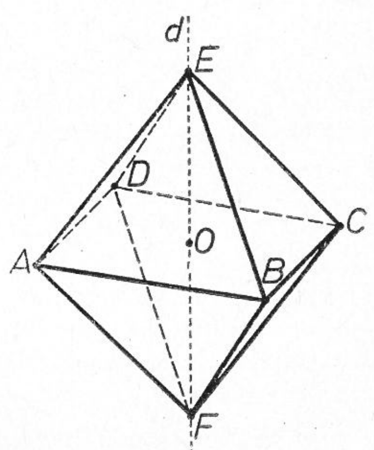


Fig. VII.87

Exerciții

1. Relativ la octaedrul construit mai sus, să se arate că el este într-adevăr un octaedru regulat și să se determine distanța $d(E, O)$.

2. Să se determine simetriile care lasă invariant un octaedru regulat și să se indice centrul, axele și planele de simetrie ale acestui octaedru.

Existența icosaedrului regulat. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat, situat într-un plan p. Notăm prin O centrul acestui pentagon și prin d dreapta dusă prin O perpendicular pe planul p. Pe dreapta d, luăm unul din punctele F, pentru care avem $d(A, F) = d(A, B)$. Punctul F cu această proprietate există, deoarece avem $d(O, A) < d(A, B)$. Vom avea atunci triunghiurile echilaterale FAB, FBC, FCD, FDE, FEA.

Exerciții

1. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FE}$ în funcție de distanța $d = d(A, B)$.

2. Să se arate că punctele B, F, E sînt trei vîrfuri consecutive ale unui pentagon regulat congruent cu pentagonul $ABCDE$.

3. Fie G, H punctele astfel ca $BFEGH$ să fie un pentagon regulat. Să se arate că $d(A, G) = d(A, H) = d(A, B)$.

4. Să se arate că perpendicularele ridicate pe planele triunghiurilor FAB, FBC, FCD, FDE, FEA, în centrele acestor triunghiuri, au un punct comun Q.

5. Să se arate că punctele A, B, C, D, E, F, împreună cu simetricele acestor puncte față de punctul Q, sînt vîrfurile unui icosaedru regulat, avînd printre fețele sale suprafețele $[FAB]$, $[FBC]$, $[FCD]$, $[FDE]$, $[FEA]$, $[AEG]$, $[AGH]$, $[AHB]$.

6. Cine sînt simetricele punctelor G și H față de punctul Q?

7. Să se determine simetriile care lasă invariant icosaedrul regulat construit mai sus. Se vor determina centrul, axele și planele de simetrie.

Existența dodecaedrelor regulate. Centrele fețelor unui icosaedru regulat sînt vîrfurile unui dodecaedru regulat.

Exerciții

1. Să se arate că centrele suprafețelor triunghiulare, care formează un icosaedru regulat, sînt vîrfurile unui dodecaedru regulat. De exemplu, folosind notațiile făcute mai sus, să se arate că centrele triunghiurilor, care au punctul A ca vîrf, sînt vîrfurile unei fețe pentagonale ale dodecaedrului.

2. Să se arate că centrele fețelor unui octaedru regulat sînt vîrfurile unui cub.

3. Să se arate că centrele fețelor unei suprafețe cubice sînt vîrfurile unei octaedru regulat.

4. Să se arate că centrele fețelor unui tetraedru regulat sînt vîrfurile unui al doilea tetraedru regulat.

5. Să se arate că centrele fețelor unui dodecaedru regulat sînt vîrfurile unui icosaedru regulat.

Fie W o suprafață poliedrală formată din f fețe, m muchii și v vîrfuri. Să presupunem că fiecare față este un poligon regulat cu q laturi și că din fiecare vîrf pleacă p muchii. Din faptul că fiecare muchie este latură la exact două fețe și că fiecare muchie are două capete, rezultă formulele

$$2m = pv = qf. \tag{1}$$

Știm că unghiurile unui poligon regulat cu q laturi au măsura în radiani egală cu $\frac{q-2}{q}\pi$ și că suma măsurilor unghiurilor unui unghi poliedru cu p laturi și convex este mai mică decît 2π. Rezultă inegalitatea

$$\frac{p(q-2)}{q} < 2. \tag{2}$$

Singurele perechi (p, q) de numere întregi mai mari decît 2, care verifică inegalitatea (2) sînt:

$$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3). \tag{3}$$

Rezultă că fețele unui poliedru regulat pot fi triunghiulare, pătratice, sau pentagonale, dar nu pot avea mai mult de cinci laturi. Din fiecare vîrf al unei suprafețe poliedrale regulate pot pleca cel mult cinci muchii.

Să presupunem că suprafața poliedrală regulată W are caracteristica euleriană egală cu 2. Din formulele (1) rezultă

$$C = m\left(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1\right) = 2.$$

Considerînd pentru perechea (p, q) fiecare din cazurile (3), obținem următoarele valori pentru numărul m al muchiilor suprafeței W:

$$m = 6,\ m = 12,\ m = 30,\ m = 12,\ m = 30.$$

Deci dacă admitem că suprafețele poliedrale regulate au caracteristica euleriană egală cu 2, rezultă că *singurele tipuri de suprafețe poliedrale regulate sînt cele descrise anterior.*

Capitolul VIII

Transformări geometrice

1. Definiții

La lecțiile de algebră am studiat unele exemple de aplicații sau funcții. Acestea sînt legi care asociază fiecărui element al unei mulțimi E un element al unei mulțimi F; F poate coincide cu E sau poate fi diferită de E. În mod deosebit, au fost studiate funcțiile numerice, care asociază fiecărui număr alt număr.

În geometrie se studiază legi, care asociază fiecărui element al unei figuri F un element determinat al unei figuri F'. O astfel de lege poartă numele de *transformare* a figurii F în figura F'.

O figură este în general formată din puncte, drepte, segmente, semidrepte, unghiuri, triunghiuri, cercuri etc. O transformare T de la figura F la figura F' se numește *transformare punctuală*, dacă T asociază fiecărui punct P al figurii F un punct $P' = T(P)$ al figurii F' și fiecărei mulțimi M, care intră în componența figurii F, mulțimea $T(M)$, formată din punctele $P' = T(P)$, pentru care $P \in M$. Deci $T(M) = \{T(P);\ P \in M\}$. Punctul $P' = T(P)$ se numește *transformatul punctului* P sau *imaginea* punctului P prin transformarea T, iar mulțimea $T(M)$ se numește *transformata* sau *imaginea* mulțimii M prin transformarea T.

Pentru a defini o transformare punctuală, este suficient să indicăm imaginea fiecărui punct P al figurii F, pe care vrem să definim transformarea.

Dacă avem două transformări punctuale: $T : F \to F'$, $T' : F' \to F''$ definim *produsul* sau *compunerea* $T' \circ T$ ca fiind acea transformare punctuală $T'' : F \to F''$, care asociază fiecărui punct $P \in F$ punctul $T''(P) = T'[T(P)]$, deci transformatul prin T' al transformatului prin T al punctului P.

Compunerea transformărilor este o operație asociativă. Într-adevăr, fiind date trei transformări $T : F \to F'$, $T' : F' \to F''$, $T'' : F'' \to G$, și fiind dat un punct oarecare $P \in F$, avem

$$P' = T(P) \in F',\quad P'' = T'(P') \in F'',\quad Q = T''(P'') \in G,$$

$$(T' \circ T)(P) = T'[T(P)] = T'(P') = P'',$$

$$T''[(T' \circ T)(P)] = T''(P'') = Q,\ (T'' \circ T')[T(P)] = (T'' \circ T')(P') =$$

$$= T''(T'(P')) = T''(P'') = Q;$$

deci, oricare ar fi punctul $P \in F$, avem

$$T''[(T' \circ T)(P)] = (T'' \circ T')[T(P)].$$

Aceasta înseamnă că transformările $T'' \circ (T' \circ T)$ și $(T'' \circ T') \circ T$ coincid:

$$T'' \circ (T' \circ T) = (T'' \circ T') \circ T.$$

Aceasta este proprietatea de *asociativitate* a compunerii transformărilor punctuale.

Exemple

1. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$, se spune că $A'B'C'$ se obține din ABC printr-o translație, dacă vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ sînt echipolenți doi cîte doi (fig. VIII.1).

2. Fiind date triunghiurile ABC, $A'B'C'$, se spune că ele se obțin unul din altul printr-o simetrie față de o dreaptă, dacă segmentele $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ au aceeași mediatoare (fig. VIII.2).

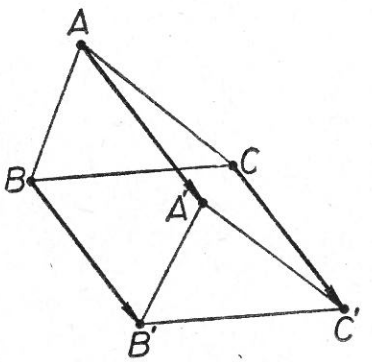


Fig. VIII.1

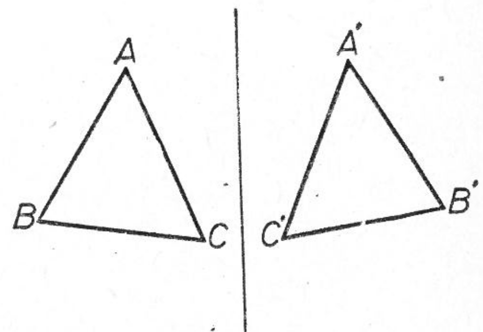


Fig. VIII.2

3. Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ se obțin unul din altul printr-o simetrie față de un punct, dacă segmentele $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ au același mijloc (fig. VIII.3).

4. Triunghiul $A'B'C'$ se spune că se obține din ABC printr-o rotație de unghi $\widehat{hk}$, față de un punct O, dacă avem $ABC \equiv A'B'C'$ și

$$|OA| \equiv |OA'|, |OB| \equiv |OB'|,$$
$$|OC| \equiv |OC'|$$

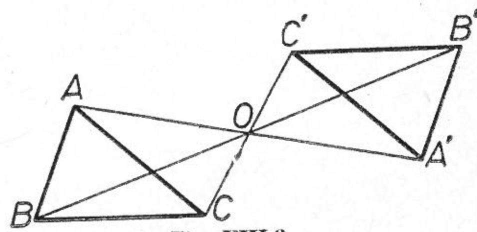


Fig. VIII.3

și dacă unghiurile $\widehat{AOA'}$, $\widehat{BOB'}$, $\widehat{COC'}$ sînt congruente cu unghiul $\widehat{hk}$ (fig. VIII.4).

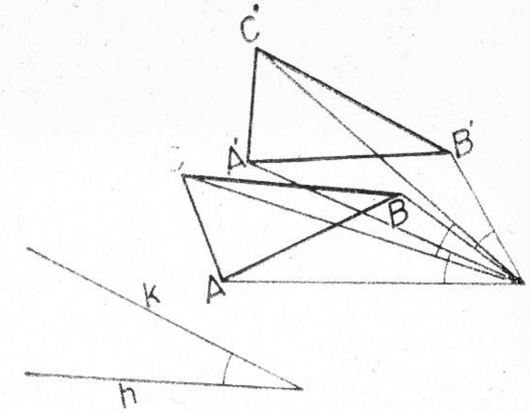


Fig. VIII.4

În fiecare din cele patru cazuri, triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt congruente. Elevii vor verifica această afirmație pe desene și apoi vor da demonstrațiile corespunzătoare.

Definițiile date pentru două triunghiuri pot fi extinse la figuri alcătuite din patru sau mai multe puncte. Deci vom putea spune că două figuri sînt simetrice față de o dreaptă sau față de un punct, sau că se obțin una din alta printr-o translație sau printr-o rotație, dacă există o corespondență T de la punctele primei figuri la punctele celei de a doua figuri, astfel încît fiecărui triunghi din prima figură să-i corespundă un triunghi în a doua figură, cele două triunghiuri satisfăcînd condițiile date mai sus, pentru fiecare caz. Două astfel de figuri au aceeași formă și aceeași mărime.

Pentru a nu fi legați de un anumit tip de figuri, este convenabil să definim și să studiem transformări ale unui plan sau transformări ale spațiului, care păstrează forma și mărimea fiecărei figuri.

Să presupunem că am ales și fixat un segment etalon m, care ne permite să definim lungimile segmentelor, distanțele între puncte și normele vectorilor.

D e f i n i ț i e. **Se numește izometrie orice transformare $T : M \to S$, definită pe o mulțime de puncte $M \subset S$ și care asociază fiecărui punct al mulțimii M un punct din spațiu, astfel încît, pentru orice două puncte $A \in M$, $B \in M$ să avem**

$$d(A, B) = d(A', B'),$$

unde $A' = T(A)$ și $B' = T(B)$. Dacă $M = S$, spunem că T este o izometrie a spațiului.

Dacă $A \neq B$, avem $d(A, B) \neq 0$, deci $d(A', B') \neq 0$, $A' \neq B'$. Prin urmare *orice izometrie este o aplicație injectivă.*

Dacă mulțimea M este un plan și dacă $T(M) \in M$, vom spune că T este o *izometrie în planul p*. Vom începe prin a studia izometriile unui plan fixat.

O izometrie este o aplicație injectivă, deci o aplicație care duce punctele distincte în puncte distincte; dacă avem un segment $|AB|$ avînd extremitățile A, B și dacă notăm prin A' și B' imaginile acestor puncte printr-o izometrie punctele A', B' vor forma un nou segment $|A'B'|$ și din egalitatea $d(A, B) = d(A', B')$ rezultă $|AB| \equiv |A'B'|$.

Dacă avem două izometrii $T : M \to S$ și $T' : M' \to S$ astfel incit $T(M) = M'$, putem defini compunerea celor două izometrii

$$T' \circ T : M \to S.$$

Compunerea $T' \circ T$ este tot o izometrie.

Într-adevăr, pentru orice două puncte $A \in M$ și $B \in M$, dacă notăm $A' = T(A)$, $A'' = T'(A')$, $B' = T(B)$, $B'' = T'(B')$, avem $d(A'', B'') = d(A', B') = d(A, B)$, deoarece T și T' sînt izometrii. Rezultă că și compunerea $T' \circ T$ este o izometrie.

Fie I transformarea identică a unui plan p, deci transformarea care asociază fiecărui punct $P \in p$ punctul P însuși: $I(P) = P$.

Dacă $T : p \to p$ este o transformare oarecare a planului p, avem $I \circ T = T \circ I = T$. Într-adevăr, pentru orice punct $P \in p$,

$$(I \circ T)(P) = I[T(P)] = T(P),$$
$$(T \circ I)(P) = T[I(P)] = T(P).$$

Cel mai simplu exemplu de izometrie este dat de transformarea identică.

Înainte de a studia proprietățile generale ale izometriilor, vom da pe rînd tipurile posibile de izometrii.

2. Simetria față de o dreaptă

Fie d o dreaptă într-un plan p (fig. VIII.5). Notăm prin S_d transformarea planului p în el însuși, care asociază fiecărui punct $A \in p$ un punct $A' \in p$ astfel ca:

$$A \in d \Rightarrow S_d(A) = A,$$
$$A \notin d \Rightarrow A' = S_d(A) \neq A \text{ și } d \text{ este mediatoarea segmentului } |AA'|.$$

Vom spune că punctul $A' = S_d(A)$ este *simetricul* punctului A față de dreapta d. Se observă că dacă $A \notin d$, atunci punctele A, A' se găsesc în semiplane opuse față de d. Deci dacă notăm prin p', p'' semiplanele limitate de d în planul p, atunci avem $S_d(p') = p''$ și $S_d(p'') = p'$.

Dacă notăm prin S_d simetria față de dreapta d, avem proprietățile

$$M \in d \Rightarrow S_d(M) = M;$$
$$P' = S_d(P) \Rightarrow P = S_d(P') \text{ (fig. VIII.5)}$$

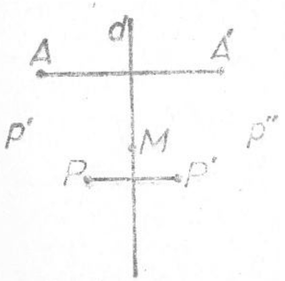


Fig. VIII.5

Din ultima proprietate rezultă că avem, pentru orice punct P din planul p, $(S_d \circ S_d)(P) = S_d[S_d(P)] = P$, deci efectul aplicării produsului $S_d \circ S_d$ asupra punctului P este același cu efectul aplicării transformării identice I. Avem deci

$$S_d^2 = S_d \circ S_d = I.$$

Să demonstrăm că *simetriile unui plan față de dreptele planului sînt izometrii.*

Fie într-un plan p dreapta d și punctele A, B (fig. VIII.6). Notăm $A' = S_d(A)$ și $B' = S_d(B)$. Trebuie să arătăm că $d(A, B) = d(A', B')$. Presupunem că $A \neq B$.

Dacă dreapta AB este paralelă cu dreapta d, figura $ABB'A'$ este un dreptunghi și rezultă $|AB| \equiv |A'B'|$, deci $d(A, B) = d(A', B')$.

Dacă dreapta AB nu este paralelă cu d, atunci putem considera punctul de intersecție $M \in d \cap AB$. Avem $d(M, A) = d(M, A')$ și $d(M, B) = d(M, B)$.

Avem de asemenea implicațiile

$$M \in |AB| \Rightarrow M \in |A'B'|, \text{ (fig. VIII.6,a)}$$
$$A \in |MB| \Rightarrow A' \in |MB'|, \text{ (fig. VIII.6,b)}$$
$$B \in |MA| \Rightarrow B' \in |MA'|, \text{ (fig. VIII.6,c).}$$
$$A = M \Rightarrow A' = M; \; B = M \Rightarrow B' = M.$$

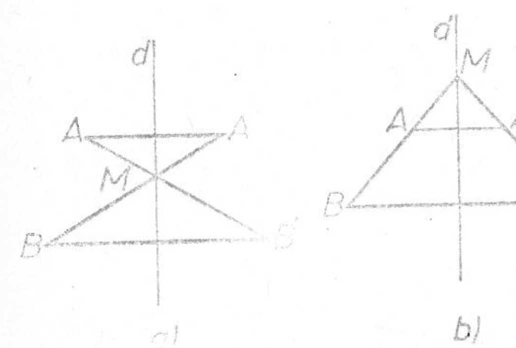


Fig. VIII.6

În fiecare din cazurile indicate, rezultă $d(A, B) = d(A', B')$.

Dacă $A = B$, atunci avem $A' = B'$ și $d(A, B) = d(A', B') = 0$.

Deci, în toate cazurile, $d(A, B) = d(A', B')$.

Vom demonstra mai departe că orice izometrie este o aplicație bijectivă, deci că orice izometrie admite o *inversă*. Deci dacă T este o izometrie, atunci există transformarea T^{-1} astfel ca $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$. În cazul în care T este o simetrie S_d, avem $T^{-1} = S_d^{-1} = S_d$, deoarece am observat că $S_d \circ S_d = I$.

3. Simetria față de un punct

Fie O un punct în planul p. *Simetria față de punctul O* în planul p este acea transformare $S_0 : p \to p$, care asociază punctului O pe el însuși și oricărui alt punct P, acel punct $P' \in OP$, astfel încît O să fie mijlocul segmentului $|PP'|$. Dacă $P' = S_0(P)$, atunci $S_0(P') = P$, deci $S_0^2 = I$. Să arătăm că: *Transformarea S_0 este o izometrie.*

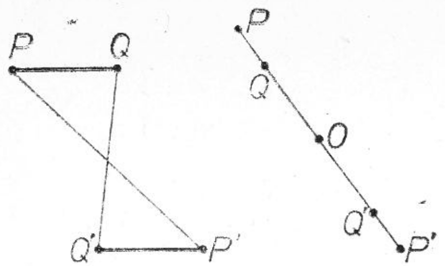


Fig. VIII.7

Demonstrație. Fiind date două puncte $P \neq O$, $Q \notin OP$, și notînd $P' = S_0(P)$, $Q' = S_0(Q)$, triunghiurile OPQ, $OP'Q'$ sînt congruente (fig. VIII.7) deoarece au $|OP| \equiv |OP'|$, $|OQ| \equiv |OQ'|$, $\widehat{POQ} \equiv \widehat{P'OQ'}$. Rezultă $|PQ| \equiv |P'Q'|$, deci $d(P, Q) = d(P', Q')$.

Dacă unul din punctele P, Q coincide cu O sau dacă punctele O, P, Q sînt coliniare, demonstrația egalității $d(P, Q) = d(P', Q')$ se face considerînd egalitățile $d(O, P) = d(O, P')$, $d(O, Q) = d(O, Q')$.

Fie d, d' două drepte perpendiculare, duse prin punctul O și situate în planul p. Fie S, S' simetriile față de dreptele d respectiv d' și fie T simetria față de punctul O. Pentru un punct oarecare P din planul p, să notăm $Q = S(P)$, $P' = S'(Q)$, $R = S'(P)$, $P'' = S(R)$ (fig. VIII.8).

Suma unghiurilor $\widehat{POQ}$, $\widehat{QOP'}$ este un unghi alungit, deci punctele O, P, P' sînt coliniare; punctele P, P' sînt în semiplane opuse atît față de dreapta d, cît și de dreapta d'. Deci $P \neq P'$. Triunghiurile OPQ, OQP' sînt isoscele. Aceste proprietăți arată că O este mijlocul segmentului $|PP'|$. La fel se arată că O este mijlocul segmentului $|PP''|$. Rezultă $P' = P'' = T(P)$. Putem deci scrie că avem

$$T(P) = S'[S(P)] = S[S'(P)]$$

pentru orice punct P din planul p. Această egalitate se exprimă spunînd că simetria $T = S_0$ este egală cu produsul simetriilor S, S', indiferent de ordinea în care se iau S și S'. Simbolic, putem scrie $T = S \circ S' = S' \circ S$.

În general, produsul a două transformări se schimbă, dacă schimbăm între ele cele două transformări.

Pentru a da un exemplu, să considerăm două drepte paralele m, n și să notăm prin U, V simetriile față de aceste drepte (fig. VIII.9). Pentru un punct

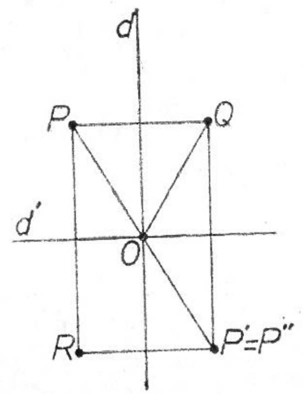


Fig. VIII.8

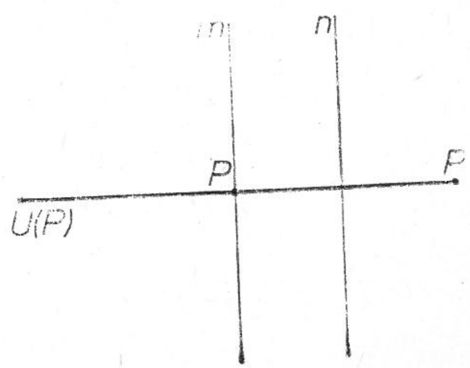


Fig. VIII.9

$P \in m$, avem $U(P) = P$, $V[U(P)] = V(P) = P' \neq P$ și $U[V(P)] = U(P') \neq P'$, deoarece $P' \notin m$. Deci $V[U(P)] \neq U[V(P)]$, cel puțin pentru un punct P. Aceasta înseamnă că $V \circ U \neq U \circ V$. Se spune că *transformările U, V nu sînt permutabile.*

4. Translații

Fie $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ un vector în planul p. Se numește *translație* de vector $\vec{v}$ a planului p acea transformare punctuală T, care asociază fiecărui punct $P \in p$ punctul P' astfel ca $\overrightarrow{PP'} \sim \vec{v}$.

Dacă $\vec{v}$ este un vector nul, avem $P' = T(P) = P$, pentru orice punct $P \in p$. Se spune în acest caz că T este transformarea identică. Deci: *o translație de vector nul este transformarea identică.*

Dacă $\vec{v}$, $\vec{v}'$ sînt doi vectori echipolenți și dacă T, T' sînt translațiile de vector $\vec{v}$, respectiv $\vec{v}'$, atunci avem $T = T'$.

Într-adevăr, fie $P \in p$ și fie $P' = T(P)$, $P'' = T'(P)$ (fig. VIII.10). Atunci avem $\overrightarrow{PP'} \sim \vec{v} \sim \vec{v}' \sim \overrightarrow{PP''}$, deci $\overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{PP''}$. Aceasta înseamnă că $P' = P''$. Această relație fiind adevărată pentru orice punct $P \in p$, rezultă $T = T'$.

Translațiile sînt izometrii.

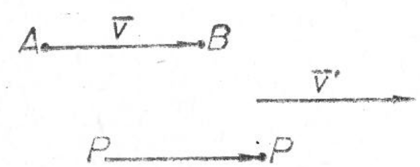


Fig. VIII.10

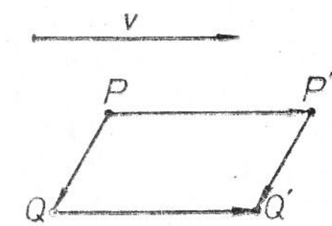


Fig. VIII.11

Demonstrație. Dacă T este translația de vector $\vec{v}$ și dacă P, Q sînt două puncte distincte, notînd $P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$, avem $\overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{QQ'}$ (fig. VIII.11). Rezultă $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$, deci $d(P, Q) = d(P', Q')$. Prin urmare, T este o izometrie.

5. Rotații

D e f i n i ț i e. Un punct P se numește invariant față de o transformare T dacă $T(P) = P$.

Există izometrii ale unui plan p, care admit cîte un singur punct invariant. Dacă O este un punct în planul p și dacă T este o izometrie a planului p, care admite pe O ca singur punct invariant, spunem că T este o *rotație proprie de centru O.*

Transformarea identică I este considerată ca rotație (improprie) de centru O, oricare ar fi punctul O. Rotațiile proprii de centru O și transformarea I sînt singurele rotații de centru O.

Simetria S_0 față de punctul O este o rotație de centru O, și anume o rotație proprie, deoarece O este unicul punct invariant al transformării S_0.

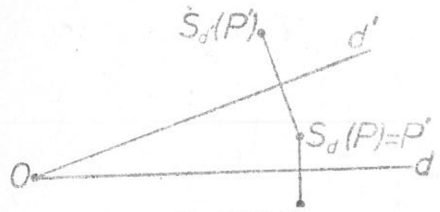


Fig. VIII.12

Dacă d, d' sînt două drepte distincte trecînd prin punctul O, compunerea de simetrii $S'_d \circ S_d$ este o rotație proprie de centru O. Într-adevăr, am arătat că, în general, compunerea a două izometrii este o izometrie; deci, în particular, transformarea $T = S'_d \circ S_d$ este o izometrie. Punctul O este evident un punct invariant pentru T. Să arătăm că O este singurul punct invariant pentru T. Să presupunem că T ar admite un al doilea punct invariant $P \neq O$. Am avea atunci (fig. VIII.12)

$T(P) = S_{d'}[S_d(P)] = P$. Aplicînd egalității $S_{d'}[S_d(P)] = P$ simetria S_d, obținem

$$S_{d'}(P) = S_{d'}[S_d(S_{d'}(P))] = (S_{d'} \circ S_{d'})[S_d(P)] = I[S_d(P)] = S_d(P)$$

deci punctul P are aceeași imagine, atît prin simetria $S_{d'}$, cît și prin simetria S_d.

Nu putem avea $P' = P$, deoarece singurele puncte invariante față de S_d sînt punctele dreptei d, iar singurele puncte invariante față de S sînt punctele dreptei d'. Cum $P \neq O \in d \cap d'$, rezultă $P' \neq P$. Relațiile (1) arată atunci că segmentul $|PP'|$ admite ca mediatoare, atît dreapta d, cît și dreapta d', ceea ce implică $d = d'$, deoarece un segment are o singură mediatoare. Dar am presupus $d \neq d'$. Deci nu putem presupune că T admite un punct invariant diferit de O. Aceasta arată că T este o rotație de centru O. Deci:

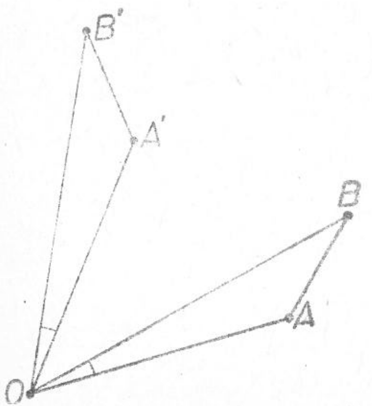


Fig. VIII.13

Produsul a două simetrii, față de două drepte concurente într-un punct O și situate într-un plan p, este o rotație de centru O a planului p.

În § 8 se va arăta că o rotație este definită cînd se dă centrul O, un unghi de rotație $\widehat{hk}$ și un sens de rotație (fig. VIII.13).

6. Proprietăți generale ale izometriilor unui plan

(pentru cercuri de elevi)

Pentru cunoașterea diferitelor tipuri posibile de izometrii, este necesar să avem o vedere generală asupra izometriilor unui plan. Vom enumera o serie de proprietăți mai importante.

1. *Orice izometrie transformă trei puncte coliniare în trei puncte coliniare* (fig. VIII.14).

Demonstrație. Fie A, B, C trei puncte distincte pe o dreaptă d și fie A', B', C' imaginile lor printr-o izometrie T. Să presupunem că $B \in |AC|$. În acest caz, $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$. Transformarea T fiind o izometrie avem $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$, $d(A, C) = d(A', C')$, deci $d(A', B') + d(B', C') = d(A', C')$. Aceasta înseamnă că avem $B' \in |A'C'|$, deci punctele A', B', C' sînt coliniare.

2. *Dacă T este o izometrie și dacă d este o dreaptă, atunci mulțimea $T(d) = \{T(P);\ P \in d\}$ este o dreaptă.*

Fie P, Q două puncte distincte pe dreapta d și fie $P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$, $d' = P'Q'$ (fig. V.15). Din proprietatea 1 rezultă că imaginea oricărui punct

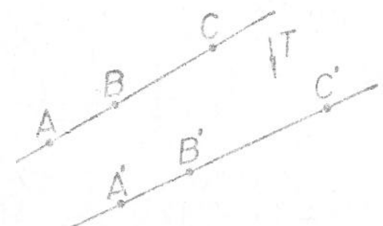


Fig. VIII.14

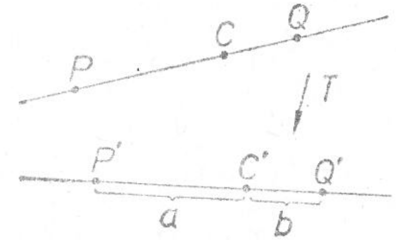


Fig. VIII.15

$R \in d$ este un punct $R' = T(R) \in d'$. Deci avem $T(d) \subset d'$. Pentru a arăta că $T(d) = d'$, trebuie să mai arătăm că, oricare ar fi punctul $C' \in d'$, există un punct $C \in d$ astfel ca $T(C) = C'$, (fig. VIII.15).

Numerele pozitive $a = d(C', P')$, $b = d(C', Q')$ determină în mod unic poziția punctului C' pe dreapta $P'Q'$. Putem construi pe dreapta d un singur punct C astfel ca $d(C, P) = a$ și $d(C, Q) = b$. Dacă notăm $C'' = T(C)$ vom avea $d(C'', P') = a = d(C', P')$ și $d(C'', Q') = b = d(C'', Q')$, deci $C'' = C'$. Aceasta înseamnă că $T(C) = C'$.

3. *Orice izometrie este o aplicație surjectivă.*

Trebuie să demonstrăm că dacă $T : p \rightarrow p$ este o izometrie, atunci, pentru orice punct $P' \in p$ există un punct $P \in p$ astfel ca $T(P) = P'$. Fie A un punct oarecare din planul p și fie $A' = T(A)$. Dacă $A' = P'$, luăm $P = A$ și obținem $T(P) = P'$. Dacă $A' \neq P'$, considerăm dreapta $d' = A'P'$. Fie apoi m, n două drepte distincte și concurente, în planul p astfel ca $A \notin m$, $A \notin n$; Considerăm dreptele $m' = T(m)$, $n' = T(n)$. Aceste drepte au punctul comun $O' = T(O)$, unde $\{O\} = m \cap n$. Deci dreptele m', n' nu sînt paralele. Atunci cel puțin una din aceste drepte va intersecta dreapta d'. Să presupunem că există $B' \in d' \cap$ $\cap\, m'$. Din relația $m' = T(m)$ rezultă că există un punct $B \in m$ astfel ca $T(B) = B'$.

Avem $B \neq A$, deoarece $A \notin m$; deci $B' \neq A'$. Din $P' \in d' = A'B'$ și din proprietatea 2 deducem că există un punct P pe dreapta AB astfel ca $T(P) =$ $= P'$.

4. *Orice izometrie transformă două drepte paralele în două drepte paralele.*

Fie d, d' două drepte paralele și fie $e = T(d)$, $e' = T(d')$ transformatele lor prin izometria T. Trebuie să arătăm că dreptele e, e' sînt paralele. Să presupunem contrariul, deci că există un punct $A' \in e \cap e'$. Punctul A' este imaginea unui punct A, care trebuie să aparțină fiecăreia din dreptele d, d'; aceasta nu este posibil, deoarece $d \parallel d'$. Deci nu există $A' \in e \cap e'$ și rezultă $e \parallel e'$.

5. *Dacă T este o izometrie, atunci T^{-1} este o izometrie.*

Demonstrație. Fie $T : p \to p$ o izometrie a planului p și fie A, B două puncte oarecare în planul p. Dacă notăm $A' = T^{-1}(A)$, $B' = T^{-1}(B)$, vom avea $A = T(A')$ și $B = T(B')$. T fiind o izometrie, rezultă $d(A, B) = d(A', B')$, deci și T^{-1} este o izometrie.

6. *Dacă T este o izometrie și dacă $|AB|$ este un segment, atunci $T(|AB|)$ este un segment.*

Demonstrație. Segmentul $|AB|$ este mulțimea punctelor situate între A și B. Dacă C este un astfel de punct, avem $d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)$. Să notăm $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$. Avem atunci $d(A, C) =$ $= d(A', C')$, $d(B, C) = d(B', C')$, $d(A, B) = d(A', B')$, deci $d(A', C') +$ $+ d(C', B') = d(A', B')$. Rezultă $C' \in |A'B'|$. Deci am arătat că $T(|AB|) \subset$ $\subset |A'B'|$. Pentru a arăta că $T(|AB|) = |A'B'|$, rămîne să arătăm că orice punct al segmentului $|A'B'|$ este imaginea unui punct de pe $|AB|$. Dacă $C' \in |A'B'|$, avem $C' \in A'B'$ și știm că există $C \in AB$ astfel ca $T(C) =$ $= C'$. Folosind relațiile scrise mai sus, deducem că $C \in |AB|$.

7. *Dacă T este o izometrie și dacă s este o semidreaptă, atunci $T(s)$ este o semidreaptă. Dacă p' este un semiplan, atunci $T(p')$ este un semiplan.*

Proprietatea rezultă din proprietatea precedentă și din definițiile date pentru semidrepte și pentru semiplane.

8. Dacă *T este o izometrie și dacă $\widehat{hk}$ este un unghi, atunci $T(\widehat{hk})$ este un unghi congruent cu unghiul $\widehat{hk}$.*

Demonstrație. Fie O vîrful unghiului $\widehat{hk}$ și fie punctele $A \in h$, $B \in k$. Să punem $O' = T(O)$, $A' = T(A)$, $B' = T(B)$. Dacă $\widehat{hk}$ este un unghi nul sau alungit, unghiul $T(\widehat{hk}) = \widehat{A'O'B'}$ va fi de același fel cu $\widehat{hk}$. Dacă $\widehat{hk}$ este un unghi propriu, OAB este un triunghi și $O'A'B'$ este un triunghi congruent

cu OAB, deoarece putem aplica teorema III de congruență. Rezultă $\widehat{A'O'B'} \equiv$ $\equiv \widehat{AOB}$, deci $T(\widehat{hk}) \equiv \widehat{hk}$.

În particular, dacă $\widehat{hk}$ este un unghi drept, atunci unghiul $T(\widehat{hk})$ va fi de asemenea drept.

9. *Dacă T este o izometrie și dacă $ABCD$ este un paralelogram, atunci $T(ABCD) = A'B'C'D'$ este un paralelogram, ($A' = T(A)$ etc.).*

Demonstrație. Avem $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ și rezultă, folosind proprietatea 4, $A'B' \parallel C'D'$, $A'D' \parallel B'C'$; deci $A'B'C'D'$ este un paralelogram.

10. *Fie T o izometrie a planului p. Considerăm punctele A, $B \in p$ și fie $A' = T(A)$, $B' = T(B)$. Atunci, oricare ar fi numărul real k, avem*

$$T(k \cdot \overrightarrow{AB}) = k \cdot \overrightarrow{A'B'}.$$

Aceasta înseamnă că, dacă punctul C este astfel încît $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ și dacă $C' = T(C)$, atunci $\overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{A'B'}$.

Proprietatea rezultă din faptul că izometriile păstrează distanțele între puncte, deci normele vectorilor, și din faptul că ele păstrează și proprietățile de ordonare. Avem deci $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$ și din $A \in |BC|$ sau $B \in |AC|$ rezultă $A' \in |B'C'|$ respectiv $B' \in |A'C'|$.

11. *Fie OAB un triunghi în planul p și fie T o izometrie a acestui plan. Fie M un punct astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$ și fie $M' = T(M)$, $A' =$ $= T(A)$, $B' = T(B)$, $O' = T(O)$. Avem atunci*

$$\overrightarrow{O'M'} \sim x \cdot \overrightarrow{O'A'} + y \cdot \overrightarrow{O'B'}.$$

Demonstrație. Fie P, Q punctele pentru care avem $\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} =$ $= y \cdot \overrightarrow{OB}$ și fie $P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$. Avem atunci $\overrightarrow{O'P'} = x \cdot \overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'Q'} =$ $= y \cdot \overrightarrow{O'B'}$. Pe de altă parte, $MP \parallel OB$, $MQ \parallel OA$ și rezultă $M'P' \parallel O'B'$, $M'Q' \parallel O'A'$. Deci putem scrie

$$\overrightarrow{O'M'} \sim \overrightarrow{O'P'} + \overrightarrow{O'Q'} = x \cdot \overrightarrow{O'A'} + y \cdot \overrightarrow{O'B'}.$$

7. Teorema fundamentală a izometriilor plane
(pentru cercuri de elevi)

Fie OAB, $O'A'B'$ două triunghiuri dreptunghice, isoscele și congruente între ele, avînd unghiurile drepte în O, respectiv O'. Cele două triunghiuri definesc două repere carteziene $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$. Să notăm prin T

transformarea planului în el însuși, care asociază fiecărui punct $P(x, y)$, avînd coordonatele x, y față de reperul $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, punctul $P'(x, y)$, avînd aceleași coordonate, dar față de reperul $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$.

În aceste condiții, transformarea T este o izometrie.

Demonstrație. Aplicațiile $P : \mathbb{R}^2 \to p$, $P' : \mathbb{R}^2 \to p$ sînt bijective și avem $T = P' \circ P^{-1}$, deci T este o aplicație bijectivă.

Să arătăm că T transformă un segment oarecare $|QR|$ într-un segment $|Q'R'|$ astfel ca $|Q'R'| \equiv |QR|$. Să presupunem că avem

$$Q = P(x_1, y_1),\ R = P(x_2, y_2).$$

În acest caz, punctele $Q' = T(Q)$, $R' = T(R)$ vor fi date de formulele

$$Q' = P'(x_1, y_1),\ R' = P'(x_2, y_2).$$

Lungimea segmentului $|QR|$ este dată de formula

$$d(Q,\ R) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iar lungimea segmentului $|Q'R'|$ se poate calcula folosind reperul $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$; se obține:

$$d(Q',\ R')^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Se observă că $d(Q,\ R) = d(Q',\ R')$, deci $|QR| \equiv |Q'R'|$. Prin urmare, T este o izometrie.

Să examinăm cîteva cazuri particulare.

1. Dacă $O = O'$, $A = A'$ și $B = B'$, atunci T este evident transformarea identică, deoarece avem $T(P) = P$ pentru orice punct P.

2. Dacă avem relațiile de echipolență $\overrightarrow{O'A'} \sim \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'B'} \sim \overrightarrow{OB}$, atunci T este o translație, ce poate fi definită de oricare din vectorii echipolenți $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$.

3. Dacă vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'A'}$ sînt echipolenți, atunci vectorii $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O'B'}$ sînt fie echipolenți, fie paraleli și de sensuri opuse. Să presupunem că $\overrightarrow{O'B'} \sim -\overrightarrow{OB}$. Dacă $O' = O$, transformarea T este o simetrie față de dreapta OA.

4. Dacă O' este un punct al dreptei OA, dacă $\overrightarrow{O'B'} \sim -\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O'A'} \sim \overrightarrow{OA}$, atunci T este rezultatul compunerii translației de vector $\overrightarrow{OO'}$ cu simetria față de dreapta OA și T nu are nici un punct invariant.

5. Dacă $O' = O$ și dacă vectorii $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$ sînt astfel încît

$$A' = B,\ B' = A,$$

atunci T este simetria față de bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$.

6. Dacă $O' = O$, transformarea T va admite punctul O ca punct invariant. Sînt posibile două cazuri:

a) unghiurile $\widehat{AOA'}$, $\widehat{BOB'}$ au bisectoarea comună. Atunci punctele acestei bisectoare au aceleași coordonate, fie că le raportăm la reperul $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, sau la reperul $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'})$, deci aceste puncte vor fi puncte invariante pentru T; T este deci o simetrie față de bisectoarea celor două unghiuri;

b) bisectoarea unghiului $\widehat{AOB'}$ este bisectoare a unghiului $\widehat{A'OB}$. Atunci T nu are nici un punct invariant diferit de O și este prin urmare o rotație în jurul punctului O.

În general, punctele invariante ale izometriei T sînt acele puncte din plan, care au aceleași coordonate, față de reperele $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$.

Dacă o izometrie T admite un punct invariant S și dacă M, M' sînt două puncte distincte astfel ca $M' = T(M)$, atunci avem $|SM| \equiv |SM'|$, deci S se găsește pe mediatoarea segmentului $|MM'|$.

Dacă o izometrie T admite două puncte distincte invariante, să spunem M și N, atunci toate punctele dreptei MN vor fi invariante: dacă T nu este transformarea identică, atunci T este o simetrie față de dreapta MN. În acest caz, pentru orice punct $P \notin MN$, dacă notăm $P' = T(P)$, știm că MN este mediatoarea segmentului $|PP'|$. Deci, dacă T este o simetrie față de o dreaptă, atunci mediatoarele segmentelor $|OO'|$, $|AA'|$, $|BB'|$ coincid

Dacă izometria T este o rotație în jurul unui punct S, atunci mediatoarele segmentelor $|OO'|$, $|AA'|$, $|BB'|$ sînt concurente în punctul S.

O translație definită de un vector nenul nu are nici un punct invariant. Mediatoarele segmentelor de forma $|MM'|$, unde $M' = T(M)$ și unde T este o translație, $T \neq I$, sînt paralele între ele.

Există izometrii, care nu sînt translații și care nu au nici un punct invariant. Ele se obțin compunînd o translație de vector nenul $\vec{v}$ cu o simetrie față de o dreaptă paralelă cu vectorul $\vec{v}$.

8. Exprimarea analitică a unei izometrii
(pentru cercurile de elevi)

Să presupunem că în planul p a fost ales un reper cartezian $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ avînd vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ de normă 1 și ortogonali. În acest caz, fiecare punct din plan este definit prin coordonatele sale x, y. Dacă punctul M are coordonatele x, y, avem $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$ și dacă avem un al doilea punct M', de coordonate x', y', atunci

$$d(M, M')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Dacă $T : p \to p$ este o transformare punctuală a planului p, atunci T asociază fiecărui punct $M(x, y)$ un punct $M'(x', y')$, după o lege determinată. Aceasta înseamnă că x' și y' sînt funcții de coordonatele x și y ale punctului M, deci există două funcții f, g, de variabilele x, y astfel încît să avem

$$x' = f(x, y), \; y' = g(x, y) \tag{2}$$

ori de cîte ori x' și y' sînt coordonatele punctului $M' = T(M)$ și x, y sînt coordonatele punctului M, oricare ar fi punctul $M \in p$.

Se spune că formulele (2) reprezintă exprimarea analitică a transformării punctuale T.

De exemplu, formulele

$$x' = x, \; y' = y$$

dau exprimarea analitică a transformării identice I.

Vrem să determinăm forma funcțiilor f, g din formulele (2) în ipoteza că T este o izometrie.

Să notăm $O' = T(O)$, $A' = T(A)$, $B' = T(B)$. Atunci $O'A'B'$ este un triunghi dreptunghic, avînd catetele de lungime 1. Deci vectorii $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'B'}$ sînt unitari și ortogonali. Aceasta înseamnă că, dacă descompunem acești vectori după direcțiile OA, OB, obținem formule de forma

$$\overrightarrow{O'A'} \sim a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O'B'} \sim c \cdot \overrightarrow{OA} + d \cdot \overrightarrow{OB}, \tag{3}$$

unde componentele scalare a, b, c, d verifică condițiile

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \; ac + bd = 0. \tag{4}$$

Primele două din aceste formule arată că vectorii $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}$ sînt unitari, iar ultima relație 4) arată că acești vectori sînt ortogonali.

Fie (u, v) coordonatele punctului O' față de reperul $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Să considerăm acuma un punct arbitrar $M(x, y)$ în planul p și fie $M' = T(M)$. Notînd prin (x', y') coordonatele punctului M' față de reperul $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, putem scrie

$$\overrightarrow{OM'} = x' \cdot \overrightarrow{OA} + y' \cdot \overrightarrow{OB}. \tag{5}$$

Pe de altă parte, avem relațiile

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'}, \tag{6}$$

și

$$\overrightarrow{O'M'} = T(\overrightarrow{OM}) = T(x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}) = x \cdot T(\overrightarrow{OA}) + y \cdot T(\overrightarrow{OB}) = x \cdot \overrightarrow{O'A'} + y \cdot \overrightarrow{O'B'}.$$

Folosind formulele (3), putem scrie ultima formulă sub forma

$$\overrightarrow{O'M'} \sim x \cdot (a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}) + y(c \cdot \overrightarrow{OA} + d \cdot \overrightarrow{OB}) = (ax + cy) \cdot \overrightarrow{OA} + (bx + dy) \cdot \overrightarrow{OB}$$

Introducînd în (6), obținem

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + (ax + cy) \cdot \overrightarrow{OA} + (bx + dy) \cdot \overrightarrow{OB}. \tag{7}$$

Dar avem

$$\overrightarrow{OO'} = u \cdot \overrightarrow{OA} + v \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Rezultă deci

$$\overrightarrow{OM'} = (ax + cy + u) \cdot \overrightarrow{OA} + (bx + dy + v) \cdot \overrightarrow{OB}. \tag{8}$$

Comparînd formulele (5) și (8), deducem relațiile

$$x' = ax + cy + u, \; y' = bx + dy + v. \tag{9}$$

Formulele (9) dau exprimarea analitică a izometriei T. În aceste formule, x și y sînt coordonatele unui punct oarecare din planul p, iar x' și y' sînt coordonatele punctului transformat. Coeficienții a, b, c, d, u, v sînt numere reale, legate numai de transformarea T, deci sînt constante. Aceste constante nu pot fi date arbitrar, ele trebuind să verifice condițiile (4), numite *condițiile de ortogonalitate*.

Deci am demonstrat că:

Orice izometrie a unui plan se exprimă analitic prin formule de forma (9), unde coeficienții a, b, c, d, u, v verifică condițiile de ortogonalitate (4).

Ultima ecuație (4) arată că există un număr k, astfel încît să avem $a = kd$, $b = -kc$. Introducînd în prima ecuație (4) și ținînd seama de a doua, obținem $k^2 = 1$ deci $k = \pm 1$.

Deci, izometriile unui plan sînt de două tipuri:

I. Izometrii date de ecuații de forma

$$x' = dx + cy + u, \; y' = -cx + dy + v.$$

II. Izometrii date de ecuații de forma

$$x' = -dx + cy + u, \; y' = cx + dy + v.$$

Pentru izometriile de tipul I avem

$$k = 1, b + c = 0, ad - bc = 1, a = d,$$

iar pentru izometriile de tipul II avem

$$k = -1, b = c, ad - bc = -1, a + d = 0.$$

Izometriile de tipul I se numesc *deplasări*, iar izometriile de tipul II se numesc *antideplasări*.

Fiind dată o transformare T de forma (9) și un punct $M(x, y)$, condiția ca M să fie punct invariant față de T este $M' = M$ sau $x' = x$, $y' = y$. Ecuațiile (9) dau, pentru $x' = x$, $y' = y$,

$$(a - 1)x + cy + u = 0, \;\; bx + (d - 1)y + v = 0. \tag{9'}$$

Deci $M(x, y)$ este un punct invariant dacă și numai dacă x și y verifică ecuațiile (9'). Fiecare din aceste ecuații reprezintă o dreaptă. Pentru ca să existe puncte invariante față de T, este necesar și suficient ca cele două drepte date de ecuațiile (9') să aibă cel puțin un punct comun. Dacă aceste drepte au un singur punct comun, transformarea T are un singur punct invariant. Aceasta se întîmplă dacă sistemul (9') este compatibil determinat, deci dacă avem

$$(a - 1)(d - 1) - bc \neq 0.$$

În cazul deplasărilor, avem $(a - 1)(d - 1) - bc = 2(1 - a)$. Deci *o deplasare are un singur punct invariant dacă și numai dacă $a \neq 1$.*

Pentru o antideplasare, avem $(a - 1)(d - 1) - bc = 0$, deci o antideplasare fie nu are nici un punct invariant, fie are o infinitate de puncte invariante.

Să examinăm cîteva cazuri particulare.

1. Să presupunem că T este o translație. Atunci avem $\overrightarrow{O'A'} \sim \overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{O'B'} \sim \overrightarrow{OB}$, deci $a = d = 1$, $b = c = 0$ și transformarea T va fi dată de formulele

$$x' = x + u, \quad y' = y + v.$$

În aceste formule, u și v reprezintă componentele scalare ale vectorului $\overrightarrow{OO'}$, care definește translația T.

2. Să presupunem acuma că T este simetria față de dreapta OA. Avem în acest caz $O' = O$, $A' = A$, $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$, deci coeficienții a, b, c, d, u, v au valorile $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = -1$, $u = v = 0$. Ecuațiile (9) devin

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

3. Dacă T este o rotație de centru O, avem $O' = T(O) = O$, deci $u = v = 0$. Ecuațiile (9) devin

$$x' = ax + cy, \quad y' = bx + dy. \tag{10}$$

Dacă se consideră două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, transformatele lor vor fi punctele $M_1'(x_1', y_1')$, $M_2'(x_2', y_2')$, unde

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + cy_1, \quad y_1' = bx_1 + dy_1, \\ x_2' &= ax_2 + cy_2, \quad y_2' = bx_2 + dy_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{OM_1'}, \overrightarrow{OM_2'}$ va fi dat de formula

$$\overrightarrow{OM_1'} \cdot \overrightarrow{OM_2'} = x_1'x_2' + y_1'y_2' = (a^2 + b^2)x_1x_2 + (ac + bd)(x_1y_2 + x_2y_1) + (c^2 + d^2)y_1y_2.$$

Dacă ținem seama de formulele (4), obținem $\overrightarrow{OM_1'} \cdot \overrightarrow{OM_2'} = x_1x_2 + y_1y_2$, deci

$$\overrightarrow{OM_1'} \cdot \overrightarrow{OM_2'} = \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}.$$

În particular, luînd $M_1 = M_2$, deducem că $\|\overrightarrow{OM_1'}\| = \|\overrightarrow{OM_1}\|$. Deci rotațiile lasă invariante produsele scalare și normele vectorilor.

Să calculăm produsul scalar $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$; $M' = T(M)$, $M(x, y)$. Avem, folosind formulele (10),

$$\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = xx' + yy' = ax^2 + (b + c)xy + dy^2. \tag{12}$$

Transformarea T fiind o rotație, este fie rotație proprie, fie transformarea identică. Să presupunem că sîntem în primul caz. Atunci T are un singur punct invariant, anume punctul O. Deci T trebuie să fie o deplasare și rezultă că T este de tipul *I*. Aceasta înseamnă că avem $a = d$, $b + c = 0$, astfel încît relația (12) devine

$$\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = a(x^2 + y^2) = a\, \|\overrightarrow{OM}\|^2 = a\, \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \|\overrightarrow{OM'}\|. \tag{13}$$

Fie $\overrightarrow{OM} \neq \vec{O}$. Cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}$ va fi dat de formula

$$\cos\,(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = a = d.$$

Aceasta înseamnă că unghiul vectorilor $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}$ este congruent cu un unghi fix, avînd cosinusul egal cu numărul constant a. Deci:

Dacă T este o rotație de centru O și dacă M este un punct oarecare (diferit de O) și dacă $M' = T(M)$, atunci unghiul $\widehat{MOM'}$ este congruent cu un unghi fix, care nu depinde de M (dar depinde de rotația T).

Unghiul fix, format de doi vectori $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}$, $(M \neq O,\ M' = T(M))$, se numește *unghiul rotației T*.

O rotație de unghi $\widehat{hk}$ și de centru O va fi definită prin formulele

$$x' = dx + cy, \quad y' = -cx + dy$$

unde $d = \cos \widehat{hk}$ și unde $c^2 + d^2 = 1$. Există deci două rotații de unghi $\widehat{hk}$, care corespund alegerilor $c = \sqrt{1 - d^2}$, respectiv $c = -\sqrt{1 - d^2}$. Se spune că cele două rotații sînt de *sensuri opuse*.

4. Să presupunem acuma că T este o antideplasare, care admite O ca punct invariant. T va fi definită de ecuații de forma

$$x' = -dx + cy, \quad y' = cx + dy.$$

Punctele invariante sînt soluțiile sistemului

$$(d + 1)x = cy, \quad cx = (1 - d)y.$$

Ecuațiile acestui sistem reprezintă o aceeași dreaptă, deci T admite o dreaptă de puncte invariante. Dacă presupunem că această dreaptă este dreapta OA, avem $d = -1$, $c = 0$ și obținem ecuațiile care definesc simetria față de dreapta OA.

9. Transformări ale unui plan care nu sînt izometrii

A. Omotetii

Fie O un punct fixat în planul p și fie k un număr real $\neq 0$. Definim cu ajutorul lui O și al lui k o transformare a planului p în modul următor:

1. Punctului O îi asociem punctul O însuși.
2. Dacă P este un punct din planul p diferit de O, îi asociem lui P acel punct P' de pe dreapta OP, pentru care avem

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Această transformare se numește *omotetia de centru O și de raport k*.

Notînd prin T această omotetie, din definiție rezultă că dacă d este o dreaptă ce trece prin O, atunci $T(d) = d$. Deci dreptele care trec prin centrul de omotetie sînt invariante.

Cu ajutorul teoremei lui Thales se demonstrează fără dificultate următoarele proprietăți, relative la o omotetie arbitrară T:

1. Dacă m este o dreaptă în planul p și $O \notin m$, atunci $T(m)$ este o dreaptă paralelă cu m.

2. Dacă $|AB|$ este un segment $A \neq B$ și dacă $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, atunci $A' \neq B'$ și $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

3. Dacă ABC este un triunghi și dacă $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$ atunci $A'B'C'$ este un triunghi asemenea cu triunghiul ABC.

4. Dacă C este un cerc de rază R, atunci $T(C)$ este un cerc de rază $|k|R$ și centrele cercurilor C, $T(C)$ sînt coliniare cu O. Mai mult, prin O trec două tangente comune ale cercurilor C, $T(C)$, dacă O este exterior cercului C.

5. Fiind date două cercuri exterioare C, C' de centre $S \neq S'$, există în general două omotetii T, T' astfel ca $C' = T(C) = T'(C)$. Centrele acestor omotetii se obțin considerînd doi diametri paraleli $|AB|$, $|A'B'|$ în cele două cercuri și punînd $\{O\} = AA' \cap BB'$, $\{O'\} = AB' \cap A'B$. Avem $O \in SS', O' \in SS'$.

6. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ cu $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ și $BC \parallel B'C'$, există o omotetie T astfel ca $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$?

B. Inversiuni

(pentru cercurile de elevi)

Presupunem că în planul p a fost ales un segment etalon m; putem atunci considera distanțele între puncte, lungimile segmentelor, normele vectorilor și produsele scalare ale perechilor de vectori.

Fixăm în planul p un punct O și alegem un număr real $k \neq 0$.

Definiție. **Se numește inversiune de pol O și putere k, acea transformare $T: p - \{O\} \to p - \{O\}$, care asociază fiecărui punct $P \neq O$ punctul $P' \in OP$, astfel ca $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = k$.** Pentru $k < 0$, avem $O \in |PP'|$. Pentru $k > 0$, avem $P \in |OP'|$ sau $P' \in |OP|$, după cum $d(O, P)^2$ este mai mic decît k sau mai mare decît k. Pentru $d(O, P)^2 = k$, avem $P' = P$.

Deci pentru $k > 0$, punctele cercului de centru O și rază $R = \sqrt{k}$ sînt invariante, față de inversiunea considerată.

De asemenea, dacă avem un cerc C, astfel ca puterea cu semn a lui O față de cercul C să fie egală cu k, atunci $T(C) = C$, dar în general, punctele cercului C nu sînt invariante.

Proprietăți. 1. Fie C, C' două cercuri de centre $Q, Q', Q \neq Q'$ și fie $O \in QQ'$. secantă variabilă dusă prin O taie cercurile C, C' în punctele A, $B \in C$ și A', $B' \in C'$, astfel ca $B \in |AA'|$ și $B' \in |AA'|$. În ce caz produsele scalare $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'}$ sînt constante și egale între ele?

2. Fie C un cerc, de centru $Q, O \in C$ și fie d o dreaptă perpendiculară pe dreapta OQ, $O \notin d \cdot O$ secantă variabilă dusă prin O taie cercul C într-un punct $M \neq O$ și dreapta d într-un punct M'. Să se arate că produsul scalar $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$ este constant.

3. Să se arate că dacă T este o inversiune și dacă d este o dreaptă, atunci $T(d)$ este o dreaptă sau un cerc, după cum $O \in d$ sau $O \notin d$.

4. Dacă T este o inversiune și dacă C este un cerc, atunci $T(C)$ este o dreaptă sau un cerc, după cum $O \in C$ sau $O \notin C$.

5. Dacă T, T' sînt inversiuni de pol O și dacă H, H' sînt omotetii de centru O, atunci $T \circ T'$, $H \circ H'$ sînt omotetii, iar $T \circ H$ este o inversiune. Să se indice în fiecare caz polul, centrul, raportul și puterea.

10. Izometrii ale spațiului

Simetria față de un punct. Fiind dat un punct O, simetria față de O este transformarea care asociază fiecărui punct P punctul P' pentru care $\overrightarrow{OP'} \sim -\overrightarrow{OP}$. Dacă $P \neq O$, avem $P' \neq O$ și $O \in |PP'|$.

Dacă alegem un reper cartezian ortonormat $R = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ cu originea în O și dacă punctul P are coordonatele x, y, z, atunci punctul P' va avea coordonatele, (fig. VIII.16):

$$x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z.$$

Fiind dat un al doilea punct $Q(p, q, r)$, simetricul lui Q va fi punctul $Q'(-p, -q, -r)$ și avem

$$d(P', Q')^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2 = d(P, Q)^2$$

Deci $d(P', Q') = d(P, Q)$. Punctele P, Q fiind arbitrare, rezultă că simetria față de punctul O este o izometrie.

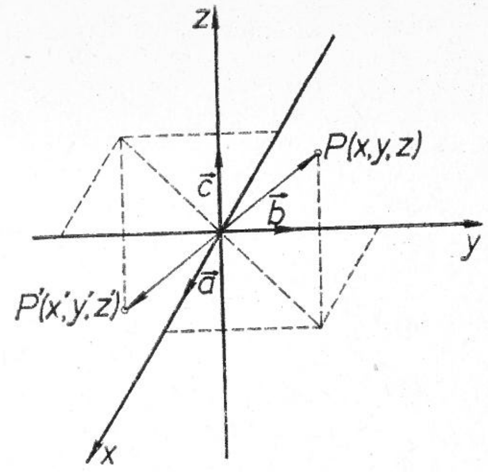


Fig. VIII.16

Simetria față de o dreaptă. Fiind dată o dreaptă d, simetria față de dreapta d asociază fiecărui punct P punctul P' astfel încît: $P' = P$ dacă $P \in d$; dacă $P \notin d$, dreapta d este perpendiculară pe dreapta PP' în mijlocul M al segmentului $|PP'|$ (fig. VIII.17).

Să alegem reperul R astfel ca $d = OA$. În acest caz, simetria față de dreapta d va asocia fiecărui punct $P(x, y, z)$ punctul $P'(x, -y, -z)$ (fig. VIII.18). Se verifică ușor că dacă P și Q sînt puncte oarecare, atunci avem

$$d(P', Q') = d(P, Q).$$

deci simetria față de orice dreaptă este o izometrie.

Simetria față de un plan. Fie p un plan. Simetria față de planul p este transformarea care asociază fiecărui punct P punctul P' definit astfel: $P' = P$

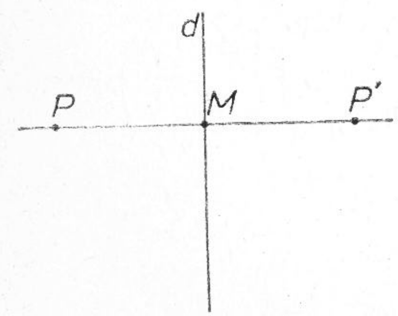


Fig. VIII.17

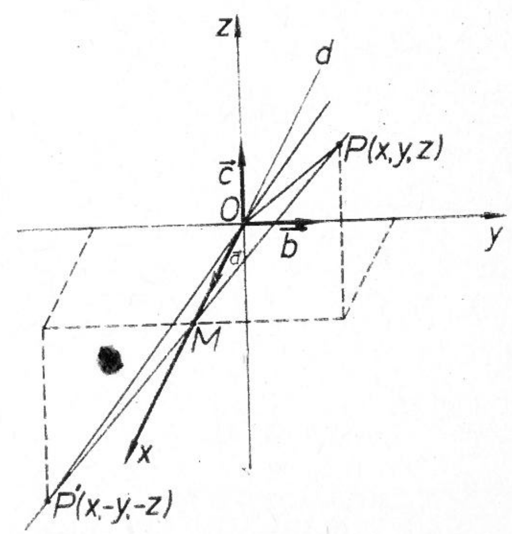


Fig. VIII.18

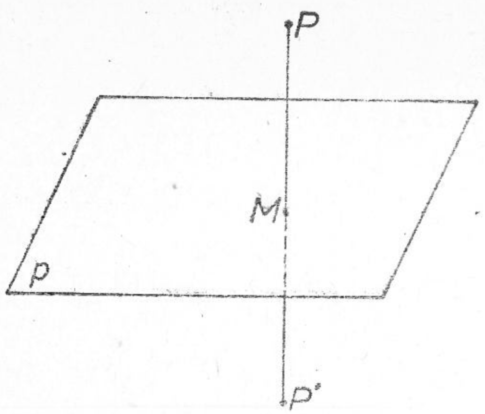


Fig. VIII.19

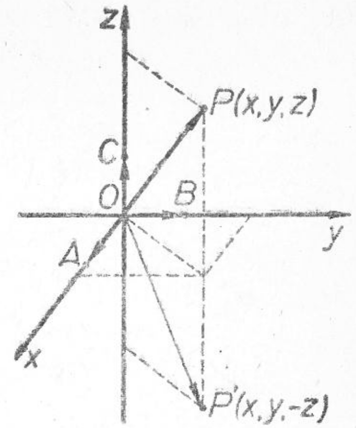


Fig. VIII.20

dacă $P \in p$; planul p este planul mediator al segmentului $[PP']$, dacă $P \notin p$, (fig. VIII.19).

Dacă alegem reperul R astfel ca $p = (OAB)$, atunci simetria față de planul p va asocia unui punct $P(x, y, z)$ punctul $P'(x, y, -z)$. Se verifică ușor că această transformare este o izometrie, (fig. VIII.20).

Exerciții. *Să se arate că simetria față de un plan este o izometrie.*

Translații în spațiu. Fie $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ un vector arbitrar. Acest vector definește o transformare în spațiu, numită *translație* de vector $\overrightarrow{MN}$. Definiția acestei translații este analoagă definiției date pentru plan:

Fiind dat un punct oarecare P, translația de vector $\overrightarrow{MN}$ asociază punctului P acel punct P', pentru care avem $\overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{MN}$.

Dacă alegem reperul R astfel ca $O = M$ și $N \in OA$, și dacă notăm prin $P'(x', y', z')$ imaginea punctului $P(x, y, z)$ prin translația de vector $\overrightarrow{MN}$, atunci avem relația $\overrightarrow{PP'} \sim \overrightarrow{MN}$. Aceasta înseamnă că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{PP'}$ au componentele scalare egale două cîte două. Componentele scalare ale lui $\overrightarrow{MN}$ sînt de forma $(h, 0, 0)$, iar componentele scalare ale vectorului $\overrightarrow{PP'}$ sînt $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$. Avem deci $x' - x = h$, $y' - y = 0$ și $z' - z = 0$, deci

$$x' = x + h,\quad y' = y,\quad z' = z.$$

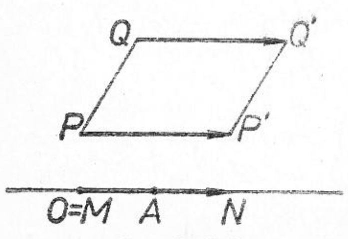


Fig. VIII.21

Dacă avem un al doilea punct Q și dacă $\overrightarrow{QQ'} \sim \overrightarrow{MN}$, atunci $\overrightarrow{QQ'} \sim \overrightarrow{PP'}$, deci $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{P'Q'}$. Aceasta înseamnă că $d(P', Q') = d(P, Q)$, deci translația de vector $\overrightarrow{MN}$ este o izometrie, (fig. VIII.21).

Rotații în spațiu. Se numește *rotație proprie* în spațiu orice izometrie care admite o singură dreaptă de puncte fixe. O rotație oarecare este fie transformarea identică, fie o *rotație proprie*. Dreapta de puncte fixe ale unei rotații proprii se numește *axa de rotație*.

Exemplu. Fie p, q *două plane distincte, avînd ca intersecție o dreaptă,* d. *Fie* S *și* T *simetriile față de cele două plane. Compunerea* $S \circ T$ *este o rotație de axă* d.

Exerciții. Să se arate că produsul a două simetrii față de două plane secante p, q este o rotație de axă $p \cap q$. Să se mai arate că dacă planele p, q sînt perpendiculare, atunci produsul celor două simetrii este o simetrie față de dreapta $p \cap q$.

Produsul dintre o rotație proprie R și o translație de-a lungul axei lui R este o izometrie, care poartă numele de *rototranslație*.

Fie T o rotație de axă d. Să alegem un reper cartezian ortonormat $R = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ avînd originea $O \in d$ și punctul $C \in d$, unde $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Pentru un punct $M(x, y, z)$ avem

(1) $$\overrightarrow{OM} \sim x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Fie $M' = T(M)$, $M'(x', y', z')$. Atunci

(2) $$\overrightarrow{OM'} \sim x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}.$$

Din $P \in d$ și $C \in d$ rezultă $T(O) = O$ și $T(C) = C$, deci avem și

$$T(\vec{c}) = \vec{c}.$$

Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ fiind perpendiculari pe axa d, rezultă că vectorii

$$\vec{a}' = T(\vec{a}),\quad \vec{b}' = T(\vec{b})$$

sînt perpendiculari pe axa d. Dacă $A' = T(A)$ și $B' = T(B)$, atunci (fig. VIII.22)

(3) $\vec{a}' = \overrightarrow{OA'}$, $\vec{b}' = \overrightarrow{OB'}$.

Rezultă că punctele A', B' aparțin planului (OAB). Vectorii $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ sînt unitari și ortogonali, deci sînt de forma

(4) $\vec{a}' \sim \vec{a}\cos u + \vec{b}\sin u$,

$\vec{b}' \sim \vec{a}\cos v + \vec{b}\sin v$,

unde $\cos u \cos v + \sin u \sin v = 0$. Ultima relație este echivalentă cu

$$\cos(u - v) = 0,$$

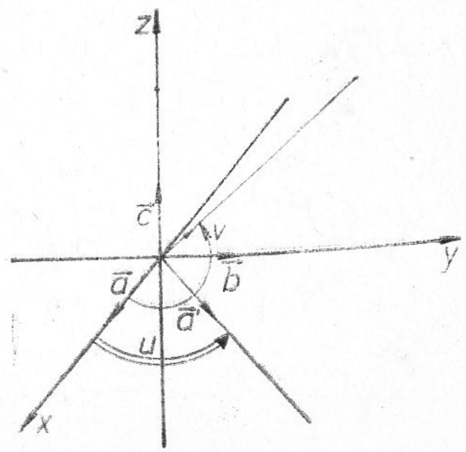


Fig. VIII.22

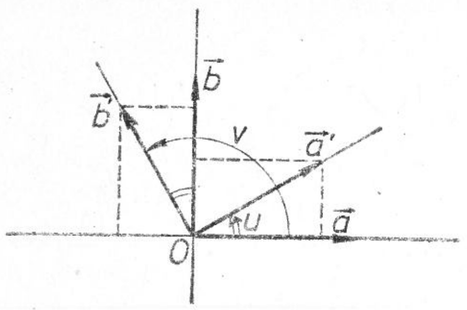


Fig. VIII.23

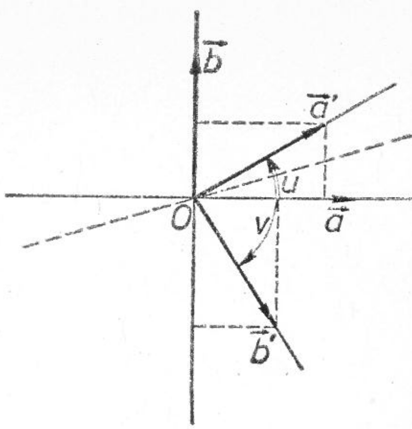


Fig. VIII.24

deci avem $v - u = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Formulele (4) rămîn valabile, dacă scădem din v numărul $2k\pi$. Deci putem presupune că avem

(5) $$v = u + \frac{\pi}{2} \text{ sau } v = u - \frac{\pi}{2}.$$

În cazul $v = u + \frac{\pi}{2}$, formulele (4) devin (fig. VIII.23):

(6) $$\vec{a}' = +\vec{a}\cos u + \vec{b}\sin u,\ \vec{b}' = -\vec{a}\sin u - \vec{b}\cos u$$

iar în cazul $v = u - \frac{\pi}{2}$, obținem (fig. VIII.24):

(7) $$\vec{a}' = \vec{a}\cos u + \vec{b}\sin u,\ \vec{b}' = \vec{a}\sin u - \vec{b}\cos u.$$

Formulele (3) și (6) dau

(8) $$\overrightarrow{OM'} = T(\overrightarrow{OM}) = x\vec{a}' + y\vec{b}' + z\vec{c}' =$$
$$= x(\cos u\vec{a} + \sin u\vec{b}) + y(-\sin u\vec{a} + \cos u\vec{b}) + z\vec{c} =$$
$$= (x\cos u - y\sin u)\vec{a} + (x\sin u + y\cos u)\vec{b} + z\vec{c}.$$

Comparînd cu relația (2), obținem formulele care definesc coordonatele punctului $M' = T(M)$ în funcție de coordonatele punctului M:

(9) $$x' = x\cos u - y\sin u,\ y' = x\sin u + y\cos u,\ z' = z.$$

Exerciții

1. Să se arate că formulele (9) definesc o rotație de axă OC.

2. Fie M un punct nesituat pe dreapta $d = OC$ și fie $M' = T(M)$ punctul definit de formulele (9). Să se arate că avem

$$\cos \widehat{MOM'} = \cos u.$$

3. Să se arate că o rotație T transformă un plan perpendicular pe axa rotației în el însuși.

4. Să se arate că orice rotație lasă invariant orice cerc care are centrul pe axa de rotație și se găsește într-un plan perpendicular pe axa de rotație.

5. Să se arate că transformarea definită de formulele (3) și (7) admite puncte invariante și în afara axei OC.

6. Să se arate că transformarea definită de formulele (3) și (7) este o simetrie față de un plan ce trece prin dreapta OC.

7. Să se arate că o simetrie față de un plan nu este o rotație.

8. Să se arate că orice rotație în spațiu, față de o axă d, este egală cu produsul a două simetrii față de două plane ce trec prin axa d.

(Indicație. Se consideră un punct $M \in d$, apoi punctul $M' = T(M)$; se compune rotația T cu simetria față de planul mediator al segmentului $|MM'|$ și se arată că produsul obținut este o simetrie față de un nou plan și că rotația T este produsul celor două simetrii, luate într-o anumită ordine)

11. Proprietăți ale izometriilor în spațiu

Potrivit definiției date la p. 225, o izometrie în spațiu este o aplicație $T : S \to S$, care asociază fiecărui punct $M \in S$ un punct $M' = T(M)$ astfel încît T să păstreze distanțele între puncte. Asta înseamnă că la două puncte M și N, T asociază două puncte $M' = T(M)$, $N' = T(N)$ astfel ca
$d(M', N') = d(M, N)$, (fig. VIII.25).

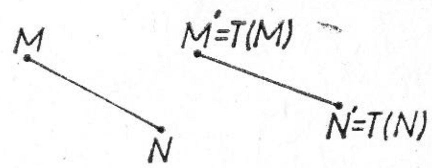


Fig. VIII.25

Exerciții

Folosind modelele de demonstrații date pentru izometrii ale unui plan, să se demonstreze că dacă T este o izometrie în spațiu, atunci:

1. T transformă trei puncte coliniare în trei puncte coliniare.

2. T transformă o dreaptă într-o dreaptă, surjectiv.

3. Dacă $B \in |AC|$ și dacă $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$, atunci $B' \in |A'C'|$.

4. Cu aceleași notații, dacă $\overrightarrow{AC} \sim x\overrightarrow{AB}$, atunci $\overrightarrow{A'C'} \sim x\overrightarrow{A'B}$.

5. Dacă $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$, $D' = T(D)$ și dacă $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, atunci $\overrightarrow{A'D'} \sim \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}$.

6. $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

7. Dacă d, d_1 sînt două drepte perpendiculare, atunci $T(d)$, $T(d_1)$ sînt două drepte perpendiculare.

(Indicație. Dacă $AB \perp BC$, atunci $d(A, B)^2 + d(B, C)^2 = d(A, C)^2$, deci $d(A', B')^2 + d(B', C')^2 = d(A', C')^2$).

Să demonstrăm proprietatea:

Imaginea printr-o izometrie a unui plan este un plan (fig. VIII.26).

Demonstrație. Fie $T : S \to S$ o izometrie și fie p un plan. Fie A, B, C trei puncte necoliniare în planul p și fie $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$ imaginile acestor puncte. Punctele A', B', C' sînt necoliniare, deoarece dacă aceste puncte ar fi coliniare, unul dintre ele s-ar găsi între celelalte două. Dacă am avea de exemplu $B' \in |A'C'|$, atunci am avea

$$d(A', B') + d(B', C') = d(A', C'),$$

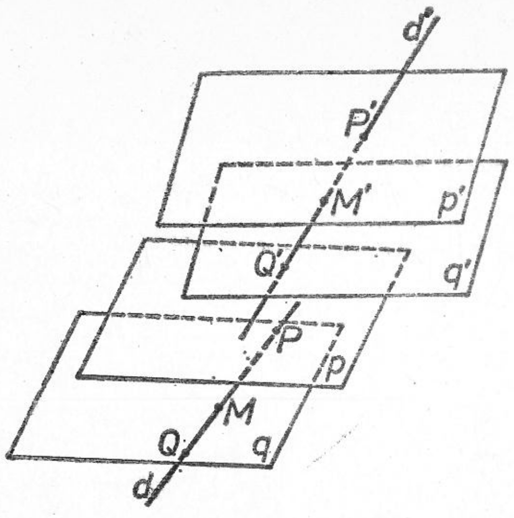


Fig. VIII.26

ceea ce implică $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, deci $B \in |AC|$, contrar ipotezei.

Punctele A', B', C' fiind necoliniare, ele aparțin unui plan unic p'. Vom arăta că $T(p) = p'$. Să arătăm la început că $T(p) \subset p'$.

Fie $M \in p$. Ducem prin M o dreaptă oarecare situată în planul p, astfel ca această dreaptă să intersecteze două din dreptele AB, BC, CA (cel puțin), în două puncte distincte, să spunem P și Q. Să presupunem că $P \in AB$ și $Q \in AC$. Avem $M \in PQ$. Imaginile acestor puncte vor avea proprietățile

$$P' \in A'B', \ Q' \in A'C', \ M' \in P'Q'.$$

Dar $A'B' \subset p'$, $A'C' \subset p'$. Rezultă $P' \in p'$ și $Q' \in p'$. Punctele P', Q' sînt distincte, deoarece izometriile sînt aplicații injective. Din $M' \in P'Q'$ rezultă $M' \in p'$; am arătat că $T(p) \subset p'$.

Pentru a arăta că $p' \subset T(p)$ procedăm la fel cum am arătat că o izometrie într-un plan transformă o dreaptă pe o dreaptă.

Exerciții

1. Să se arate că $p' \subset T(p)$.
2. Să se arate că orice izometrie transformă două plane paralele în două plane paralele.

Teoremă. Orice izometrie T a spațiului este o aplicație surjectivă.

Demonstrație. Trebuie arătat că orice punct M' este imaginea unui punct M prin izometria T. Fie p, q două plane paralele. Imaginile acestor plane prin T vor fi două plane p', q', de asemenea paralele. Prin M' să ducem o dreaptă d' neparalelă cu p', deci nici cu q'. Fie punctele (fig. VIII.27)

$$P' \in p' \cap d', \ Q' \in q' \cap d'.$$

Din relațiile $T(p) = p'$, $T(q) = q'$ rezultă că există puncte $P \in p$ și $Q \in q$ astfel ca $T(P) = P'$ și $Q' = T(Q)$. Pe dreaptă $d = PQ$ considerăm acel punct M, pentru care avem:

$$d(M, P) = d(M', P'), \ d(M, Q) = d(M', Q').$$

Atunci vom avea $M' = T(M)$.

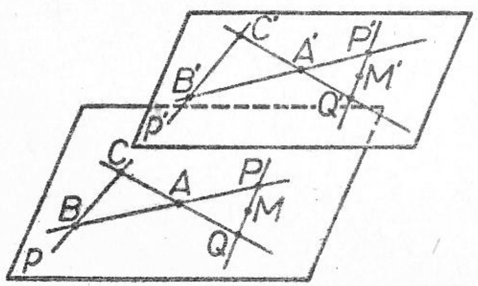


Fig. VIII.27

Exerciții

1. Să se arate că orice izometrie în spațiu transformă două plane paralele în două plane paralele.
2. Să se arate că orice izometrie transformă două drepte concurente în două drepte concurente.
3. Să se arate că orice izometrie transformă două drepte paralele în două drepte paralele.
4. Să se arate că orice izometrie transformă o dreaptă d, care este paralelă cu un plan p, într-o dreaptă d', paralelă cu planul transformat p', prin aceeași izometrie.
5. Să se arate că imaginile printr-o izometrie a două drepte necoplanare sînt două drepte necoplanare.
6. Să se arate că imaginea printr-o izometrie a unui corp convex este un corp convex.
7. Să se arate că volumul unui corp convex și volumul corpului convex transformat printr-o izometrie sînt egale.
8. Să se arate că imaginea printr-o izometrie a unei suprafețe poliedrale regulate este o suprafață poliedrală regulată.

12. Proprietățile rotațiilor axiale

Fie T o rotație în spațiu față de dreapta d. Atunci T este o izometrie, ce admite fiecare punct al dreptei d ca punct invariant. Deci

$$M \in d \Rightarrow T(M) = M.$$

Fie p un plan perpendicular pe dreapta d și fie $O \in d \cap p$. Atunci O este un punct invariant și $T(p)$ va fi un plan p' ce trece prin O.

Dar orice izometrie păstrează relațiile de perpendicularitate. De exemplu, dacă M este un punct al dreptei d, diferit de O și dacă $A \in p$, atunci triunghiul MOA este dreptunghic în O, deci avem (fig. VIII.28)

$$d(M, O)^2 + d(O, A)^2 = d(M, A')^2.$$

Notînd $A' = T(A)$, din $M' = T(M) = M$ și $O' = T(O)$ rezultă

$$d(M, O)^2 + d(O, A')^2 = d(M, A')^2,$$

deci avem $OA' \perp OM$ sau $OA' \perp d$. Aceasta înseamnă că dreapta d este perpendiculară în O pe planul p', care conține toate punctele $A' \in T(p)$. Rezultă $p' = p$. Deci:

Dacă T este o rotație de axă d, atunci orice plan perpendicular pe axa de rotație este invariant prin T.

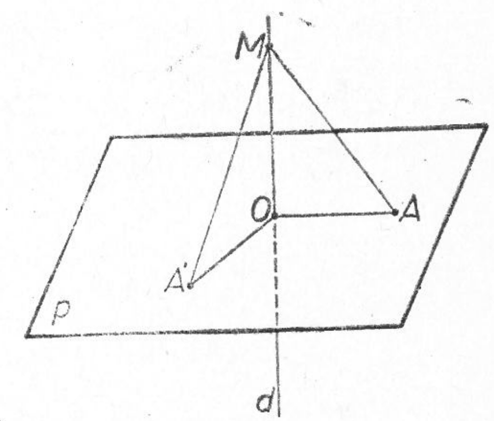


Fig. VIII.28

Exercițiu. Să se arate că rotația T induce în fiecare plan p, perpendicular pe axa de rotație, o rotație în acel plan, centrul acestei rotații fiind punctul de intersecție a axei cu planul.

Capitolul

IX

Suprafețe de rotație și corpuri de rotație

1. Definiții

Fie M o mulțime de puncte în spațiu și fie d o dreaptă. Se spune că mulțimea M admite dreapta d ca *axă de rotație* dacă, oricare ar fi punctul $P \in M$ și oricare ar fi rotația T de axă d, avem $T(P) \in M$. Aceasta înseamnă că mulțimea M este invariantă față de toate rotațiile de axă d.

Dacă M este o suprafață și dacă această suprafață admite o axă de rotație, se spune că M este o *suprafață de rotație*.

Dacă M este un solid și dacă acest solid admite o axă de rotație, atunci se spune că M este un *corp de rotație*.

Exemple. 1. Fie d o dreaptă și fie C un cerc situat într-un plan p, perpendicular pe dreapta d. Să presupunem că centrul cercului C se găsește pe dreapta d. În acest caz, cercul C admite dreapta d ca axă de rotație (fig. IX.1).

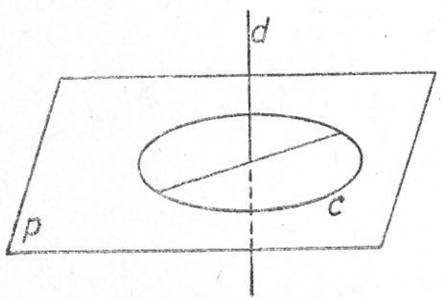


Fig. IX.1

2. Orice mulțime de puncte situate pe dreapta d admite această dreaptă ca axă de rotație.

3. Orice reuniune de cercuri, situate în plane perpendiculare pe o dreaptă d și avînd centrele pe această dreaptă, este o mulțime ce admite d ca axă de rotație (fig. IX.2).

4. Fie $[AB]$ un segment avînd suportul AB paralel cu dreapta d. Fie S reuniunea tuturor cercurilor care se găsesc în plane perpendiculare pe dreapta d, care au centrele pe d și care trec prin cîte un punct al segmentului $[AB]$ (fig. IX.3). S este o suprafață de rotație. Suprafețele de acest fel se numesc *cilindri de rotație*. Dreapta d se numește *axa cilindrului S*. Rotațiile de axă d transformă segmentul $[AB]$ în segmente congruente și paralele cu $[AB]$.

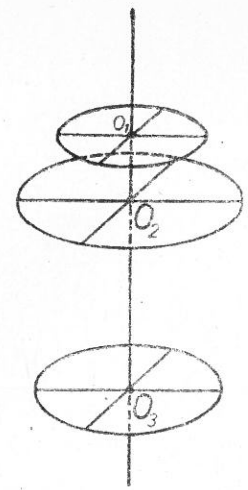


Fig. IX.2

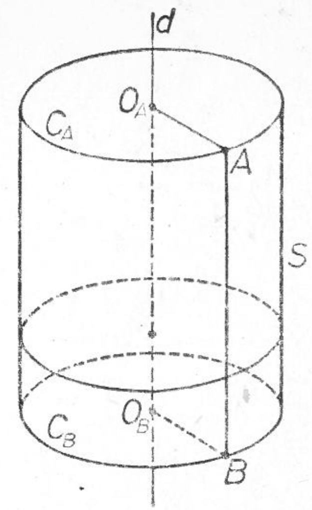


Fig. IX.3

Rotațiile de axă d transformă punctul A în diferitele puncte ale unui cerc C_A, situate în planul dus prin A, perpendicular pe d și ele transformă punctul B în diferitele puncte ale unui cerc C_B, situat în planul dus prin B perpendicular pe dreapta d. Cercurile C_A, C_B au razele egale și se găsesc în plane paralele. Aceste cercuri se numesc *baze* ale cilindrului S.

Segmentul $[AB]$ și toate segmentele care se obțin din acesta aplicînd toate rotațiile de axă d se numesc *generatoare* ale cilindrului S.

Generatoarele unui cilindru de rotație sînt segmente închise perpendiculare pe planele celor două baze. Intersecția unui cilindru de rotație cu un plan perpendicular pe axa de rotație este un cerc congruent cu C_A.

5. Fie $[AB]$ un segment închis avînd extremitatea A situată pe dreapta d și avînd $B \not\in d$. Avem $d \cap AB = \{A\}$.

Să convenim să notăm prin C_M cercul care este situat într-un plan perpendicular pe dreapta d, care are centrul pe această dreaptă și care trece prin punctul M (fig. IX.4).

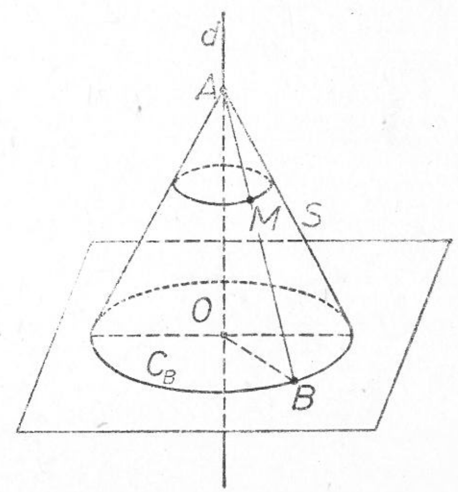


Fig. IX.4

Fie S reuniunea tuturor cercurilor C_M cu $M \in [AB]$, a cercului C_B și a punctului A. S este o suprafață de rotație. O astfel de suprafață de rotație se numește *con de rotație*.

Punctul A se numește *vîrful* conului, iar cercul C_B se numește *baza* conului.

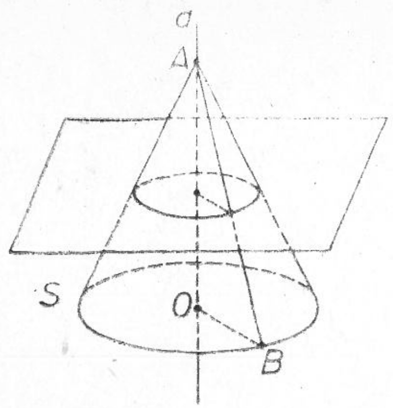


Fig. IX.5

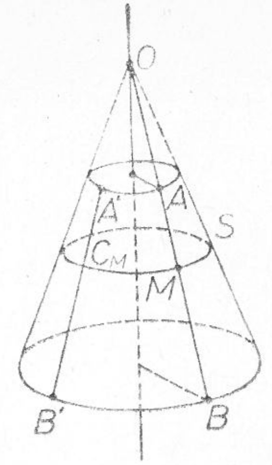


Fig. IX.6

Segmentele ce se obțin din $[AB]$ aplicînd diferitele rotații de axă d se numesc *generatoarele* conului S.

Exercițiu

Să se arate că intersecția conului S cu un plan perpendicular pe dreapta d este un cerc avînd centrul pe d (fig. IX. 5.)

6. Fie $[AB]$ un segment închis, disjunct de dreapta d, dar avînd suportul AB secant cu d, într-un punct O, ($O \in d \cap AB$, $O \notin [AB]$).

Suprafața S egală cu reuniunea tuturor cercurilor C_M, care trec prin punctele $M \in [AB]$, se numește *trunchi de con* (de rotație) (fig. IX.6).

Trunchiul de con S este generat de segmentul $[AB]$, cînd acest segment se rotește în jurul axei d. Se spune că segmentele $[A'B']$, care se obțin din $[AB]$ aplicînd toate rotațiile de axă d, constituie *generatoarele* trunchiului de con S.

Trunchiul de con S este inclus în conul de axă d și avînd ca generatoare segmentul $[OB]$, dacă presupunem că $A \in\ ]OB[$.

Exercițiu

Să se arate că prin rotația unui segment $[AB]$ în jurul unei drepte, $d \neq AB$, care trece printr-un punct $M \in\ ]AB[$, se obține o suprafață, care se descompune în reuniunea a două conuri de rotație (fig. IX. 7).

7. *Sfera.* Fie C un cerc avînd centrul O situat pe o dreaptă d coplanară cu cercul C (fig. IX.8). Cercul C intersectează dreapta d în două puncte A și B, astfel încît $[AB]$ este un diametru al cercului C.

Să considerăm reuniunea tuturor cercurilor C_M, cu M parcurgînd unul din arcele deschise limitate pe cercul C de punctele A și B. Să adăugăm acestei reuniuni punctele A și B. Obținem atunci o suprafață de rotație. *Această suprafață este o sferă.*

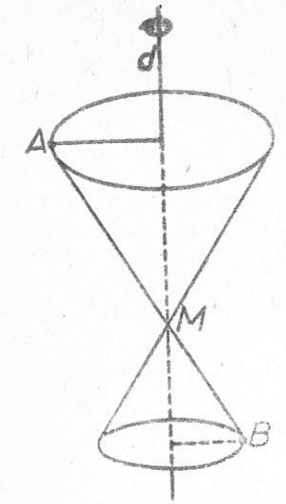


Fig. IX.7

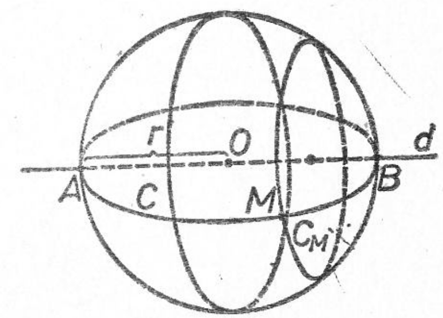


Fig. IX.8

Definiție. Fie O un punct în spațiu și fie r un număr real pozitiv. **Se numește sferă de centru O și de rază r, mulțimea tuturor punctelor P din spațiu, pentru care $d(O, P) = r$.**

Notînd prin $S(O, r)$ sfera de centru O și rază r, avem

$$S(O, r) = \{P;\ d(O, P) = r\}.$$

Să arătăm că suprafața S construită mai sus, cu ajutorul cercului C, este o sferă, anume este sfera de centru O și de rază r, egală cu raza cercului C.

Trebuie să demonstrăm că avem relațiile de incluziune

$$S \subset S(O, r),\ S(O, r) \subset S. \qquad (1)$$

Dacă $P \in S$, punctul P se obține dintr-un punct $M \in C$ printr-o rotație T de axă d. Din $M \in C$ rezultă $d(O, M) = r$. Din $P = T(M)$ și din faptul că T este o rotație de axă $d \ni O$, rezultă $d(O, P) = d(O, M) = r$. Deci $P \in S(O, r)$ și $S \subset S(O, r)$ (fig. IX.9).

Pentru a demonstra a doua relație (1) (fig. IX.10), fie Q un punct oarecare al sferei $S(O, r)$. Avem atunci $d(O, Q) = r$. Să presupunem că $Q \neq A$ și $Q \neq B$.

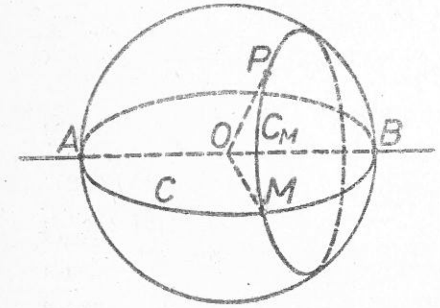


Fig. IX9

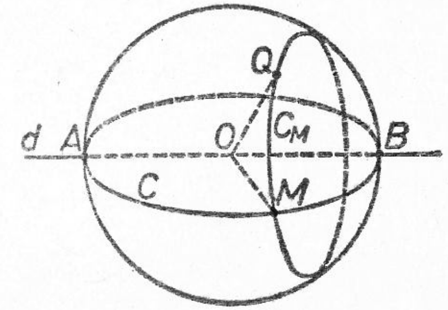


Fig. IX.10

Să considerăm cercul C_Q. Acest cerc intersectează planul p, în care se găsește cercul C, într-un punct M. Avem $d(O, M) = d(O, Q) = r$ și $M \in p$, deci $M \in C$. Atunci avem $C_M = C_Q$ și $Q \in C_M$. Deci relația $Q \in S(O, r)$, $Q \neq A$, $Q \neq B$ implică $Q \in S$.

Dacă $Q = A$ sau $Q = B$, avem $Q \in S$ prin felul în care am definit suprafața S. Deci am demonstrat că, într-adevăr, suprafața S este o sferă.

Putem formula rezultatul stabilit în modul următor:

Locul geometric dat de rotația unui cerc de centru O și rază R, în jurul unui diametru al acelui cerc, este o sferă, avînd centrul O și raza R.

2. Proprietăți ale sferelor

Am definit sfera $S(O, r)$ de centru O și rază r ca fiind locul geometric al punctelor P din spațiu, pentru care $d(O, P) = r$.

Mulțimea punctelor M, situată la distanță de centrul O mai mică decît raza r, se numește *interiorul sferei*:

$$\text{Int } S(O, r) = \{M;\ d(O, M) < r\}.$$

Mulțimea

$$D(O, r) = S(O, r) \cup \text{Int } S(O, r) = \{P;\ d(O, P) \leq r\}$$

se numește *corp sferic* de centru O și rază r (fig. IX.11).

Mulțimea punctelor situate la distanțe de centrul O mai mari decît raza r, se numește *exteriorul sferei* S (O, r).

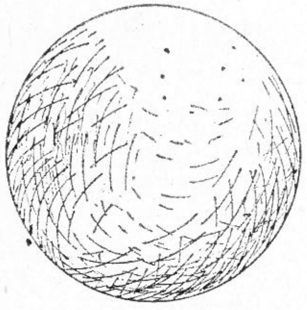


Fig. IX.11

Exerciții

1. Să se arate că interiorul sferei $S(O, r)$ și discul $D(O,r)$ sînt mulțimi convexe.
2. Să se arate că intersecția unei sfere cu o dreaptă care trece prin centrul acelei sfere este formată din două puncte simetrice față de centru.
3. Să se arate că intersecția unei sfere de centru O cu un plan care trece prin O este un cerc de centru O și rază egală cu raza sferei.
4. Să se arate că exteriorul unei sfere nu este o mulțime convexă.
5. Să se arate că sferele nu sînt mulțimi convexe.
6. Să se arate că intersecția a două sfere de raze diferite, dar avînd același centru, este mulțimea vidă.
7. Să se arate că o sferă nu poate conține toate punctele unei drepte și nici toate punctele unui plan.

Intersecția unei sfere cu o dreaptă

Fie sfera $S = S(O, r)$ și fie d o dreaptă. Să notăm prin Q proiecția punctului O pe dreapta d și prin h distanța $d(O, Q)$. Deci h este distanța de la punctul O la dreapta d.

Dacă $h > r$, avem Q exterior sferei S. Fie M un punct oarecare pe dreapta d. Atunci triunghiul MQO este dreptunghic în Q și avem (fig. IX.12)

$$d(O, M) > d(O, Q) > r,$$

deci M este exterior sferei S. Deci:

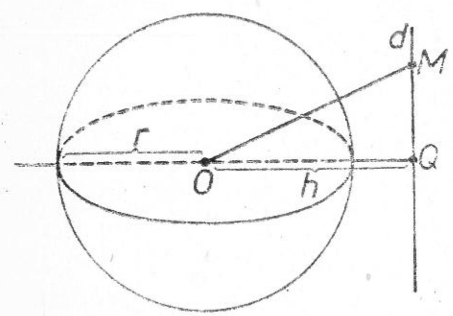


Fig. IX.12

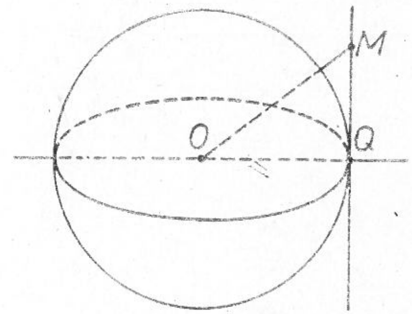


Fig. IX. 13

Dacă distanța de la centrul unei sfere S la o dreaptă d este mai mare decît raza sferei S, atunci toate punctele dreptei d sînt exterioare sferei S.

Să presupunem acuma că punctul Q aparține sferei S, deci că (fig. IX.13)

$$d(O, Q) = r.$$

În acest caz, pentru orice punct M al dreptei d, diferit de Q, avem $d(O, M) > d(O, Q) = r$, deci:

Dacă distanța de la centrul unei sfere S la o dreaptă d este egală cu raza sferei S, atunci toate punctele dreptei d, diferite de punctul Q, sînt exterioare sferei S. Punctul Q, deci proiecția centrului sferei S pe dreapta d, este singurul punct comun sferei S și dreptei d.

În cazul considerat, $d(O, Q) = r$, dreapta d este perpendiculară pe dreapta OQ, și $d \cap S = \{Q\}$. Se spune că dreapta d este tangentă sferei S în punctul Q.

Deci, *dacă o dreaptă d este tangentă unei sfere S, de centru O, într-un punct Q, atunci dreapta d este perpendiculară pe dreapta OQ și d intersectează sfera S numai în punctul Q.*

Să considerăm acuma cazul în care dreapta d este astfel, încît proiecția Q a centrului O pe dreapta d este un punct interior sferei S, adică $d(O, Q) < r$ (fig. IX.14). Fie $h = d(O, Q)$ și fie $a = \sqrt{r^2 - h^2}$. Pe dreapta d există exact

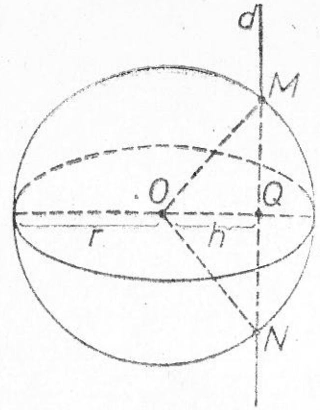


Fig. IX.14

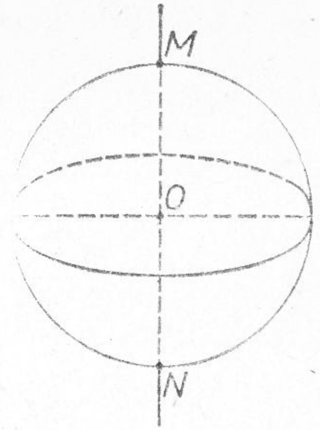


Fig. IX.15

două puncte, să spunem M și N, astfel ca $d(Q, M) = d(Q, N) = a$; pentru aceste două puncte, avem $Q \in | MN |$ și

$$d(O, M) = d(O, N) = \sqrt{h^2 + a^2} = r,$$

deci $M \in S$ și $N \in S$. Deci am arătat că:

Dacă distanța h de la centrul unei sfere S la o dreaptă d este mai mică decît raza sferei, atunci dreapta d și sfera S au exact două puncte comune. Aceste puncte sînt egal depărtate de proiecția centrului sferei pe dreapta d.

În particular, dacă $h = 0$, deci dacă dreapta d trece prin centrul sferei S, atunci $Q = O$ și punctele M, N sînt simetrice față de centrul sferei (fig. IX.15).

Segmentul $| MN |$ este atunci un diametru al sferei S.

În concluzie:

> *Intersecția unei sfere cu o dreaptă este formată din cel mult două puncte.*

Intersecția unei sfere cu un plan

Fie sfera $S = S(O, r)$ și planul p. Notăm prin Q proiecția punctului O pe planul p. Fie $h = d(O, Q)$. Distingem iarăși trei cazuri:

1. $h > r$. Pentru orice punct $M \in p$ vom avea $d(O, M) > d(O, Q)$, deci $d(O, M) > r$. Deci (fig. IX.16):

Dacă distanța de la centrul unei sfere la un plan este mai mare decît raza sferei, atunci toate punctele acelui plan sînt exterioare sferei.

2. $h = r$. În acest caz, $Q \in S$, dar orice punct M din planul p, diferit de Q, este exterior sferei S, deoarece pentru $M \in p$, $M \neq Q$ avem

$$d(O, M) > d(O, Q) = r.$$

Deci în cazul $h = r$, sfera S și planul p au un singur punct comun, anume proiecția Q a centrului O pe planul p. Planul p este perpendicular pe dreapta OQ. Se spune că p este *planul tangent* în punctul Q la sfera S (fig. IX.17).

3. $h < r$. Fie $a = \sqrt{r^2 - h^2}$. Să notăm prin $C = C(Q, a)$ cercul de centru Q și de rază a din planul p. Pentru $M \in C$, avem $d(O, M) = \sqrt{a^2 + h^2} = r$, deci $M \in S$. Rezultă că toate punctele cercului C aparțin sferei S (fig. IX.18).

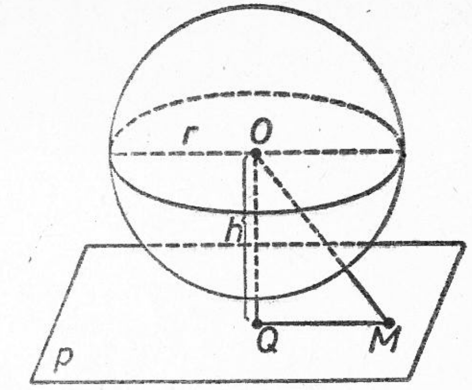


Fig. IX.16

Fie acuma N un punct comun planului p și sferei S. Avem atunci

$$d(O, N) = r,\ OQ \perp QN,\ d(Q, N)^2 = d(O, N)^2 - d(O, Q)^2 = a^2,$$

deci $N \in C$. Am arătat că:

Dacă distanța de la centrul unei sfere S la un plan p este mai mică decît raza sferei, atunci intersecția sferei S cu planul p este un cerc C. Centrul cercului C este proiecția Q a centrului sferei S pe planul p, iar raza lui C este numărul $a = \sqrt{r^2 - h^2}$, $h = d(O, Q)$.

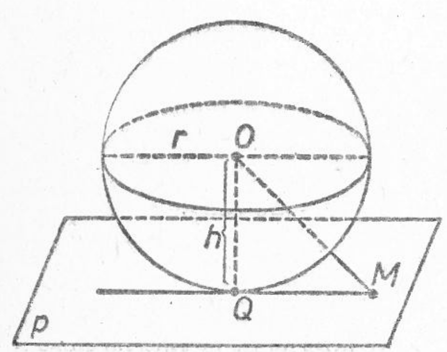


Fig. IX.17

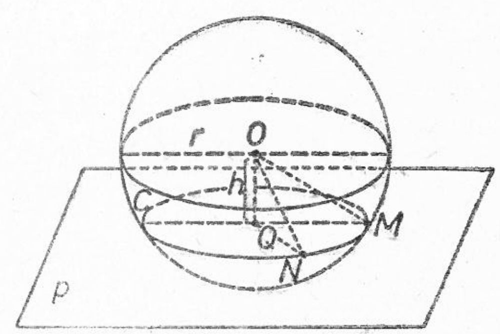


Fig. IX.18

3. Intersecția unei sfere cu un semispațiu

Fie $S = S(O, r)$ o sferă și fie p un plan la distanță $h < r$ de centrul O. Să notăm prin E unul din semispațiile închise limitate de planul p. Intersecția $S \cap E$ se numește *calotă sferică*. Dacă $O \notin E$, diferența $r - h$ dintre raza sferei și distanța h se numește *înălțimea calotei* $S \cap E$, iar cercul $p \cap S$ se numește *baza calotei* $E \cap S$ (fig. IX.19). Dacă $O \in E$, înălțimea calotei $S \cap E$ este $r + h$. Dacă $O \in p$, calota $S \cap E$ este o *semisferă*.

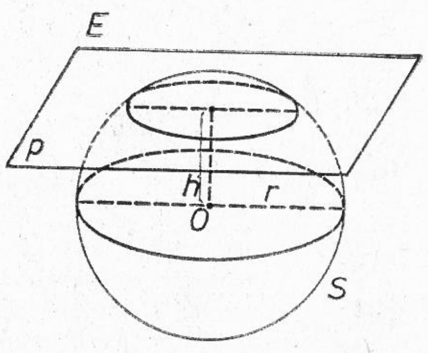


Fig. IX.19

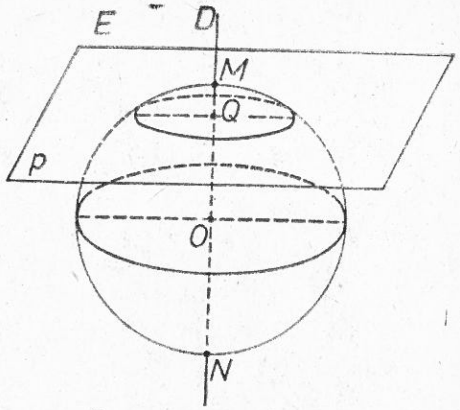


Fig. IX.20

Fie D dreapta dusă prin O perpendicular pe planul p. Dreapta D intersectează sfera S în două puncte M, N, situate de o parte și de alta a planului p. Dacă presupunem că $M \in E$, atunci $M \in S \cap E$, deci M aparține calotei considerate. Fie $\{Q\} = p \cap D$. Avem $d(Q, M) = r \pm h$ = înălțimea calotei $E \cap S$ (fig. IX.20).

Exercițiu

Să se arate că orice calotă sferică este o suprafață de rotație.

Fie acuma p și q două plane paralele și fie P respectiv Q proiecțiile punctului O pe planele p, q. Fie $h = d(O, P)$ și $k = d(O, Q)$. Vom presupune că punctele P, Q sînt interioare sferei S, deci că avem $h < r$ și $k < r$ (fig. IX.21).

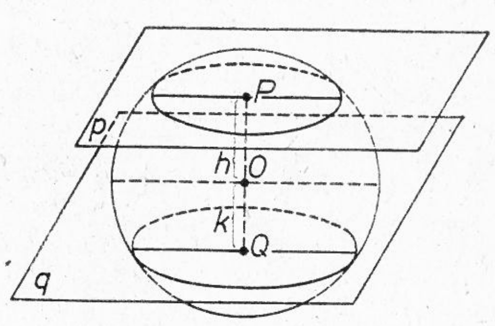


Fig. IX.21

Planele p și q limitează o *zonă*, care poate fi definită ca intersecția semispațiilor închise limitate de planele p și q, care conțin aceste plane.

Vom nota prin $[pq]$ zona limitată de planele p, q.

În ipotezele $h < r$, $k < r$, zona $[pq]$ are intersecție nevidă cu sfera S.

Definiție. Se numește zonă sferică orice intersecție nevidă a unei zone cu o sferă.

Exercițiu

Să se arate că zonele sferice sînt suprafețe de rotație.

Definiție. Se numește înălțime a zonei sferice $S \cap [pq]$ distanța dintre planele p, q.

Înălțimea zonei sferice $S \cap [pq]$ este egală cu $h + k$ dacă $O \in [pq]$ și este egală cu $|h - k|$, dacă $O \notin [pq]$.

4. Sfera circumscrisă unui tetraedru

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Fie A', B', C', D' centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCD respectiv ACD, ABD și ABC.

Să notăm prin a, b, c, d perpendicularele ridicate în punctele A', B', C', D' pe planele (BCD) respectiv (ACD), (ABD), (ABC) (fig. IX 22).

Fiecare punct al dreptei a este egal depărtat de punctele B, C, D. Planul mediator al segmentului $|AB|$ intersectează dreapta a într-un punct O. Într-adevăr, dreapta AB este secantă cu planul (BCD), în timp ce dreapta a este perpendiculară pe acest plan. Rezultă că a nu este paralelă cu planul mediator al segmentului $|AB|$. Fie atunci O punctul de intersecție al dreptei a cu planul mediator al lui $|AB|$. Atunci O este egal depărtat de punctele A, B, C, D. Rezultă că punctul O aparține fiecăreia din dreptele a, b, c, d. Fie $r = d(O, A) = d(O, B) = d(O, C) = d(O, D)$ și fie sfera $S = S(O, r)$. Sfera S va trece prin fiecare din punctele A, B, C, D. Spunem că S este *sfera circumscrisă* tetraedrului $[ABCD]$ (fig. IX. 23).

Deci:

Orice tetraedru poate fi înscris într-o sferă. Centrul acestei sfere este punctul de intersecție al planelor mediatoare ale muchiilor tetraedrului și, în același timp, punctul de intersecție al perpendicularelor ridicate pe fețele tetraedrului în centrele cercurilor circumscrise acestor fețe.

Exemplu. Am arătat că putem obține un tetraedru regulat considerînd patru din cele opt vîrfuri ale unui cub, astfel ca muchiile tetraedrului să fie diagonale ale celor șase fețe ale cubului. Sfera circumscrisă cubului va fi circumscrisă și tetraedrului, iar raza sferei, R, va fi egală cu jumătate din lungimea diagonalelor cubului, deci diagonalele cubului au lungimea $2R$. Diagonalele fețelor cubului vor avea lungimea $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$. Deci, dacă notăm prin L lungimea muchiilor unui tetraedru regulat, și prin R raza sferei circumscrise acelui tetraedru, avem

$$L = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}.$$

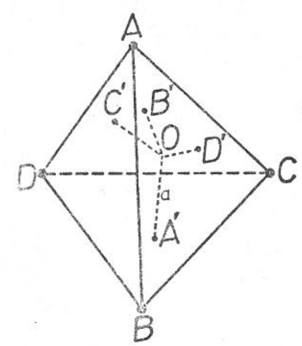


Fig. 22

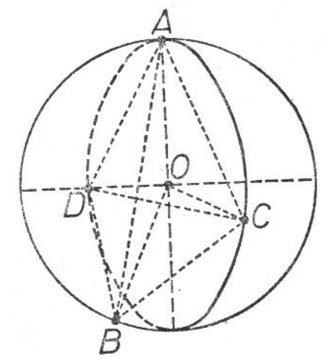


Fig. IX.23

Exercițiu

Să se determine raza r a sferei înscrise unui tetraedru în funcție de lungimea L a muchiilor sale.

$$R: r = \frac{\sqrt{6}}{12} l.$$

5. Ariile suprafețelor de rotație. Volumele corpurilor de rotație

Calculul ariei unei suprafețe de rotație, de exemplu calculul ariei unui cilindru de rotație a unui con de rotație sau a unei sfere, constituie probleme de analiză matematică, ce vor fi studiate în mod riguros în clasa a XII-a. Totuși aceste probleme au fost rezolvate înaintea apariției calculului integral, care stă la baza teoriei moderne a ariilor și volumelor. Din punct de vedere istoric, problema determinării ariei unei suprafețe sau a volumului unui corp au fost punctul de plecare a unor metode de sumare infinită, care au dat naștere calculului integral.

Ideea care a generat aceste metode este de a considera o suprafață sau un corp ca figuri limită ale unor figuri poliedrale, ale căror arii și volume pot fi determinate.

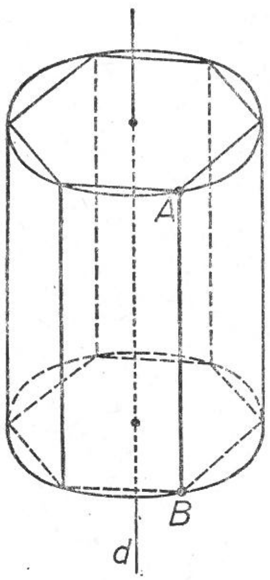


Fig. IX.24

De exemplu, un cilindru circular drept (cilindru de rotație), de axă d și avînd segmentul $[AB]$ ca generatoare, poate fi considerat ca figură limită a unei prisme, avînd segmentul $[AB]$ ca înălțime și avînd ca bază un poligon regulat înscris în cercul C_A, baza cilindrului (fig. IX. 24).

Aria laterală a unei astfel de prisme este egală cu suma ariilor dreptunghiurilor avînd laturile congruente cu segmentul $|AB|$ și cu o latură a poligonului bază. Suma acestor arii este egală cu produsul dintre perimetrul poligonului de bază și lungimea segmentului $|AB|$.

Putem presupune că aria cilindrului de rotație este egală cu produsul dintre lungimea cercului bază și lungimea G a generatoarei; deci

(1) $\boxed{\textbf{aria laterală a cilindr. de rotație} = 2\pi RG}$

unde R este distanța de la o generatoare la axa cilindrului, deci este raza cercului bază.

Volumul unei prisme drepte este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțime

deci putem admite că volumul cilindrului de rotație este egal cu produsul dintre aria bazei și lungimea generatoarei:

(2) $\boxed{\textbf{volumul cilindr. de rotație} = \pi R^2 G}$.

Aceste ipoteze vor fi verificate riguros prin considerații de analiză matematică. Ele pot fi verificate experimental.

Un con circular drept poate fi considerat ca figură limită a unei piramide, regulate drepte, avînd ca bază o suprafață poligonală cu frontiera limitată de un poligon regulat înscris în cercul de bază a conului, înălțimea piramidei fiind aceeași cu înălțimea conului (fig. IX. 25).

Aria laterală a unei piramide regulate drepte este egală cu suma ariilor triunghiurilor, ce au ca vîrf vîrful piramidei. Toate aceste triunghiuri au bazele congruente două cîte două și înălțimile din vîrful comun de asemenea congruente două cîte două. Suma ariilor acestor triunghiuri este egală cu semiprodusul dintre perimetrul bazei piramidei și înălțimea I a triunghiurilor ce formează suprafața laterală a piramidei.

Admitem că aria laterală a conului de rotație este dată de semiprodusul dintre lungimea bazei și lungimea generatoarei:

(3) $\boxed{\textbf{aria con. de rotație} = \frac{1}{2} 2\pi RG = \pi RG.}$

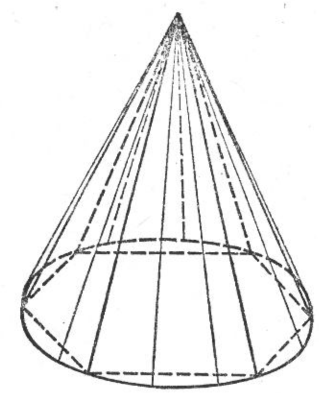


Fig. IX.25

Și această ipoteză va fi confirmată prin calculul integral. Elevii vor face verificări experimentale.

Volumul unui con de rotație poate fi definit ca fiind egal cu volumul unei piramide avînd aceeași înălțime și avînd ca bază o suprafață poliedrală de arie egală cu aria bazei conului. Deci:

(4) $\boxed{\textbf{volumul con de rotație} = \frac{1}{3} \pi R^2 h.}$

Între înălțimea h și lungimea G a generatoarelor unui con există relația

(5) $$R^2 + h^2 = G^2,$$

deoarece R, h și G sînt egale cu lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, G fiind lungimea ipotenuzei.

Aria laterală a unui trunchi de con este egală cu diferența ariilor laterale a două conuri avînd aceeași axă de rotație și același vîrf (fig. IX. 26). Notînd prin G lungimea generatoarei trunchiului de con și prin R', R'', G', G'' razele cercurilor de bază și lungimile generatoarelor celor două conuri, avem formulele

$$\frac{R'}{R''} = \frac{G'}{G''}, \quad G' - G'' = G,$$

din care rezultă

$$G' = \frac{R'G}{R' - R''}, \quad G'' = \frac{R''G}{R' - R''}.$$

Aria laterală a trunchiului de con va fi dată de formula

$$(6) \qquad \boxed{\textbf{aria l. tr. de con de rotație} = \pi R'G' - \pi R''G'' = \pi G(R' + R'').}$$

Volumul trunchiului de con este dat de formula

$$(7) \qquad \boxed{\textbf{volum tr. de con de rotație} = \frac{1}{3}\pi(R'^2h' - R''^2h''),}$$

unde h', h'' sînt înălțimile celor două conuri, care dau prin diferență trunchiul de con. Avem

$$\frac{h'}{h''} = \frac{R'}{R''}, \quad h' - h'' = h,$$

unde h este înălțimea trunchiului de con. Deci

$$h' = \frac{R'h}{R' - R''}, \quad h'' = \frac{R''h}{R' - R''},$$

astfel încît formula (7) devine

$$(8) \qquad \boxed{\textbf{vol. tr. con rot.} = \frac{1}{3}\pi h(R'^2 + R'R'' + R''^2).}$$

Pentru a obține o indicație asupra formulei ce definește aria unei sfere de rază r, să punem formula (6) sub o formă echivalentă, dar mai adecvată scopului urmărit. Să presupunem că trunchiul de con are axa d și fie $[AB]$ o generatoare a trunchiului de con (fig. IX. 27). Dreapta AB intersectează dreapta d

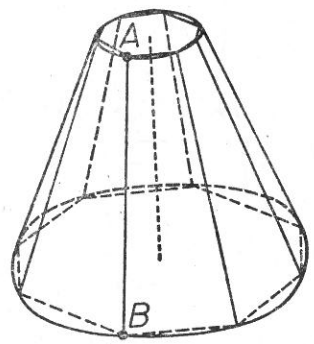


Fig. IX.26

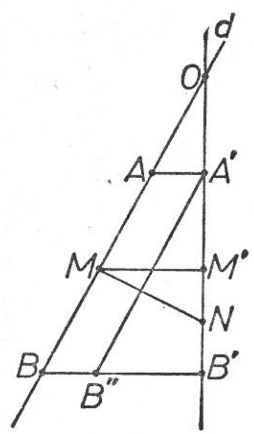


Fig. IX.27

într-un punct O. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$ și fie N punctul în care planul dus prin M perpendicular pe dreapta AB intersectează dreapta d. Fie B' proiecția punctului B pe dreapta d. Presupunem că $A \in |OB|$. Fie A' proiecția lui A pe d, și fie M' proiecția lui M pe dreapta d. Fie B'' punctul în care paralela dusă prin A' la OA intersectează dreapta BB'. Din triunghiurile asemenea $MM'N$, $A'B'B''$ rezultă

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|A'B''|}{|A'B'|} = \frac{|MN|}{|MM'|}.$$

Avem deci, dacă notăm $r = d(M, N)$, $h = d(A', B')$, $R'' = d(A, A')$, $R' = d(B, B')$, $G = d(A, B)$, $R' + R'' = 2d(M, M')$,

$$(9) \qquad G(R' + R'') = 2\,Gd(M, M') = 2rh.$$

Deci *aria laterală a trunchiului de con de rotație* este dată de formula

$$(10) \qquad \boxed{\textbf{aria lat. tr. con. rot} = 2\pi rh}$$

unde

$$(11) \qquad r = d(M, N), \quad h = d(A', B')$$

Sfera este o suprafață de rotație, care se obține rotind un cerc în jurul unuia din diametrii săi. Putem împărți sfera într-o reuniune de zone sferice, ducînd plane perpendiculare pe diametrul $|QQ'|$ (fig. IX. 28). Fiecare din aceste zone poate fi aproximată printr-un trunchi de con; pentru toate trunchiurile de con astfel obținute, distanța $r = d(M, N)$ din formula (10) este egală cu raza sferei considerate. Aplicînd formula (10) fiecăruia din aceste trunchiuri de con și adunînd numerele astfel obținute, obținem, după ce am dat r factor comun,

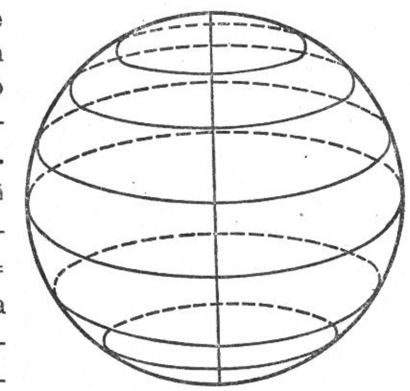


Fig. IX.28

$$\text{suma ariilor lat. ale tr. de con} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2.$$

Putem admite că aria sferei de rază r este dată de această sumă, deci

$$(12) \qquad \boxed{\textbf{aria sferei de rază } r = 4\pi r^2}$$

Dacă vrem să calculăm aria unei zone sferice de înălțime h, obținem prin considerații analoage,

$$(13) \qquad \boxed{\textbf{aria zonei sferice de rază } r \textbf{ și înălț. } h = 2\pi rh.}$$

În particular, formula (13) dă aria unei calote sferice:

$$\boxed{\text{aria calotei sferice de rază } r \text{ și înălț. } h = 2\pi r h.} \tag{14}$$

Volumul corpului sferic de rază r. Un disc de centru O și de rază r poate fi asimilat cu o reuniune de piramide avînd vîrful comun O, aceeași înălțime r și avînd ca sumă a ariilor bazelor aria sferei de rază r, care limitează discul considerat. Deci este natural să admitem formula

$$\boxed{\text{volumul corpului sferic de rază } r = \frac{4\pi}{3} r^3.} \tag{15}$$

Fie S o sferă de centru O și de rază r și fie $Z \subset S$ o zonă sferică limitată de planele p și q. Reuniunea segmentelor $[OM]$, cînd punctul M descrie zona sferică Z, se numește *sector sferic de bază Z.*

Fie h, înălțimea zonei Z. Atunci sectorul sferic de bază Z este echivalent, ca volum, cu o piramidă avînd aria bazei egală cu $2\pi rh$ și înălțimea r. Deci:

Volumul unui sector sferic de bază Z este egal cu

$$V = \frac{2\pi r^2 h}{3}.$$

Exercițiu

Fie Z o zonă sferică, definită pe sfera S de rază r de planele paralele p, q, situate la distanța h, astfel ca cele două plane să intersecteze sfera S. Să se determine volumul corpului limitat de planele p, q și de sfera S.

Capitolul X

Probleme recapitulative

A. Geometrie

1. Fie D', D'' intersecțiile bisectoarelor interioară și exterioară, ce pleacă din vîrful A al triunghiului ABC, cu dreapta BC. Fie B', B'' punctele definite prin relațiile $B' \in |AC$. $B'' \in AC$, $|AB'| \equiv |AB''| \equiv |AB|$, $A \in |B'B''|$. Să se arate că $BB' \parallel AD''$ și $BB'' \parallel AD'$,

2. Să se arate că, în orice triunghi bisectoarele a două unghiuri exterioare sînt concurente cu o bisectoare interioară.

3. Fie M mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ABC, $AB \perp AC$. Să se arate că $|MA| \equiv |MB| \equiv |MC|$.

4. Să se arate că două unghiuri, care au laturile paralele, sînt fie congruente, fie unul este congruent cu un suplement al celuilalt.

5. Să se arate că două triunghiuri cu laturile paralele cîte două sînt asemenea.

6. Fie $ABCD$ un paralelogram și fie punctele $P \in |AB|$, $R \in |BC|$, $Q \in |CD|$, $S \in |DA|$ alese astfel ca $|AP| \equiv |CQ|$ și $|BR| \equiv |DS|$. Să se arate că $PRQS$ este un paralelogram.

7. Fie ABC, AMN două triunghiuri echilaterale într-un plan p. Să se arate că avem $|BN| \equiv |CM|$ sau $|BM| \equiv |CN|$. Să se deducă că segmentele $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$ sînt congruente cu laturile unui triunghi, eventual degenerat, deci avînd vîrfurile coliniare. (D. Pompeiu).

8. Fie A, B, C trei puncte necoliniare și fie punctele A', B', C' astfel ca $\overrightarrow{BA'} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = k \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, $k \neq 0$. Să se arate că pentru orice punct M din planul punctelor A, B, C avem

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

și să se deducă că triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au același centru de greutate (Pappus).

9. Fie M, N, P mijloacele segmentelor $|BC|$ respectiv $|CA|$, $|AB|$. Să se arate că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

10. Fie a, b, c, d patru numere pozitive astfel ca

$$a < b + c + d, b < c + d + a, c < a + b + d, d < a + b + c.$$

Să se arate că există un patrulater inscriptibil $ABCD$ astfel ca $\|\overrightarrow{AB}\| = a$, $\|\overrightarrow{BC}\| = b$, $\|CD\| = c$, $\|DA\| = d$. (Ch. Sturm).

Indicație. Se va arăta că există un unghi u astfel ca

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos u = c^2 + d^2 + 2cd \cos u$$

şi se vor considera triunghiurile CDA, CBA avînd

$$\|\overrightarrow{CD}\| = c,\ \|\overrightarrow{DA}\| = d,\ \widehat{CDA} + u = 2 \text{ dr},\ \|\overrightarrow{AB}\| = a,\ \|\overrightarrow{BC}\| = b,\ \widehat{ABC} \equiv u,$$

și avînd vîrfurile B, D în semiplane opuse față de AC. Patrulaterul $ABCD$ va îndeplini condiţiile cerute.

11. Fie $\vec{v}$ un versor. Să se determine normele vectorilor $-3\vec{v}$, $-\frac{2}{5}\vec{v}$, $6\vec{v}$.

12. Știind că vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ sînt perpendiculari și că $\|\vec{u}\| = 0{,}5$ iar $\|\vec{v}\| = 2$, să se calculeze $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

13. Arătați că dacă vectorii $\vec{u}, \vec{v}$ au $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ și dacă $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ are măsura de 120°, atunci $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\|$.

14. Arătați că, oricare ar fi vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ și numerele reale p, q, avem $(p + q)\vec{u} - (p - 2q)(\vec{u} - \vec{v}) - 3q\vec{u} - p\vec{v} = -2q\vec{v}$.

15. În triunghiul dreptunghic ABC cu lungimile catetelor $\|AB\| = 3$ și $\|AC\| = 3$, se iau punctele D, E, F, G pe ipotenuza $|BC|$ astfel ca $\overrightarrow{BD} \sim \overrightarrow{DE} \sim \overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{FG} \sim \overrightarrow{GC}$. Să se calculeze norma vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG}$.

16. Dacă trei vectori au aceeași origine, normele egale și dacă suma lor este vectorul nul, atunci extremitățile celor trei vectori formează un triunghi echilateral.

17. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC și fie $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Să se determine numerele reale a, b pentru care

$$-2\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'} - 3\overrightarrow{BC} \sim a\vec{u} + b\vec{v}.$$

18. Fie O un punct în planul dreptunghiului $ABCD$. Să se arate că $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$.

19. Păstrînd notațiile din exercițiul precedent, să se arate că nu este posibil ca numerele $\|\overrightarrow{OA}\|$, $\|\overrightarrow{OB}\|$, $\|\overrightarrow{OC}\|$, $\|\overrightarrow{OD}\|$ să formeze o progresie aritmetică cu rația diferită de zero, oricare ar fi ordinea în care am lua aceste numere.

(S. Kleitsch)

20. Se consideră punctele O (0, 0), $A(a, 0)$, $B(0, b)$. Să se determine coordonatele vîrfurilor pătratelor construite pe segmentele $|OA|$, $|OB|$, $|BA|$.

21. Să se determine coordonatele vîrfurilor hexagonului regulat, avînd centrul în originea O și vîrful $A(a, 0)$.

22. Să se determine coordonatele vîrfurilor pătratului $ABCD$, avînd $A \in Ox$, $B \in Oy$, $\widehat{OAB} = 60°$ și cu vîrfurile C, D în primul cadran.

23. Se dau pe o axă punctele $A(1)$, $B(x)$, $C(3)$, $D(-1)$. Să se calculeze distanțele $d(A, B)$, $d(B, C)$, $d(A, D)$ și să se determine x astfel ca să avem

$$|AB| + |BC| = |AD|.$$

24. Fiind date patru puncte distincte pe o dreaptă, notăm

$$(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Să se arate că

$$(A, B, C, D) = (B, A, D, C) = (D, C, B, A) = (A, B, D, C)^{-1} = 1 - (A, C, B, D).$$

25. Un punct M împarte un segment $|AB|$ în raportul k. Care este raportul în care M împarte segmentul $|BA|$ și care este raportul în care punctul A împarte segmentul $|BM|$?

26. Fie A un punct pe axa Ox și fie d, d' două drepte paralele cu Oy. O dreaptă variabilă dusă prin A taie dreptele d, d' în punctele B, B'. Să se arate că paralela dusă prin B' la OB trece printr-un punct fix, situat pe axa Ox.

27. Fie într-un plan punctul A și dreptele paralele d, d'($A \notin d$, $A \notin d'$). Să se arate că există punctele $B \in d$, $C \in d'$, astfel ca triunghiul ABC să fie asemenea cu un triunghi dat. Să se studieze în special cazul în care triunghiul dat este echilateral.

28. Se dau punctele $A(1, 0)$, $B(3, 4)$, $C(0, 2)$. Să se determine coordonatele punctelor D, E, F care împart segmentele $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ respectiv în rapoartele $+1/2$, $-4/3$, $-3/2$. Să se arate apoi că punctele D, E, F sînt coliniare. Dacă D' împarte segmentul $|AB|$ în raportul $-1/2$, să se arate să dreptele AD', BE, CF sînt concurente.

29. Fie într-un plan p punctele A, B și dreapta d. Să de determine un punct $P \in d$ astfel ca suma lungimilor segmetenlor $|AP|$, $|PB|$ să fie mai mică decît suma corespunzătoare oricărei alte alegeri a punctului $P \in d$. Se va face discuția după pozițiile posibile ale punctelor A, B față de dreapta d.

30. Fie date în planul p punctele O, D, F, A astfel ca $O \notin DF$. O dreaptă d dusă prin A intersectează dreptele OD, OF în punctele M respectiv N. Să se determine poziția dreptei d astfel ca raportul $\frac{|DM|}{|FN|}$ să fie egal cu un număr dat k. (Apollonius)

31. Păstrînd notațiile din problema precedentă, să se determine poziția dreptei d astfel ca produsul $\|\overrightarrow{DM}\| \cdot \|\overrightarrow{FN}\|$ să fie egal cu un număr dat y.

(Apollonius)

32. Fie A, B, C, D patru puncte pe o dreaptă d. Să se determine pe d un punct M astfel ca $\|\overrightarrow{AM}\| \ \|\overrightarrow{BM}\| = k\ \|\overrightarrow{CM}\| \ \|\overrightarrow{DM}\|$, unde numărul k este dat.

(Apollonius)

33. Fie date punctele A, B, C și unghiurile $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$. Să se determine un punct M în planul triunghiului ABC, astfel ca $\widehat{AMB} \equiv \widehat{hk}$ și $\widehat{BMC} \equiv \widehat{mn}$.

(Snellius)

34. Fiind dat triunghiul ABC, să se determine un punct $O \in \text{Int } ABC$ astfel ca $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COA}$.

35. Fie P un poligon regulat înscris în cercul C și fie P' poligonul regulat cu număr dublu de laturi, înscris în același cerc. Fie apoi Q, Q' poligoanele regulate, care au același număr de laturi cu P respectiv P' și care sînt circumscrise cercului considerat. Fie a, A ariile poligoanelor P, Q și a', A' ariile poligoanelor P', Q'. Să se arate că

$$a'^2 = aA,\ A'(a + a') = 2aA.$$

(Grégory)

36. Fie $\widehat{hk}$ un unghi și fie $A \in \text{Int } \widehat{hk}$. Să se determine o dreaptă d, care să treacă prin A și care să taie laturile h, k în două puncte C, B, astfel ca triunghiul format de aceste puncte și de vîrful O al unghiului $\widehat{hk}$ să fie de arie dată p^2.

(Sluse)

37. Fie $ABCD$ un patrulater în planul p. Notăm $\{E\} = AB \cap CD$, $\{F\} = AD \cap BC$. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor BCE, CDF, ADE, ABF au un punct comun (punctul lui Miquel).

38. Fie M punctul lui Miquel al patrulaterului inscriptibil $ABCD$. Să se arate că punctele E, F, M sînt coliniare.

39. Fie C, C' două cercuri secante în punctele A, B şi fie D, E, F, G punctele de intersecţie ale celor două cercuri cu o secantă arbitrară. Să se arate că $\widehat{DAE} \equiv \widehat{FBG}$.

40. Fie M, N, P, Q proiecţiile unui punct de pe cercul C pe laturile unui dreptunghi înscris în acelaşi cerc. Să se arate că M este ortocentrul triunghiului NPQ.

41. Considerăm două cercuri secante în punctele P, Q. Prin P şi Q ducem două drepte d, d', care intersectează primul cerc în punctele A, A' şi al doilea cerc în punctele B, B'. Să se arate că $AA' \parallel BB'$.

42. Simetricele ortocentrului unui triunghi faţă de mijloacele laturilor se găsesc pe cercul circumscris triunghiului şi sînt diametral opuse vîrfurilor.

43. În orice triunghi, ortocentrul, centrul cercului circumscris şi centrul de greutate se găsesc pe o aceeaşi dreaptă (dreapta lui Euler).

44. Fie, C, C', C'' trei cercuri de raze egale trecînd printr-un punct M. Aceste cercuri se intersectează cîte două în alte trei puncte P, Q, R. Cercul circumscris triunghiului PQR este congruent cu cercurile C, C', C''.

(G. Ţiţeica)

45. Fie C, C' două cercuri tangente în punctul M, cu centrele O respectiv $O' \cdot O$ dreaptă d trecînd prin M taie cele două cercuri în punctele P, P'. Să se arate că dreptele OP, $O'P'$ sînt paralele.

46. Axa radicală a două cercuri exterioare care admit o tangentă comună MM' împarte segmentul limitat de punctele de tangenţă M, M' în două segmente congruente.

47. Într-un patrulater inscriptibil, bisectoarele a două unghiuri opuse intersectează cercul circumscris patrulaterului în două puncte diametral opuse.

48. Bisectoarele unghiurilor unui patrulater oarecare formează un patrulater inscriptibil.

49. În orice triunghi ABC, mijloacele laturilor, picioarele înălţimilor şi mijloacele segmentelor limitate de ortocentru şi vîrfuri se găsesc pe un acelaşi cerc (cercul lui Euler).

50. Centrul cercului lui Euler al unui triunghi ABC este mijlocul segmentului limitat de ortocentru şi de centrul cercului circumscris. Raza cercului lui Euler este jumătate din raza cercului circumscris.

51. Dacă patrulaterul $ABCD$ are laturile AB, BC, CD, DA tangente unui cerc, atunci $|AB| + |CD| \equiv |BC| + |DA|$.

(Pitot)

52. Să se determine locul geometric al mijloacelor corzilor $|AB|$ ale unui cerc C, cînd punctul A este fixat, iar B este mobil pe cerc.

53. Fie A' piciorul bisectoarei AA' a triunghiului ABC; Presupunînd că punctele A, B sînt fixe şi că punctul C descrie un cerc de centru A, să se arate că punctul A' descrie de asemenea un cerc.

54. Fie A, B, D trei puncte distincte astfel ca $B \in |AD|$. Prin B, D se duce un cerc variabil, iar prin A se duc tangentele la acest cerc. Să se determine locul geometric al punctelor de tangenţă ale acestor tangente.

55. Se spune că o figură F admite o dreaptă d ca axă de simetrie, dacă F conţine, odată cu un punct M, şi simetricul lui M faţă de d. Să se indice axele de simetrie ale unui triunghi isoscel, ale unui triunghi echilateral, ale unui trapez isoscel, ale unui romb, ale unui cerc şi ale unui poligon regulat cu un număr oarecare de vîrfuri.

56. Fie d, d' două drepte într-un plan p şi fie A, B două puncte în acel plan. Să se determine două puncte $P \in d$, $P' \in d'$, astfel ca suma lungimilor segmentelor $|AP|$, $|PP'|$, $|P'B'|$ să fie minimă, deci mai mică decît suma corespunzătoare oricărei alte alegeri a punctelor $P \in d$, $P' \in d'$.

57. Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu. Să se determine două puncte $A \in h$, $B \in k$ astfel ca segmentul $|AB|$ să fie congruent cu un segment dat $|PQ|$ şi astfel ca dreapta AB să fie paralelă cu o dreaptă dată d.

58. Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC. Să se arate că

$$2(2 \text{ dr} - \widehat{BIC}) \equiv 2 \text{ dr} - \widehat{BAC}.$$

59. Fie I un punct interior triunghiului ABC, situat pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, astfel încît să fie verificată relaţia din exerciţiul precedent. Să se arate că I este centrul cercului înscris triunghiului ABC.

60. Fie u, v, w trei unghiuri, avînd fiecare măsura mai mică decît $60°$ şi avînd suma măsurilor egală cu $120°$. Fie ABC un triunghi echilateral şi fie A', B', C' puncte exterioare triunghiului ABC, astfel ca

$$\widehat{A'BC} \equiv \widehat{A'CB} \equiv u, \ \widehat{B'CA} \equiv \widehat{B'AC} \equiv v, \ \widehat{C'AB} \equiv \widehat{C'BA} \equiv w.$$

Notăm $A'' \in B'C \cap BC'$, $B'' \in C'A \cap CA'$, $C'' \in A'B \cap AB'$. Să se arate că:

a) $|A'A$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BA'C}$.

b) A este centrul cercului înscris triunghiului $A'B''C''$. Care sînt centrele cercurilor înscrise triunghiurilor $A''B'C''$ şi $A''B''C'$?

c) Semidreptele $|A''B$, $|A''C$ împart unghiul $\widehat{B''A''C''}$ în trei unghiuri congruente, deci sînt *trisectoare* în triunghiul $A''B''C''$.

d) $\widehat{B''A''C''} \equiv 2 \text{ dr} - 3u$, $\widehat{C''B''A''} \equiv 2 \text{ dr} - 3v$, $\widehat{A''C''B''} \equiv 2 \text{ dr} - 3w$.

61. Să se arate că trisectoarele unghiurilor unui triunghi oarecare se intersectează în trei puncte, care sînt vîrfurile unui triunghi echilateral. (Teorema lui Morley).

62. Să se demonstreze o teoremă analoagă teoremei lui Morley, considerînd trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi oarecare.

63. Fie $[OABC]$ un tetraedru. Să se arate că

$$\text{aria}\,[ABC] < \text{aria}\,[OAB] + \text{aria}\,[OBC] + \text{aria}\,[OCA].$$

(*Indicaţie*. Se consideră proiecţia O' a punctului O pe planul (ABC) şi se arată că este adevărată o egalitate de forma

$$\text{aria}\,[ABC] = \pm\,\text{aria}\,[O'AB] \pm \text{aria}[O'BC] \pm \text{aria}\,[O'CA]$$

şi apoi că

$$\text{aria}[O'AB] < \text{aria}[OAB], \text{aria}[O'BC] < \text{aria}[OBC], \text{aria}[O'CA] < \text{aria}[OCA].$$

64. Să se arate că, în orice suprafaţă poliedrală, aria unei feţe este mai mică decît suma ariilor celorlalte feţe.

65. Fie M un punct pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC. Să se arate că cea mai mică dintre distanţele de la punctul M la dreptele AB, AC este mai mică decît distanţa de la punctul A la dreapta BC.

66. Fie E o mulțime finită de puncte necoliniare. Să se arate că există cel puțin o dreaptă care conține exact două puncte ale mulțimii E. (Teorema lui Sylvester.)

67. Fie M un punct interior feței $[ABC]$ a unui tetraedru $[OABC]$. Să se arate că cea mai mică din distanțele de la punctul M la planele (OAB), (OBC), (OCA) este mai mică decît distanța de la O la planul (ABC).

68. Fie E o mulțime finită de puncte necoplanare în spațiu. Să se arate că există cel puțin un plan, care să conțină exact trei puncte necoliniare ale mulțimii E.

69. Fie date două plane paralele p, p' și două drepte paralele d, d'. Să se arate că unghiul format de dreapta d cu planul p este congruent cu unghiul format de dreapta d' cu planul p'

70. Fie $[ABC]$, $[A'B'C']$ bazele unei prisme triunghiulare drepte, avînd muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ perpendiculare pe baze. Să se exprime lungimea diagonalei $|AB'|$ în funcție de lungimile muchiilor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$, $|AA'|$.

71. Presupunînd că $[ABCD]$, $[A'B'C'D']$ sînt două fețe opuse ale unui cub, avînd muchiile paralele $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$, să se arate că punctele A, C, B', D' sînt vîrfurile unui tetraedru regulat.

72. Să presupunem că două drepte, d, d' au ca proiecții ortogonale pe un plan p dreptele paralele e, e'. Se poate deduce că dreptele d, d' sînt paralele?

73. Să se arate că dacă triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au laturile paralele două cîte două, $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, atunci cele două triunghiuri sînt asemenea. Să se arate că proiecțiile ortogonale ale celor două triunghiuri pe un plan p, care nu este perpendicular pe planul (ABC), sînt două triunghiuri asemenea.

74. Se consideră trei puncte necoliniare în spațiu. Să se arate cum trebuie ales un plan de proiecție p, astfel ca proiecțiile ortogonale ale celor trei puncte să fie trei puncte coliniare.

75. Să se determine cosinusul unghiului pe care îl face o diagonală a unui cub cu o diagonală a unei fețe, cele două diagonale avînd o extremitate comună.

76. Să se calculeze raza sferei circumscrise unui tetraedru regulat, în funcție de lungimea muchiilor acestui tetraedru.

77. Să se arate că orice piramidă regulată (avînd ca bază un poligon regulat și avînd muchiile ce pleacă din vîrf congruente două cîte două) poate fi înscrisă într-o sferă. Să se calculeze raza acestei sfere în funcție de lungimile muchiilor piramidei.

78. Să se arate că pe cele trei muchii paralele ale unei prisme triunghiulare drepte se pot alege trei puncte care să fie vîrfurile unui triunghi echilateral.

79. Să se arate că două plane paralele intersectează fețele laterale ale unei suprafețe prismatice după două poligoane congruente.

80. Să se arate că două plane paralele intersectează fețele laterale ale unei suprafețe piramidale după două poligoane asemenea.

81. Să se arate că diagonalele unui paralelipiped au mijlocul comun.

82. Să se arate că diagonalele unui paralelipiped dreptunghic sînt congruente două cîte două.

83. Să se arate că pătratul lungimii unei diagonale a unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor muchiilor care au un vîrf comun.

84. Să se calculeze suma ariilor fețelor unui paralelipiped dreptunghic, cunoscînd lungimea unei diagonale d și suma lungimilor muchiilor ce pleacă dintr-un același vîrf, $s = a + b + c$.

R. $s^2 - d^2$,

85. Să se exprime suma ariilor fețelor unui cub și volumul acelui cub în funcție de lungimea d a diagonalelor acelui cub.

86. Un paralelipiped drept P are ca bază o suprafață limitată de un paralelogram. Unul din unghiurile acestui paralelogram are $60°$, iar muchiile paralelipipedului au aceeași lungime a. Să se calculeze lungimile diagonalelor acestui paralelipiped.

87. Se consideră un paralelipiped cu fețele opuse $[ABCD]$, $[A'B'C'D']$, astfel muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$ să fie perpendiculare pe planul $(ABCD)$. Știind că $d(A, B') = a$, măs $\widehat{DAB} = \alpha$, aria $[ABC'D'] = Q$ și că măsura unghiului făcut de planul (ABC') cu planul (ABC) este $90° - \alpha$, să se determine lungimile muchiilor $|AD|$, $|AA'|$

88. Un paralelipiped P are ca bază un romb $ABCD$ cu unghiul $\widehat{BAD}$ de $60°$ și muchiile $|AA'|$, $|BB'|$. $|CC'|$, $|DD'|$ formează cu planul bazei unghiuri avînd de asemenea $60°$. Planul $(AA'C)$ este perpendicular pe planul bazei. Să se arate că raportul ariilor suprafețelor $[AA'C'C]$, $[BB'D'D)$ este $\frac{3}{2}$.

89. Baza unui paralelipiped drept P este un romb avînd lungimile diagonalelor egale cu 6 și 8 (etalonul fiind 1 cm). Știind că fețele laterale au lungimile diagonalelor egale cu 13, să se determine aria totală a lui P.

90. Fie $[ABC]$, $[A'B'C']$ fețele opuse ale unei prisme triunghiulare drepte și fie M mijlocul muchiei $|CC'|$. Știind că lungimile laturilor bazei $[ABC]$ au aceeași lungime a și că planele (ABC), (ABC') formează un unghi de $45°$, să se calculeze înălțimea și aria totală a prismei.

91. Muchiile unui paralelipiped au aceeași lungime a și două muchii, ce au o extremitate comună, formează un unghi de $60°$. Să se determine aria fețelor, înălțimea și volumul paralelipipedului.

92. Un rezervor în formă de paralelipiped dreptunghic are volumul de 10 m^3, iar două din muchiile sale au lungimile de 2,5 m și 1,75 m. Să se determine lungimea celorlalte muchii.

93. Un terasament de cale ferată are lungimea de 1 km și are ca secțiune transversală un trapez isoscel. Laturile paralele ale acestui trapez au lungimile de 8 m, 14 m, iar înălțimea trapezului este de 3,2 m. Să se determine cantitatea în m^3, de pămînt necesar.

94. Un tub de fontă are secțiunea pătratică; lățimea exterioară fiind de 25 cm și grosimea pereților de 3 cm, să se determine greutatea unui metru liniar de tub (greutatea specifică a fontei se consideră de 7,3 gf/cm^3).

95. O piramidă patrulateră regulată are fețele laterale echilaterale. Să se arate că muchiile opuse în această piramidă sînt perpendiculare și să se exprime lungimea muchiilor în funcție de înălțimea h.

96. O piramidă triunghiulară cu vîrfurile V, A, B, C are $|AB| \equiv |AC|$ și $|VA| \equiv |VB| \equiv |VB| \equiv |VC| \equiv 13$ cm, $|BC| \equiv 6$ cm, aria $[ABC] = 27$ cm^2. Să se calculeze înălțimea piramidei.

97. Se consideră o piramidă patrulateră regulată și un cub, astfel încît patru din vîrfurile cubului se află în planul bazei piramidei, iar celelalte patru vîrfuri se găsesc pe muchiile laterale ale piramidei. Să se calculeze lungimea muchiilor cubului, știind că laturile bazei piramidei au lungimea a și că înălțimea piramidei este h.

98. Dacă c este un număr complex, notăm prin Tc transformarea care asociază unui punct de afix $z \in \mathbb{C}$ punctul de afix cz. Să se arate că dacă $c = ab$ atunci $Tc = Ta \circ Tb$.

99. Dacă $|a| = 1$, Ta este o rotație, iar dacă $b \in R$, Tb este o omotetie.

100. Fie $\widehat{AOB}$ un unghi ascuțit, nenul și fie S, S' simetriile față de dreptele OA respectiv OB. Să se arate că produsele $S \circ S'$, $S' \circ S$ sînt rotații distincte, de centru O și de unghi $2 \cdot \widehat{AOB}$. Sensurile celor două rotații sînt opuse.

101. Fie R o rotație a planului p cu centrul în punctul $O \in p$ și fie d o dreaptă astfel ca $O \in d \subset p$. Notăm prin S simetria față de dreapta d. Să se arate că izometriile $S' = R \circ S$, $S'' = S \circ R$ sînt simetrii față de două drepte d', d'', care conțin punctul O. Să se mai arate că

$$R = S' \circ S = S \circ S''.$$

102. Fie R, R' două rotații ale planului p, față de același centru $O \in p$. Să se arate că $R \circ R' = R' \circ R$ și că $R \circ R'$ este o rotație de centru O.

103. Fie R, R' două rotații de centre diferite O, O', într-un plan p. Fie $d = OO'$ și fie S simetria față de dreapta d. Notăm $S' = R \circ S$, $S'' = S \circ R'$. Să se arate că $R \circ R' = S' \circ S''$.

104. Să se arate că produsul a două rotații într-un plan este fie o rotație, fie o translație. Cum trebuie să fie unghiurile a două rotații, pentru ca produsul celor două rotații să fie o translație?

105. Fie R o rotație de centru O a unui plan p și fie C un cerc de centru O, în același plan. Să se arate că $R(C) = C$.

106. Fie T o translație de vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ și fie d o dreaptă paralelă cu $\vec{v}$. Notăm prin S simetria față de dreapta d. Să se arate că transformările $T' = S \circ T$; $T'' = T \circ S$ sînt simetrii față de două drepte paralele cu dreapta d și că $T = S \circ T' = T'' \circ S$.

107. Fie R, T o rotație, respectiv o translație în planul p. Să se arate că dacă rotația R este proprie, atunci produsele $R \circ T$, $T \circ R$ sînt rotații de același unghi cu R.

108. Fie în planul p punctul A și dreptele paralele d, d'. Să se construiască două puncte $B \in d$, $C \in d'$ astfel ca ABC să fie un triunghi echilateral.

109. Fie ABC un triunghi echilateral. Să se arate că există două rotații proprii, care lasă invariant acest triunghi. Produsul acestor două rotații este transformarea identică, iar pătratul fiecăreia din cele două rotații este cea de a doua rotație.

110. Care este numărul de rotații care lasă invariant un pătrat?

111. Fie G mulțimea izometriilor care lasă invariantă o figură F într-un plan p. Să se arate că dacă $T \in G$ și $T' \in G$, atunci $T \circ T' \in G$ și $T^{-1} \in$

112. Să se descrie mulțimea G din exercițiul 111, presupunînd că F este un poligon regulat cu n laturi. Se va începe prin examinarea cazurilor $n = 3, 4, 5$ și 6.

113. Să se arate că dacă F este o mulțime finită de puncte în planul p, atunci nu există nici o translație, diferită de transformarea identică, care să lase invariantă figura F.

114. Fie T o translație de vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ în planul p. Să se indice o mulțime de puncte M în planul p, astfel ca $T(M) = M$.

115. Să se arate că singurele izometrii ale unui plan p, care lasă invariant un punct $O \in p$, sînt rotațiile de centru O și simetriile față de dreptele ce trec prin O.

116. Fie H, H' două omotetii de centre, O, O' în planul p. Să se arate că produsul $H \circ H'$ este o omotetie sau o translație, după cum produsul rapoartelor celor două omotetii este diferit de 1 sau egal cu 1.

117. Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ doi vectori paraleli și de același sens într-un plan p. Să se arate că dacă normele celor doi vectori sînt diferite, atunci există o omotetie H, astfel ca $H(A) = A'$, $H(B) = B'$.

118. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri cu laturile paralele cîte două. Dacă cele două triunghiuri nu sînt congruente, atunci există o omotetie H, astfel ca $H(A) = A'$, $H(B) = B'$, $H(C) = C'$.

119. Fie ABC un triunghi. Să se construiască punctele $P \in BC$, $Q \in BC$, $M \in |AB|$ $N \in |AC|$ astfel ca $MNPQ$ să fie un pătrat.

120. Fie $ABCD$ un paralelogram deformabil cu laturile de lungimi fixe și cu vîrful A fix. Considerăm punctele $E \in BC$, $F \in |AE|$ astfel ca distanțele $d(B, E)$, $d(D, F)$ să fie constante și $F \in |DC|$. Se spune atunci că $ABCDEF$ este un *pantograf* aparat utilizat în tehnică. Să se arate că, dacă se consideră două poziții $ABCDEF$, $AB'C'D'E'F'$ ale pantografului, avem

$$\frac{|EE'|}{|FF'|} = \text{constant}.$$

Deci pantograful permite să se mărească sau să se micșoreze o figură dată într-un raport dat.

121. Fie O, A, B, A', B' cinci puncte într-un plan p astfel ca $A' \in OA$, $B' \in OB$ și $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'} \in k^2$. Să se arate că

$$\|A'B'\| \ \|OA\| \ \|OB\| = k^2 \ \|AB\|.$$

122. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Să se arate că

$$\|AC\| \ \|BD\| = \|AB\| \ \|CD\| + \|AD\| \ \|BC\|.$$

(Ptolomeu)

123. Fie $ABCDE$ un pentagon convex. Construiți figurile simetrice acestui pentagon față de dreptele BC, AC și apoi față de o dreaptă, care nu intersectează pentagonul.

124. Fie d, d', d'' trei drepte într-un plan. Să se construiască punctele $P \in d'$, $Q \in d''$ astfel ca d să fie mediatoarea segmentului $|PQ|$.

125. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și fie T, T', T'' translațiile definite de vectorii $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$. Să se arate că produsul $T \circ T' \circ T''$ este transformarea identică.

126. Produsul a două simetrii față de două puncte într-un plan este o translație.

127. Fiind date două segmente congruente $|AB|$, $|CD|$, să se arate că există o deplasare T și o antideplasare T' astfel ca

$$T(A) = T'(A) = C,\ T(B) = T'(B) = D.$$

128. Să se arate că intersecția a două sfere este fie mulțimea vidă, fie un cerc, fie o mulțime formată dintr-un singur punct.

129. Fie S o sferă și fie P un punct fix. Prin P se duce o secantă variabilă, care intersectează sfera S în două puncte A, B. Să se arate că produsul scalar $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ este constant. Să se discute semnul acestui produs în funcție de poziția punctului P față de sfera S.

130. Fie A, B două puncte distincte. Să se arate că locul geometric al punctelor M din spațiu, pentru care dreptele MA și MB sînt perpendiculare, este o sferă.

131. Fie A, B două puncte distincte. Să se determine locul geometric al punctelor M din spațiu, pentru care unghiul $\widehat{AMB}$ este congruent cu un unghi dat u.

132. Să se arate că dacă trei sfere S, S', S'' au un cerc C comun, atunci centrele celor trei sfere sînt coliniare. Să se indice dreapta care conține cele trei centre.

133. Să se arate că dacă trei sfere au centrele coliniare şi dacă au un punct comun, exterior dreptei care conţine centrele, atunci cele trei sfere au un cerc comun.

134. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care trec prin două puncte date.

135. Fie P un punct exterior unei sfere S. Să se determine locul geometric al punctelor M de pe sfera S, pentru care dreapta MP este tangentă sferei S. Să se arate că reuniunea segmentelor $|MP|$ este un con de rotaţie.

136. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor S, care sînt tangente dreptelor care conţin generatoarele unui con de rotaţie.

137. Fie S, S' două sfere avînd centrele O şi O' şi razele r, respectiv r'. Se presupune că $d(O, O') > r + r'$, $r' \neq r$. Să se arate că există două puncte V şi V', astfel ca orice tangentă dusă prin unul din aceste puncte la S să fie tangentă şi la S'. Să se arate că cele două puncte aparţin dreptei OO'.

138. Fie S şi S' două sfere de raze egale. Să se determine mulţimea tangentelor comune celor două sfere.

139. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care sînt tangente unui plan dat într-un punct dat.

140. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor de rază dată, care sînt tangente unui plan dat sau unei drepte date.

141. Fie d, d' două drepte neperpendiculare şi fie A, B două puncte pe dreapta d. Să se arate că există o singură sferă care are centrul pe d' şi care trece prin punctele A, B.

142. Fie A, B, C trei puncte necoliniare şi fie p un plan astfel încît p nu este perpendicular pe planul (ABC). Să se arate că există o singură sferă cu centrul în planul p şi trecînd prin punctele A, B, C.

143. Fie S o sferă de centru O şi fie V un con de rotaţie avînd vîrful O. Să se arate că intersecţia $S \cap V$ este un cerc.

144. Să se arate că intersecţia unei sfere cu un cilindru de rotaţie avînd ca axă de rotaţie un diametru al sferei este o reuniune de două cercuri.

145. Să se arate că intersecţia unui cilindru de rotaţie cu un plan care conţine o generatoare este formată din acea generatoare şi dintr-o a doua generatoare, care poate fi eventual confundată cu prima (în ultimul caz, se spune că planul este tangent cilindrului).

146. Să se arate că intersecţia unui con de rotaţie cu un plan ce conţine o generatoare a conului este formată din acea generatoare şi dintr-o a doua generatoare, care poate fi eventual confundată cu prima (în ultimul caz, se spune că planul este tangent conului).

B. Trigonometrie

1. Să se calculeze valorile funcţiilor sinus şi cosinus pentru $t = \frac{\pi}{6}$, şi $t = \frac{\pi}{3}$.

2. Să se calculeze $\sin \frac{13\pi}{6}$, $\sin \frac{25\pi}{6}$, $\sin \frac{-23\pi}{6}$, $\cos \frac{7\pi}{3}$, $\cos \frac{13\pi}{6}$ şi $\cos \frac{-17\pi}{3}$.

3. Să se afle perioadele funcţiilor $f(x) = \sin 8x$, $g(x) = \sin 4x$ şi $\sin \frac{x}{3}$.

4. Să se reprezinte grafic funcţiile următoare, presupunînd că domeniul de definiţie este, în fiecare caz, cea mai mare mulţime de numere reale, pe care funcţia este definită:

a. $f(x) = 3 \sin x$; **b.** $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$; **c.** $f(x) = -2 \sin 2x$; **d.** $f(x) = \sin x - |\sin x|$;

e. $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; **f.** $f(x) = 2 \sin x - |\sin x|$; **g.** $f(x) = 2 \cos x$; **h.** $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$;

i. $f(x) = \cos 3x$; **j.** $f(x) = 2 \cos 3x$; **k.** $f(x) = \cos x - |\cos x|$; **l.** $f(x) = 2 \cos x - |\cos x|$;

m. $f(x) = \frac{|\cos x|}{\cos x}$; **n.** $f(x) = \sin x + \cos x$.

5. (V. Matrosenko). Să se reprezinte grafic următoarele funcţii, definite pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ prin fornulele

$$f(x) = \max (\sin x; \cos x);\ g(x) = \max (\sin x; \cos x; 0);\ h(x) = \min (\sin x; \cos x)$$

6. Să se stabilească semnele următoarelor diferenţe:

$$\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{8};\ \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{11\pi}{7};\ \sin \frac{19\pi}{6} - \sin \frac{31\pi}{6};$$

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{8};\ \cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{11\pi}{7};\ \cos \frac{19\pi}{6} - \cos \frac{31\pi}{6}.$$

7. Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiilor

a. $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sin x$;

b. $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x - \cos x$.

8. Să se calculeze $\sin x$ ştiind că:

a. $\cos x = \frac{4}{5}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; **b.** $\cos x = \frac{4}{5}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; **c.** $\cos x = -\frac{4}{5}$, $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

9. Să se calculeze $\cos x$ ştiind că:

a. $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; **b.** $\sin x = -\frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; **c.** $\sin x = \frac{3}{5}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; **d.** $\sin x = -\frac{3}{5}$, $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

10. Să se calculeze $\cos (u + v)$ ştiind că $\sin v = \frac{4}{5}$, $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi că $u \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos u = -\frac{5}{13}$.

11. Se dau într-un plan, raportat la un reper cartezian ortonormat, punctele $M(4, 3)$, $N(2, 4)$, $P(1, 7)$. Fie $u = \widehat{MON}$, $v = \widehat{NOP}$. Să se calculeze $\sin (u + v)$ şi $\cos (u + v)$.

12. Să se arate că relațiile $\cos u = \frac{1}{7}$, $\cos v = \frac{13}{14}$, $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $v < u$ și $u - v = \frac{\pi}{3}$.

13. Să se arate că relațiile $\cos u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $u \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos v = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $v \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ implică $\cos(u - v) = -\frac{1}{2}$, $\sin(u + v) = -\frac{1}{2}$.

14. Fiind date punctele $M(4, a)$, $N(-2, 5)$, să se determine numărul a astfel încît să avem $ON \perp OM$.

15. Se dau punctele $M(3, 2)$, $N(1, 4)$. Să se determine $\cos \widehat{MON}$.

16. Știind că $\sin u = \frac{3}{5}$, $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos v = \frac{5}{13}$, $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se determine $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{tg} v$, $\operatorname{tg}(u + v)$ și $\operatorname{tg}(u - v)$.

17. Să se arate că relațiile $\operatorname{tg} u = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} v = \frac{1}{3}$; $u, v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ implică $v < u < \frac{\pi}{4}$; să se calculeze $u + v$ și $\operatorname{tg}(u + v)$.

18. Să se arate că relațiile $4 \operatorname{tg} a = 5 \operatorname{tg} b$, $a, b \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$, implică

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} b}{4 + 5 \operatorname{tg}^2 b}.$$

19. Să se arate că în orice triunghi ABC avem $\cos B + \cos C = \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot (\sin B + \sin C)$.

20. Să se arate că în orice triunghi ABC avem
$(\cos A + \cos B \cos C) \sin A = (\cos B + \cos C \cos A) \sin C = (\cos C + \cos A \cos B)$
$\sin C = \sin A \sin B \sin C$.

21. Să se arate că dacă A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, atunci:

$$\frac{\sin 2A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{\sin 2B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} = \frac{\sin 2C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A - \sin B + \sin C} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}.$$

22. Să se determine numerele următoare:

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$, $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

23. Să se calculeze sumele:

$\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

24. Să se stabilească semnele expresiilor:
a. $\arcsin 0{,}9 - \arcsin 0{,}5$; **b.** $\arcsin(-0{,}9) - \arcsin(-0{,}5)$; **c.** $\arccos(0{,}9) - \arccos(+0{,}5)$; **d.** $\arccos(-0{,}9) - \arccos(-0{,}5)$; **e.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$; **f.** $\operatorname{arctg}(-\sqrt{2}) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; **g.** $\operatorname{arcctg}\sqrt{2} - \operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; **h.** $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{2}) - \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

25. Calculați valorile funcțiilor sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, definite pe mulțimea unghiurilor, cunoscînd următoarele valori aproximative:

a. $\sin 30° = 0{,}5$; **b.** $\sin 45° = 0{,}707$; **c.** $\sin 20° = 0{,}342$; **d.** $\sin 65° = 0{,}906$; **e.** $\sin 60° = 0{,}866$; $\operatorname{tg} 57° = 1{,}54$; $\sin 1° = 0{,}01745$; $\operatorname{tg} 2° = 0{,}035$.

26. Comparați valorile găsite în exercițiul precedent cu valorile date de tabele.

27. Determinați lungimile laturilor a, b, c = lungimea ipotenuzei și măsurile în grade ale unghiurilor unui triunghi dreptunghic, cunoscînd:

1) $a = 17{,}2$ cm, $b = 11{,}17$ cm; 2) $a = 55{,}6$ cm, $\hat{A} = 39{,}1°$; 3) $a = 27{,}5$ cm, $c = 41{,}59$ cm; 4) $a = 121{,}3$ cm, $\hat{B} = 27{,}5°$; 5) $c = 191$ cm, $\hat{A} = 58{,}5°$; 6) $ab = 112$ cm^2, $\hat{B} = 69{,}3°$.

28. Să se determine lungimile laturilor și unghiurile unui triunghi isoscel ABC $(\hat{B} = \hat{C})$, cunoscînd:

1) $a = 17$ m, $b = c = 11$ m; 2) $b = 113$ m, $\hat{A} = 39°$, $b = 91$ cm, $\hat{B} = 29°$.

29. Diagonalele unui dreptunghi au lungimea $d = 15{,}3$ cm și unghiul diagonalelor este de $52{,}4°$. Să se determine lungimile laturilor.

30. Să se determine lungimile laturilor și măsurile în grade ale unghiurilor unui triunghi, ABC, cunoscînd:

1) $a = 26{,}5$ m, $b = 27{,}4$ m, $\hat{A} = 67{,}3°$;

2) $a = 5{,}38$ m, $b = 2{,}46$ m, $\hat{C} = 74{,}8°$;

3) $a = 0{,}896$ cm, $b = 0{,}436$ cm, $c = 0{,}684$ cm.

31. Pentru a se determina distanța între două puncte A, B, despărțite de un rîu, s-au putut calcula distanțele $d(A, C)$, $d(B, C)$ la un al treilea punct C și unghiul $\widehat{ACB}$: $d(A, C) = 311$ m, $d(B, C) = 217{,}5$ m, măs $\widehat{ACB} = 43{,}53°$. Care este distanța $d(A, B)$?

32. Rezultanta R a două forțe are mărimea 7,48 kgf și face cu cele două forțe unghiuri de 43° și 65°. Ce mărimi au cele două forțe?

33. Să se rezolve ecuațiile:
1) $\sin 2x = \sin 5x$; 2) $\cos 4x = \cos 3x$; 3) $\cos 8x = \cos^2 2x$; 4) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$; 5) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$; 6) $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin 2x = 0$.

34. Să se discute și să se rezolve ecuațiile:

1) $(2m - 1) \cos 2x - 3 \cos x + m - 2 = 0$;

2) $m \cos 2x + 2(m^2 + 3) \sin x - 7m = 0$,

m fiind un parametru real.

Indicații și răspunsuri

A. Geometrie

1. Se folosește faptul că, într-un triunghi isoscel, una din bisectoare este și înălțime. **5.** Se folosește exercițiul precedent. **6.** Se arată că triunghiurile BPR, DQS sînt congruente. **8.** Avem $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. **11.** **R**: 3, 2/5, 6. **12.** **R**: $\sqrt{4{,}25}$. **15.** **R**: $9\sqrt{2}$. **17.** **R**: $a = 3/2$, $b = -7/2$. **18.** Notînd prin M centrul dreptunghiului și folosind formula medianei (Cap. VI, §10), avem

$$\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 = 2\,\overrightarrow{MO}^2 + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{2} = 2\,\overrightarrow{MO}^2 + \frac{\overrightarrow{BD}^2}{2} = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2.$$

19. Presupunînd că $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = c$, $\|OD\| = d$ sînt astfel încît $b = a + r$, $c = a + 3r$, $d = a + 2r$, din exercițiul precedent obținem $r = 0{\cdot}20$. **R**: $(0, a)$, (a, a); $(0, -a)$, $(a, -a)$; $(b, 0)$, (b, b); $(-b, 0)$, $(-b, b)$; $(a + b, a)$, $(b, a + b)$; $(a - b, -a)$, $(-b, -a + b)$. **21.** $(a, 0)$, $(a/2, a\sqrt{3}/2)$, $(-a/2, a\sqrt{3}/2)$, $(-a, 0)$, $(-a/2, -a\sqrt{3}/2)$, $(a/2, -a\sqrt{3}/2)$. **22.** $(a, 0)$, $(a + a\sqrt{3}, a)$, $(a\sqrt{3}, a + a\sqrt{3})$, $(0, a\sqrt{3})$. **23.** $|x - 1|$, $|x - 3|$, 2; $1 < x < 3$. **25.** Dacă $\overrightarrow{MA}/\overrightarrow{MB} = k$, atunci $\overrightarrow{MB}/\overrightarrow{MA} = 1/k$ și $\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AM} = 1 - 1/k$. **26.** Dacă paralela prin B' la OB taie axa Ox în punctul M, avem $\overrightarrow{AM}/\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB'}/\overrightarrow{AB} =$ constant, deci M nu depinde de poziția secantei ABB'. **27.** Fie M, N proiecțiile punctului A pe dreptele d respectiv d' și fie $A'B'C'$ triunghiul dat. Considerăm punctele P, Q astfel ca $\widehat{PAM} \equiv \widehat{QAM} \equiv \widehat{A'}$, $|AP| \equiv |AQ| \equiv \dfrac{|A'C'|}{|A'B'|}|AM|$. Perpendicularele în P și Q pe dreptele AP respectiv AQ intersectează dreapta d' în două puncte C, C'', care corespund la două soluții ABC, $AB''C''$. **28.** $D(-1, -4)$, $E(9/7, 20/7)$, $F(3/5, 4/5)$. **29.** Dacă A, B sînt în semiplane opuse față de d, luăm $P \in |AB| \cap d$. Dacă A, B sînt de aceeași parte a dreptei d, considerăm simetricul lui A față de d, A', și punem $P \in |A'B| \cap d$. **30.** Notînd $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{ON} = y\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OA} = u\overrightarrow{OD} + v\overrightarrow{OF}$ și $a = \|OD\|$, $b = \|OF\|$, obținem ecuațiile $x - 1 = \pm k\,\dfrac{b}{a}\,(y - 1)$, $vx + uy = xy$, din care deducem x și y. **31.** Folosind notațiile de la ex. 30 obținem ecuațiile $ab(x - 1)(y - 1) = \pm k$, $vx + uy = xy$. **32.** În coordonate, condiția dată se scrie $(x - a)(x - b) = \pm k(x - c)(x - d)$, din care se deduce x. **33.** Se intersectează arcele capabile de unghiurile date și care subîntind segmentele $(AB|$, $|BC|$. **34.** Se intersectează arcele capabile de unghiuri de 120°, care subîntind laturile triunghiului ABC. **35.** Dacă notăm prin x, x' lungimile laturilor poligoanelor P, P' și prin n, numărul laturilor lui P, avem $x'^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - x^2}$, $a = nx\sqrt{4R^2 - x^2}/4$, $A = nR^2x/\sqrt{4R^2 - x^2}$, $a' = nRx/2$, $A' = 2nR^3x/(4R^2 - x'^2)$. Eliminînd variabilele n, x, obținem relațiile indicate. **36.** Aria triunghiului OBC este $\frac{1}{2}\|OB\|\,\|OC\|\sin \widehat{hk}$. Alegînd punctele $I \in h$, $J \in k$ astfel ca $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$, obținem, dacă punem $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OB} = y\overrightarrow{OJ}$, următoarele ecuații: $x + y = xy$, $xy\|OI\|\,\|OJ\|\sin \widehat{hk} = 2p^2$. **37.** Dacă notăm prin M punctul de intersecție

al cercurilor circumscrise triunghiurilor BCE, CDF, se arată că patrulaterele $ADME$, $ABMF$ sînt inscriptibile. **38.** Dacă patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, folosind notațiile din ex. 37, avem $\widehat{DME} + \widehat{DMF} \equiv \widehat{DME} + \widehat{DCF} = \widehat{DME} + \widehat{EAD} = 2$ dr, deci E, M, F sînt coliniare. **39.** Avem $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} - \widehat{EAB} \equiv \widehat{DFB} - \widehat{EGB} \equiv \widehat{FBG}$. **40.** Se formează două dreptunghiuri, care au două diagonale perpendiculare. Rezultă $MP \perp NQ$ și $NP \perp MQ$. **41.** Avem $\widehat{A'AP} \equiv \widehat{PQB'}$, $\widehat{A'QP} \equiv \widehat{PBB'}$. **42.** Fie A'' simetricul ortocentrului H față de mijlocul A' al laturii $|BC|$. Avem $\widehat{ACA''} \equiv \hat{C} + \widehat{A'CA''} \equiv \hat{C} + \widehat{A'BH} =$ dr, deci $|AA''|$ este un diametru în cercul circumscris triunghiului ABC. **43.** În triunghiul HAA'', HO și AA' sînt mediane, deci G aparține segmentului $|HO|$ și împarte acest segment în raportul 2. **44.** Folosind centrele cercurilor, C, C', C'', se găsește că $\widehat{QPR} + \widehat{QMR} = 2$ dr și rezultă că C este simetricul cercului circumscris triunghiului PQR față de QR. Se poate observa că M este ortocentrul triunghiului PQR. **45.** Avem $\widehat{OPM} \equiv \widehat{OMP} \equiv \widehat{O'MP'} \equiv \widehat{O'P'M}$, deci $OP \parallel O'P'$. **46.** Se consideră puterile punctului de intersecție al axei radicale cu tangenta comună. **47.** Mijloacele a două arce ale unui cerc, care au capetele comune, sînt extremitățile unui diametru. **48.** Se folosește faptul că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este egală cu 360°. **49.** Urmărind unghiurile drepte formate de înălțimi și laturi, se pun în evidență anumite patrulatere inscriptibile. **50.** Fie A', A'' piciorul înălțimii din A, respectiv mijlocul laturii $|BC|$. Punctele A', A'' fiind pe cercul lui Euler, centrul acestui cerc se va găsi pe mediatoarea segmentului $|A'A''|$, care taie segmentul $|OH|$ în două segmente congruente. Mediatoarea segmentului $|B'B''|$ va trece și ea prin mijlocul segmentului $|OH|$. **51.** Se descompun laturile patrulaterului $ABCD$ cu ajutorul punctelor de tangență. **52.** Cercul de diametru $|AO|$, unde O este centrul cercului C; punctul A aparține locului, dacă se admite coarda nulă $|AA|$. **53.** Folosind teorema bisectoarei, se găsește că A' descrie un cerc omotetic cu cercul descris de C. **54.** Folosind puterile punctului A față de cercurile ce trec prin B și D, se găsește că locul geometric este un cerc de centru A. **55.** Bisectoarea unghiului format de două laturi congruente, în cazul triunghiului isoscel sau echilateral; mediatoarea laturilor paralele, la trapezul isoscel; diagonalele rombului, diagonalele pătratului și mediatoarele laturilor, dacă rombul este un pătrat; dreptele ce trec prin centrul cercului; mediatoarele laturilor și dreptele care trec prin centru și cîte un vîrf, în cazul unui poligon regulat. Orice poligon regulat cu n laturi are n axe de simetrie. **56.** Fie A' simetricul lui A față de d și fie B' simetricul lui B față de d'. Unul din segmentele $|AB|$, $|AB'|$, $|A'B|$, $|A'B'|$ este intersectat de fiecare din dreptele d, d'. Punctele de intersecție ale acestui segment cu d și d' sînt punctele căutate. **57.** Fie M, M' două puncte astfel ca $M \in h$, M' să fie de aceeași parte cu latura k față de suportul laturii h, $MM' \parallel d$ și $|MM'| \equiv |PQ|$. Paralela dusă prin M' la h intersectează k într-un punct B. Definim A prin condiția $\overrightarrow{BA} \sim \overrightarrow{M'M}$. **61.** (*Indicație.* Se utilizează exercițiile precedente, construindu-se unghiurile u, v, w în mod convenabil, astfel încît să fie legate de unghiurile triunghiului dat prin relațiile de la punctul d al exercițiului anterior.) **62.** (*Indicație.* Fiind dat triunghiul PQR, se construiesc triunghiuri isoscele, pe laturile unui triunghi echilateral, avînd unghiurile de la baze u', v', w' astfel ca $\hat{P} \equiv 3u' - 2$ dr, $\hat{Q} \equiv 3v' - 2$ dr, $\hat{R} \equiv 3w' - 2$ dr). **65.** (*Indicație.* Se observă că aria triunghiului ABC este egală cu suma ariilor triunghiurilor AMB, AMC și se folosește inegalitatea $|AB| + |AC| \geqslant |BC|$. **66.** (*Indicație.* Se consideră trei puncte necoliniare A, B, C din mulțimea E, astfel ca distanța de la punctul A la dreapta BC să fie cea mai mică din distanțele de acest fel ce se pot forma cu trei puncte necoliniare ale mulțimii E; se arată că dreapta BC nu conține alte puncte ale mulțimii E, diferite de punctele B, C.) **67.** (*Indicație.* Se observă că volumul tetraedrului $[OABC]$ este egal cu suma volumelor tetraedrelor $[OMAB]$, $[OMBC]$, $[OMCA]$ și se ține seama de faptul că suma ariilor a trei fețe ale unui tetraedru este mai mare decît aria celei de a patra fețe). **68.** (*Indicație.* Se procedează în mod analog celui urmat în cazul demonstrației teoremei lui Sylvester.) **104.** Produsul a două rotații într-un plan este o translație, dacă unghiurile de rotație sînt congruente și dacă sensurile de rotație sînt opuse. **107.** Se descompune R și T cu ajutorul unei simetrii față de o dreaptă ce trece prin centrul rotației R. **108.** Se rotește dreapta d în jurul lui A cu un unghi de 60° și se consideră punctul de intersecție al dreptei obținute în urma rotației, cu dreapta d'. **109.** Este vorba de rotațiile de 120° și 240° în jurul centrului triunghiului echilateral. **110.** R: patru. **112.** În cazul unui poligon regulat cu n laturi, mulțimea G conține n rotații și n simetrii față de cele n axe de simetrie ale poligonului. **113.** Dacă T este o translație de vector nenul și dacă A este un punct oarecare în planul translației, punctele $T(A)$, $T(T(A))$, $T(T(T(A)))$, ... sînt distincte două cîte două, deci formează o mulțime infinită. Dacă T lasă invariantă o figură F și dacă $A \in F$, atunci F trebuie să conțină acea mulțime infinită, deci F nu poate fi finită. **114.** Mulțimea infinită construită anterior este un exemplu de mulțime invariantă față de translația T. Punctele acestei mulțimi aparțin unei drepte paralele cu $\vec{v}$. Această dreaptă este de asemenea invariantă față de T. **115.** Dacă S este o izometrie care lasă invariant punctul O și un al doilea punct $A \neq 0$, atunci S este fie transformarea identică, fie simetria față de dreapta OA. Dacă o izometrie T admite O ca singur punct invariant, atunci T este o rotație proprie de centru O. **116.** Fie A, B două puncte distincte și fie $A' = H'(A)$, $B' = H'(B)$, $A'' = H(A')$, $B'' = H(B')$. Avem $AB \parallel \overrightarrow{A'B'} \parallel A''B''$ și, notînd prin h, h' rapoartele celor două omotetii, $\|\overrightarrow{A'B'}\| = h'\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{A''B''}\| = h\|\overrightarrow{A'B'}\|$, deci $\|\overrightarrow{A''B''}\| = hh'\|\overrightarrow{AB}\|$. Dacă $hh' = 1$, vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A''B''}$ vor fi echipolenți, deci $\overrightarrow{AA'} \sim \overrightarrow{BB'}$. În acest caz, $H \circ H'$ este o translație de vector $\overrightarrow{AA'}$. Dacă $hh' \neq 1$, $H \circ H'$ va fi o omotetie de centru O, unde $\{O\} = AA' \cap BB'$, raportul omotetiei $H \circ H'$ fiind egal cu hh'. **118.** Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt omotetice față de omotetia ce are centrul în punctul de intersecție al dreptelor AA', BB', CC' și raportul egal cu $|AB|/|A'B'| = |BC|/|B'C'| = |CA|/|C'A'|$. **119.** Se consideră înălțimea $|AA'|$ și se aplică teorema lui Thales. Se găsește că $|AM|/|BM| = |AA'|/|BC|$. **121.** Se observă că triunghiurile OAB, $OB'A'$ sînt asemenea și se aplică teorema triunghiurilor asemenea. **124.** Se intersectează d'' cu simetrica dreptei d' față de d, obținîndu-se punctul Q; P va fi simetricul lui Q față de d. **125.** Se folosește relația $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. **126.** Produsul simetriilor față de punctele O, O' este translația de vector $\overrightarrow{200'}$, dacă se aplică întîi simetria față de O. **127.** Se compune translația de vector $\overrightarrow{AC}$ cu o rotație convenabil aleasă de centru C și apoi cu simetria față de dreapta CD.

B. Trigonometrie

8. $a.\ \frac{3}{5}$; $b.\ -\frac{3}{5}$; $c.\ \frac{-3}{5}$. **9.** $a.\ \frac{4}{5}$; $b.\ \frac{4}{5}$; $c.\ -\frac{4}{5}$; $d.\ -\frac{4}{5}$,

16. $\frac{3}{4}$; $\frac{12}{5}$; $\frac{-63}{16}$; $\frac{-33}{56}$. **17.** $\frac{\pi}{4}$. **24.** $a.\ +$; $b.\ -$; $c.\ -$; $d.\ +$; $e.\ -$; $f.\ +$; $g.\ +$; $h.$

30. 1) $\hat{B} = 72{,}6°$, $\hat{C} = 40{,}1°$, $c = 18{,}5$ m, sau: $\hat{B}' = 107{,}4°$, $\hat{C}' = 5{,}3°$, $c = 2{,}65$ m.

2) $c = 5{,}30$ m, $\hat{A} = 78{,}6°$, $\hat{B} = 26{,}6°$.

3) $\hat{A} = 104{,}1°$, $\hat{B} = 28{,}2°$, $\hat{C} = 47{,}7°$. **33.** 3) $x \in \left(\frac{\pi}{2}Z\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}Z + \frac{1}{4}\arccos\frac{-3}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}Z - \frac{1}{4}\arccos\frac{-3}{4}\right)$.

33. 4) $x \in \pi + 2\pi Z$; 5) $x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi Z$; 6) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}Z$. **34.** 1.

Cuprins

Nr. colilor de tipar : 17,5
Tiraj : 311 115 ex.
Bun de tipar : 14.08.1979

Com. nr. 90 305/25 425
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII“
Bucureşti — R.S.R.