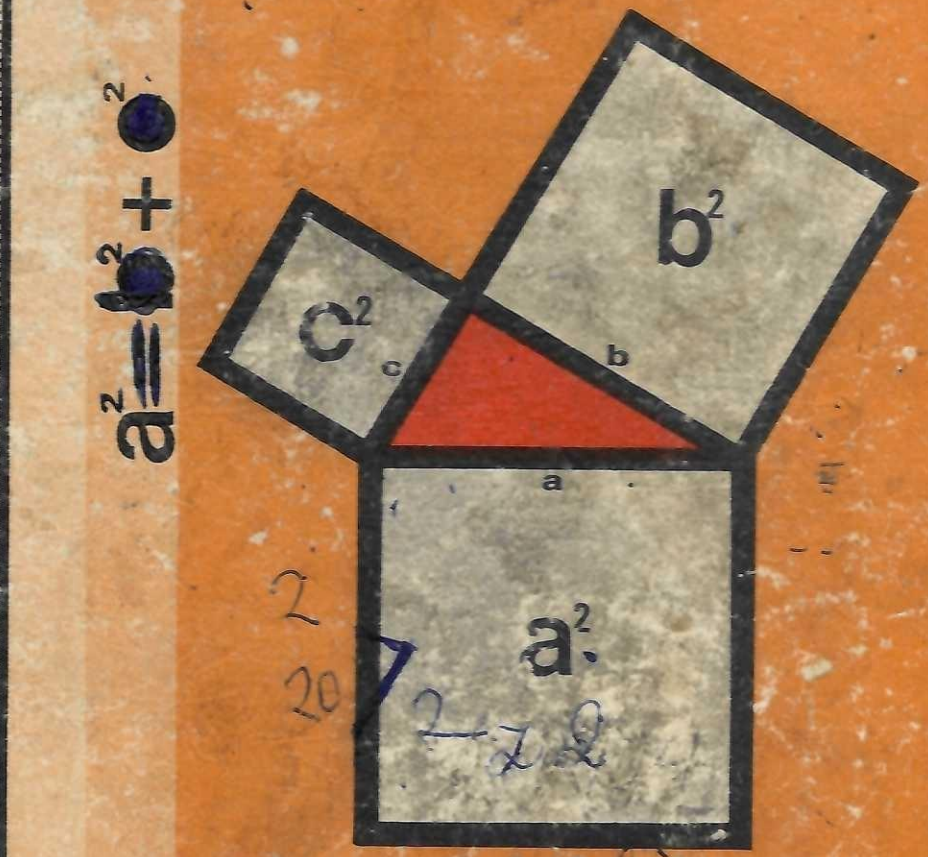
7

A. HOLLINGER

# Geometrie

MANUAL PENTRU CLASA A VII-a




Editura didactica și pedagogică,
București, 1976

A. HOLLINGER

# Geometrie

MANUAL PENTRU CLASA A VII-A

7

EDITURA
DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ,
BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat în 1957 și revizuit în 1959, 1960, 1963, 1974, 1976
La revizia din anul 1976 s-a ținut seama și de observațiile primite din partea cadrelor didactice din județele: Buzău, Maramureș, Mehedinți și Tulcea

*Redactor:* prof. VALENTIN RADU
*Tehnoredactor:* A. DANIEL

Capitolul I

# CERCUL

## 1.1. PROPRIETĂȚI GENERALE

1. **Definiții.** Cercul ne este cunoscut din clasele anterioare (fig. 1).

*Cercul este mulțimea punctelor din plan egal depărtate de un punct fix.*

Punctul fix $O$ se numește *centrul* cercului și segmentul de dreaptă $OM$, care unește centrul cu un punct oarecare al cercului se numește *raza* cercului. Dacă notăm cercul cu $(C)$ și raza cu $R$, definiția cercului se scrie:

$$(C) = \{M \mid OM = R\}.$$

Segmentul de dreaptă $AB$ (fig. 1) care unește două puncte oarecare $A$ și $B$ ale unui cerc se numește *coardă*. Orice coardă care trece prin centrul cercului se numește *diametru* al cercului.

În figura 1, $CD$ este un diametru al cercului. Deoarece $OC = R$ și $OD = R$, $CD = 2R$. *Orice diametru al unui cerc este dublul razei.*

O parte a unui cerc, cuprinsă între două puncte ale cercului, se numește *arc de cerc* sau, scurt, *arc*. În figura 1, partea din cerc îngroșată este un arc. Arcul care are extremitățile $A$ și $B$ se notează cu $\widehat{AB}$. Dacă nu se face nici o mențiune, se înțelege prin $AB$ arcul mai mic limitat de punctele $A$ și $B$, nu cel care conține punctele $C$, $M$ și $D$.

Fiecărui arc îi corespunde o coardă, care are aceleași extremități; arcului $AB$ îi corespunde coarda $AB$; se spune că coarda *subîntinde* arcul.

2. **Aplicații în practică.** Toate mijloacele de a obține un cerc și toate aplicațiile în practică ale cercului se bazează pe faptul că toate punctele sale sînt egal depărtate de centru.

*1.* Cînd folosim compasul (fig. 2), vîrful de oțel $O$ rămîne fix și vîrful $M$ al minei descrie un cerc pentru că distanța dintre punctele $O$ și $M$ rămîne constantă.

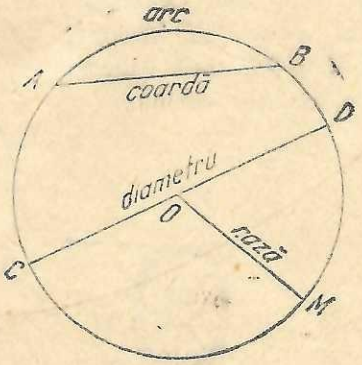



Fig. I.1

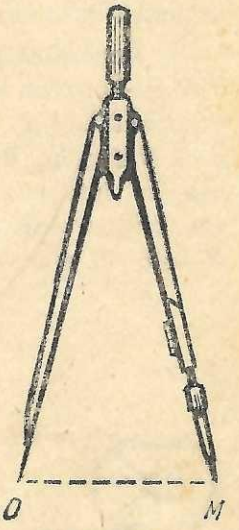



Fig. I.2

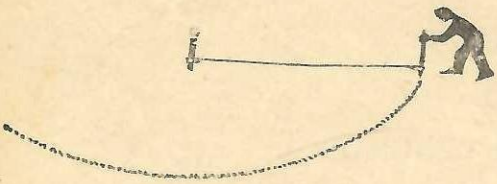


Fig. I.3

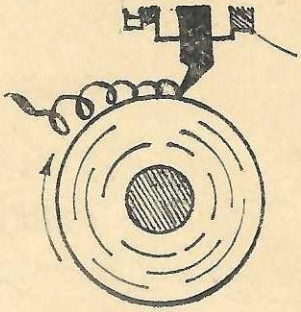


Fig. I.4

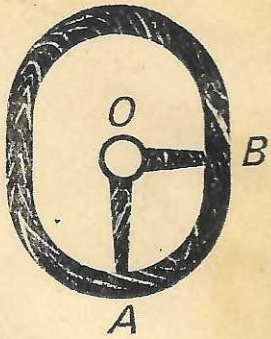



Fig. I.5

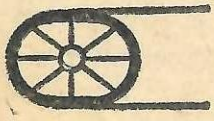
2. Pentru a trasa un cerc sau o parte din cerc pe teren, se folosește o sfoară fixată de un țăruș (fig. 3). Se obține un cerc pentru că lungimea sforii rămîne constantă.

3. Pentru a obține o piesă în formă de cerc, ea se prelucrează la strung (fig. 4). Piesa se fixează într-un mecanism care se rotește odată cu axa strungului. Cuțitul strungului retează părțile mai ridicate. Toate punctele care au trecut sub cuțit au distanța la centru egală cu distanța de la centru pînă la vîrful cuțitului, părțile mai apropiate de centru rămîn neatinse. După mai multe rotații, în care cuțitul se apropie mereu de centru, el ajunge să treacă peste toată marginea piesei. Această margine este un cerc pentru că distanța de la centru pînă la toate punctele ei este aceeași, și anume egală cu distanța de la centru pînă la vîrful cuțitului.

4. Roțile vehiculelor au forma de cerc. Dacă o roată ar avea forma din figura 5, în care $OA > OB$, vehiculul ar merge ca o barcă pe valuri, cînd mai sus, cînd mai jos.

5. Dacă două roți legate printr-o curea de transmisie (fig. 6) nu ar fi perfect circulare, cureaua de transmisie nu ar fi tot timpul deopotrivă de întinsă, ceea ce ar putea duce la ruperea ei.

3. **Împărțirea planului în regiuni.** Cercul împarte mulțimea punctelor din plan care nu-i aparțin în două părți, cele situate în interiorul cercului și cele situate în exteriorul lui (fig. 7). Fie $R$ raza cercului. Un punct $A$ aparține interiorului cercului dacă $OA < R$. Punctul $B$ este de asemenea în interior. Un punct $M$ aparține exteriorului cercului dacă $OM > R$. Punctul $N$ este de asemenea exterior cercului.



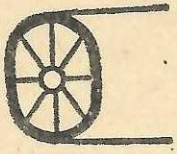


Fig. I.6

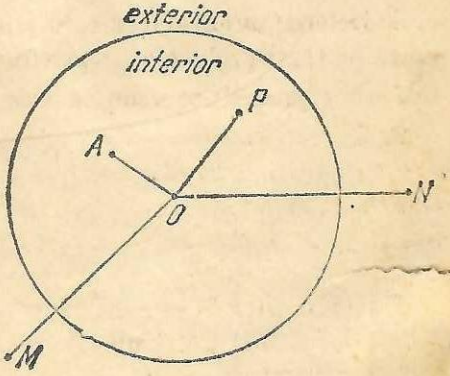
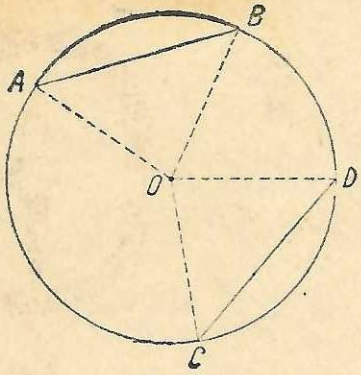



Fig. I.7




[Fig. I.8

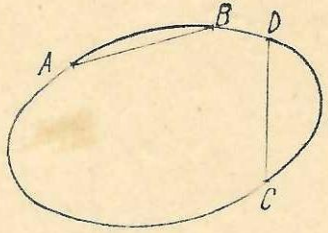



Fig. I.9

4. **Arce şi coarde.** Într-un cerc (fig. 8) considerăm două arce $AB$ şi $CD$ şi coardele corespunzătoare $AB$ şi $CD$. Dacă arcele sînt egale, cum sînt coardele lor? Invers, dacă coardele sînt egale, cum sînt arcele lor?

a) Presupunem că $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. Atunci şi unghiurile la centru sînt egale, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. Triunghiurile $AOB$ şi $COD$ sînt egale (LUL), deci $AB = CD$.

b) Reciproc, presupunem că $AB = CD$. Triunghiurile $AOB$ şi $COD$ sînt egale (LLL), deci $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. Unghiurile la centru fiind egale, arcele lor sînt egale, deci $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

*În acelaşi cerc sau în două cercuri egale, la arce egale corespund coarde egale; la coarde egale corespund arce egale.*

Am considerat cazul cînd ambele arce sînt mai mici decît un semicerc. Se puteau lua şi arcele mai mari decît un semicerc. Dacă $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, atunci $\widehat{ACDB} = \widehat{CABD}$.

Figura 9 arată că această teoremă nu este adevărată în cazul unei curbe oarecare $AB = CD$, dar $\widehat{AB} \neq \widehat{CD}$.

## 1.2. RELAŢIA DE INCIDENŢĂ

1. **Determinarea unui cerc.** Se ştie că o dreaptă este determinată de două puncte; punem aceeaşi problemă cu privire la cerc. Cîte puncte determină un cerc?

*1.* În figura 10 se vede că *printr-un punct A putem duce oricîte cercuri vrem.*

*2.* Dacă ni se dau două puncte $A$ şi $B$ (fig. 11), putem duce mai multe cercuri care să treacă prin ele. Dacă $O_1$ este centrul unuia din ele, $O_1A = O_1B$ deci $O_1$ aparţine mediatoarei segmentului $AB$. Dacă $O_2$ este centrul unui alt cerc care trece prin $A$ şi $B$, $O_2A = O_2B$, deci şi $O_2$ aparţine mediatoarei segmentului $AB$. Acelaşi lucru se poate spune şi despre centrele celorlalte cercuri care trec prin $A$ şi $B$.

Reciproc, dacă $O_3$ este un punct oarecare al mediatoarei segmentului $AB$, atunci $O_3A = O_3B$. Dacă construim un cerc cu centrul în $O_3$ şi cu raza $O_3A$, el va trece şi prin punctul $B$. Deci:

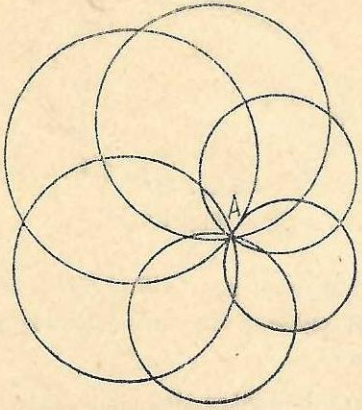



Fig. I.10

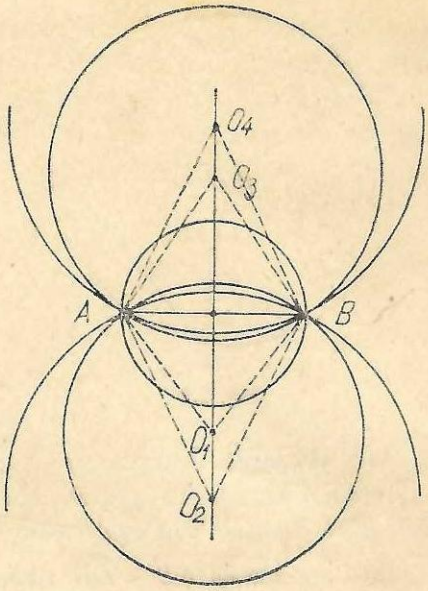



Fig. I.11

*Prin două puncte A și B putem duce oricîte cercuri vrem. Centrele tuturor acestor cercuri formează mediatoarea segmentului AB.*

3. Fie $A$, $B$, $C$ trei puncte nesituate în linie dreaptă (fig. 4). Să vedem dacă se poate duce prin ele un cerc. Dacă luăm centrul cercului $O$ într-un punct *oarecare* al mediatoarei segmentului $AB$ și raza egală cu $OA$, cercul va trece prin punctele $A$ și $B$, dar nu știm dacă va trece prin $C$; dacă luăm ca centru un punct *oarecare* al mediatoarei segmentului $BC$ și raza egală cu $OB$, cercul va trece prin $B$ și $C$, dar nu știm dacă va trece prin $A$. Dar dacă luăm ca centru punctul $O$ în care se taie cele două mediatoare, și ca rază distanța $OA$?

Deoarece $OA = OB$, cercul va trece și prin punctul $B$ și, deoarece $OB = OC$, cercul va trece și prin punctul $C$, adică cercul va trece prin punctele $A$, $B$ și $C$.

4. Alt cerc care să treacă prin punctele $A$, $B$ și $C$ nu există, căci centrul unui asemenea cerc aparține mediatoarei lui $AB$ (pentru că cercul trece prin punctele $A$ și $B$); el aparține și mediatoarei segmentului $BC$ (pentru că cercul trece prin punctele $B$ și $C$). Deoarece aparține ambelor mediatoare, centrul cercului este intersecția lor. Raza acestui cerc nu poate fi decît $OA$.

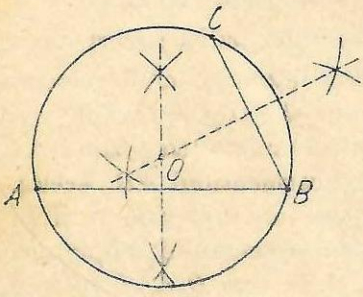



Fig. 1.12

*Prin trei puncte nesituate în linie dreaptă se poate duce un singur cerc. Centrul lui este intersecția mediatoarelor a două dintre segmentele care unesc aceste puncte.*

2. **Cerc circumscris unui triunghi.** În figura 12 punctele $A$, $B$ și $C$ formează un triunghi. Cercul care trece prin punctele $A$, $B$ și $C$ se numește cerc

*circumscris* triunghiului $ABC$, iar triunghiul se numește triunghi *înscris* în cerc.

*Oricărui triunghi i se poate circumscrie un cerc. Centrul lui este intersecția a două dintre mediatoarele triunghiului.*

3. **Aplicație.** *Aflarea centrului unui cerc.* Avem un cerc și vrem să-i determinăm centrul.

Dacă luăm trei puncte oarecare $A$, $B$, $C$ ale cercului, cercul este circumscris triunghiului $ABC$. N-avem decît să ducem mediatoarele a două dintre laturile sale. Punctul lor de intersecție este centrul cercului.

Prin acest proceden se poate afla centrul unui disc circular.

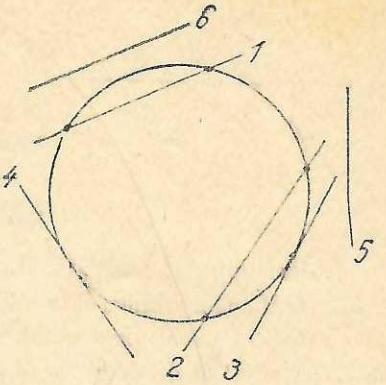


Fig. I.13

4. **Poziția unei drepte față de un cerc.** În figura 13, se văd un cerc și mai multe drepte. Dreptele *1* și *2* taie cercul în cîte două puncte, dreptele *3* și *4* au cîte un singur punct comun cu cercul, iar dreptele *5* și *6* n-au nici un punct comun cu cercul. Cîte puncte comune poate să aibă o dreaptă cu un cerc? Aceasta depinde de raza cercului și de distanța de la centrul cercului la dreaptă. Fie $(C)$ un cerc, $O$ centrul său și $(D)$ o dreaptă (fig. 14). Ducem $OM$ perpendicular pe $(D)$.

*1.* În figura 14-*a*, distanța $OM$ este mai mare ca raza. Dreapta nu taie cercul, $(C) \cap (D) = \emptyset$.

*2.* În figura 14-*b* distanța $OM$ este egală cu raza. Dreapta are un singur punct comun cu cercul, $(C) \cap (D) = M$.

*3.* În figura 14-*c*, distanța $OM$ este mai mică decît raza. Dreapta taie cercul în două puncte, $A$ și $B$, $(C) \cap (D) = \{A, B\}$. Dreapta este o secantă a cercului.

*4.* Nici o dreaptă nu poate avea mai mult decît două puncte comune cu cercul.

*O dreaptă poate avea cu un cerc: nici un punct comun, un punct comun sau două puncte comune.*

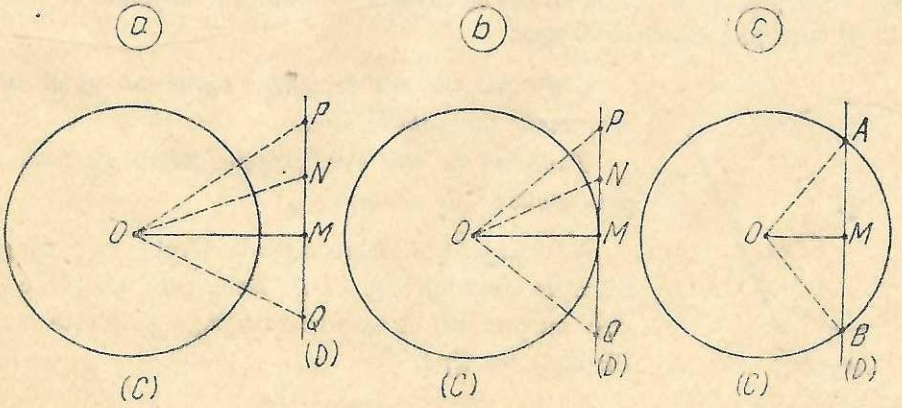


Fig. I.14

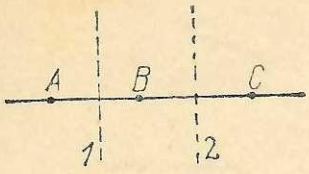


Fig. I.15

*$d > R$ ... nici un punct comun;*
*$d = R$ ... un punct comun;*
*$d < R$ ... două puncte comune*

($d$ este distanța de la centrul cercului la dreaptă și $R$ este raza cercului).

5. **Demonstrație.** În cele ce precedă am dedus rezultatele din figură. Ele se pot demonstra.

*1.* Presupunem $OM > R$ (fig. 14-*a*), $R$ fiind raza cercului. Atunci, dacă $P \in (D)$, $OP > OM$, căci oblica este mai mare decît perpendiculara. Dar $OM > R$, cu atît mai mult $OP > R$, deci punctul $P$ este exterior cercului. La fel se arată că și celelalte puncte ale dreptei, $N$, $Q$ ș.a.m.d. sînt exterioare cercului.

*2.* Presupunem $OM = R$ (fig. 14-*b*). Demonstrația se poate reface cuvînt cu cuvînt, numai că, în loc de $OM > R$, trebuie spus $OM = R$.

*3.* Cazul cînd $OM < R$ (fig. 14-*c*) nu se poate demonstra în cadrul acestei cărți.

*4.* Nici o dreaptă nu poate avea mai mult decît două puncte comune cu cercul.

În adevăr, să presupunem că o dreaptă ar tăia un cerc în trei puncte $A$, $B$ și $C$ (fig. 15). Atunci, cercul trecînd prin punctele $A$ și $B$, centrul lui aparține mediatoarei segmentului $AB$. Cercul trecînd prin punctele $B$ și $C$, centrul lui aparține mediatoarei segmentului $BC$. Ar însemna că aceste două mediatoare, 1 și 2, să se taie. Dar ambele mediatoare sînt perpendiculare pe dreapta $AB$, deci ele sînt paralele și nu se pot tăia.

## 1.3. TANGENTA LA CERC

1. **Tangenta la cerc.** Considerăm un cerc (fig. 16) și un punct oarecare al său, $M$. Am văzut că perpendiculara dusă prin punctul $M$ pe raza $OM$ nu are cu cercul nici un punct comun afară de $M$. O astfel de dreaptă se numește *tangentă*[1] a cercului. Punctul $M$ este *punctul ei de contact.*

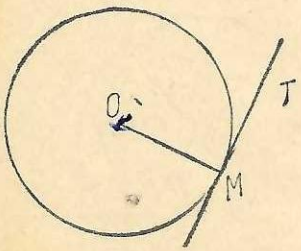


Fig. I.16

*O dreaptă care are un singur punct comun cu un cerc se numește tangentă la cerc.*

*Tangenta la cerc este perpendiculară pe raza dusă prin punctul de contact.*

*Exemple. 1.* Șina de cale ferată este tangentă la roțile trenului (fig. 17-*a*). Raza care unește centrul roții cu punctul în care roata atinge șina este perpendiculară pe șină.

[1] Cuvîntul tangentă exprimă faptul că dreapta atinge cercul.

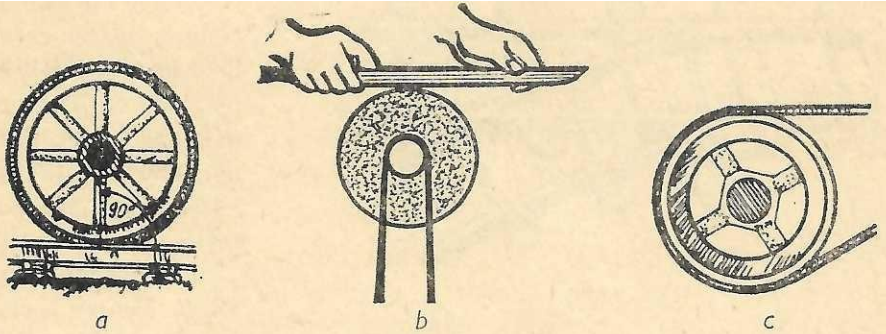



Fig. I.17

2. Cuțitul este tangent la roata tocilarului (fig. 17-*b*).

3. Cureaua de transmisie este tangentă la roată în punctele $A$ și $B$ (fig. 17-*c*) în care ea se desprinde de roată.

**2. Importanța practică a tangentei.** Fie $M$ (fig. 18) un punct oarecare al unui cerc. Dintre toate dreptele $MA$, $MB$, ... care se pot duce prin $M$, tangenta $MT$ se apropie cel mai mult de cercul însuși. Pe o porțiune mică în apropierea punctului $M$, arcul de cerc se deosebește foarte puțin de segmentul corespunzător de pe tangentă.

Cînd un punct se mișcă pe un cerc (sau pe o curbă oarecare), el își schimbă direcția în orice moment; pe o porțiune mică în jurul punctului $M$, direcția în care se mișcă punctul este direcția tangentei $MT$.

Cînd punctul mobil trebuie să treacă de pe un arc de cerc pe o dreaptă sau invers, este bine ca dreapta să fie tangentă la cerc, altfel se produc zguduiri. Se spune că tangenta la cerc *se racordează* cu cercul în punctul de contact.

Tot așa se spune că două arce *se racordează* cînd ele au în punctul lor comun aceeași tangentă. Arcele $AM$ și $MB$ din figura 19-*a* sau *b* se racordează, iar cele din figura 19-*c nu* se racordează. Racordarea asigură o trecere lină de pe un arc pe celălalt.

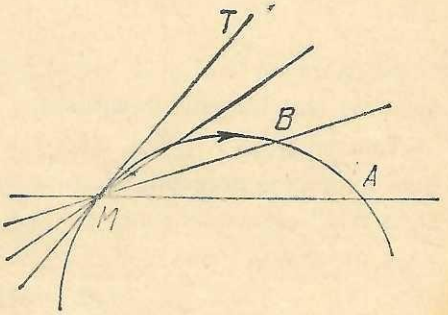



Fig. I.18

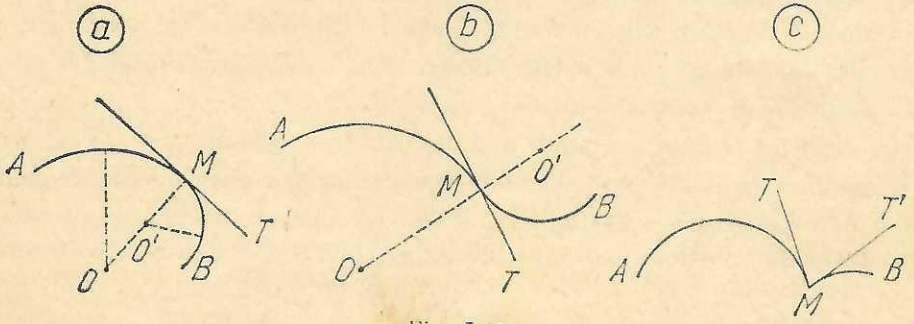



Fig. I.19

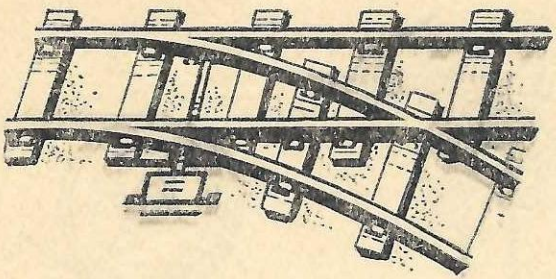


Fig. 1.20

Șinele de cale ferată trebuie să se racordeze bine la trecerea de pe o porțiune curbă pe o altă porțiune curbă sau pe o porțiune dreaptă (fig. 20), altfel se pot produce deraieri.

3. **Construcția tangentei.** *1.* Pentru a construi o tangentă într-un punct $M$ la un cerc (fig. 21-*a*), unim punctul $M$ cu centrul cercului și ridicăm în $M$ perpendiculara pe raza $OM$.

*2.* Pentru a construi o tangentă la un cerc $(C)$ paralelă cu o dreaptă dată $d$, procedăm astfel (fig. 21-*b*).

*a)* Ducem din centrul cercului perpendiculara $OM$ pe $d$; fie $(C) \cap OM = \{A, A'\}$.

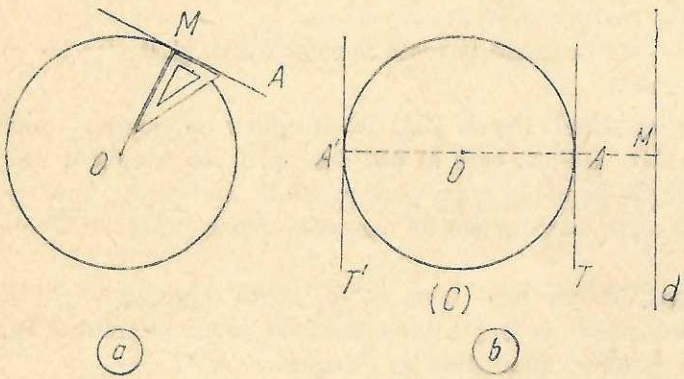



Fig. 1.21

*b)* Ridicăm în $A$ și $A'$ cîte o perpendiculară pe $OA$. Dreptele $AT$ și $A'T'$ astfel obținute sînt tangentele căutate.

În adevăr, $AT \perp OA$, deci este tangentă la cerc. Pe de altă parte, $AT$ și $d$ fiind amîndouă perpendiculare pe $OA$, sînt paralele între ele. În același fel, se vede că și $A'T'$ este o tangentă la cerc paralelă cu dreapta $d$.

## 1.4. SIMETRIA CERCULUI[1]

1. **Axele de simetrie ale cercului.** Considerăm un cerc $(C)$ și un diametru oarecare al său $AB$ (fig. 22). După o simplă apreciere din ochi ne dăm seama că, dacă pliem figura după dreapta $AB$, partea din cerc situată deasupra dreptei $AB$ coincide cu cea situată sub această dreaptă.

*Orice diametru al unui cerc este o axă de simetrie a cercului.*

Fiecare din cele două părți în care diametrul împarte cercul se numește *semicerc*.

Pentru a demonstra aceasta, considerăm un punct oarecare $M$ al cercului, $M \in (C)$. Construim simetricul lui $M$ în raport cu $AB$. Pentru aceasta ducem seg-

[1] Se vor recapitula § 5.1 și 5.2 din Geometria pentru clasa a VI-a.

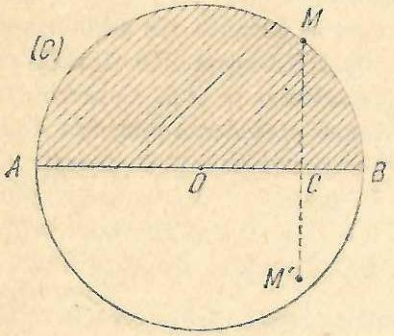



Fig. I.22

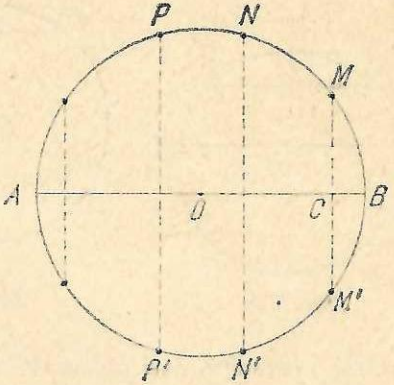



Fig. I.23

mentul $MC$ perpendicular pe $AB$ ($C \in AB$) și-l prelungim cu un segment $CM'$ egal cu $CM$. Segmentul $OM'$ este simetric cu $OM$, deci $OM' = OM$. Dar $OM$ este o rază a cercului, deci și $OM'$ este o rază a cercului, deci $M' \in (C)$, adică simetricul punctului $M$ aparține de asemenea cercului $(C)$.

Dacă $M, N, P, \ldots$ (fig. 23) sînt alte puncte ale cercului, se demonstrează la fel că și simetricele lor, $M', N', P', \ldots$ aparțin cercului, ceea ce înseamnă că diametrul $AB$ este o axă de simetrie a cercului.

Următoarele două teoreme sînt consecințe ale acesteia.

2. **Diametrul perpendicular pe o coardă.** Fie $MM'$ o coardă oarecare a unui cerc (fig. 24). Ducem diametrul $AB$ perpendicular pe $MM'$ și punem $AB \cap MM' = C$. Care este simetricul punctului $M$ față de dreapta $AB$? El trebuie să aparțină dreptei $MM'$, căci $MM' \perp AB$, și trebuie să aparțină cercului, căci $AB$ este o axă de simetrie a cercului, deci el este intersecția dreptei $MM'$ cu cercul, adică $M'$. Cu alte cuvinte, diametrul $AB$ este mediatoarea coardei $MM'$. Rezultă că $CM = CM'$. Dreapta $AB$ fiind o axă de simetrie a cercului, rezultă că $\widehat{BM} = \widehat{BM'}$.

*Diametrul perpendicular pe o coardă împarte coarda și arcul în părți egale.*

3. **Observare.** Din centrul cercului nu se poate duce decît o singură perpendiculară pe coarda $MM'$, nu există decît un singur punct $C$ care să fie mijlocul segmentului $MM'$ și nu există decît un singur punct $B$ care să fie mijlocul arcului $AB$.

Diametrul perpendicular pe coarda $AB$, diametrul care împarte coarda $MM'$ în două părți egale și diametrul care împarte arcul $MM'$ în două părți egale sînt unul și același diametru. Rezultă că diametrul care are una din aceste trei proprietăți are și celelalte două.

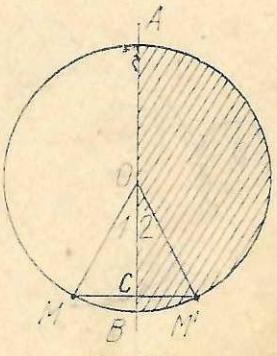



Fig. I.24

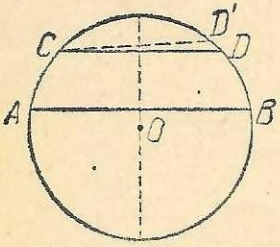


Fig. I.25

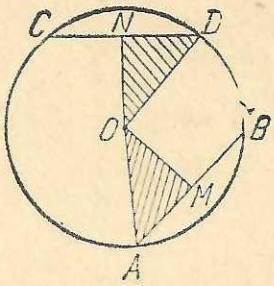


Fig. I.26

**4. Arce cuprinse între coarde paralele.** Fie $AB$ și $CD$ două coarde paralele ale aceluiași cerc (fig. 25). Ducem diametrul $EF$ perpendicular pe $AB$. Conform teoremei precedente punctele $A$ și $B$ sînt simetrice față de dreapta $EF$. În același mod se arată că punctele $C$ și $D$ sînt simetrice față de $EF$. Totodată $EF$ este o axă de simetrie a cercului, deci arcele $AC$ și $BD$ sînt simetrice față de $EF$, deci $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

Reciproc, dacă $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, coardele $AB$ și $CD$ sînt paralele. În adevăr, dacă $CD$ nu ar fi paralel cu $AB$, paralela dusă prin $C$ la $AD$ ar tăia cercul într-un punct $D'$ și $\widehat{BD'}$ ar fi egal cu $\widehat{AC}$. Cum $\widehat{BD} = \widehat{AC}$, ar urma că $\widehat{BD'} = \widehat{BD}$, ceea ce nu este adevărat.

*Într-un cerc, arcele cuprinse între coarde paralele sînt egale; două coarde care cuprind arce egale sînt paralele.*

**5. Lungimea unei coarde și distanța ei de la centru.** Considerăm un cerc și două coarde egale, $AB = CD$ (fig. 26). Să comparăm distanțele lor de la centru adică lungimile segmentelor $OM$ și $ON$, unde $OM \perp AB$ și $ON \perp CD$.

$\triangle AOM = \triangle DON$ ($IC$), căci $AM = DN$ ca jumătăți de coarde egale și $OA = OD$ ca raze, deci $OM = ON$.

Reciproc, dacă $OM = ON$, aceleași triunghiuri sînt egale ($IC$), deci $AM = DN$, adică jumătățile coardelor sînt egale. Rezultă că și coardele sînt egale, $AB = CD$.

*Într-un cerc coarde egale sînt egal depărtate de centru; coarde egal depărtate de centru sînt egale.*

## 1.5. POZIȚIA RELATIVĂ[1] A DOUĂ CERCURI

În figura 27 se văd un cerc $O$ și alte cercuri $A$, $B$, $C$, ... Cercul $A$ are două puncte comune cu cercul $O$. Aceste două cercuri se taie, ele sînt *secante*. Cercul $B$ are un singur punct comun cu cercul $O$ și fiecare din aceste cercuri este situat în afara celuilalt. Cercurile $O$ și $B$ sînt *tangente exterior*. Cercul $C$ este de asemenea tangent cercului $O$, dar este situat în interiorul lui; aceste două cercuri sînt *tangente interior*. Cercul $D$ n-are nici un punct comun cu cercul $O$; el este *exterior* cercului $O$. Nici cercul $E$ n-are nici un punct comun cu cercul $O$, dar el este *interior cercului O*.

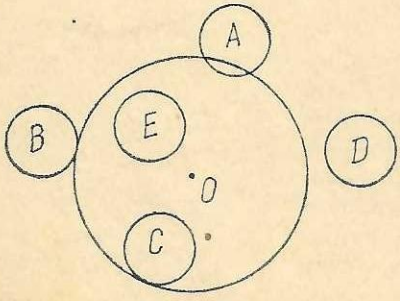


Fig. I.27

[1] Unul față de celălat.

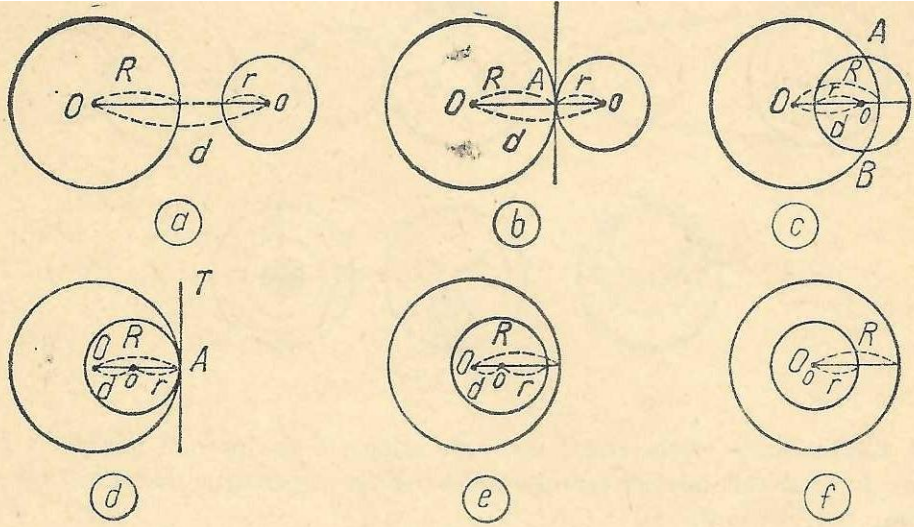



Fig. 1.28

Poziția unui cerc față de un alt cerc depinde de razele celor două cercuri, precum și de distanța dintre centrele lor.

Pentru a studia poziția relativă a două cercuri considerăm (fig. 28) două cercuri $(C)$ și $(c)$, notăm centrele lor cu $O$ și $o$, și distanța lor cu $d$, $d = Oo$. La început cercurile au poziția din figura 28-*a*. Ne închipuim că ținem cercul $(C)$ fix și mișcăm cercul $(c)$, ca un disc circular, astfel încît centrul lui să alunece pe dreapta $Oo$ de la dreapta spre stînga.

Distanța $d$ se va micșora și cele două cercuri vor ocupa unul față de altul toate pozițiile posibile.

*1.* $d > R + r$ (fig. 28-*a*). În acest caz, cercurile sînt *exterioare* unul celuilalt, ele nu au nici un punct comun $(C) \cap (c) = \emptyset$.

*2.* Dacă apropiem cercul mic de cel mare, cele două cercuri rămîn un timp exterioare unul celuilalt, pînă cînd cercul mic ajunge în poziția din figura 28-*b*, $d = R + r$, și cercurile au un singur punct comun $A$, care aparține liniei centrelor. Cele două cercuri sînt *tangente exterior*. Dacă ridicăm în $A$ perpendiculara $AT$ pe linia centrelor, ea este tangentă la ambele cercuri.

*3.* Cînd mișcăm cercul mic puțin spre stînga, distanța centrelor devine mai mică decît suma razelor, $d < R + r$, și cele două cercuri se taie în două puncte $A$ și $B$. Ele sînt *secante* (fig. 28-*c*).

Dacă continuăm să micșorăm dinstanța centrelor, cercurile rămîn secante pînă cînd cercul mic ajunge în poziția din figura 28-*d*. Acum $Oo = OA - oA$, adică $d = R - r$, și cercurile sînt secante dacă $d > R - r$. Așadar, dacă $d < R + r$ și $d > R - r$, cercurile sînt secante, $(C) \cap (c) = \{A, B\}$.

*4.* În figura 28-*d*, se vede că, dacă $d = R - r$, cercurile au un singur punct comun, $A$, care aparține liniei centrelor $(C) \cap (c) = A$. Ele sînt *tangente interior*. Perpendiculara $AT$ ridicată în $A$ pe dreapta $Oo$ este tangentă la ambele cercuri.

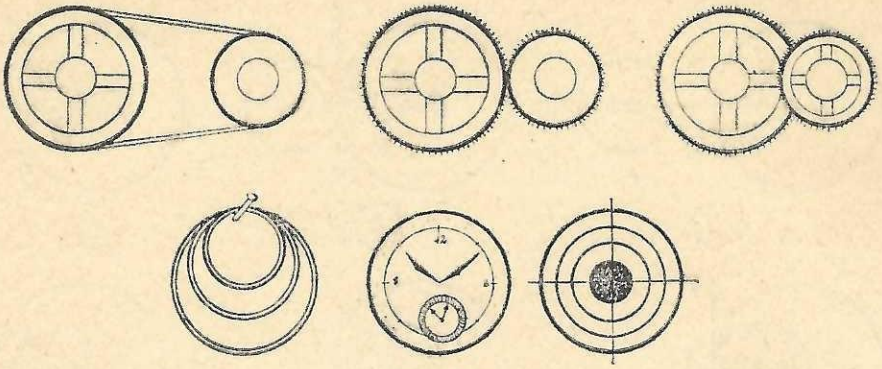


Fig. I.29

5. Cînd mişcăm puţin cercul mic spre stînga, $d$ devine mai mic decît $R - r$ şi cercul mic devine interior cercului mare (fig. 28-$e$), cercurile nu au nici un punct comun, $(C) \cap (c) = \emptyset$.

Cînd centrele cercurilor coincid, se spune că sînt *concentrice*.

Tabelul de mai jos rezumă cele explicate:

| | |
|---|---|
| $d > R + r$ | *cercuri exterioare,* |
| $d = R + r$ | *cercuri tangente exterior,* |
| $d < R + r, d > R - r$ | *cercuri secante,* |
| $d = R - r$ | *cercuri tangente interior,* |
| $d < R - r$ | *un cerc interior celuilalt.* |

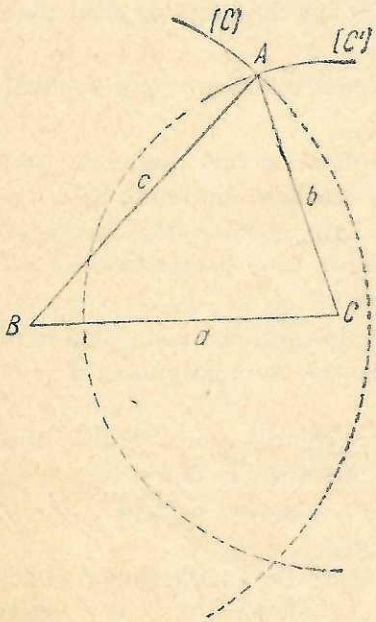



Fig. I.30

2. **Situaţii din practică.** În figura 29 se văd unele situaţii din practică în care apar două cercuri în diferite poziţii: două roţi legate printr-o curea de transmisie; două roţi dinţate; o roată dinţată angrenată cu marginea interioară a unei alte roţi; mai multe cercuri de mărimi diferite prinse de acelaşi cui; cadranul unui ceas cu secundar; un disc pentru tragere la ţintă.

3. **Observare.** Ştim că, pentru a construi un triunghi $ABC$ cînd se cunosc toate laturile sale, $BC = a$, $CA = b$ şi $AB = c$, se procedează astfel (fig. 30). Se trasează un segment $BC = a$, apoi un arc de cerc $(C)$ cu centrul în $B$ şi cu raza $c$ şi un arc de cerc $(C')$ cu centrul în $C$ şi cu raza $b$. Fie $(C) \cap (C') = A$. Triunghiul $ABC$ este triunghiul căutat.

Aflarea vîrfului $A$ revine astfel la aflarea intersecţiei a două cercuri. Din cele de mai sus rezultă că, dacă $a < b + c$ şi $a > b - c$, triunghiul există. S-ar părea deci că am demonstrat care este condiţia pe care trebuie să o îndepli-

neasică trei segmente $a$, $b$ și $c$ ca să se poată construi din ele un triunghi. În Geometria pentru clasa a VI-a acest lucru s-a dat fără demonstrație (6.1.1). De fapt, nici aici nu s-a dat nici o demonstrație. Toate rezultatele au fost deduse din figură.

## 1.6. UNGHI ÎNSCRIS ÎN CERC

1. **Unghiuri și arce.** În cele ce urmează vom stabili unele relații între unghiuri și arce. Dacă unghiurile și arcele se măsoară în grade, minute și secunde se spune că un unghi este egal cu un arc dacă amîndouă au același număr de grade, minute și secunde. De exemplu, dacă un arc $AB$ are 35° și un unghi $C$ are de asemenea 35° se spune că unghiul $C$ este egal cu arcul $AB$ și se scrie $\hat{C} = \widehat{AB}$. Aici nu este vorba de egalitatea a două figuri, ci de egalitatea a două numere.

2. **Unghi format de o tangentă și o secantă.** Fie $MT$ o tangentă și $MA$ o secantă a unui cerc (fig. 31). Între unghiul $\widehat{AMT} = \hat{1}$ format de ele și arcul $\widehat{AM}$ pe care-l subîntinde secanta există o relație simplă.

Unim centrul $O$ cu punctul $M$, ducem raza $OB$ perpendicular pe $MA$ și fie $OB \cap MA = C$. $\hat{1} + \hat{3} = 90°$, căci raza $OM$ este perpendiculară pe tangentă; și $\hat{2} + \hat{3} = 90°$, căci triunghiul $OMC$ este dreptunghic. Rezultă că $\hat{1} = \hat{2}$, căci au același complement. $\hat{2} = \widehat{MB}$ (unghi la centru) și $\widehat{MB} = \frac{\widehat{MA}}{2}$, căci raza perpendiculară pe coarda $MA$ împarte arcul $MA$ în două părți egale. Din $\widehat{AMT} = \hat{2}$ și $\hat{2} = \frac{\widehat{MA}}{2}$ rezultă că $\widehat{AMT} = \frac{\widehat{MA}}{2}$.

Să calculăm unghiul $AMS$. $\widehat{AMS} = 180° - \hat{1} = 180° - \frac{\widehat{MA}}{2} = \frac{360° - \widehat{MA}}{2}$.

Dar $360° - \widehat{MA} = \widehat{MDA}$, deci $\widehat{AMS} = \frac{\widehat{MDA}}{2}$.

*Unghiul format de o tangentă la un cerc și o secantă care trece prin punctul ei de contact este egal cu jumătatea arcului subîntins de secantă.*

Prin arc subîntins de secantă se înțelege arcul situat în interiorul unghiului considerat.

*Exemplu.* Dacă $\widehat{AM} = 100°$, $\widehat{AMT} = 100° : 2 = 50°$; $\widehat{ADM} = 360° - 100° = 260°$, $\widehat{AMS} = 260° : 2 = 130°$.

3. **Unghi înscris.** Un unghi al cărui vîrf aparține unui cerc și ale cărui laturi sînt secante ale cercului se numește *unghi înscris în cerc* sau, scurt, *unghi înscris.*

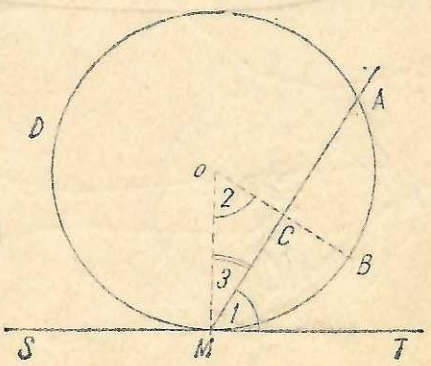


Fig. I.31

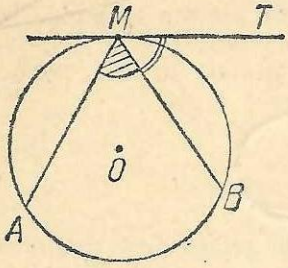


Fig. I.32

În figura 32 unghiul $AMB$ este un unghi înscris. Arcul $AB$ este cuprins între laturile sale.

Între un unghi înscris și arcul cuprins între laturile sale există o legătură strînsă. Dacă ținem latura $MA$ fixă și rotim latura $MB$ în jurul punctului $M$ astfel încît unghiul să crească, arcul $AB$ crește și el. Pentru a vedea mai bine care este această legătură, ducem în $M$ tangenta la cerc. Unghiul înscris este diferența a două unghiuri:

$$\widehat{AMB} = \widehat{AMT} - \widehat{BMT}.$$

Conform teoremei precedente,

$$\widehat{AMT} = \frac{\overset{\frown}{MBA}}{2}, \quad \widehat{BMT} = \frac{\overset{\frown}{MB}}{2},$$

deci

$$\widehat{AMB} = \frac{\overset{\frown}{MBA}}{2} - \frac{\overset{\frown}{MB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{MBA} - \overset{\frown}{MB}}{2}.$$

Dar $\overset{\frown}{MBA} - \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{AB}$. Deci

$$\widehat{AMB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}.$$

*Un unghi înscris este egal cu jumătatea arcului cuprins între laturile sale.*

4. **Aplicație numerică.** *În figura 33 se dă* $\overset{\frown}{AB} = 80°$, $\overset{\frown}{BC} = 110°$. *Se cer unghiurile triunghiului* $ABC$.

Tot cercul are 360°; 80° + 110° = 190°; 360° − 190° = 170°, deci $\overset{\frown}{AC} = 170°$. Unghiul $A$ este un unghi înscris și cuprinde între laturi un arc de 110°, deci el are 110° : 2 = 55°. Unghiul $B$ cuprinde între laturi un arc de 170°, deci el are 170° : 2 = 85°. Unghiul $C$ cuprinde între laturi un arc de 80°, deci el are 80° : 2 = 40°.

5. **Consecințe.** *1.* În figura 34-a se vede un unghi $A$ înscris în cerc și unghiul la centru $O$ care cuprinde între laturi același arc $BC$. $\hat{O} = \overset{\frown}{BC}$ și $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, deci $\hat{A} = \frac{\hat{O}}{2}$.

*Un unghi înscris în cerc este jumătate din unghiul la centru care cuprinde între laturi același arc.*

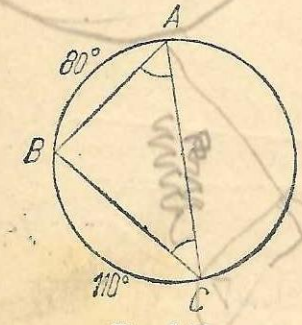


Fig. I.33

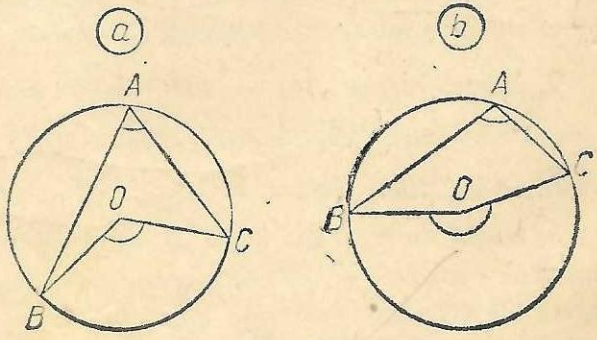


Fig. I.34

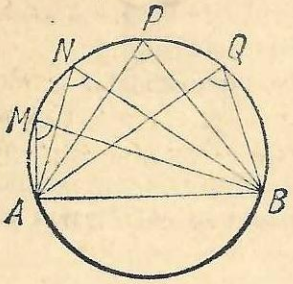


Fig. I.35

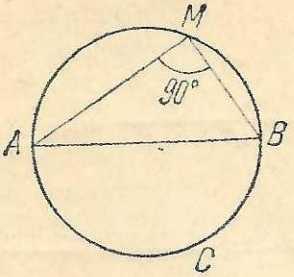


Fig. I.36

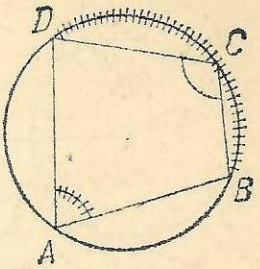


Fig. I.37

Dacă $\hat{A} > 90°$, ca în figura 34-b, trebuie considerat unghiul neconvex, mai mare decît 180°, format de razele $OB$ și $OC$.

*2.* În figura 35 se văd mai multe unghiuri $M$, $N$... înscrise în același cerc și care cuprind între laturi același arc $BC$. Fiecare din aceste unghiuri este egal cu jumătate din arcul $AB$, deci aceste unghiuri sînt egale între ele.

*Toate unghiurile înscrise în același cerc și care cuprind între laturi același arc sînt egale între ele.*

*3.* Acest adevăr se enunță și sub altă formă. Din punctul $M$ (fig. 35) segmentul $AB$ se vede sub unghiul $M$, din punctul $N$, același segment se vede sub unghiul $N$. Dar $\hat{M} = \hat{N}$; rezultă că din $M$ și $N$ segmentul $AB$ se vede sub același unghi. Același lucru se poate spune și cu privire la punctele $P$, $Q$ etc.

*Din toate punctele arcului $AMB$, coarda $AB$ este văzută sub același unghi.*

*4.* Partea din plan mărginită de o coardă și arcul care o subîntinde, de exemplu coarda $AB$ și arcul $AMB$, se numește *segment de cerc*. Unghiurile $AMB$, $ANB$ ș.a.m.d. sînt înscrise în același segment de cerc.

*Toate unghiurile înscrise în același segment de cerc sînt egale.*

*5.* În figura 36, $AB$ este un diametru al cercului, deci segmentul de cerc situat deasupra dreptei $AB$ este un semicerc și unghiul $AMB$ este înscris într-un semicerc. Arcul $ACB$ cuprins între laturile unghiului este o jumătate de cerc, deci are 180°. Unghiul $M$ va avea $180° : 2 = 90°$, adică va fi drept.

*Un unghi înscris într-un semicerc este un unghi drept.*

6. **Patrulaterul inscriptibil.** *1.* Se știe că oricărui triunghi i se poate circumscrie un cerc. Punem problema următoare. Fiind dat un patrulater, i se poate circumscrie un cerc? Cu alte cuvinte, există un cerc care să treacă prin toate vîrfurile sale? În cazul patrulaterului din figura 37 acest lucru este posibil; în cazul patrulaterului din figura 38, nu, căci există un singur cerc care trece prin vîrfurile $A$, $B$ și $D$, și acest cerc nu trece prin vîrful $C$. Dacă există un cerc care trece prin toate vîrfurile unui patrulater, se spune că acel patrulater este *inscriptibil*. Patrulaterul din figura 37 este inscriptibil, cel din figura 38 nu este inscriptibil. Dacă se construiește și cercul care trece prin toate vîrfurile

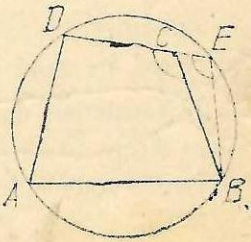


Fig. I.38

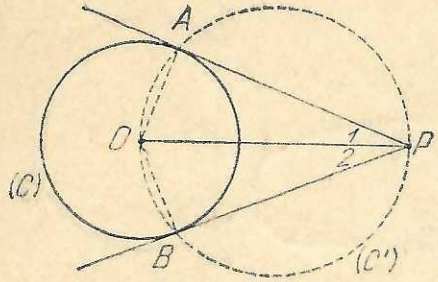



Fig. I.39

patrulaterului, patrulaterul este *înscris* în cerc, iar cercul este *circumscris* patrulaterului.

Care este condiția ca un patrulater să fie inscriptibil?

*2.* Patrulaterul din figura 37 este inscriptibil, căci este înscris. Unghiul $A$ este un unghi înscris și cuprinde între laturi arcul $BCD$ (hașurat), deci

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2}.$$

Unghiul $C$, opus lui $A$, este de asemenea înscris și cuprinde între laturi arcul $BAD$ deci

$$\hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2}.$$

Rezultă că

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2}.$$

Dar suma arcelor $BCD$ și $BAD$ este un cerc întreg, care are 360°, deci

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

În același fel se poate demonstra că $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$. Deci, într-un patrulater inscriptibil, două unghiuri opuse sînt suplementare.

*3.* Reciproc, considerăm (fig. 38) un patrulater $ABCD$, în care unghiurile opuse $A$ și $C$ sînt suplementare. Să vedem dacă este inscriptibil. Construim cercul care trece prin punctele $A$, $B$ și $D$. Dacă acest cerc n-ar trece prin vîrful $C$, el ar tăia dreapta $DC$ într-un punct $E$, deosebit de punctul $C$. Atunci patrulaterul $ABED$ ar fi înscris, deci unghiul $E$ ar fi suplementul unghiului $A$. Dar s-a dat că unghiul $C$ este suplementul unghiului $A$. Ar urma că $\hat{C} = \hat{E}$. Acest lucru nu este posibil, căci unghiul $C$ este un unghi exterior al triunghiului $CBE$, deci $\hat{C} = \hat{E} + \widehat{CBE}$, ceea ce înseamnă că $\hat{C} > \hat{E}$. Rezultă că este imposibil ca cercul care trece prin punctele $A$, $B$ și $D$ să nu treacă și prin punctul $C$. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Deci, un patrulater care are două unghiuri opuse suplementare este inscriptibil.

*Într-un patrulater inscriptibil, două unghiuri opuse sînt suplementare; un patrulater care are două unghiuri opuse suplementare este inscriptibil.*

**7. Tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc.** Fie $(C)$ un cerc și $P$ un punct situat în exteriorul lui (fig. 39).

Pentru a duce din $P$ tangentele la cerc, procedăm astfel:

*1.* Unim $O$ cu $P$.

*2.* Construim cercul $(C')$ cu diametrul $OP$.

3. Fie $(C) \cap (C') = \{A, B\}$; unim $P$ cu $A$ și cu $B$. Dreptele $PA$ și $PB$ sînt tangentele căutate.

În adevăr, unghiul $OAP$ este înscris într-un semicerc (punctat), deci este unghi drept. $OA$ este o rază a cercului $(C)$ și $AP \perp OA$, deci $AP$ este perpendicular pe $OA$ în punctul $A$. Deci $AP$ este tangentă la cercul $(C)$.

În același fel se vede că și $PB$ este tangentă la cercul $O$.

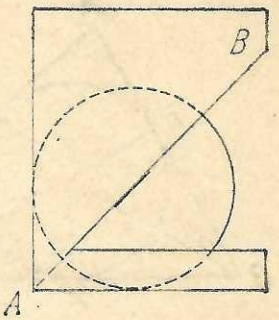


Fig. I.40

8. În figura 39, triunghiul $OAP$ este egal cu triunghiul $OBP$ (IC). Rezultă că: $PA = PB$, $\widehat{APO} = \widehat{OPB}$, $\widehat{AOP} = \widehat{BOP}$.

*Tangentele duse din același punct la un cerc sînt egale. Dreapta care unește punctul cu centrul cercului este bisectoarea unghiului format de tangente și a unghiului format de razele duse la punctele de contact.* Mai scurt: *Dreapta $OP$ este o axă de simetrie a figurii.*

9. **Aplicație practică.** Din această teoremă rezultă că bisectoarea unghiului format de două tangente trece prin centrul cercului. Pe aceasta se bazează instrumentul din figura 40 care poate fi folosit pentru a determina centrul unui disc circular. Este o placă din care lipsește o parte în formă de triunghi, iar $AB$ este bisectoarea unghiului $A$.

Așezăm placa peste disc astfel încît laturile unghiului $A$ să fie tangente la disc (marginile plăcii formează un unghi drept). Atunci știm că bisectoarea $AB$ trece prin centrul discului. Ducem pe disc o linie de-a lungul marginii $AB$. Rotim discul și ducem încă o linie de-a lungul marginii $AB$. Punctul în care se taie aceste linii este centrul discului. Acest instrument se poate confecționa ușor din carton.

## 1.7. CONSTRUCȚII DE CERCURI. RACORDĂRI

1. *Se dă un segment $AB$ și o dreaptă $d$* (fig. 41). *Să se construiască un cerc care să treacă prin punctele $A$ și $B$ și să aibă centrul pe dreapta $d$.*

Construcția se face astfel:

1. Se duce mediatoarea segmentului $AB$.

2. $O$ fiind punctul în care mediatoarea taie dreapta $d$, se construiește cercul cu centrul în $O$ și cu raza $OA$.

Acest cerc îndeplinește condițiile problemei. În adevăr, el are centrul în $O$ pe dreapta $d$ și trece prin $A$. El trece și prin $B$, căci, punctul $O$ fiind un punct al mediatoarei segmentului $AB$, urmează că $OB = OA$.

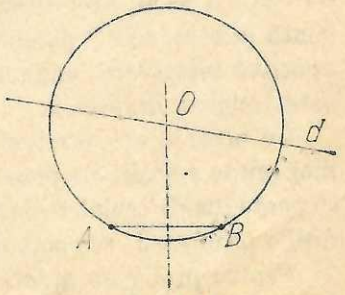


Fig. I.41

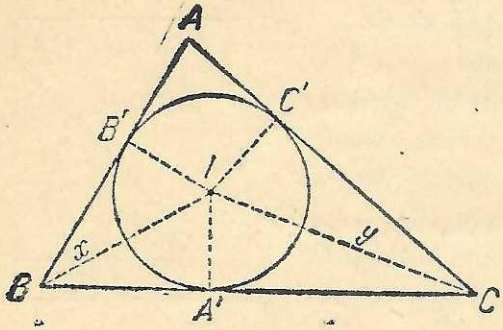


Fig. I.42

**2.** *Să se construiască un cerc care să fie tangent la cele trei laturi ale unui triunghi.*

Fie $ABC$ triunghiul dat (fig. 42). Construcția se face astfel:

1. Se duce bisectoarea $Bx$ a unghiului $B$.

2. Se duce bisectoarea $Cy$ a unghiului $C$.

3. Fie $Bx \cap Cy = I$; se coboară din $I$ perpendiculara $IA'$ pe $BC$.

4. Se construiește cercul cu centrul în $I$ și cu raza $IA'$.

Acest cerc va fi tangent la toate laturile triunghiului. În adevăr, ducem din $I$ perpendiculara $IB'$ pe latura $AB$. Deoarece $I \in Bx$ ($IA' = IB'$), deci cercul nostru va trece și prin punctul $B'$. Dreapta $AB$ este perpendiculară pe raza $IB'$ în punctul $B'$, deci ea este tangentă la cerc. În același fel se vede că și latura $AC$ este tangentă la cerc.

Cercul astfel construit se numește *cerc înscris triunghiului*, triunghiul se numește *circumscris cercului*.

**3.** *În figura 43-a dreapta d reprezintă o autostradă și dreapta d' reprezintă o șosea în curs de construcție. Ea trebuie unită cu autostrada printr-o porțiune în formă de arc de cerc, care să aibă o rază dată R. Să se traseze această parte a șoselei.*

Șoseaua n-are voie să formeze un „cot". Arcul de cerc trebuie să se racordeze cu dreapta, adică el trebuie să fie tangent dreptei. Deci se pune problema: *Să se construiască un cerc de rază dată R, tangent la două drepte neparalele d și d'.*

Construcția se face astfel.

1. Fie $d \cap d' = A$. Se duce bisectoarea unghiului $A$.

2. Într-un punct oarecare $M$ al dreptei $d'$ se ridică perpendiculara pe $d'$ și se poartă pe ea un segment $MN$ egal cu $R$.

3. Prin punctul $N$ se duce paralela la $d'$.

4. Fie $O$ intersecția acestei paralele cu bisectoarea. Se construiește cercul cu centrul în $O$ și cu raza $R$. Acest cerc îndeplinește condițiile cerute.

În adevăr, fie $P$ piciorul perpendicularei coborîte din punctul $O$ pe dreapta $d'$. $OP = MN = R$, deci cercul trece prin punctul $P$ și, deoarece $d' \perp OP$, $d'$ este tangentă la cerc. Fie $Q$ piciorul perpendicularei duse din $O$ pe $d$. Deoarece punctul $O$ aparține bisectoarei unghiului $A$, $OQ = OP$, deci cercul trece și prin punctul $Q$ și este tangent dreptei $d$.

Cu aceasta am rezolvat numai în parte problema. Problema teoretică admite mai multe soluții. Se poate duce bisectoarea unghiului obtuz din $A$ și punctul $N$ se poate lua de cealaltă parte a dreptei $d'$, deci există patru cercuri care satisfac condițiile problemei. Ele sînt indicate în figura 43-b.

Pentru problema practică vin în considerație numai cercurile $O_1$ și $O_2$. Șoseaua $d'$ se ramifică: o parte are axa $MP_1Q_1$ și cealaltă are axa $MP_2Q_2$. Pe prima se trece

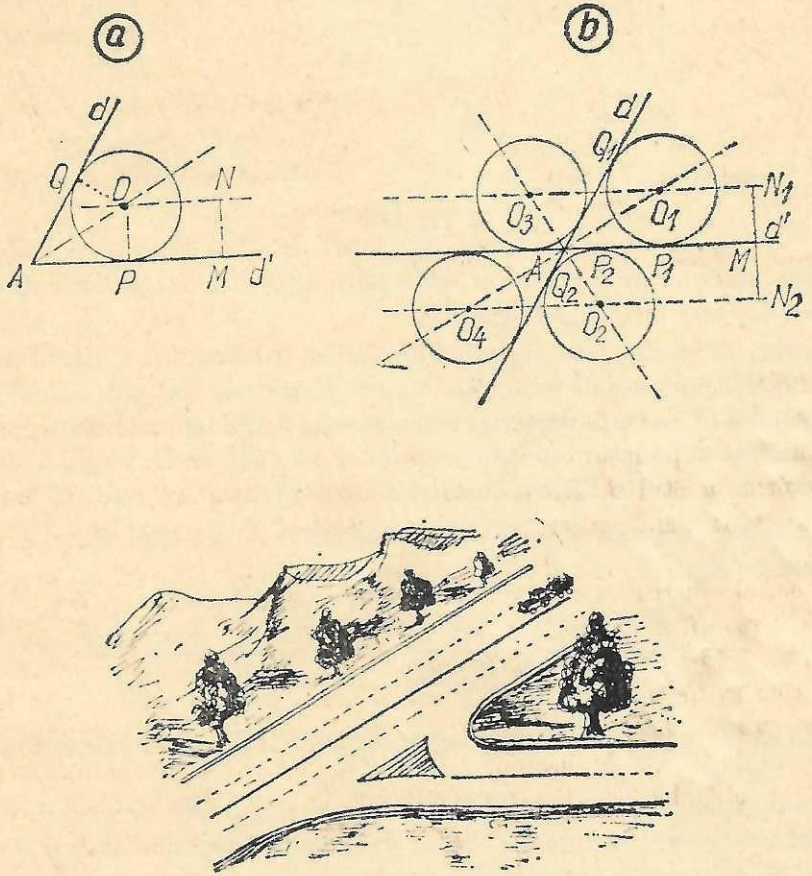



Fig. I.43

din șosea pe autostradă, și prin a doua din autostradă pe șosea. (Figura 43-b se poate interpreta și astfel: linia $MP_1Q_1$ reprezintă marginea din dreapta și linia $MP_2Q_2$ marginea din stînga a șoselei $d'$.)

## 18. POLIGOANE REGULATE

Poligoanele pot avea formele cele mai variate. De exemplu, în figura 44 se văd patru poligoane; ele diferă mult unul de altul. Poligoanele cele mai importante sînt poligoanele regulate.

1. **Definiție.** *Un poligon regulat este un poligon în care toate laturile sînt egale între ele și toate unghiurile sînt egale între ele.*

În figura 45 se vede un *hexagon regulat*. Un patrulater regulat este un *pătrat* (fig. 46); un triunghi regulat este *echilateral* (fig. 47).

2. **Construcția poligoanelor regulate.** Poligoanele regulate se construiesc cu ajutorul cercului. La baza acestor construcții stau următoarele teoreme:

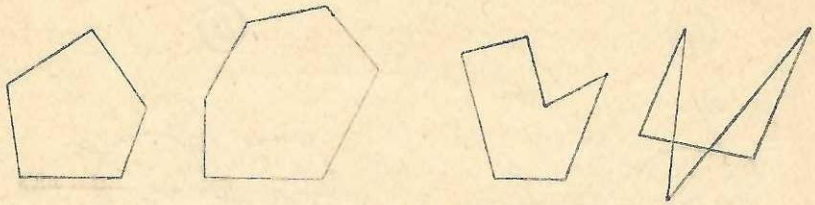


Fig. I.44

1. *Dacă împărțim un cerc în mai multe părți egale și unim punctele de diviziune consecutive, obținem un poligon regulat.*

În adevăr, să presupunem că, printr-un mijloc oarecare (cu ajutorul raportorului), am împărțit un cerc, de exemplu, în cinci părți egale (fig. 48). Să demonstrăm că pentagonul $ABCDE$ este regulat. Pentru aceasta rotim figura în jurul punctului $O$ în sensul indicat de săgeată astfel încît vîrful $A$ să cadă în $B$. Unghiul de rotație este de $360° : 5 = 72°$. În această rotație, imaginea laturii $AB$ este $BC$ și imaginea unghiului $A$ este unghiul $B$, deci $AB = BC$, $\hat{A} = \hat{B}$ ș.a.m.d. Rotația se poate descrie prin tabelul[1]

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $AB$ | $BC$ | $CD$ | $DE$ | $EA$ | $\hat{A}$ | $\hat{B}$ | $\hat{C}$ | $\hat{D}$ | $\hat{E}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $A$ | $BC$ | $CD$ | $DE$ | $EA$ | $AB$ | $\hat{B}$ | $\hat{C}$ | $\hat{D}$ | $\hat{E}$ | $\hat{A}$ |

Rezultă că toate laturile și toate unghiurile poligonului sînt egale între ele; poligonul este regulat.

Poligonul astfel construit este *înscris* în cerc, și cercul este *circumscris* poligonului. Centrul acestui cerc se numește *centrul poligonului*. Perpendiculara $OM$ coborîtă din centru pe o latură se numește *apotema* poligonului.

2. *Dacă împărțim un cerc în mai multe părți egale și ducem în punctele de diviziune tangente la cerc, se formează un poligon regulat.*

Fie din nou un cerc împărțit în cinci părți egale, punctele de diviziune fiind $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ (fig. 49). Ducem tangentele la cerc în aceste puncte. Se formează pentagonul $MNPQR$. Să demonstrăm că acest pentagon este regulat.

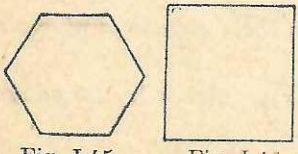


Fig. I.45



Fig. I.46

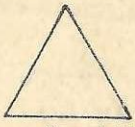


Fig. I.47

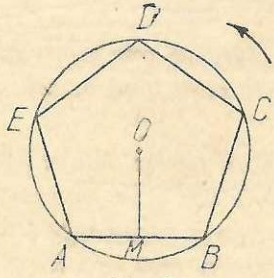



Fig. I.48

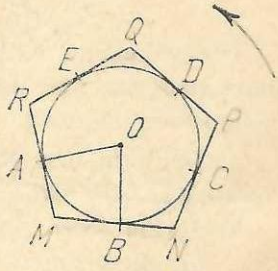



Fig. I.49

[1] Cu privire la modul în care se întocmește acest tabel, v. Geometrie clasa a VI-a, 5.7.1.

Pentru aceasta, rotim figura ca mai înainte cu 72° în jurul punctului $O$. În această rotație, imaginea punctului $A$ este $B$, imaginea punctului $B$ este $C$ ș.a.m.d. Imaginea razei $OA$ este $OB$, imaginea razei $OB$ este $OC$ ș.a.m.d. Deoarece $RM \perp OA$ și $MN \perp OB$, imaginea dreptei $RM$ este dreapta $MN$; la fel se arată că imaginea dreptei $MN$ este $NP$. Dar $RM \cap MN = M$ și $MN \cap NP = N$, deci imaginea vîrfului $M$ este vîrful $N$. La fel se arată că imaginea vîrfului $N$ este vîrful $P$ ș.a.m.d. Rotația se poate descrie prin tabelul:

$$\begin{array}{cccccccc} A & B & C \ldots & OA & OB \ldots & RM & MN \ldots & \hat{M} \ldots \\ \hline B & C & D \ldots & OB & OC \ldots & MN & NP \ldots & \hat{N} \ldots \end{array}$$

Imaginea fiecărui vîrf al poligonului este vîrful următor. Rezultă că imaginea fiecărei laturi este latura următoare, deci toate laturile sînt egale între ele, și imaginea fiecărui unghi este unghiul următor, deci toate unghiurile sînt egale între ele. Poligonul este regulat.

3. **Pătratul înscris.** Pentru a construi un pătrat înscris în cerc, trebuie să împărțim cercul în patru părți egale. Este de ajuns să ducem doi diametri perpendiculari $AC$ și $BD$ (fig. 50). Unghiurile formate în jurul punctului $O$ fiind egale între ele, arcele $AB$, $BC$, $CD$ și $DA$ sînt de asemenea egale între ele, deci patrulaterul $ABCD$ este regulat, deci un pătrat.

4. **Hexagonul înscris.** În figura 51 se văd exemple de hexagoane regulate.

Presupunem că, printr-un mijloc oarecare, am reușit să construim un hexagon regulat înscris în cerc (fig. 52).

Examinăm triunghiul $AOB$. El este isoscel, căci $OA = OB$ (raze ale cercului). Arcul $AB$ are $360° : 6 = 60°$, deci $\hat{O} = 60°$. Rezultă că $\hat{A} + \hat{B} = 180° - 60° = 120°$. Aceste unghiuri fiind egale între ele, fiecare are $120° : 2 = 60°$. Deci, toate unghiurile acestui triunghi au cîte 60°, de unde rezultă că acest triunghi este echilateral:

$$AB = OA = OB = R.$$

Așadar, latura hexagonului înscris în cerc este egală cu raza.

De aici rezultă următoarea construcție. Luăm o deschidere de compas egală cu raza cercului. Așezăm un vîrf al compasului într-un punct oarecare $A$ al cercului și marcăm cu celălalt vîrf un punct $B$ al cercului; mutăm vîrful de oțel al compa-

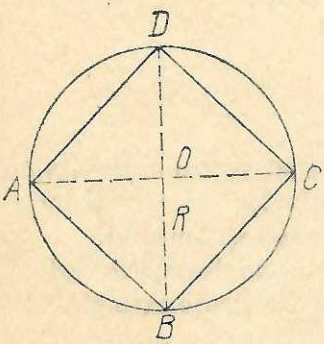


Fig. I.50

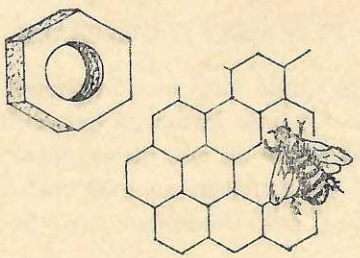


Fig. I.51

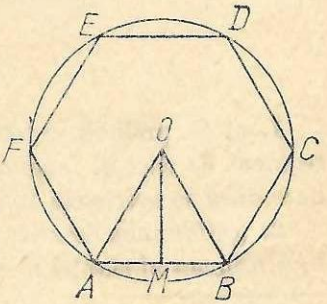


Fig. I.52

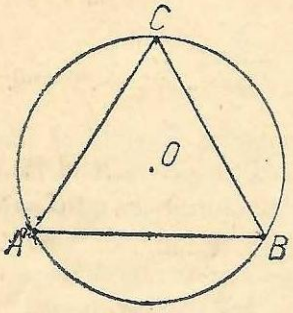



Fig. I.53

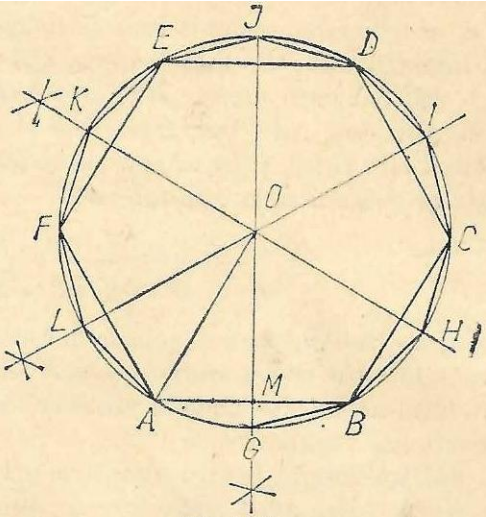



Fig. I.54

sului în $B$ şi marcăm un punct $C$ al cercului; continuînd în acest fel, ajungem din nou în $A$. Nu rămîne decît să unim aceste puncte.

5. **Triunghiul echilateral înscris.** Pentru a înscrie într-un cerc un triunghi echilateral, trebuie să împărţim cercul în trei părţi egale. Împărţim cercul în şase părţi egale şi unim punctele de diviziune din două în două (fig. 53).

6. **Alte poligoane regulate ce se pot construi.** Pe baza construcţiilor cunoscute (pătratul, hexagonul regulat şi triunghiul echilateral) se pot construi şi alte poligoane regulate.

Fie, de exemplu, $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris într-un cerc (fig. 54). Mediatoarea laturii $AB$ împarte arcul $AB$ în două părţi egale, $\widehat{AG}$ şi $\widehat{GB}$; fiecare dintre aceste arce este a 12-a parte din cerc. Dacă ducem şi mediatoarele celorlalte laturi ale hexagonului, cercul se împarte în 12 părţi egale. $AGBHCIDJEKFL$ este un dodecagon regulat. Pornind de la acest poligon se poate construi, prin acelaşi procedeu, un poligon regulat cu 24 de laturi, apoi un poligon cu 48 de laturi ş.a.m.d.

În general, dacă avem un poligon regulat cu $n$ laturi, putem construi prin acest procedeu un poligon regulat cu $2n$ laturi.

## EXERCIŢII

### PROPRIETĂŢI GENERALE

1. a) Se prelungesc toate razele unui cerc în partea opusă centrului cu cîte un segment de aceeaşi lungime. Ce linie formează extremităţile lor? b) Aceeaşi întrebare dacă se scurtează toate razele cu cîte un segment de aceeaşi lungime?

2. (o)[1] Ce linie descrie: a) un punct al copertei unei cărţi cînd deschidem cartea? b) Un punct al clanţei unei uşi cînd deschidem uşa? Să se dea şi alte exemple.

[1] Semnul (o) indică un exerciţiu oral, semnul* un exerciţiu mai greu şi (p) o lucrare practică.

3. Fie $OA$ și $OB$ două raze ale unui cerc și $M$ și $N$ mijloacele lor. $\hat{O} = 74°$. Să se afle unghiurile $OMN$ și $ONM$.

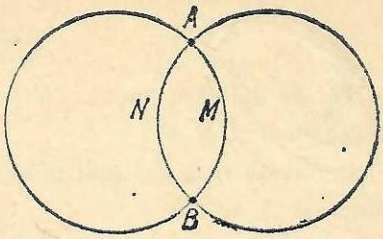


Fig. I.55

4. Într-un cerc cu raza de 3 cm se duc două raze $OA$ și $OB$ care fac un unghi de 60°. Ce lungime are coarda $AB$?

5. Într-un cerc se duce o coardă $AB$ egală cu raza lui. Fie $O$ centrul cercului. Să se afle unghiurile triunghiului $OAB$.

6. Fie $AB$ un diametru al unui cerc și $OC$ o rază, $\widehat{AOC} = 50°$. Să se calculeze unghiurile triunghiului $BOC$.

7. (o) Se consideră un cerc cu raza de 5 cm și se notează cu $O$ centrul lui, apoi se iau punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ unde $OA = 2{,}8$ cm, $OB = 6{,}3$ cm, $OC = 7$ cm, $OD = 4{,}9$ cm. Care din aceste puncte este în interiorul cercului și care în exterior?

8. Cercurile din figura 55 sînt egale. Să se compare arcul $AMB$ cu arcul $ANB$.

9. În figura 56 centrul cercului mic aparține cercului mare. Să se compare arcul $OA$ cu arcul $OB$.

10. Cercurile din figura 57 sînt egale și fiecare trece prin centrul celuilalt. Cîte grade au arcele $AMB$ și $ANB$.

11. Să se demonstreze că diametrul unui cerc este mai mare decît orice coardă care nu trece prin centrul cercului.

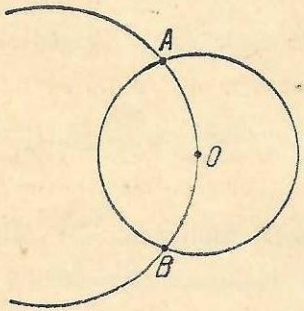


Fig. I.56

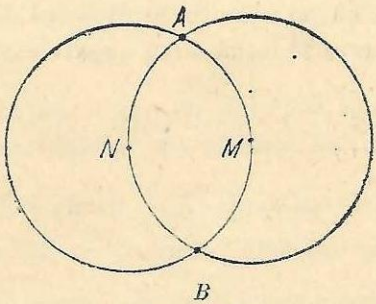


Fig. I.57

---

R. — 3. 53°; 53°. 4. $AB = 3$ cm. 5. Cîte 60°. 6. Ce fel de triunghi este $OBC$? 130°; 25°; 25°. 8. Se duce coarda $AB$. 9. Se duc coardele $OA$ și $OB$. 10. Se află întîi unghiurile triunghiului $AMN$. $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 120°$. 11. Fie $AB$ o coardă care nu trece prin centru și $O$ centrul cercului. În triunghiul $OAB$, $AB < OA + OB$.

**12.** Se dă un segment $AB = 6$ cm. Să se construiască mai multe cercuri care să treacă prin $A$ și $B$.

Care este raza cea mai mică pe care trebuie să-l aibă un cerc, ca să treacă prin punctele $A$ și $B$?

**13.** Să se circumscrie un cerc unui triunghi: a) ascuțitunghic; b) obtuzunghic; c) dreptunghic.

Să se observe cînd cade centrul înăuntrul triunghiului, cînd în afară și cînd pe o latură a triunghiului.

**14.** Să se traseze un cerc cu ajutorul unui pahar și să se afle centrul lui.

**15.** Să se construiască cu ajutorul unei monede sau al unui pahar mai multe cercuri care să treacă prin același punct. Pe ce linie se află centrele lor?

## TANGENTA ÎNTR-UN PUNCT

**16.** Într-un cerc se duc două raze $OA$ și $OB$ care formează un unghi de 45°, în $B$ se duce tangenta la cerc și se notează cu $C$ intersecția ei cu dreapta $OA$. Să se compare $CB$ cu $OB$.

**17.** Într-un cerc se duc două raze $OA$ și $OB$ care formează un unghi de 110°. În $A$ și $B$ se duc tangentele la cerc și se notează intersecția lor cu $C$. Să se afle unghiul $C$. Să se completeze: Unghiul format de două raze ale unui cerc și unghiul format de tangentele duse la capetele lor sînt...

**18.** Se dă un cerc. Să se găsească un punct $M$ astfel încît tangentele duse din $M$ la cerc să formeze un unghi de 56°.

**19.** Să se ducă într-un cerc o coardă $AB$ care, împreună cu tangentele duse la capetele ei, să formeze un triunghi echilateral.

**20.** Să se construiască un triunghi $ABC$ circumscris unui cerc dat (ale cărui laturi să fie tangente la cerc, v. fig. 42), cînd se dau unghiurile $\hat{A} = 68°$, $\hat{B} = 50°$.

**21.** Într-un punct $A$ al unui cerc se duce tangenta la cerc și se poartă pe ea două segmente egale, $AM = AN$. Să se demonstreze că $OM = ON$, $O$ fiind centrul cercului.

---

**R.—16.** Se compară $\hat{C}$ cu $\hat{O}$; $CB = OB$. **18.** Se construiește $\widehat{AOB} = 180° - 56° = 124°$. **19.** Se construiește $\widehat{AOB} = 180° - 60° = 120°$. **20.** Fie $M$, $N$ și $P$ punctele de contact. Se află întîi unghiurile $PON$ (din patrulaterul $APON$) și $POM$. **21.** $\triangle AOM = \triangle AON$ (LUL).

22. a) În figura 58, $AO \perp OB$, raza cercului este de 5 m, punctul $M$ este mijlocul sfertului de cerc și $AMB$ este tangentă la cerc. Se cere lungimea segmentului $AB$. b) În aceeași figură, se știe că $AMB$ este tangentă la cerc, $MA = MB = OM$. Să se calculeze unghiul $AOB$.

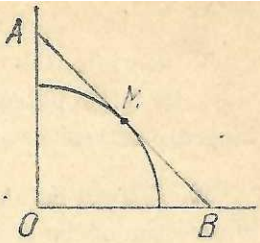


Fig. I.58

23. Se dă o dreaptă $d$ și un punct al ei $A$. Cîte cercuri există care să treacă prin $A$ și să fie tangente la $d$? Ce linie formează centrele acestor cercuri?

24. a) Se dau două drepte paralele. Cîte cercuri există care să fie tangente la ambele drepte? Ce linie formează centrele lor? b) Aceeași problemă în cazul a două semidrepte care formează un unghi.

## SIMETRIA CERCULUI

25. Într-un cerc se duc o rază $OA$ și o coardă $BC$ care trece prin mijlocul ei și este perpendiculară pe ea. Ce fel de patrulater este $OBAC$?

26. Într-un cerc se duce o coardă $AB$ și o tangentă paralelă la $AB$. Fie $G$ punctul ei de contact. Să se compare arcele $CA$ și $CB$.

27. Cercurile din figura 59 au același centru și $AB$ este o secantă oarecare. Să se compare segmentele $AC$ și $DB$.

28. Cercurile din figura 59 au același centru și $FG$ este o tangentă. Să se compare segmentele $FE$ și $EG$.

29. În figura 60, $AB \parallel CD$, $M$ și $N$ sînt mijloacele arcelor $AC$ și $BD$, $BE \parallel DF$. a) Ce poziție are dreapta $MN$ față de dreptele $AB$ și $CD$? b) Să se compare arcele $AC$ și $FE$.

30. Fie $AB$ și $CD$ două coarde egale ale aceluiași cerc, $O$ centrul cercului și $AB \cap CD = E$. Să se demonstreze că semidreapta $EO$ este bisectoarea unghiului $E$. Se vor examina două cazuri: cînd punctul $E$ este exterior cercului și cînd este în interiorul lui.

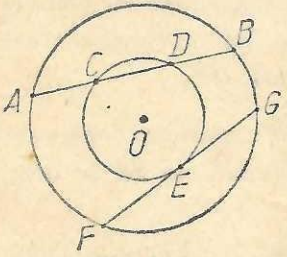


Fig. I.59

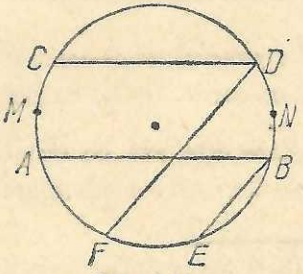


Fig. I.60

---

R.—22. a) Triunghiul $AOM$ este isoscel; $AB = 10$ cm; b) 90°. 23. Perpendiculara în $A$ pe $d$. 24. a) O paralelă la cele două drepte, la distanță egală de ele. b) Bisectoarea unghiului.

31. Se consideră două cercuri care au același centru și se duc două tangente la cercul mai mic. Fie $A$, $B$, $C$ și $D$ punctele în care aceste tangente taie cercul mai mare. Ce fel de patrulater este $ABCD$? Se vor examina două cazuri: cînd cele două tangente se taie în exteriorul cercului și cînd se taie în interiorul lui.

32. Într-un cerc se duc două coarde egale și perpendiculare. Se notează cu $A$ intersecția lor, cu $B$ și $C$ mijloacele lor și cu $O$ centrul cercului. Ce fel de patrulater este $OCAB$?

33. Se duc într-un cerc toate coardele egale cu un segment dat. Ce linie formează mijloacele lor?

## POZIȚIA RELATIVĂ A DOUĂ CERCURI

34. $R$ și $r$ fiind razele a două cercuri și $d$ distanța dintre centrele lor, să se completeze tabelul de mai jos, indicînd în ultima coloană care este poziția relativă a cercurilor.

| R | r | d | poziția |
|---|---|---|---|
| 6 cm | 4 cm | 2 cm | |
| 5 cm | 3 cm | 8 cm | |
| 4 cm | 3 cm | 6 cm | |
| 12 cm | 5 cm | 6 cm | |
| 5 cm | 3 cm | 10 cm | |

35. Fie $R$ și $r$ razele a două cercuri și $d$ distanța dintre centrele lor. a) Se dă $R = 8$ cm, $r = 6$ cm. Între ce limite poate varia $d$ ca cele două cercuri să fie secante? b) Se dă $R = 7$ cm, $r = 4$ cm. Cît de mare trebuie să fie $d$, ca cercurile să fie tangente?

36. Două cercuri egale se taie. Fie $O$ și $P$ centrele lor, $A$ și $B$ punctele lor de intersecție. Ce fel de patrulater este $OABP$?

37. Două cercuri egale sînt tangente. Se duc tangentele lor comune deosebite de cea dusă în punctul lor de contact. Fie $A$, $B$, $C$ și $D$ punctele de contact ale acestor tangente cu cercurile. Ce fel de patrulater este $ABCD$?

38*. a) Care este axa de simetrie a figurii formate din două cercuri secante (fig. 61)? b) Care este mediatoarea segmentului $AB$? c) Să se demonstreze că

---

**R. — 35.** a) Între 2 cm și 14 cm exclusiv. b) 11 cm sau 3 cm. **36.** Romb. **37.** Pătrat. **38.** a) Dreapta $Oo$ fiind o axă de simetrie a fiecăruia dintre cele două cercuri este o axă de simetrie a figurii. b) Dreapta $Oo$. c) Punctele $A$ și $B$ fiind simetrice față de dreapta $Oo$, dreptele $DA$ și $DB$ sînt de asemenea simetrice față de $Oo$, deci și punctele $E$ și $F$. d) Dreptele $AF$ și $BE$ sînt simetrice față de dreapta $Oo$.

$AE = BF$ și $EF \perp Oo$. d) Fie $AF \cap BE = G$. Să se demonstreze că $G \in Oo$.

**39.** Se consideră două cercuri secante. Fie $O$ și $P$ centrele lor, $A$ și $B$ punctele lor de intersecție, $u$ partea din cercul $O$ situată în interiorul cercului $P$ și $v$ partea din cercul $P$ situată în interiorul cercului $O$. Se dă: $u = 50°$, $v = 80°$; se cere unghiul $OAP$.

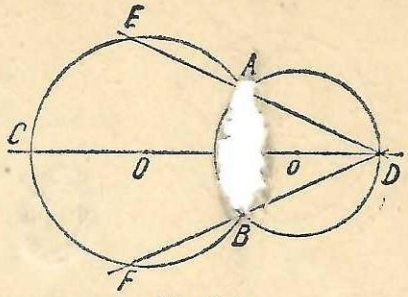


Fig. I.61

UNGHI FORMAT DE O TANGENTĂ ȘI O SECANTĂ

**40.** În figura 62, $\widehat{AB} = 100°$ și $\widehat{BC} = 40°$; dreapta $AT$ este tangentă la cerc. Se cer unghiurile $TAB$, $TAC$ și $BAC$.

**41.** O coardă $AB$ a unui cerc subîntinde un arc de 110°. Se cere unghiul $P$ format de tangentele duse la cerc în punctele $A$ și $B$. b) Aceeași problemă dacă $\widehat{AB} = u (u < 180°)$.

**42.** Într-un cerc se duce o coardă $AB$, în $A$ și $B$ se duc tangentele la cerc și se notează cu $C$ intersecția lor. Ce fel de triunghi este $ABC$?

**43.** În figura 63 s-au dus în punctul $A$ tangentele la cele două cercuri. Se dau arcele $AMB$ și $ANB$ și se cere unghiul $CAD$.

**44.** Figura 64 reprezintă două cercuri tangente în punctul $T$, $AB$ este o dreaptă oarecare $T \in AB$. a) Să se compare arcele $TA$ și $TB$. b) Ce poziție au una față de alta dreptele $OA$ și $PB$? c) Ce poziție au una față de alta tangentele duse în $A$ și $B$ la cele două cercuri? d) Aceeași problemă dacă cercurile sînt tangente interior.

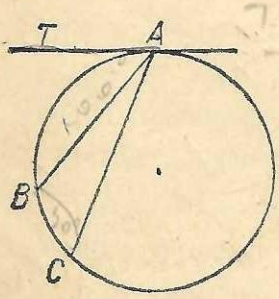


Fig. I.62

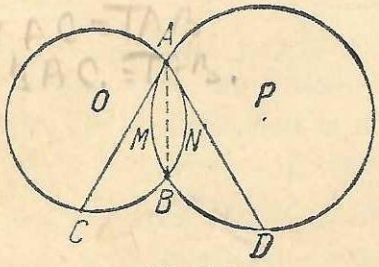


Fig. I.63

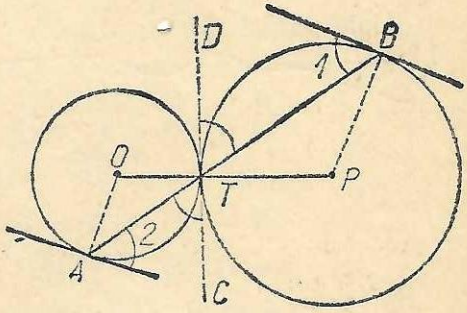


Fig. I.64

**R.—39.** Se folosește suma unghiurilor patrulaterului $OAPB$. $\hat{A} = 115°$. **40.** 50°; 70°; 20°. **41.** a) $\hat{A} = \hat{B} = 55°$; $\hat{P} = 70°$. *Altă soluție.* Se unește centrul $O$ al cercului cu punctele $A$ și $B$ și se află întîi unghiurile $O$, $PAO$ și $PBO$. b) $\hat{P} = 180° - u$. **42.** Se compară unghiurile $A$ și $B$; isoscel. **43.** $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = \frac{\widehat{AMB} + \widehat{ANB}}{2}$. **44.** Se compară unghiurile $ATC$ și $DTB$. $\widehat{TA} = \widehat{TB}$. b) $OA \parallel PB$, căci $\hat{O} = \hat{P}$. c) $\hat{1} = \hat{2}$.

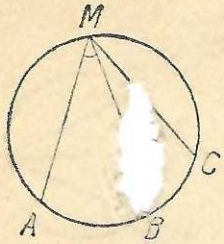


Fig. I.65

**45.** (o) Notațiile sînt cele din figura 65 se dă: $\widehat{AB} = 50°$, $\widehat{AMC} = 70°$ și se cere unghiul $BMC$; b) se dă $\widehat{AMB} = 40°$, $\widehat{AC} = 120°$ și se cere unghiul $BMC$.

**46.** Pe un cerc se iau patru puncte $A$, $B$, $C$ și $D$ unde $\widehat{AB} = 120°$, $\widehat{BC} = 70°$, $\widehat{CD} = 66°$. Să se afle: a) unghiurile patrulaterului $ABCD$; b) unghiul ascuțit format de diagonalele sale; c) unghiul ascuțit $M$ format de dreptele $AB$ și $CD$; d) unghiul ascuțit $N$ format de dreptele $AD$ și $BC$.

**47.** Pe un cerc cu centrul $O$ se iau punctele $A$, $B$, $C$, $D$ și $E$ astfel: $\widehat{AB} = 80°$, $OC \perp OB$, $CD = OC$ și $E$ este mijlocul arcului $DA$. Se cer unghiurile pentagonului $ABCDE$.

**48.** a) Fie $ABC$ un triunghi înscris într-un cerc. Tangentele duse la cerc în vîrfurile triunghiului determină un triunghi $M$, $N$, $P$ ($M$ intersecția tangentelor duse în $B$ și $C$, $N$ intersecția tangentelor duse în $A$ și $C$). Se dau unghiurile triunghiului, $\hat{A} = 50°$, $\hat{B} = 60°$. Se cer unghiurile triunghiului $MNP$. Generalizare, cînd unghiurile triunghiului inițial sînt $\hat{A}$, $\hat{B}$ și $\hat{C}$. b) Aceeași problemă cînd $\hat{A} = 110°$, $\hat{B} = 30°$. De asemenea cînd unghiurile sînt $A$, $B$, $C$ și $\hat{A} > 90°$.

**49.** Fie $ABC$ un triunghi, $M$, $N$ și $P$ punctele de contact ale laturilor sale cu cercul înscris ($M \in BC$ și $N \in AC$). Se dau unghiurile: $\hat{A} = 46°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 74°$. Se cer unghiurile triunghiului $MNP$. Generalizare, cînd unghiurile triunghiului inițial sînt $\hat{A}$, $\hat{B}$ și $\hat{C}$.

---

**R.** — **45.** a) 45°. b) 20°. **46.** a) $\hat{A} = 68°$, $\hat{B} = 85°$, $\hat{C} = 112°$, $\hat{D} = 95°$. b) Fie $O = AC \cap BD$. Unghiul $BOC$ este exterior triunghiului $AOB$ (sau $DOC$); $\widehat{BOC} = 87°$. c) Unghiul $M$ se află din triunghiul $MAD$; $\hat{M} = 17°$, d) $\hat{N} = 27°$. **47.** $\hat{A} = 107°30'$, $\hat{B} = 95°$, $\hat{C} = 105°$, $\hat{D} = 117°30'$, $\hat{E} = 115°$. **48.** a) Se află arcul $BC$, apoi unghiurile $CBM$ și $BCM$, apoi unghiul $M$ din triunghiul $BCM$. $\hat{M} = 180° - 2\hat{A}$, $\hat{N} = 180° - 2\hat{B}$, $P = 180° - 2\hat{C}$. b) Se află arcul $AC$, apoi unghiurile $NAC$ și $NCA$, apoi unghiul $N$; în mod analog se află unghiul $P$; unghiul $M$ se află din triunghiul $NMP$. $\hat{N} = 2\hat{B}$, $\hat{P} = 2\hat{C}$. **49.** Din triunghiul isoscel $APN$ se află unghiul $P$, apoi arcul $PN$, apoi unghiul $M$. $\hat{M} = 67°$, $\hat{N} = 60°$. În cazul general, $\hat{M} = \frac{180° - \hat{A}}{2}$, $N = \frac{180° - \hat{B}}{2}$, $\hat{P} = \frac{180° - \hat{C}}{2}$.

50. Fie $M$ un punct oarecare al unui cerc și $AB$ o coardă egală cu raza cercului. Se cere unghiul $AMB$.

51. Fie $AB$ și $AC$ două coarde egale ale aceluiași cerc. Să se demonstreze că diametrul care trece prin punctul $A$ este bisectoarea unghiului $BAC$.

52. Într-un cerc se duce un diametru $AB$. Fie $C$ și $D$ cîte un punct al fiecăruia din cele două semicercuri. Să se afle suma unghiurilor $CAD$ și $CBD$.

53. Fie $O$ centrul unui cerc și $AB$ o coardă. Se construiește cercul cu diametrul $OA$ și se notează cu $P$ punctul în care dreapta $AB$ taie din nou acest cerc. Să se compare segmentele $AP$ și $PB$.

54. Se consideră două cercuri tangente interior, cercul mai mic trecînd prin centrul cercului mai mare. Prin punctul de contact $T$ se duce o semidreaptă și se notează cu $A$ și $B$ punctele în care ea taie din nou cercurile ($A$ pe cercul mai mic). Să se compare segmentele $TA$ și $AB$.

55. Fie $AB$ și $CD$ doi diametri ai unui cerc. Ce fel de patrulater este $ADBC$?

56. a) $O$ fiind centrul cercului circumscris unui triunghi ascuțitunghic $ABC$, ce legătură există între unghiurile triunghiului și unghiurile $AOB$, $BOC$ și $COA$? Să se compare suma acestor unghiuri cu suma unghiurilor triunghiului. b) Să se studieze și cazul cînd $\hat{A} > 90°$. Care este acum unghiul $BOC$?

57*. Să se construiască un triunghi $ABC$ înscris într-un cerc dat, cînd se dau unghiurile $\hat{A} = 70°$, $\hat{B} = 52°$.

58. Fie $A$, $B$ și $C$ trei puncte ale unui cerc care îl împart în arce egale și $D$ intersecția tangentelor duse la cerc în punctele $B$ și $C$. Ce fel de patrulater este $ABCD$?

59. În figura 66, $CD$ este o secantă care trece prin punctul $A$. a) Să se demonstreze că suma arcelor $CMB$ și $BND$ este de 360°. b) Să se examineze și cazul secantei $AEF$.

60. În figura 67, $AC$ este tangentă la cercul din stînga și $AD$ este tangentă la cercul din dreapta. Să se compare arcele $CB$ și $AMB$, apoi $BD$ și $ANB$.

61. În figura 68, am dus raza $OE$ perpendicular pe coarda $AB$. $M$ este un punct oarecare al cercului. Să se compare unghiurile $AME$ și $EMB$.

---

R. — 50. Se află întîi unghiul la centru $AOB$ și arcul $AB$. $\hat{M} = 30°$ sau $\hat{M} = 150°$. 51. Fie $D$ celălalt capăt al diametrului care trece prin $A$. Se compară arcele $DB$ și $DC$. 52. 180°. 53. $\widehat{OPA} = 90°$, deci $AP = PB$. 54. Se unește centrul cercului mare cu punctul $A$. $\hat{A} = 90°$, deci $AT = AB$. 55. Se calculează unghiurile patrulaterului: dreptunghi. 56. a) $\widehat{AOB} = 2\hat{C}$ ș.a.m.d. b) $\widehat{BOC} > 180°$. 57. Fie $O$ centrul cercului. Se află întîi unghiurile $BOC$ și $AOC$. 58. Se calculează unghiurile patrulaterului: romb. 59. a) $\widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 180°$. b) $\widehat{BE} = \widehat{BF}$. 60. $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$, $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AMB}}{2}$. 61. Ele sînt egale.

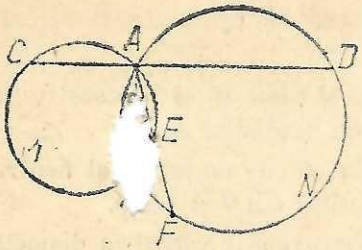


Fig. I.66

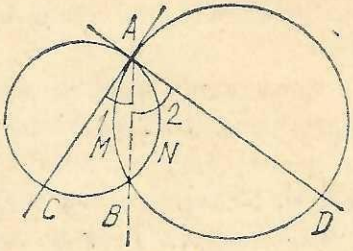


Fig. I.67

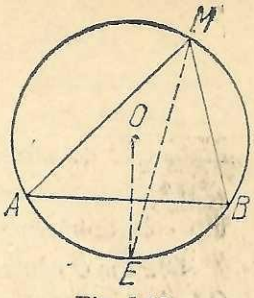


Fig. I.68

**62.** Fie $AMB$ un unghi înscris în cerc și $C$ un punct al prelungirii semidreptei $MB$ dincolo de $M$. Să se demonstreze că

$$\widehat{AMC} = \frac{\widehat{MA} + \widehat{MB}}{2}.$$

**63.** a) În figura 69 cele două cercuri sînt tangente și prin punctul $T$ s-au dus două drepte oarecare. Să se demonstreze că $AC \parallel BD$. b) Aceeași problemă dacă cercurile sînt tangente interior.

**64.** Într-un cerc se duc două coarde paralele $AB$ și $CD$. Fie $AC \cap BD = E$. Ce fel de triunghiuri sînt $EAB$ și $ECD$. Se vor considera două cazuri: cînd punctul $E$ este exterior cercului și cînd este interior.

**65.** Se consideră două cercuri secante. Fie $A$ și $B$ punctele lor de intersecție, $AC$ și $AD$ cîte un diametru. Să se demonstreze că punctele $C$, $B$ și $D$ sînt în linie dreaptă.

**66.** În figura 70 s-au dus diametrii $AB$ și $AC$ și s-au notat cu $E$ și $F$ punctele în care dreapta $BC$ taie din nou cercurile. Unghiurile $E$ și $F$ sînt drepte, căci sînt înscrise în cîte un semicerc. Înseamnă că din punctul $A$ s-au dus două perpendiculare pe dreapta $AB$. Dar știm că dintr-un punct se poate duce numai o singură perpendiculară pe o dreaptă. Unde e greșeala?

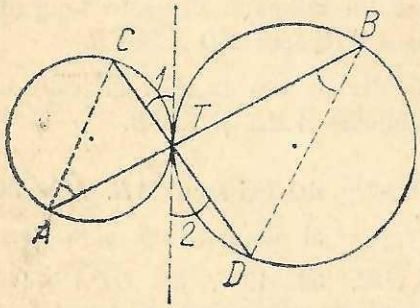


Fig. I.69

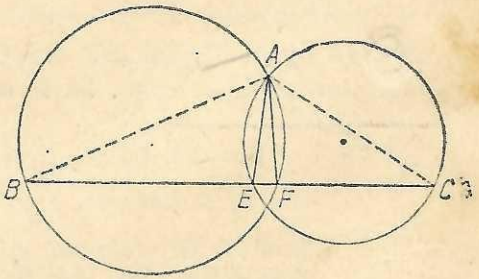


Fig. I.70

---

**R.** —**63.** Se compară unghiurile 1 și $A$, apoi 2 și $B$; $\hat{A} = \hat{B}$. **64.** Fie $AB$ coarda mai mare. Se compară unghiurile $A$ și $B$, comparînd arcele cuprinse între laturile lor; triunghiul $EAB$ este isoscel. **65.** $ABC$ și $ABD$ sînt unghiuri drepte. **66.** Figura este greșită! Punctele $E$ și $F$ coincid, v. problema 65.

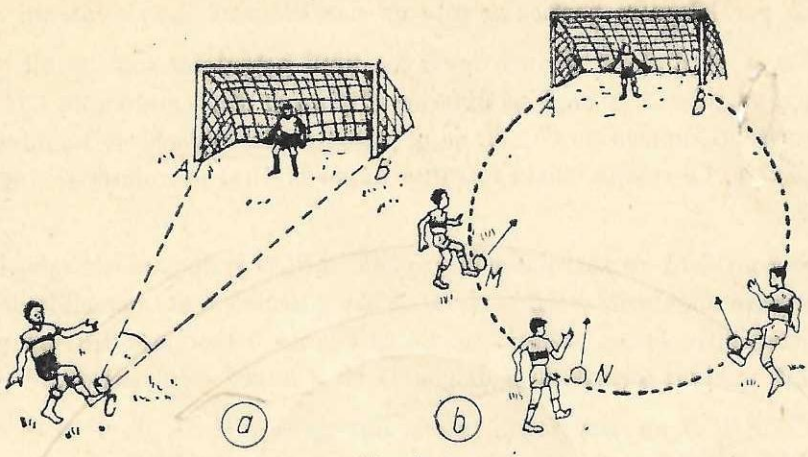



Fig. I.71

**67.** (o) La fotbal, cînd tragi dintr-un punct $C$ la poarta $AB$ (fig. 71-a), este cu atît mai ușor să nimerești poarta cu cît unghiul $BCA$ este mai mare. În figura 71-b, punctul $M$ este aproape de poartă, iar punctul $N$ este mai departe. Totuși din aceste două puncte este deopotrivă de ușor să nimerești poarta. De ce?

## PATRULATERUL INSCRIPTIBIL

**68.** Să se refacă demonstrația de la 1.6.6 făcînd în locul figurii 38 o figură în care punctul $C$ cade în exteriorul cercului.

**69.** Notațiile fiind cele din figura 72 se dă: a) $\hat{A} = 73°$, $\hat{B} = 110°$, $\hat{C} = 107°$; b) $\hat{A} = 104°$, $\hat{B} = 65°$, $\hat{D} = 85°$. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil?

**70.** Notațiile fiind cele din figura 72 și patrulaterul $ABCD$ fiind inscriptibil, se dă: $\hat{A} = 83°$, $\hat{B} = 96°$. Se cer unghiurile $C$ și $D$.

**71.** (o) Este posibil ca două unghiuri opuse ale unui patrulater inscriptibil să fie ascuțite? Dar obtuze? Ce fel de unghiuri sînt?

**72.** Un patrulater inscriptibil are un unghi drept. Unde se află centrul cercului în care este înscris?

**73.** Un patrulater înscris în cerc are două unghiuri consecutive egale. Ce fel de patrulater este?

**74.** Un trapez înscris într-un cerc poate să nu fie isoscel?

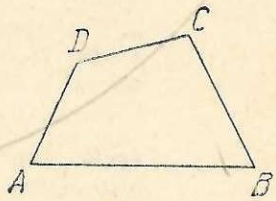



Fig. I.72

---

R. — **67.** Pentru că $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$. **71.** Unul este ascuțit și celălalt obtuz sau amîndouă sînt drepte. **72.** La mijlocul unei diagonale. **73.** Fie $\hat{A} = \hat{B}$. Se compară arcele $BCD$ și $ADC$, apoi arcele $BC$ și $AD$; trapez isoscel sau dreptunghi. **74.** Din $AB \parallel CD$ rezultă că $\widehat{AD} = \widehat{CB}$, deci $AD = CB$. Nu.

**75.** Ce paralelogram particular este un paralelogram înscris într-un cerc?

**76.** Fie $A$ și $C$ două vîrfuri opuse ale unui patrulater inscriptibil. Ce relație există între unghiul $A$ și unghiul exterior $C$ (format din semidreapta $CB$ și prelungirea laturii $DC$ dincolo de $C$)? Să se găsească și alte perechi de unghiuri care au aceeași poziție. Ce relație există între un unghi al unui patrulater și unghiul opus exterior?

**77.** Se consideră un patrulater inscriptibil $ABCD$ și diagonalele sale $AC$ și $BD$. Să se compare unghiurile $ACB$ și $ADB$. Să se găsească toate perechile de unghiuri care cuprind între laturi același arc. Să se enunțe o teoremă: Într-un patrulater inscriptibil, unghiul format de o diagonală cu o latură este egal cu...

**78.** Fie $ABCD$ un dreptunghi înscris într-un cerc și $M$, $N$, $P$ și $Q$ mijloacele arcelor $AB$, $BC$, $CD$ și $DA$. Ce fel de patrulater este $MNPQ$?

**79*.** Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc și $M$, $N$, $P$ și $Q$ mijloacele arcelor $AB$, $BC$, $CD$ și $DA$. Să se demonstreze că, dacă $ABCD$ este trapez, patrulaterul $MNPQ$ are două unghiuri drepte. Reciproc, dacă patrulaterul $MNPQ$ are un unghi drept, $ABCD$ este trapez.

**80*.** Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc, $\hat{C} > \hat{A}$. În vîrfurile opuse $B$ și $D$ se duc tangentele la cerc și se notează cu $P$ intersecția lor. Să se demonstreze că $\hat{P} = \hat{C} - \hat{A}$.

## TANGENTE DINTR-UN PUNCT

**81.** Dintr-un punct $A$ se duc tangentele la un cerc și se notează cu $B$ și $C$ punctele lor de contact cu cercul. Se dă: $A = 46°$. a) Se cer unghiurile $ABC$ și $ACB$. b) Se unește $A$ cu centrul $O$ al cercului. Să se calculeze unghiurile $OAB$ și $OAC$.

---

**R.** — **75.** Fie $A$ și $C$ două vîrfuri opuse ale paralelogramului, $\hat{A} = \hat{C}$ și $\hat{A} + \hat{C} = 180°$ dau $\hat{A} = \hat{C} = 90°$. Dreptunghi. **76.** Ele sînt egale. **78.** Diametrul perpendicular pe $AB$ și $DC$ conține punctele $M$ și $P$, și diametrul perpendicular pe $AD$ și $BC$ conține punctele $Q$ și $N$. Acești diametri fiind perpendiculari, împart cercul în patru arce egale, deci $\widehat{MN} = \widehat{NP} = \widehat{PQ} = \widehat{QM}$. Apoi unghiul $M$ este drept, căci este înscris într-un semicerc. $MNPQ$ este pătrat. **79.** Diametrul perpendicular pe $AB$ și $DC$ conține punctele $M$ și $P$, deci unghiurile $N$ și $Q$ sînt înscrise în cîte un semicerc. Reciproc, dacă $N = 90°$, $MP$ este un diametru, și este perpendicular pe $AB$ și $CD$, căci trece prin mijloacele arcelor $AB$ și $CD$, deci $AB \parallel CD$. **80.** Se duce diagonala $BD$ și se prelungește $PD$ dincolo de $D$ pînă într-un punct oarecare $T$. $\hat{P} = \widehat{TDB} - \widehat{DBP} = \frac{\widehat{DAB}}{2} - \frac{\widehat{DCB}}{2} = \hat{C} - \hat{A}$. **81.** a) $\hat{B} = \hat{C} = 67°$. b) 23°; 23°.

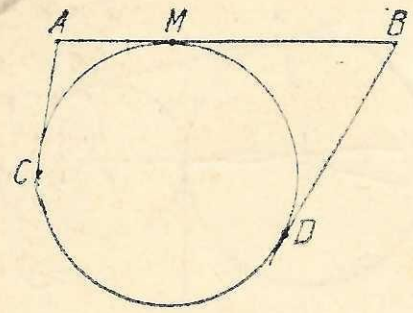


Fig. I.73

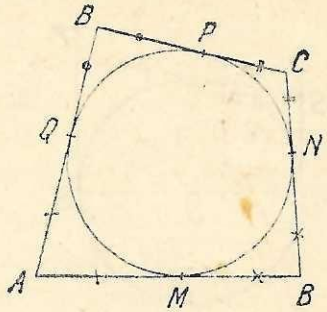


Fig. I.74

**82.** Într-un punct $A$ al unui cerc se duce tangenta la cerc și se poartă pe ea un segment $AB$ egal cu raza cercului. Din $B$ se duce cealaltă tangentă la cerc și se notează cu $C$ punctul ei de contact cu cercul. Să se afle unghiul $B$.

**83.** Se consideră două cercuri concentrice. Dintr-un punct $P$ se duc tangentele la ele și se notează punctele de contact cu $A$, $B$, $C$ și $D$. Să se demonstreze că $\widehat{APC} = \widehat{BPD}$.

**84.** a) Se consideră două cercuri tangente interior. Dintr-un punct $M$ al tangentei lor comune se duc la cele două cercuri tangentele deosebite de cea comună și se notează cu $A$ și $B$ punctele lor de contact. Să se compare $MA$ cu $MB$. b) Aceeași problemă, dacă cercurile sînt tangente exterior.

**85.** În figura 73 $AB$, $AC$ și $BD$ sînt tangente la cerc, $AB = 10$ cm. Să se afle lungimea liniei frînte $CABD$.

**86.** a) Un patrulater $ABCD$ este circumscris unui cerc (fig. 74). Să se demonstreze că $AB + DC = AD + BC$. Să se enunțe o teoremă: Într-un patrulater circumscris, suma a două laturi opuse este egală... b)* Există o teoremă asemănătoare în cazul unui hexagon circumscris unui cerc?

**87*.** Dintr-un punct $A$ se duc tangentele $AB$ și $AC$ la un cerc (fig. 75). $AB = 5$ cm. a) Se duce tangenta într-un punct oarecare $M$ al arcului $BC$. Să se afle suma $AD + AE + DE$ (perimetrul triunghiului $ADE$). Cum variază această sumă cînd se ia un alt punct $M$ al arcului $BC$? b) Se duce tangenta într-un punct $M'$ al arcului $BC$ mai mare decît un semicerc. Să se afle suma $AD' + AE' - D'E'$.

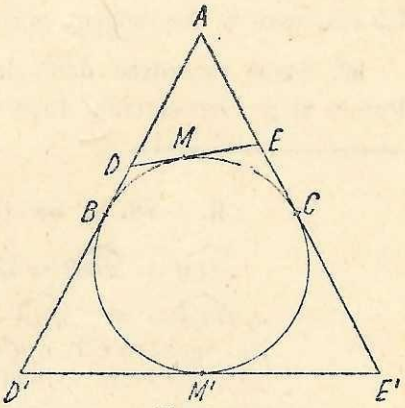


Fig. I.75

---

**R.** — **82.** Ce fel de triunghi este $OAB$? 90°. **84.** Fie $T$ punctul de contact $MA = MB = MT$). **85.** Se compară $AM$ cu $AC$ și $BM$ cu $BD$; 20 cm. **86.** b) Suma a trei laturi luate din două în două este egală cu ... **87.** a) Se compară $DM$ cu $DB$ și $EM$ cu $EC$; 10 cm. b) $AD' - D'M' = AB$, $AE' - E'M' = AC$; 10 cm.

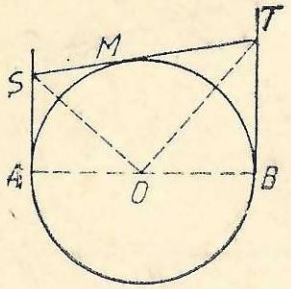



Fig. 1.76

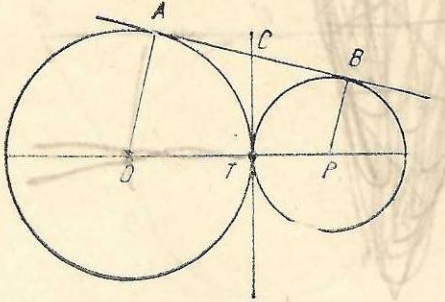



Fig. 1.77

**88*.** a) În figura 76 s-au dus două tangente paralele $AS$ și $BT$ și tangenta într-un punct oarecare $M$. Să se demonstreze că $\widehat{SOT} = 90°$. b*) În figura 76 s-a construit un unghi drept cu vîrful în $O$ și tangenta într-un punct oarecare $M$ al cercului. Din $S$ și $T$ s-au dus tangentele $SA$ și $TB$. Să se demonstreze că $SA \parallel TB$.

**89*.** Cercurile, din figura 77 sînt tangente, $AB$ și $TC$ sînt tangente comune. Să se demonstreze că: a) $CA = CB$; b) unghiul $OCP$ este drept; c) unghiul $ATB$ este drept.

## CONSTRUCȚII DE CERCURI

**90.** Să se construiască un cerc care să treacă prin două puncte date $A$ și $B$, și: a) să aibă o rază dată; b) să aibă centrul pe un cerc dat.

**91.** Se dă un cerc cu raza de 3 cm. Să se construiască un cerc cu raza de 1,5 cm, care să fie tangent primului cerc într-un punct dat (două soluții).

**92.** Să se racordeze două drepte paralele printr-un arc de cerc (fig. 78-a). Putem alege raza cercului după voie?

---

**R. — 88.** a) Se duce raza $OM \cdot \widehat{SOM} = \frac{\widehat{AOM}}{2}$ și $\widehat{TOM} = \frac{\widehat{MOB}}{2}$. $\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180°$, deci... b) Din triunghiul $SOT$ rezultă că $\widehat{OST} + \widehat{OTS} = 90°$, $\widehat{MSA} + \widehat{MTB} = 180°$ deci $SA \parallel TB$. **89.** a) Amîndouă sînt egale cu $CT$. b) $CO$ și $CP$ sînt bisectoarele unghiurilor suplementare $ACT$ și $TCB$. c) Notăm unghiurile $CAT$ și $CTA$ cu aceeași literă $u$, și unghiurile $CBT$ și $CTB$ cu aceeași literă $v$. Suma unghiurilor triunghiului $ATB$ este de 180°, deci $2u + 2v = 180°$, adică $u + v = 90°$. Dar $\widehat{ATB} = u + v$, deci... **90.** a) Centrul cercului trebuie să fie pe mediatoarea segmentului $AB$. b) Centrul cercului este la intersecția mediatoarei segmentului $AB$ cu cercul dat. **92.** Raza trebuie să fie jumătate din distanța dintre cele două drepte.

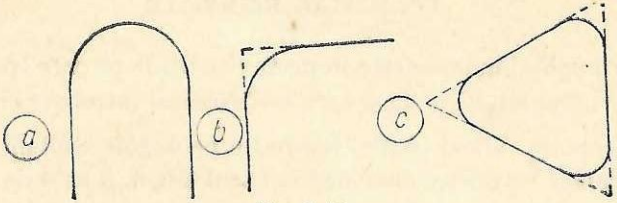



Fig. I.78

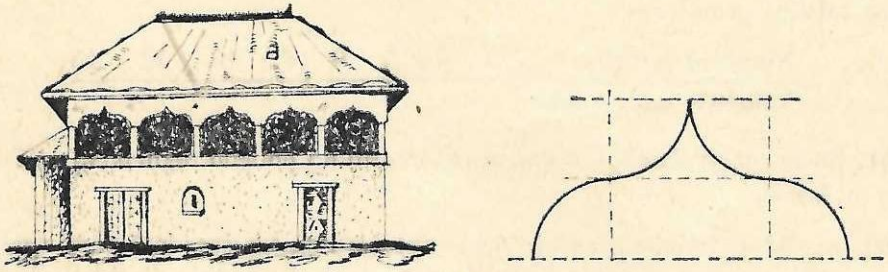


Fig. I.79

**93.** Să se racordeze două drepte perpendiculare printr-un arc de cerc (fig. 78-b). Putem lua raza cercului după voie? Cîte grade are arcul?

Aplicaţie. Rotunjirea colţurilor unei foi de hîrtie dreptunghiulară.

**94.** Să se rotunjească colţurile unui triunghi echilateral (fig. 78-c). Putem alege razele arcelor de cerc după voie? Cîte grade are fiecare arc de cerc?

**95.** În figura 79 se vede o casă cu cerdac. Să se copieze liniile curbe care mărginesc partea de sus, folosind indicaţiile din figură.

**96.** O şosea îşi schimbă direcţia cu 30°, ca în figura 80. Arcul de cerc $AB$ care uneşte porţiunile rectilinii are o rază de 10 m. Să se facă o schiţă a şoselei. Scara 1 : 200.

**97.** La intrarea într-o staţie, linia de cale ferată[1] se bifurcă, aşa cum arată figura 81. Arcele de cerc $AB$ şi $BC$ au cîte 45° şi raza de 15 m. Să se facă schiţa liniei ferate. Scara 1 : 300.

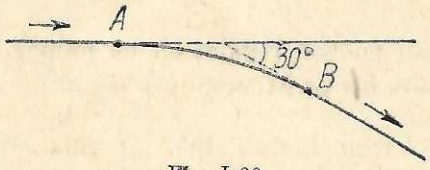



Fig. I.80

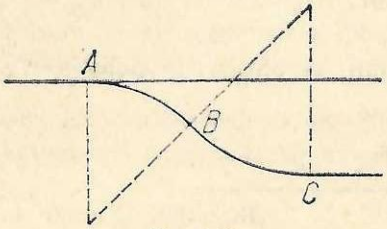



Fig. I.81

R. — **93.** Centrul cercului este un punct oarecare al bisectoarei; 90°.
**94.** Centrul cercului este un punct oarecare al bisectoarei; 120°.

[1] Se consideră o singură şină.

**98.** (o) Dreptunghiul îndeplinește în parte condițiile pe care trebuie să le îndeplinească un poligon regulat. Care da și care nu? Aceeași întrebare cu privire la romb.

**99.** (p) Din bețe de chibrit (egale) facem un pentagon. Sîntem siguri că obținem un pentagon regulat? Întrebare analoagă în cazul a 6, 4, 3 bețe de chibrit egale.

**100.** Să se calculeze unghiul unui poligon regulat cu 3, 4, 5... laturi și să se completeze tabelul următor:

| Numărul laturilor | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valoarea unui unghi | | | | | | | | |

**101.** Să se construiască, folosind și raportorul un poligon regulat: a) cu 7 laturi; b) cu 9 laturi.

**102** (p). Să se împartă, cu ajutorul raportorului, un cerc în 5 părți egale și să se unească punctele de diviziune din două în două. Să se taie din hîrtie steaua ce se obține astfel.

**103.** Notațiile fiind cele din figura 52, ce fel de patrulatere sînt: a) $OABC$, $OBCD$ și cele analoage; b) $ABDE$, $BCEF$ și cele analoage; c) $ABCF$, $BCDA$ și cele analoage? Ce relație există între laturile patrulaterului $ABCF$?

**104.** Într-un cerc se duce un diametru $AB$ și o coardă $AC$ egală cu raza cercului. Cîte grade are arcul $CB$? Să se deducă de aici un mijloc de a construi latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

**105.** Printr-un punct $A$ al unui cerc se duce un diametru $AM$ și de aceeași parte a lui se duc coradele $AB$, $AC$ și $AD$ egale, respectiv, cu latura triunghiului echilateral, a pătratului și a hexagonului regulat înscris. a) Să se demonstreze că $AC$ este bisectoarea unghiului $BAD$. b) Coarda $BC$ este latura unui poligon regulat înscris în cerc?

**106.** Să se construiască un octogon regulat după modelul din figura I.54.

**107.** Se consideră un poligon regulat înscris într-un cerc (de exemplu un hexagon). Să se demonstreze că, dacă se duc tangentele la cerc paralele cu laturile poligonului, se obține un poligon regulat.

**108.** Să se demonstreze că laturile unui poligon regulat cu un număr par de laturi sînt paralele două cîte două. (Se poate lua ca exemplu octogonul.)

---

**R. — 99.** Numai în cazul triunghiului. **105.** a) Cîte grade au arcele $AB$, $AC$ etc.? b) $A$ dodecagonului. **107.** Se demonstrau întîi, folosind teorema cu privire la diametrul perpendicular pe o coardă, că punctele de contact sînt mijloacele arcelor respective. Cîte grade are arcul cuprins între două puncte de contact consecutive? **108.** Cîte grade au arcele cuprinse între două laturi care par să fie paralele?

**109.** Să se demonstreze că: a) vîrfurile unui poligon regulat cu un număr par de laturi sînt diametral opuse două cîte două; b) un poligon regulat cu un număr impar de laturi nu poate avea două vîrfuri diametral opuse. (Se poate considera cazul octogonului și al poligonului cu 9 laturi.)

**110.** a) Care sînt axele de simetrie ale unui hexagon regulat? b) Ale unui poligon regulat cu un număr par de laturi? c) Care sînt axele de simetrie ale unui pentagon regulat? d) Ale unui poligon regulat, cu un număr impar de laturi.

**111.** Tăiem din hîrtie două triunghiuri echilaterale egale, așezăm unul din ele deasupra celuilalt astfel încît să coincidă și înfigem un ac în centrul lor. Cîte grade are unghiul cel mai mic cu care trebuie să rotim triunghiul de deasupra ca să coincidă din nou cu cel de sub el? (Se spune că triunghiul s-a transformat în el însuși.) Aceeași întrebare cu privire la pătrat și la hexagonul regulat. De asemenea în cazul unui poligon regulat cu $n$ laturi.

**112.** (p) Să se taie din hîrtie un număr oarecare (6—8) de hexagoane regulate egale și să se lipsească pe o foaie de hîrtie astfel încît să reprezinte un] pavaj. (Să acopere toată suprafața, fără a lăsa goluri între ele și să nu se încalece). Cum trebuie să tăiem unele hexagoane, pentru a putea pava o suprafață dreptunghiulară?

Să se explice de ce laturile necomune a două hexagoane vecine sînt paralele două cîte două. Aceeași întrebare cu privire la două hexagoane care nu sînt vecine.

**113.** (p) Să se taie din hîrtie mai multe triunghiuri echilaterale egale (10—15) și să se paveze cu ele o foaie de hîrtie.

Ce figură se naște după ce am fixat primele două triunghiuri? Cînd așezăm al treilea triunghi? Să se continue.

**114.** Așezăm șase octogoane regulate egale ca în figura 82. Ce formă are golul dintre ele (hașurat)?

Se poate executa un pavaj din octogoane regulate egale? Ce fel de pietre mai sînt necesare?

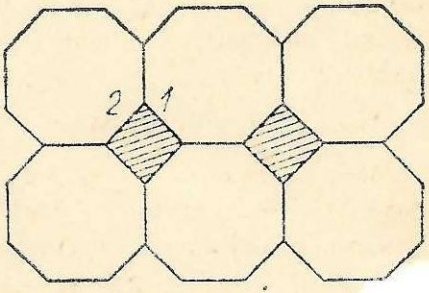


Fig. 1.82

---

**R. — 109.** a) Fie $A$ un vîrf al octogonului. Pînă la vîrfu[illegible] socotit de la $A$ sînt 4 optimi de cerc, adică un semicer[illegible] al patrulea vîrf socotit de la $A$. De o parte a dre[illegible] 4 noimi din cerc și de cealaltă sînt 5, deci $AE$ nu e[illegible] **110.** a) Mediatoarele a cîte două laturi opuse și bisec[illegible] două unghiuri opuse. b) Mediatoarele laturilor (bisec[illegible] rilor). **111.** 120°; 90°; 60°.

**115.** Să se demonstreze că singurele poligoane regulate cu care se poate face un pavaj sînt triunghiul echilateral, pătratul și hexagonul regulat.

**116.** *Recapitulare.* Să se formuleze în scris propozițiile următoare și răspunsurile la întrebările următoare. Fiecare enunț se va însoți de o figură și se va formula în cuvinte și, prescurtat, folosind notațiile din figură. a) Definiția cercului. b) Cîte puncte determină un cerc? c) Cîte grade are unghiul format de o tangentă la cerc cu raza care conține punctul ei de contact? d) Care sînt axele de simetrie ale cercului? Teoremele cu privire la: e) diametrul perpendicular pe o coardă; f) arcele cuprinse între coarde paralele; g) relația dintre coarde egale și distanțele lor de la centru; h) unghiul format de o tangentă și o secantă; i) unghiul înscris în cerc și arcul cuprins între laturile sale; j) Cîte grade are un unghi înscris într-un semicerc?; k) Care este condiția ca un patrulater să fie inscriptibil?; m) Cum se construiește un poligon regulat înscris într-un cerc?

---

R. — **115.** Se calculează unghiurile diferitelor poligoane regulate. Măsura în grade a unui unghi trebuie să fie un divizor al lui 360.

## Capitolul II

# FIGURI ASEMENEA

## 2.1. SEGMENTE PROPORȚIONALE

1. **Raportul a două segmente.** Se știe din aritmetică ce este raportul a două mărimi. De exemplu, dacă avem două segmente, $AB = 5$ cm, $CD = 7$ cm (fig. 1), raportul lor este $\frac{5}{7}$ și se scrie

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{7}.$$

În acest exemplu, numărul 5 este măsura (lungimea) lui $AB$, numărul 7 este măsura (lungimea) lui $CD$, deci raportul acestor segmente este raportul dintre măsurile lor. Ambele segmente au fost măsurate cu aceeași unitate de măsură.

*Raportul a două segmente este raportul dintre măsurile lor, ambele segmente fiind măsurate cu aceeași unitate.*

Expresia „raportul a două segmente" este deci o expresie prescurtată, pentru raportul *măsurilor* a două segmente.

Tot din aritmetică se știe că *raportul a două mărimi nu depinde de unitatea de măsură* care se folosește. Astfel, în exemplul de mai sus, dacă luăm ca unitate de măsură milimetrul sau decimetrul, măsurile segmentelor sînt 50 și 70 respectiv 0,5 și 0,7, și raportul este:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{50}{70} \text{ respectiv } \frac{AB}{CD} = \frac{0,5}{0,7}.$$

Ambele rapoarte sînt egale cu $\frac{5}{7}$.

2. **Observări.** *1.* Am presupus că lungimile celor două segmente sînt numere naturale, 5 și 7. Aceasta înseamnă că există un segment, în cazul nostru centimetrul, care se cuprinde exact în $AB$ și $CD$. Se spune că cele două segmente sînt comensurabile. Există și alte situații, cînd nici centimetrul, nici milimetrul, și niciun alt segment, oricît de mic, nu se cuprinde exact în segmentele date. În acest caz, se spune că segmentele sînt *incomensurabile*. Dacă un segment este incomensurabil cu unitatea de măsură, măsura lui este o fracție zecimală infinită și neperiodică. De exemplu, $\sqrt{2} = 1,41421...$ Un astfel de număr se numește *număr irațional*. În cele ce urmează vom presupune că toate segmentele sînt comensurabile, deci raportul a două segmente este o fracție (sau un număr natural).

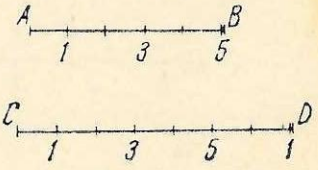


Fig. 11.1

2. Un segment se notează de obicei cu două litere: $AB$ sau $MN$ etc. unde cu $A$ și $B$ sau $M$ și $N$ etc. s-au

notat capetele lui, sau cu o singură literă mică, $a$ sau $b$ etc. Prin aceste semne, $AB$, $MN$, $a$ sau $b$ etc. se înțelege uneori segmentul însuși, iar uneori măsura lui. De exemplu, pentru a exprima că laturile opuse ale unui paralelogram $ABCD$ sînt egale, se scrie $AB = CD$. Aici $AB$ și $CD$ reprezintă segmentele respective. Dar, pentru a exprima că baza paralelogramului are, de exemplu, 5 cm, se scrie $AB = 5$ cm. Aici $AB$ reprezintă măsura acestui segment. Altfel, semnul egalității n-ar fi justificat, un segment nu poate fi egal cu un număr.

Dacă însă este vorba de rapoarte, prin $AB$, $MN$, ..., $a$, $b$, ... se înțeleg *măsurile* segmentelor respective, nu segmentele înseși.

O egalitate ca

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{7}$$

are sensul următor: Dacă măsurăm segmentele $AB$ și $CD$ cu aceeași unitate de măsură, obținem două numere; raportul dintre aceste numere este egal cu $\frac{5}{7}$. Dacă folosim o altă unitate de măsură obținem alte numere, dar raportul lor este tot $\frac{5}{7}$.

3. **Semnificația concretă a raportului.** Raportul a două segmente este un mijloc de a compara acele segmente. De exemplu,

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$$

înseamnă că $a$ este față de $b$ cum este 5 față de 7. În cele ce urmează vom lămuri mai bine acest lucru.

a) Dacă raportul a două segmente este $\frac{5}{7}$ (fig. 2), atunci, măsurînd ambele segmente cu o anumită unitate, măsura primului segment va fi 5, iar a celui de al doilea, 7.

*Cînd raportul a două segmente este $\frac{a}{b}$, există un segment care se cuprinde în primul segment de $a$ ori și în segmentul al doilea de $b$ ori.*

Bineînțeles, $a$ și $b$ sînt numere naturale.

b) În cazul segmentelor din figura 3-a, dacă luăm ca unitate de măsură chiar segmentul $b$, măsura primului segment este 3, măsura segmentului al doilea este 1, deci raportul lor este:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{1} = 3.$$

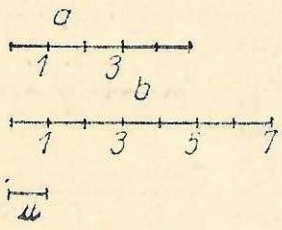



Fig. II.2

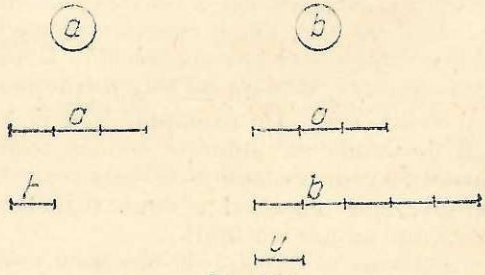



Fig. II.3

Numărul 3 arată că $a$ este de trei ori mai mare decît $b$ sau că $b$ este de trei ori mai mic decît $a$.

*Cînd raportul a două segmente este un număr natural, el arată de cîte ori primul segment este mai mare decît al doilea sau de cîte ori al doilea segment este mai mic decît primul.*

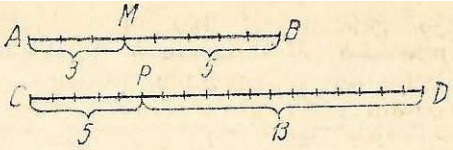


Fig. 11.4

*c*) În cazul segmentelor din figura 3-b, dacă luăm ca unitate segmentul $u$, măsurile celor două segmente sînt: $a = 3$, $b = 5$ și raportul lor este

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}.$$

Ce înseamnă aceasta?

Observăm că $u$ este $\frac{1}{5}$ din $b$, și $a$ este format din 3 segmente egale cu $u$, deci $a$ este $\frac{3}{5}$ din $b$,

$$a = \frac{3}{5} \text{ din } b.$$

*Cînd raportul a două segmente este o fracție, el arată ce fracție din segmentul al doilea este primul segment.*

4. **Împărțirea unui segment într-un raport dat.** Dacă luăm un punct oarecare $M$ al unui segment $AB$ (fig. 4) obținem două segmente: $AM$ și $MB$. Dacă raportul acestor segmente este, de exemplu,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5},$$

se spune că punctul $M$ *împarte* segmentul $AB$ în raportul $\frac{3}{5}$.

Pentru a împărți un segment $AB$ într-un raport dat, de exemplu în raportul $\frac{3}{5}$, îl împărțim în $3 + 5 = 8$ părți egale. Al treilea punct de diviziune este punctul căutat. În adevăr, luînd optimea segmentului dat ca unitate de măsură, $MA = 3$, $MB = 5$,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}.$$

*Exemple. 1.* Punctul $P$ din figura 4 împarte segmentul $CD$ în raportul $\frac{5}{13}$.

2. Mijlocul unui segment de dreaptă împarte segmentul în raportul $\frac{1}{1} = 1$.

5. **Segmente proporționale.** *1.* Știm din aritmetică ce înseamnă că un șir de numere este proporțional cu un alt șir de numere. De exemplu, șirul 2, 4, 6, 10 este proporțional cu șirul 3, 6, 9, 15. Aceasta înseamnă că fiecărui număr din primul șir îi corespunde un număr din șirul al doilea,

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{10}{15}$$

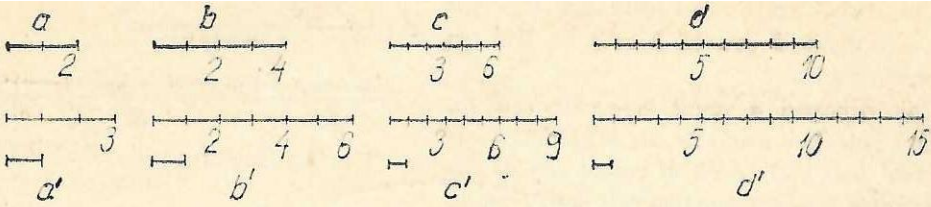



Fig. II.5

și raportul dintre un număr din primul șir și numărul corespunzător din șirul al doilea este constant:

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3},\ \frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ \frac{6}{9}=\frac{2}{3},\ \frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

Dacă cele două șiruri de numere sînt măsurile unor segmente $a$, $b$, $c$, $d$ și $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ (fig. 5) se spune că segmentele din primul șir sînt proporționale cu cele din șirul al doilea (sau invers) și se scrie

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}.$$

Se spune, scurt, că aceste segmente sînt proporționale.

2. Deosebit de important este cazul cînd fiecare șir este format din două segmente (numere), ca cele din figura 6:

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4};\ \frac{c}{d}=\frac{4,5}{6}=\frac{3}{4}$$

deci

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

ceea ce înseamnă că segmentele $a$ și $c$ sînt proporționale cu segmentele $b$ și $d$. Dacă, în ultima proporție schimbăm mezii între ei, obținem

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},$$

ceea ce înseamnă că segmentele $a$ și $b$ sînt proporționale cu segmentele $c$ și $d$.

*Patru segmente $a$, $b$, $c$ și $d$ sînt proporționale cînd* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Cînd se scrie proporția, segmentele trebuie scrise în ordinea în care sînt date. Astfel, în exemplul nostru, $\frac{a}{b}\neq\frac{d}{c}$.

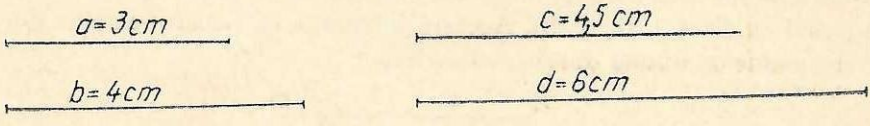



Fig. II.6

## 2.2. TEOREMA LUI TALES

1. **Paralele echidistante.** *1.* Considerăm un şir de drepte paralele (fig. 7-a), astfel ca distanţa dintre două drepte consecutive să fie aceeaşi (ca liniile unui caiet). Aceasta înseamnă că, dacă le tăiem cu o secantă $d$ perpendiculară pe ele, se formează pe secantă segmente egale: $AB = BC = CD = \ldots$ Astfel de drepte se numesc *echidistante.*

2. Dacă aşezăm o riglă astfel încît să taie aceste paralele (fig. 7-a), se observă că ele determină pe riglă mai multe segmente egale. Dacă schimbăm poziţia riglei, aceste segmente devin mai mari sau mai mici, dar rămîn mereu egale între ele.

Pentru a demonstra aceasta, ducem o dreaptă oarecare $d'$, care să taie paralelele (fig. 7-b). Ştim că

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \ldots \text{ şi } AB = BC = CD = \ldots$$

şi trebuie să demonstrăm că $A'B' = B'C' = C'D' = \ldots$

Ducem prin $A'$ şi $B'$ cîte o paralelă la $d$ ($M \in BB'$, $N \in CC'$) şi considerăm triunghiurile $A'MB'$ şi $B'NC'$. Ele sînt dreptunghice. $A'M = AB$ (paralele cuprinse între paralele), $AB = BC$ (prin ipoteză), $BC = B'N$ (paralele cuprinse între paralele), deci $A'M = B'N$. Apoi $\hat{A}' = \hat{B}'$ (unghiuri corespondente, $A'M \parallel B'N$). Aceste triunghiuri sînt egale ($ULU$), deci $A'B' = B'C'$.

În acelaşi fel se demonstrează că $B'C' = C'D'$, $C'D' = D'E'$ ş.a.m.d.

*Mai multe drepte paralele echidistante determină pe orice secantă segmente egale.*

3. Reciproc, dacă (fig. 7-b) $A'B' = B'C' = C'D' = \ldots$, paralelele sînt echidistante, oricare ar fi înclinarea secantei $d'$.

Pentru a demonstra aceasta, luăm din nou triunghiurile $A'B'M$ şi $B'C'N$. Ele sînt dreptunghice şi au $A'B' = B'C'$ (prin ipoteză), $\hat{A}' = \hat{B}'$ (unghiuri corespondente $A'M \parallel B'N$), deci ele sînt egale (ULU).

Rezultă că $A'M = B'N$. Dar $A'M = AB$, $B'N = BC$ (paralele cuprinse între paralele), deci $AB = BC$, ceea ce înseamnă că distanţa dintre primele două paralele este egală cu distanţa dintre paralelele a doua şi a treia. Se poate continua în acelaşi fel.

*Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă oarecare segmente egale, ele sînt echidistante.*

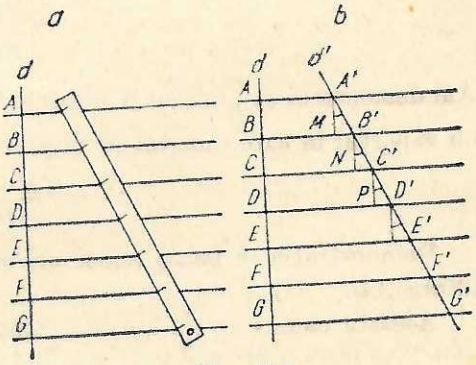


Fig. II.7

2. **Teorema lui Tales**[1]. Considerăm un triunghi $ABC$ (fig. 8). Luăm pe latura $AB$

[1] Tales din Milet este unul dintre primii matematicieni greci care a adus contribuţii importante la dezvoltarea geometriei. El a trăit în jurul anului 600 î.e.n. Lui i se atribuie, între altele, următoarele descoperiri: unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sînt egale, un unghi înscris într-un semicerc este drept (v. cap. 1); construcţia unui triunghi cînd se cunosc o latură şi unghiurile alăturate cu aplicaţie la aflarea unor distanţe (v. Geometria cl. a VI-a) ş.a. Tales este important şi ca filozof. El a fost supranumit „înţeleptul din Milet".

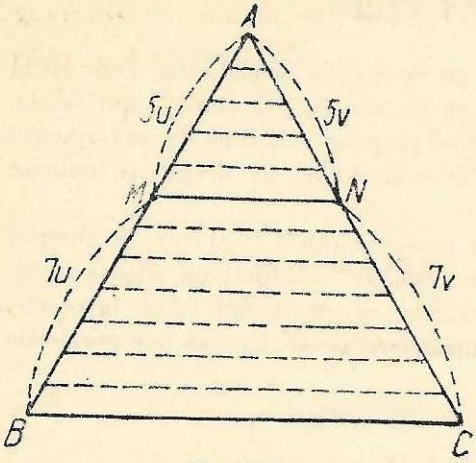



Fig. II.8

un punct oarecare $M$, $M \in AB$. El împarte latura $AB$ într-un anumit raport $\frac{MA}{MB}$. Ducem semidreapta $MN$ paralel cu $BC$, $N \in AC$. Punctul $N$ împarte latura $AC$ într-un anumit raport, $\frac{NA}{NC}$. Teorema lui Tales afirmă că aceste rapoarte sînt egale, $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC}$, ceea ce înseamnă că aceste segmente sînt proporționale.

*O paralelă la o latură a unui triunghi împarte celelalte două laturi ale triunghiului în părți proporționale.*

Pentru a demonstra această teoremă, presupunem că am găsit (prin încercări) un segment $u$ care se cuprinde exact în $MA$ și $MB$, și anume de 5 ori în $MA$ și de 7 ori în $MB$. Dacă luăm acest segment ca unitate, $MA = 5$, $MB = 7$, deci

$$\frac{MA}{MB} = \frac{5}{7}.$$

Ducem prin punctele de diviziune paralele la $BC$. Aceste paralele determină pe secanta $AB$ segmente egale, deci ele sînt echidistante; rezultă că ele vor determina și pe $AC$ segmente egale. Fie $v$ lungimea unuia dintre aceste segmente. Deoarece $AM$ este format din 5 segmente egale, $AN$ va fi format tot din 5 segmente, dar egale cu $v$, care este în general diferit de $u$; dacă $MB$ conține 7 segmente egale, $NC$ va conține tot 7 segmente, egale cu $v$. Dacă luăm ca unitate de măsură segmentul $v$ măsurile acestor segmente sînt $NA = 5$, $NB = 7$, deci

$$\frac{NA}{NC} = \frac{5}{7}.$$

Am demonstrat că punctul $N$ împarte latura $AC$ în raportul $\frac{5}{7}$, care este același cu raportul în care punctul $M$ împarte latura $AB$. Așadar:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC}.$$

Demonstrația se poate reface oricare ar fi raportul în care punctul $M$ împarte latura $AB$.

Această demonstrație nu este completă, pentru că am presupus că segmentele $MA$ și $MB$ au o măsură comună. Se poate demonstra că teorema este adevărată și dacă segmentele sînt incomensurabile, dar demonstrația cere cunoștințe mai aprofundate.

3. **Diferite forme ale teoremei lui Tales.** *1.* În figura 8, $AM = 5u$, $MB = 7u$, $AB = 5u + 7u = 12u$, deci dacă luăm ca unitate de măsură segmentul $u$, măsura segmentului $AM$ este 5, a segmentului $AB$ este 12. Rezultă că $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{12}$; $AN =$

$= 5v$, $NC = 7v$, $AC = 5v + 7v = 12v$, deci, dacă luăm ca unitate de măsură segmentul $v$, măsurile segmentelor $AN$ și $AC$ sînt 5 și 12 și $\frac{AM}{AC} = \frac{5}{12}$. Rezultă că

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

2. Tot în figura 8 avem:

$$MB = 7u,\ AB = 12u,\ \text{deci}\ \frac{MB}{AB} = \frac{7}{12};$$

$$NC = 7v,\ AC = 12v,\ \text{deci}\ \frac{NC}{AC} = \frac{7}{12}$$

Rezultă că

$$\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}.$$

Aceste forme se pot obține din prima și folosind proporțiile derivate.

În rezumat, teorema lui Tales are trei forme:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC},\quad \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},\quad \frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}.$$

Dacă luăm pe o latură *cele două părți* ($MA$ și $MB$), trebuie să luăm pe cealaltă latură tot cele două părți ($NA$ și $NC$); dacă luăm pe o latură *partea dinspre vîrf și toată latura*, trebuie să luăm pe cealaltă latură tot partea dinspre vîrf și toată latura; dacă luăm pe o latură *partea dinspre bază și toată latura*, trebuie să luăm pe cealaltă latură tot partea dinspre bază și toată latura.

4. **Reciproca teoremei lui Tales.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare (fig. 9); împărțim latura $AB$ într-un raport oarecare, de exemplu astfel încît să avem $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$ și împărțim latura $AC$ în același raport, $\frac{NA}{NC} = \frac{3}{5}$. Dreapta $MN$ va fi paralelă cu baza $BC$.

*Dacă o dreaptă împarte două laturi ale unui triunghi în părți proporționale, ea este paralelă cu latura a treia.*

Pentru a demonstra aceasta, presupunem că dreapta $MN$ nu ar fi paralelă cu dreapta $BC$. Atunci ducem prin $M$ paralela la $BC$ și notăm cu $N'$ intersecția ei cu $AC$. Unde cade punctul $N'$? Presupunem că punctul $N'$ cade între $N$ și $C$. Atunci, conform teoremei lui Tales, $\frac{N'A}{N'C} = \frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$.

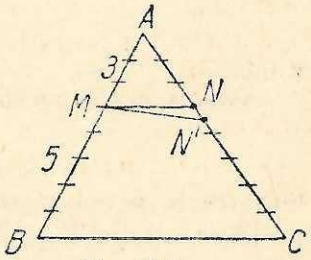


Fig. 11.9

Dar acest lucru este imposibil, căci $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{5}$, $N'A > 3$, $N'B < 5$, deci $\frac{N'A}{N'B} > \frac{3}{5}$ (dacă într-o fracție mărim numărătorul și micșorăm numitorul, fracția

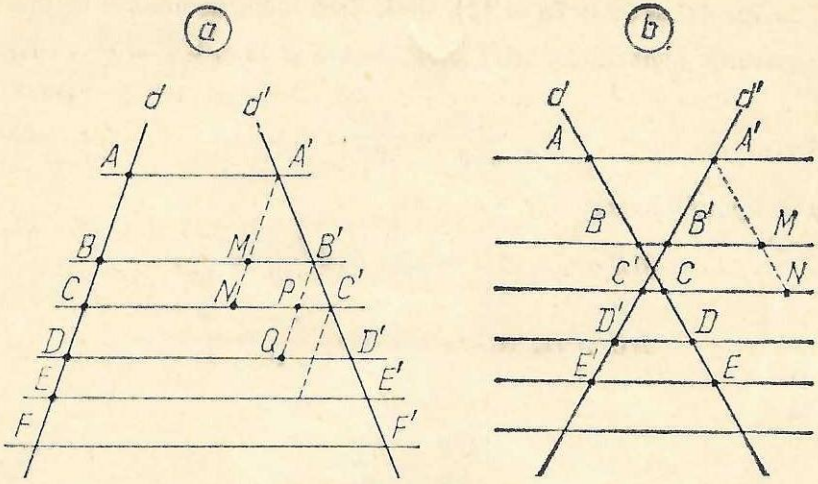



Fig. II.10

crește). Rezultă că punctul $N'$ nu poate cădea între $N$ și $C$. La fel se demonstrează că punctul $N'$ nu poate cădea între $N$ și $A$. Rezultă că punctul $N'$ coincide cu $N$, deci $MN \parallel AB$.

5. **Șir de drepte paralele.** Am văzut că mai multe drepte paralele echidistante determină pe orice secantă segmente egale. În figura 10-a, b se văd mai multe drepte paralele care nu sînt echidistante. Segmentele pe care le determină pe secantele $d$ și $d'$ nu vor mai fi egale, totuși între aceste segmente există o legătură. Astfel, dacă $AB$ este mai mare decît $BC$, atunci și $A'B'$ va fi mai mare decît $B'C'$ ș.a.m.d. Legătura între aceste segmente se exprimă prin teorema următoare:

*Mai multe drepte paralele determină pe două secante oarecare segmente proporționale.*

Pentru a demonstra această teoremă, ducem $A'MN$ paralel cu $d$ (fig. 10-a). Aplicînd teorema lui Tales în triunghiul $A'NC'$, putem scrie:

$$\frac{A'M}{A'B'} = \frac{MN}{B'C'}.$$

Dar $A'M = AB$ și $MN = BC$ (paralele cuprinse între paralele). Înlocuim în proporția de mai sus $A'M$ prin $AB$ și $MN$ prin $BC$ și obținem:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

În același fel se stabilește că:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

ș.a.m.d.

Aceasta înseamnă că

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots$$

Segmentele de pe secanta $d$ sînt proporționale cu segmentele de pe secanta $d'$.

Demonstrația se poate repeta cuvînt cu cuvînt pentru cazul din figura 10-b, unde secantele se taie între două drepte ale șirului de drepte paralele.

## 2.3. CONSTRUCȚII GEOMETRICE

Pe baza teoremei precedente se pot rezolva unele probleme în care intervine raportul a două segmente pe cale grafică, folosind numai rigla și compasul.

1. **Împărțirea unui segment în părți proporționale.** *1.* Fie $AB$ segmentul dat (fig. 11) și $a$, $b$ și $c$ trei segmente date. Se cere să împărțim $AB$ în trei părți proporționale cu $a$, $b$ și $c$. Construcția se face astfel.

1. Se duce prin $A$ o semidreaptă oarecare $Ax$ și se poartă pe ea segmentele $AC$, $CD$ și $DE$ respectiv egale cu $a$, $b$ și $c$.

2. Se unește $E$ cu $B$ și se duc prin $D$ și $C$ paralele la $BE$. Punctele $M$ și $N$ astfel obținute sînt cele căutate. În adevăr, dacă se duce și prin $A$ paralela la $BE$, apar mai multe drepte paralele tăiate de două secante $AB$ și $Ax$.

Teorema precedentă ne arată că

$$\frac{AM}{a} = \frac{MN}{b} = \frac{NB}{c}.$$

Dacă se cere să împărțim segmentul într-un alt număr de părți, de exemplu în 5 părți proporționale cu 5 segmente date $a$, $b$, $c$, $d$ și $e$, se procedează la fel, numai că pe semidreapta $Ax$ se poartă unul după altul 5 segmente respectiv egale cu $a$, $b$, $c$, $d$ și $e$.

2. Dacă se cere să împărțim segmentul $AB$ în părți proporționale cu niște numere date, de exemplu cu numerele 2, 3 și 6, construcția se face la fel, numai că pe $Ax$ se poartă $AC$, $CD$ și $DE$ respectiv egale cu două unități, 3 unități și 6 unități, unitatea fiind un segment oarecare.

2. **Împărțirea unui segment în părți egale.** Fie $AB$ un segment. Ne propunem să-l împărțim, de exemplu, în 5 părți egale. Ducem prin $A$ o semidreaptă oarecare (fig. 12) și purtăm pe ea 5 segmente egale: $AC = CD = DE = EF = FG$. Unim punctul $G$ cu punctul $B$ și prin punctele $F$, $E$, $D$ și $C$ ducem paralele la $GB$. Punctele în care aceste paralele taie dreapta $AB$ împart segmentul $AB$ în 5 părți egale.

În adevăr, segmentele $AC$, $CD$ etc. fiind egale, le putem nota cu aceeași literă, $a$. Conform ultimei teoreme

$$\frac{AM}{a} = \frac{MN}{a} = \frac{NP}{a} = \frac{PQ}{a} = \frac{QB}{a}.$$

Aceste fracții fiind egale și numitorii lor fiind egali, numărătorii sînt de asemenea egali. Rezultă că

$$AM = MN = NP = PQ = QB.$$

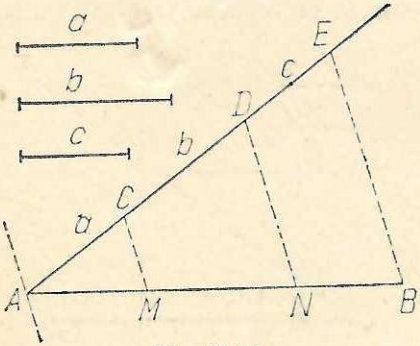



Fig. 11.11

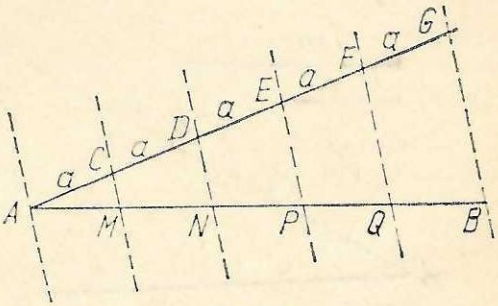



Fig. 11.12

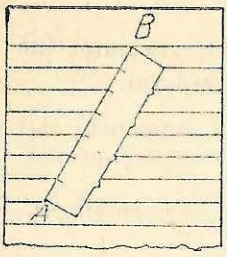


Fig. II.13

3. **Observări.** 1. Această construcție se poate justifica și prin teorema cu privire la paralele echidistante. În adevăr, ducem și prin $A$ paralela la $BG$. Atunci paralelele $GB$, $FQ$ ș.a.m.d. determină pe dreapta $AG$ segmente egale, deci ele sînt echidistante, deci ele determină și pe dreapta $AB$ segmente egale.

2. Tot aceeași teoremă ne dă un mijloc practic de a împărți un segment în mai multe părți egale. Figura 13 arată cum se împarte un segment în 7 părți egale. Pe marginea unei foi de hîrtie se marchează două puncte $A$ și $B$ astfel încît segmentul $AB$ să fie egal cu cel dat. Foaia de hîrtie se așază pe un caiet liniat și se înclină astfel încît punctul $A$ să cadă pe o linie a caietului și punctul $B$ cu 7 linii mai sus.

4. **Împărțirea unui segment într-un raport dat.** Raportul este dat ca raport a două segmente date, $m$ și $n$. Măsurile lor nu se cunosc. Fie $AB$ segmentul dat (fig. 14). Trebuie să găsim pe $AB$ un punct $M$ astfel încît să aibă loc relația

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$$

sau, schimbînd mezii între ei,

$$\frac{MA}{m} = \frac{MB}{n}.$$

Aceasta înseamnă că $MA$ și $MB$ sînt proporționale cu $m$ și $n$, deci se procedează cum s-a arătat mai sus, adică:

1. Se duce prin $A$ o semidreaptă oarecare $Ax$ și se poartă pe ea segmentele $AC$ egal cu $m$ și $CD$ egal cu $n$.

2. Se unește punctul $B$ cu punctul $D$ și se duce prin $C$ paralela la $DB$.

Punctul $M$ în care această paralelă taie dreapta $AB$ este punctul căutat.

Dacă raportul este dat numeric, de exemplu se cere ca $\frac{MA}{MB}$ să fie egal cu $\frac{3}{5}$, se ia $AC$ egal cu 3 și $CD$ egal cu 5, unitatea de măsură fiind arbitrară.

5. **Aflarea celei de-a patra proporționale.** Se dau trei segmente $a$, $b$, $c$ (nu se cunosc lungimile lor) (fig. 15). Se cere să găsim un al patrulea segment care, împreună cu ele, să formeze o proporție, adică se cere un segment $z$ astfel încît să avem: $\frac{a}{b} = \frac{c}{z}$.

Construcția se face astfel:

1. Se ia un unghi oarecare $xOy$, se poartă pe una din laturile lui segmentele $OA$ egal cu $a$ și $AC$ egal cu $c$ și pe cealaltă latură se poartă un segment $OB$ egal cu $b$.

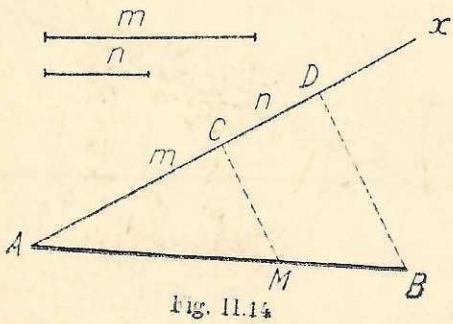


Fig. II.14

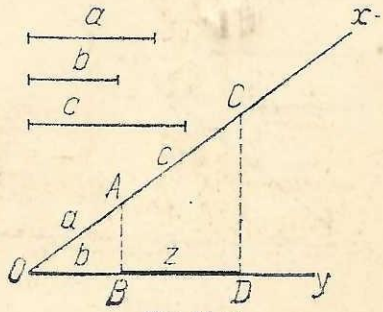


Fig. II.15

2. Se unește $A$ cu $B$ și se duce prin $C$ paralela la $AB$. Fie $D$ punctul ei de intersecție cu $Oy$.

Segmentul $BD$ astfel obținut este segmentul căutat. În adevăr, dacă ducem și prin punctul $O$ paralela la $CD$, avem trei paralele tăiate de secantele $Ox$ și $Oy$, deci

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{z}$$

Cazul cînd se dau lungimile celor trei segmente nu prezintă interes, căci problema se poate rezolva prin calcul.

51

## 2.4. POLIGOANE ASEMENEA

1. În mod obișnuit, se spune că două lucruri *seamănă* între ele cînd sînt la fel în unele privințe, dar nu în toate privințele.

De exemplu, cele două schițe care se văd în figura 16 seamănă între ele. Aceste două figuri sînt *asemenea*. Schița a doua este „aceeași" cu prima, dar mai mică. Schițele au aceeași formă dar nu au aceeași mărime.

Noțiunea de asemănare este foarte largă. De exemplu, se poate spune că un om seamănă cu un alt om, că o melodie seamănă cu o altă melodie, că o întîmplare seamănă cu o altă întîmplare ș.a.m.d. În geometrie, această noțiune are un sens precis, pe care-l vom lămuri numai în cazul poligoanelor.

2. **Poligoane asemenea.** În figura 17 se văd patru poligoane. Poligonul II este asemenea cu poligonul I, iar poligonul III, deși are aproape aceeași formă ca I, nu este asemenea cu el. Cît despre poligonul IV, el nu seamănă deloc cu primul. Ce ne face să spunem că primele două poligoane sînt asemenea?

Între aceste poligoane se poate stabili o corespondență astfel încît fiecărui vîrf al poligonului I să-i corespundă un vîrf al poligonului II: vîrfului $A_1$ îi corespunde

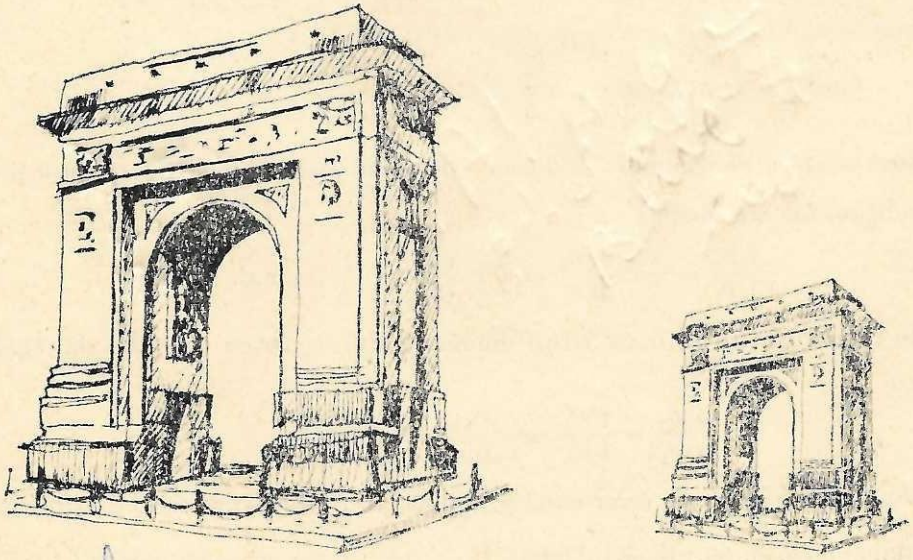


Fig. 11.16

4* cazil anexe

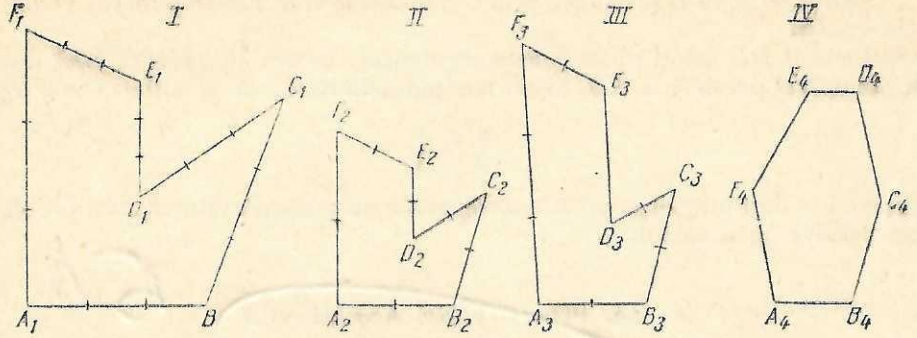



Fig. II.17

virful $A_2$, virfului $B_1$ îi corespunde vîrful $B_2$ ș.a.m.d. Această corespondență se poate reda prin tabelul

$$\frac{A_1 \quad B_1 \quad C_1 \quad D_1 \quad E_1 \quad F_1}{A_2 \quad B_2 \quad C_2 \quad D_2 \quad E_2 \quad F_2}$$

În rîndul întîi figurează vîrfurile poligonului I și în rîndul al doilea, sub fiecare, vîrful corespunzător al poligonului II. Fiecărui unghi al poligonului I îi corespunde cîte un unghi al poligonului II și fiecărei laturi a poligonului I îi corespunde cîte o latură a poligonului II, și anume: unghiului $A_1$ îi corespunde unghiul $A_2$, unghiului $B_1$ îi corespunde unghiul $B_2$ ș.a.m.d.; laturii $A_1B_1$ îi corespunde latura $A_2B_2$, laturii $B_1C_1$ îi corespunde latura $B_2C_2$ ș.a.m.d. Cîte două unghiuri sau laturi corespunzătoare se numesc unghiuri sau laturi *omoloage*.

Aceste poligoane sînt asemenea datorită faptului că această corespondență are însușirile următoare:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2,\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2,\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2,\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2,\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \text{ și } \hat{F}_1 = \hat{F}_2.$$

Unghiurile corespunzătoare sînt egale două cîte două. Apoi

$$A_2B_2 = \frac{2}{3} A_1B_1,\ B_2C_2 = \frac{2}{3} B_1C_1,\ C_2D_2 = \frac{2}{3} C_1D_1 \text{ ș.a.m.d.}$$

Fiecare latură a poligonului al doilea este $\frac{2}{3}$ din latura omoloagă cu ea a primului poligon. De aici rezultă că

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{2}{3},\ \frac{B_2C_2}{B_1C_1} = \frac{2}{3},\ \frac{C_2D_2}{C_1D_1} = \frac{2}{3} \text{ ș.a.m.d.}$$

Toate rapoartele a cîte două laturi omoloage sînt egale cu $\frac{2}{3}$, deci sînt egale între ele:

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1} = \frac{C_2D_2}{C_1D_1} = \ldots = \frac{F_2A_2}{F_1D_1},$$

ceea ce înseamnă că laturile celor două poligoane sînt proporționale. (Bineînțeles, $\frac{2}{3}$ este numai un exemplu; raportul poate fi $\frac{5}{11}$ sau $\frac{1}{100}$ sau orice alt număr.) Aceste

poligoane sînt asemenea pentru că unghiurile lor sînt egale două cîte două și laturile lor sînt proporționale. Dacă una sau alta din aceste condiții nu este îndeplinită, poligoanele nu sînt asemenea.

Astfel, și între poligoanele I și III se poate stabili o corespondență ca cea de mai sus. Cîte două unghiuri corespunzătoare sînt egale; apoi $\frac{A_3B_3}{A_1B_1} = \frac{B_3C_3}{B_1C_1} = \frac{C_3D_3}{C_1D_1} = \frac{E_3F_3}{E_1F_1} = \frac{2}{3}$, dar $D_3F_3 = D_1E_1$ și $F_3A_3 = F_1A_1$, deci $\frac{D_3E_3}{D_1E_1} \neq \frac{2}{3}$ și $\frac{F_3A_3}{F_1A_1} \neq \frac{2}{3}$. Laturile acestor poligoane nu sînt proporționale, poligonul III nu este asemenea cu poligonul I.

Cît despre poligonul IV, el nu seamănă deloc cu primul. Unghiurile acestor poligoane nu sînt egale și laturile lor nu sînt proporționale.

**Definiție.** *Două poligoane sînt asemenea cînd între ele se poate stabili o corespondență astfel încît cîte două unghiuri corespunzătoare să fie egale și laturile corespunzătoare (omologe) să fie proporționale.*

Raportul a două laturi omologe se numește *raportul de asemănare* a celor două poligoane. În cazul poligoanelor I și II din figura 17, raportul de asemănare este $\frac{2}{3}$. Pentru a scrie că două figuri sînt asemenea, se folosește[1] semnul $\sim$; de exemplu, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2F_2$.

3. **Observări.** 1. Relația de asemănare nu se deosebește mult de relația de egalitate. În ambele cazuri se poate stabili o corespondență între cele două figuri. În cazul egalității a două poligoane, cîte două unghiuri corespunzătoare sînt egale și cîte două laturi corespunzătoare sînt egale, această relație păstrează unghiurile și distanțele; și în cazul asemănării cîte două unghiuri corespunzătoare sînt egale, deci asemănarea păstrează unghiurile, dar laturile corespunzătoare nu mai sînt egale două cîte două, asemănarea nu păstrează distanțele.

2. Considerăm două poligoane egale $A_1B_1C_1D_1$... și $A_2B_2C_2D_2$..., cîte două vîrfuri corespunzătoare fiind notate cu aceeași literă. Unghiurile lor sînt egale două cîte două. În ceea ce privește laturile corespunzătoare, $A_1B_1 = A_2B_2$, deci $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = 1$; $B_1C_1 = B_2C_2$, deci $\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = 1$; tot așa $\frac{C_1D_1}{C_2D_2} = 1$; ș.a.m.d. Deci $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2} = ...$, ceea ce înseamnă că laturile lor sînt proporționale. Rezultă că poligoanele sînt și asemenea, dar ne găsim aici într-un caz deosebit de asemănare, și anume raportul de asemănare este 1.

*Două poligoane egale sînt asemenea, raportul de asemănare fiind* 1.

4. **Raportul perimetrelor a două poligoane asemenea.** Considerăm două poligoane asemenea, de exemplu două pentagoane asemenea (fig. 18) și fie $k$ raportul lor de asemănare. Care este raportul dintre perimetrele lor?

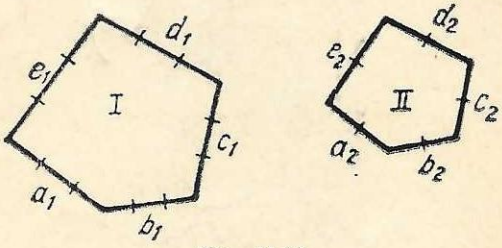


Fig. II.18

[1] Semnul $\sim$ vine de la litera *s*, prima literă a cuvîntului latin *similis* (asemenea).

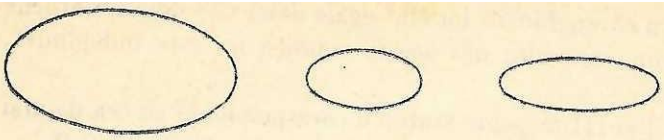


Fig. II.19

Poligoanele fiind asemenea, laturile lor sînt proporționale:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{e_1}{e_2} = k.$$

Se știe că, într-un șir de rapoarte egale, raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor este egal cu fiecare dintre aceste rapoarte, deci

$$\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1}{a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2} = k.$$

Numărătorul acestui raport este perimetrul primului poligon și numitorul este perimetrul poligonului al doilea. Notăm aceste perimetre cu $p_1$ și $p_2$; deci

$$\frac{p_1}{p_2} = k.$$

Demonstrația este aceeași oricare ar fi numărul laturilor poligoanelor.

*Raportul perimetrelor a două poligoane asemenea este egal cu raportul lor de asemănare.*

5. **Figuri asemenea.** În cele ce preced, am studiat figuri plane asemenea formate din segmente de dreaptă. Și două figuri plane limitate de linii curbe sau de segmente de dreaptă și linii curbe pot fi asemenea sau nu. De exemplu, în figura 19 se văd trei elipse. Elipsa a doua este asemenea cu prima, elipsa a treia *nu* este asemenea cu prima, ea este mai alungită.

În vorbirea obișnuită, deseori nu se face distincție între figuri egale și figuri asemenea. Cînd copiem pe caiet un desen de pe tablă, ne străduim să-l facem „exact la fel" ca pe tablă. Desenul de pe caiet nu va fi niciodată egal cu cel de pe tablă, ci mai mic; în cazul cel mai bun, vom face un desen asemenea cu cel de pe tablă.

6. **Procedeu practic.** Pentru a copia un desen, mărindu-l sau micșorîndu-l într-un anumit raport, se folosește procedeul „prin pătrățele" indicat în figura 20. Pentru a copia portretul din primul desen, l-am acoperit cu o rețea de pătrățele, apoi am făcut o altă rețea de pătrățele, fiecare pătrățel

Fig. II.20

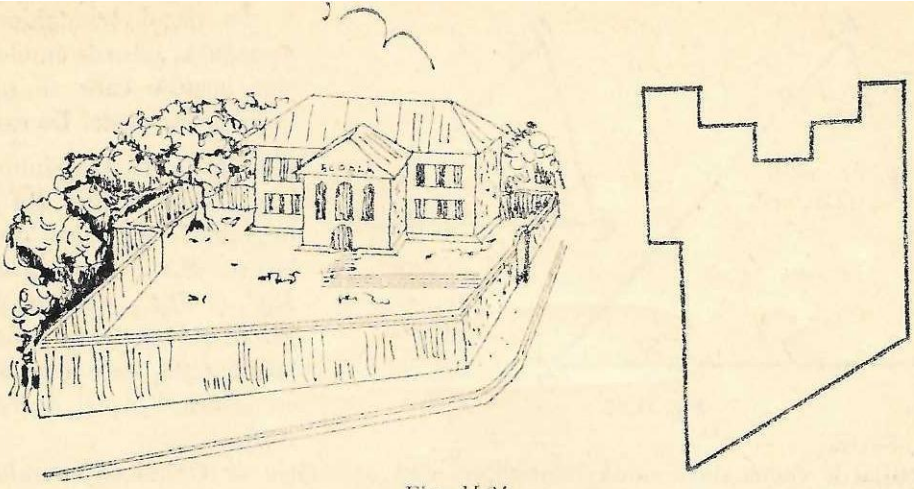


Fig. II.21

avînd latura de două ori mai mică decît în prima rețea și am desenat în fiecare pătrățel din rețeaua a doua partea care se găsește în pătrățelul corespunzător din prima rețea. Figura a doua este asemenea cu prima, raportul de asemănare fiind 1 : 2. Motivarea acestui procedeu cere cunoștințe mai aprofundate.

7. **Scara unui plan sau a unei hărți.** În desenul tehnic și pe hărți, raportul de asemănare din figura de pe plan sau hartă și cea reală se indică printr-o fracție cu numărătorul 1 (în locul liniei de fracție se folosește uneori semnul împărțirii). Acest raport se numește *scara* planului sau a hărții.

*Exemple.* În arhitectură și construcții, planurile se fac la scara 1 : 50, 1 : 100 sau 1 : 200. Pentru detalii, se întrebuințează scara 1 : 20. Planurile topografice se fac la scara 1 : 500, 1 : 1 000, ... pînă la 1 : 10 000.

Hărțile din atlasul geografic sînt făcute la scara 1 : 20 000 000, 1 : 10 000 000, 1 : 5 000 000 ș.a. Hărțile turistice se fac de la scara 1 : 200 000 pînă la 1 : 20 000.

8. **Ridicarea unui plan.** A ridica planul unui teren înseamnă a construi un poligon asemenea cu acel teren, presupus plan. Laturile poligonului de pe teren se măsoară direct, cu ruleta sau cu lanțul, iar unghiurile se măsoară cu grafometrul. Apoi se construiește pe hîrtie un poligon asemenea cu cel de pe teren, adoptînd un raport de asemănare potrivit, care depinde de mărimea terenului și de mărimea pe care vrem s-o dăm planului. În figura 21 se vede planul curții unei școli.

## 2.5. CAZURILE DE ASEMĂNARE A TRIUNGHIURILOR

1. *Triunghiuri asemenea.* Tot ce s-a spus despre poligoanele asemenea este valabil și în cazul triunghiurilor. În figura 22 se văd două triunghiuri asemenea, raportul lor de asemănare este $\frac{3}{5}$.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2,\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2,\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2;\ \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1A_1}{C_2A_2} = \frac{3}{5}.$$

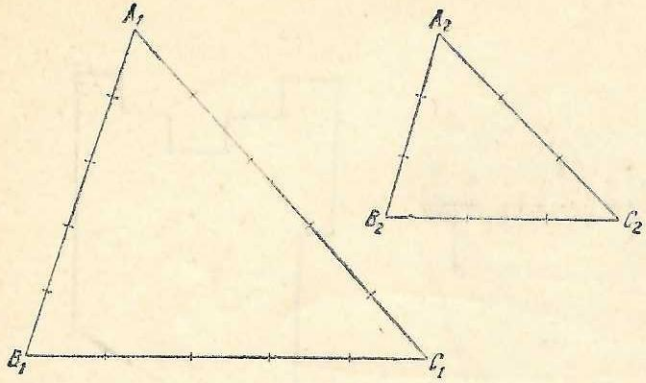


Fig. II.22

În cazul triunghiurilor asemenea, laturile omoloage sînt laturile care se opun unghiurilor egale. De exemplu, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, unghiului $A_1$ i se opune latura $B_1C_1$ și unghiului $A_2$ i se opune latura $B_2C_2$, deci laturile $B_1C_1$ și $B_2C_2$ sînt omoloage. În același fel se vede că latura $C_2A_2$ este omoloagă cu latura $C_1A_1$ și $A_2B_2$ cu $A_1B_1$.

Pentru a vedea dacă două triunghiuri sînt asemenea ar trebui să examinăm toate unghiurile lor, pentru a vedea dacă sînt egale, și toate laturile lor, pentru a vedea dacă sînt proporționale. Dar acest lucru nu este necesar. Ca și în cazul egalității triunghiurilor, ajunge să examinăm numai unele elemente. Concluzia se bazează pe cazurile de asemănare a triunghiurilor, pe care le vom expune mai jos. Dar mai întîi trebuie să demonstrăm o altă teoremă.

2. **Teorema fundamentală a asemănării.** *O paralelă dusă la o latură a unui triunghi formează cu celelalte laturi ale triunghiului un triunghi asemenea cu primul.*

Presupunem că $DE \parallel BC$ (fig. 23). Trebuie să dovedim că $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Demonstrația se va compune din două părți. În prima parte vom dovedi că unghiurile acestor triunghiuri sînt egale două cîte două, iar în partea a doua vom dovedi că laturile lor sînt proporționale.

*1.* Unghiul $A$ este comun celor două triunghiuri, $\hat{D} = \hat{B}$ ca unghiuri corespondente ($DE \parallel BC$), $\hat{E} = \hat{C}$ ca unghiuri corespondente. Deci, unghiurile acestor două triunghiuri sînt egale două cîte două.

*2.* Să presupunem că, de exemplu, $AB = 7$ și $AD = 5$, deci

$$\frac{AD}{AB} = \frac{5}{7}.$$

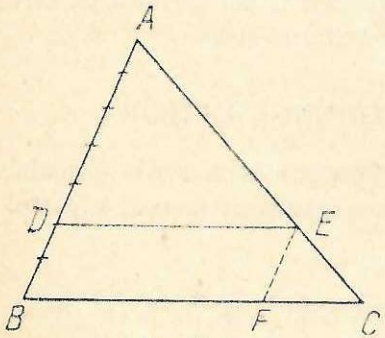


Fig. II.23

Teorema lui Tales (sub forma a doua) arată că $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$, deci:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{5}{7}.$$

Pentru a dovedi că și raportul $\frac{DE}{BC}$ este egal cu $\frac{5}{7}$, ducem prin $E$ paralela la $AB$

și aplicăm teorema lui Tales sub forma a treia: $\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC}$, deci

$$\frac{BF}{BC} = \frac{5}{7}.$$

Dar $BF = DE$, ca paralele cuprinse între paralele; putem deci înlocui $BF$ prin $DE$. Obținem:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{5}{7}.$$

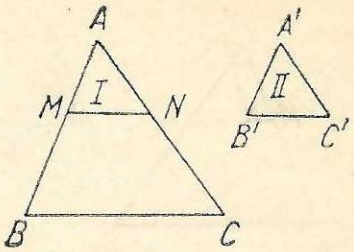


Fig. II.24

Am dovedit astfel că:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}\left(= \frac{5}{7}\right)$$

ceea ce înseamnă că laturile triunghiurilor $ADE$ și $ABC$ sînt proporționale.

3. **Cazul I de asemănare.** *Pentru ca două triunghiuri să fie asemenea, este suficient ca ele să aibă cîte două laturi proporționale și unghiul cuprins între ele egal.*

Fie $ABC$ și $A'B'C'$ (fig. 24) două triunghiuri în care $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$, $\hat{A} = \hat{A}'$. Trebuie să demonstrăm că ele sînt asemenea.

Purtăm pe $AB$ un segment $AM$ egal cu $A'B'$, ducem prin $M$ paralela la $BC$ și notăm cu $N$ intersecția ei cu $AC$. Conform teoremei fundamentale $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

Vom demonstra acum că $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$. Considerăm, de exemplu, cazul cînd $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{3}{7}$, adică $A'B' = \frac{3}{7}AB$ și $A'C' = \frac{3}{7}AC$.

Deoarece $AM = A'B'$, rezultă că $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{7}$, deci raportul de asemănare a triunghiurilor $AMN$ și $ABC$ este $\frac{3}{7}$, deci $AN = \frac{3}{7}AC$; dar și $A'C' = \frac{3}{7}AC$, deci $AN = A'C'$. Așadar, în triunghiurile $AMN$ și $A'B'C'$: $AM = A'B'$ (prin construcție), $AN = A'C'$ (după cum am arătat) și $\hat{A} = \hat{A}'$ (prin ipoteză). Aceste două triunghiuri sînt egale (LUL). Din $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ și $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$ rezultă că $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

4. **Cazul II de asemănare.** *Pentru ca două triunghiuri să fie asemenea, este suficient ca ele să aibă cîte două unghiuri egale.*

Fie $ABC$ și $A'B'C'$ două triunghiuri în care $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ (fig. 24). Trebuie să demonstrăm că ele sînt asemenea. Purtăm și acum pe $AB$ un segment $AM$ egal cu $A'B'$ și ducem $MN$ paralel cu $B'C'$. Conform teoremei fundamentale, $\triangle AMN \sim \triangle ABC$; rămîne să demonstrăm că $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$. În aceste triunghiuri: $\hat{A} = \hat{A}'$ (prin ipoteză), $AM = A'B'$ (prin construcție) și $\hat{M} = \hat{B}'$, căci $\hat{M} = \hat{B}$ (unghiuri corespondente) și $\hat{B} = \hat{B}'$ (prin ipoteză). Rezultă că aceste triunghiuri sînt egale (ULU).

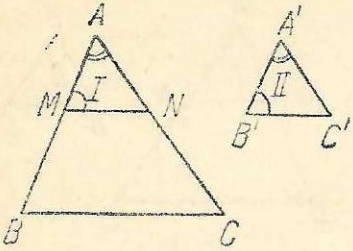


Fig. II.25

**5. Cazul III de asemănare.** *Pentru ca două triunghiuri să fie asemenea, este suficient ca laturile lor să fie proporționale.*

Fie $ABC$ și $A'B'C'$ două triunghiuri în care $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$. Trebuie să demonstrăm că ele sînt asemenea (fig. 25).

Facem aceeași construcție ajutătoare ca în cazurile precedente ($AM = A'B'$, $MN \parallel BC$). $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ (teorema fundamentală) și rămîne să demonstrăm că $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$. Considerăm, de exemplu, cazul cînd $\frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{8}$, deci și $\frac{B'C'}{BC} = \frac{3}{8}$ și $\frac{C'A'}{CA} = \frac{3}{8}$, ceea ce înseamnă că

$$A'B' = \frac{3}{8} AB, \quad B'C' = \frac{3}{8} BC \text{ și } C'A' = \frac{3}{8} CA.$$

Deoarece $AM = A'B'$, rezultă că $AM = \frac{3}{8} AB$, deci raportul de asemănare a triunghiurilor $AMN$ și $ABC$ este $\frac{3}{8}$. Rezultă că

$$MN = \frac{3}{8} BC, \; AN = \frac{3}{8} AC.$$

Comparînd aceste egalități cu cele de mai sus, deducem că $MN = B'C'$ și $AN = C'A'$. Deci, $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$ (LLL).

**6. Observări.** 1. Cazurile de asemănare seamănă mult cu cazurile de egalitate a triunghiurilor. Cazul I și III de asemănare a triunghiurilor se obțin din cazurile LUL și LLL înlocuind condiția ca laturile să fie egale prin aceea ca laturile să fie proporționale; numai în cazul II laturile triunghiurilor nu intervin.

2. Toate cazurile de asemănare se demonstrează după aceeași schemă. Pe latura $AB$ a triunghiului mai mare se poartă un segment $AM$ egal cu $A'B'$ și prin $M$ se duce paralela la $BC$; se obține astfel un triunghi mai mic $AMN$. De aci înainte demonstrația se compune din două părți:

1) Se demonstrează că $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ și 2) se demonstrează că $\triangle AMN = \triangle A'B'C'$. Prima parte este imediată, după teorema fundamentală a asemănării, iar partea a doua diferă de la un caz de asemănare la altul.

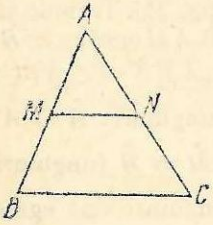


Fig. II·26

**7. Linia mijlocie a triunghiului.** Considerăm un triunghi $ABC$ (fig. 26) și fie $M$ mijlocul laturii $AB$ și $N$ mijlocul laturii $AC$. Segmentul $MN$ se numește *linia mijlocie* a triunghiului $ABC$. Ce poziție are dreapta $MN$ față de $BC$? Cît de mare este segmentul $MN$?

*a)* Deoarece $MA = MB$, $\frac{MA}{MB} = 1$; deoarece $NA = NC$, $\frac{NA}{NC} = 1$. Rezultă că $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC}$ ceea ce înseamnă că dreapta $MN$

împarte laturile $AB$ și $AC$ în părți proporționale. Reciproca teoremei lui Tales ne arată că $MN$ *este paralel cu* $BC$.

*b)* De aici rezultă, pe baza teoremei fundamentale a asemănării, că $\triangle AMN \sim \triangle ABC$. Raportul de asemănare este $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$; rezultă că și $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$, adică *MN este jumătate din BC.*

*Segmentul de dreaptă care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralel cu latura a treia și egal cu jumătatea ei.*

## 2.6. APLICAȚII

**1. Scara transversală.** Să considerăm un unghi $xOy$ (fig. 27). Purtăm pe una dintre laturile sale un șir de segmente egale, $OA = AB = BC = ...$, și prin capetele lor ducem un șir de drepte paralele. Obținem un șir de segmente $AA'$, $BB'$ ș.a.m.d. Să luăm ca unitate de măsură primul segment, $AA' = 1$ și să calculăm lungimile segmentelor $BB'$, $CC'$, ...

Considerăm triunghiurile $OAA'$ și $OBB'$. $AA' \parallel BB'$, deci, conform teoremei fundamentale, aceste triunghiuri sînt asemenea. Rezultă că laturile lor sînt proporționale:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB}.$$

Dar $OB = 2OA$, deci $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{2}$. Rezultă că $\frac{AA'}{BB'} = \frac{1}{2}$, deci $BB' = 2AA'$. Înlocuind $AA'$ cu 1, se obține $BB' = 2$.

Considerînd triunghiurile asemenea $OAA'$ și $OCC'$ se obține $CC' = 3$; în mod analog se obține $DD' = 4$, $EE' = 5$ ș.a.m.d.

Pe acest fapt se bazează *scara transversală* (fig. 28). E un pătrat ale cărui laturi sînt împărțite în cîte 10 părți egale, punctele de diviziune fiind unite așa cum arată figura. Să privim unghiul $xOy$. Ne găsim în condițiile din figura 27, dar aici s-au purtat pe $Ox$ zece segmente egale. Considerăm segmentele orizontale cuprinse în

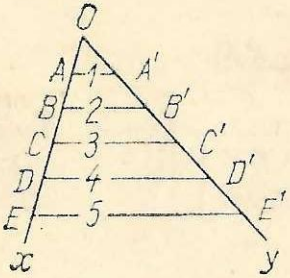


Fig. II.27

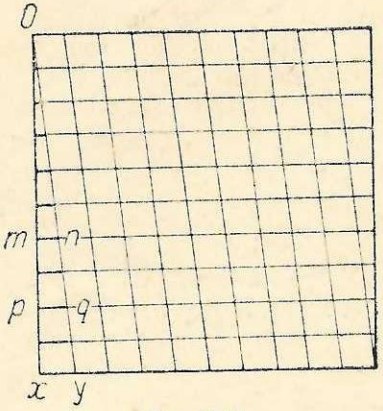


Fig. II.28

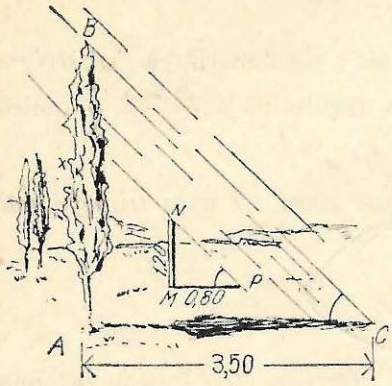



Fig. II.29

interiorul acestui unghi. Dacă luăm ca unitate pe cel mai mic dintre aceste segmente, cel mai apropiat de $O$, măsurile segmentelor vor fi de 2, 3, 4, ..., ori măsura segmentului luat ca unitate.

2. **Determinarea înălțimii unui obiect cu ajutorul umbrei.** Fie $AB$ un copac și $AC$ umbra lui (fig. 29). Înfigem un băț vertical în pămînt și măsurăm atît înălțimea lui, $MN$, cît și lungimea umbrei aruncate de el, $MP$. Măsurăm și umbra aruncată de copac.

Triunghiul $ABC$ este asemenea cu triunghiul $MNP$. În adevăr, aceste triunghiuri sînt dreptunghice și $\hat{C} = \hat{P}$ fiindcă sînt unghiuri cu laturile paralele. Rezultă că laturile acestor triunghiuri sînt proporționale. Cu datele din figură putem scrie:

$$\frac{AB}{1{,}20} = \frac{3{,}50}{0{,}80};$$

de unde $AB = 5{,}25$ m.

Legenda spune că acest procedeu a fost inventat de Tales din Milet și prezentat regelui Egiptului, care și-a exprimat admirația (fig. 30).

3. **Aprecierea unor distanțe pe teren.** Este util să reținem faptul că, dacă ținem brațul întins, distanța de la ochi pînă la vîrful degetului mijlociu este cam de 60 cm[1] (fig. 31).

Ne găsim într-un punct și vedem în depărtare o cabană. Știm că înălțimea cabanei este de circa 8 m. Ținem o riglă vertical în fața ochilor și constatăm, de exemplu, că înălțimea cabanei este acoperită de o lungime de 12 mm de pe riglă. Aceste date sînt suficiente ca să putem determina distanța pînă la cabană (fig. 32).

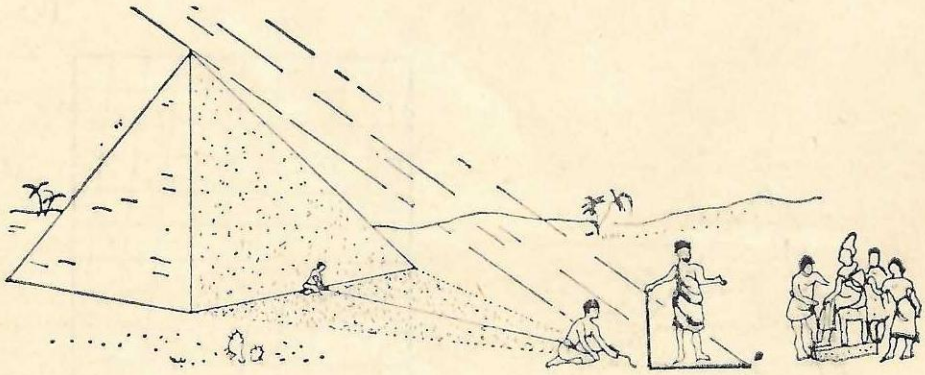


Fig. II.30

[1] Elevii vor determina această distanță, fiecare după talia lui.

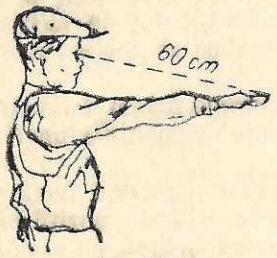



Fig. II.31

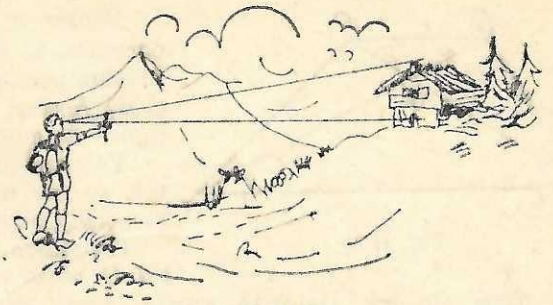


Fig. II.32

Figura 33 redă situația schematic. Punctul $O$ reprezintă ochiul observatorului, $AB$ cabana și $MN$ partea din riglă care acoperă cabana. $MN \parallel AB$, deci $\triangle OMN \sim \sim \triangle OAB$ (teorema fundamentală a asemănării). Rezultă că

$$\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OA}.$$

Se dă: $MN = 0{,}012$ m, $AB = 8$ m, $OM = 0{,}60$ m.
Deci,

$$\frac{0{,}012}{8} = \frac{0{,}60}{OA}, \quad OA = 400 \text{ m}.$$

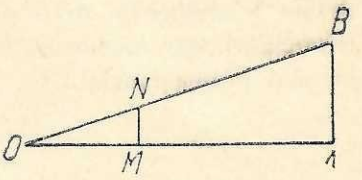



Fig. II.33

Distanța pînă la cabană este de 400 m.

4. **Compasul reductor.** Acest instrument se folosește pentru a copia un desen reducîndu-l la scară, adică astfel ca toate distanțele de pe original să fie reduse în același raport. El este format din două piese (fig. 34-*a*) $A_1A_2$ și $B_1B_2$, care se pot roti în jurul punctului $O$. Piesele sînt astfel reunite încît $OA_1$ să fie egal cu $OB_1$ și $OA_2$ cu $OB_2$. Figura 34-*b* redă instrumentul schematic.

Triunghiurile $OA_1B_1$ și $OA_2B_2$ sînt asemenea, oricare ar fi unghiul $O$, pentru că sînt isoscele și au $\widehat{A_1OB_1} = \widehat{A_2OB_2}$ (opuse la vîrf). Rezultă că:

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}.$$

Dacă punctul $O$ a fost astfel ales încît raportul $\frac{OA_1}{OA_2}$ să aibă o anumită valoare, de exemplu $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{7}{2}$, raportul $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$ va avea aceeași valoare, $\frac{7}{2}$, oricare ar fi mărimea unghiului $O$.

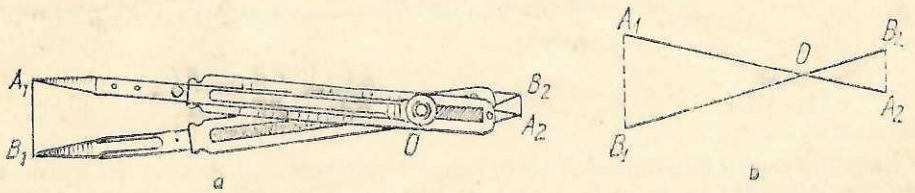



Fig. II.34

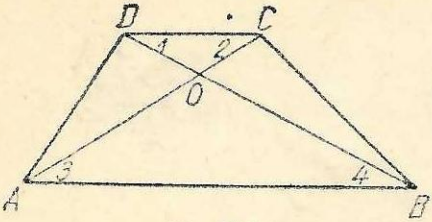


Fig. II.35

Pentru a transpune pe copie un segment oarecare, îl luăm între vîrfurile $A_1$ și $B_1$ și purtăm pe copie segmentul dat de vîrfurile $A_2$ și $B_2$. Același lucru se face cu toate segmentele figurii de copiat.

Folosind acest compas invers decît am arătat, se pot mări toate segmentele unei figuri în același raport.

Compasul este astfel construit încît punctul $O$ să poată ocupa diferite poziții pe cele două părți ale lui. Datorită acestui fapt, putem da raportului de asemănare diferite valori.

5. **Probleme.** *1. Să se demonstreze că diagonalele unui trapez se împart în părți proporționale cu bazele trapezului.*

Fie $ABCD$ un trapez oarecare, $O$ intersecția diagonalelor sale (fig. 35). Considerăm triunghiurile $AOB$ și $COD$. $\hat{1} = \hat{4}$ și $\hat{2} = \hat{3}$ (alterne interne). Deci, aceste triunghiuri sînt asemenea, conform cazului II de asemănare. Rezultă că laturile lor sînt proporționale[1]:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}.$$

Dacă reținem numai primul și ultimul raport și schimbăm mezii între ei, obținem

$$\frac{OC}{CD} = \frac{OA}{AB},$$

ceea ce înseamnă că părțile $OC$ și $OA$ sînt proporționale cu bazele $CD$ și $AB$.

Dacă reținem raportul al doilea și al treilea și schimbăm mezii între ei, obținem

$$\frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB},$$

ceea ce înseamnă că părțile $OD$ și $OB$ sînt proporționale cu bazele $CD$ și $AB$.

*2. Fie $P$ un punct exterior unui cerc, $PBA$ o secantă oarecare și $PT$, o tangentă la cerc* (fig. 36). *Să se demonstreze că $PT^2 = PA \cdot PB$.*

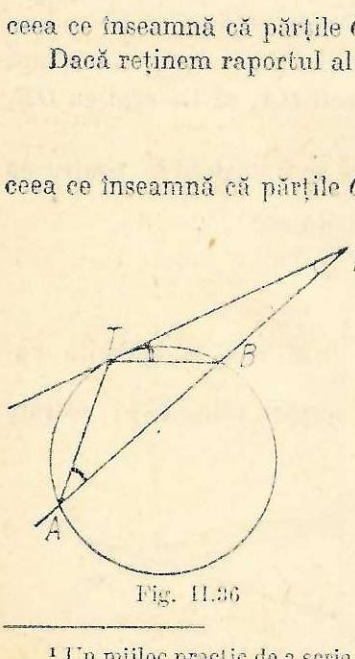


Fig. II.36

Unim punctul $T$ cu punctele $A$ și $B$, și examinăm triunghiurile $PTA$ și $PBT$. Ele au unghiul $P$ comun și $\hat{A} = \widehat{PTB}$, amîndouă fiind egale cu $\frac{\widehat{BT}}{2}$. Aceste triunghiuri sînt asemenea conform cazului II de asemănare. Rezultă că laturile lor sînt proporționale:

$$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} = \frac{BT}{AT}.$$

[1] Un mijloc practic de a scrie acest șir de rapoarte este următorul. Se scriu trei linii de fracții și semnul = între ele: $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$; la numărători se scriu laturile unui triunghi în ordinea crescătoare și la numitori laturile celuilalt triunghi tot în ordine crescătoare.

Reținem numai prima egalitate și scriem că produsul mezilor este egal cu produsul extremilor: $PT^2 = PA \cdot PB$.

6. **Observare generală.** Cînd două poligoane sînt asemenea, fiecare din ele poate fi privit ca o copie a celuilalt. Dacă se face în fiecare din ele „aceeași" construcție, cîte două unghiuri corespunzătoare sînt egale și raportul a cîte două segmente corespunzătoare este egal cu raportul de asemănare a poligoanelor.

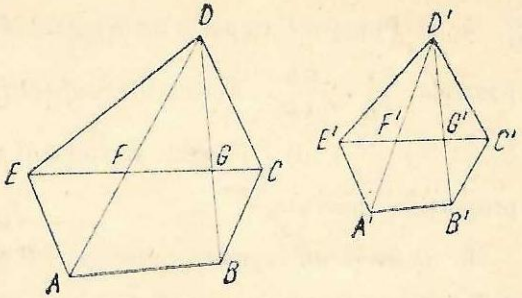


Fig. II.37

*Exemplu.* Fie $ABCDE$ și $A'B'C'D'E'$ două pentagoane asemenea, cîte două vîrfuri omoloage fiind notate cu aceeași literă (fig. 37). Dacă se duc diagonalele indicate în figură, se obțin punctele $F$ și $G$. Raportul $\frac{FG}{F'G'}$ este egal cu raportul de asemănare a poligoanelor.

De fapt, acest lucru trebuie demonstrat (v. exercițiile **37**, **38** și **39**), dar într-o tratare mai puțin aprofundată el se poate admite.

## EXERCIȚII

### SEGMENTE PROPORȚIONALE

**1.** (o) Un copil și un adult măsoară cu pasul dimensiunile unui teren de volei. Obțin ei pentru lungimea terenului același număr? Dar pentru lățime? Dar pentru raportul dintre lungime și lățime?

**2.** a) Să se ia un segment oarecare $a$ și să se împartă în 7 părți egale (segmentul se va măsura mai întîi); să se construiască apoi un segment $b$ format din 4 astfel de părți. Care este raportul dintre $a$ și $b$? Care este raportul dintre $b$ și $a$? Ce fracție din $a$ este $b$? Ce fracție din $b$ este $a$?

b) Aceleași întrebări, dacă segmentul $a$ se împarte în 53 de părți egale și $b$ este format din 21 astfel de părți.

c) Aceleași întrebări, dacă $a$ se împarte în 11 părți egale și $b$ este format din 15 astfel de părți.

**3.** Să se ia un segment oarecare $a$ și să se construiască un segment $b$ astfel încît raportul dintre ele să fie:

a) $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$; b) $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$; c) $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$; d) $\frac{a}{b} = \frac{8}{3}$.

(Segmentul $a$ se va măsura întîi.)

**4.** Împărțim un segment $MN$ în 8 părți egale și notăm punctele de diviziune cu $A$, $B$, $C$... În ce raport împarte fiecare dintre aceste puncte segmentul $MN$? Cînd trecem de la un punct la următorul, acest raport crește sau scade?

**5.** a) Punctul $C$ împarte un segment $AB$ în raportul $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{5}$. Să se afle raportele $\frac{CA}{AB}$, $\frac{CB}{AB}$. Aceleași întrebări în cazul cînd $C$ împarte $AB$ în raportul: b) $\frac{5}{7}$; c) $\frac{49}{150}$; d) $\frac{a}{b}$; e) $k$. Rezultatul se va da pe baza unei schițe și folosind proporțiile derivate.

**6.** Să se ia un segment oarecare $AB$ și să se determine pe el un punct $C$ care să-l împartă în raportul: a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{5}{9}$. Se va măsura mai întîi segmentul $AB$ și se va calcula lungimea uneia dintre părți. (În fiecare caz punctul $C$ poate avea două poziții.)

**7.** Pe un segment $AB$ se iau două puncte $M$ și $N$. Punctul $M$ împarte segmentul $AB$ în raportul $\frac{4}{7}$ și $N$ îl împarte în raportul $\frac{5}{8}$, ambele puncte fiind mai apropiate de $A$ decît de $B$. a) Care dintre aceste puncte este mai aproape de $A$? b) Ce fracție din segmentul $AB$ reprezintă segmentul $MN$? c) Aceeași întrebare dacă $M$ este mai aproape de $A$, iar $N$ este mai aproape de $B$.

**8.** Un segment $a$ este $\frac{3}{4}$ dintr-un alt segment $b$. Cît este raportul $\frac{a}{b}$? Ce fracție din $a$ este $b$?

## TEOREMA LUI TALES

**9.** Segmentele $AB$, $BC$ ș.a.m.d. fiind cele indicate în figura 38 să se completeze tabelul de mai jos. Lungimile sînt date în metri.

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $AC$ | 11 | | | 12 | 30 | |
| $AD$ | | 4 | 2 | | 12 | 4 |
| $DC$ | 8 | | 5 | | | |
| $BC$ | | 10 | 6 | 9 | | 18 |
| $BE$ | | 3 | | | | |
| $EC$ | 6 | | | 7 | 20 | 15 |

**10.** Notațiile fiind cele din figura 38, să se răspundă pe baza datelor de mai jos dacă dreapta $DE$ este paralelă cu $AB$ sau nu. În cazul cînd $DE$ nu este paralelă cu $AB$, să se arate cu cît trebuie mutat punctul $E$ pe $BC$ ca $DE$ să fie paralelă cu $AB$.

a) $CE = 1{,}8$, $EB = 2{,}7$, $CD = 2{,}4$, $AD = 3{,}6$; b) $CE = 2\frac{2}{3}$, $CB = 4\frac{1}{3}$,

---

**R. — 9.** a) $AD = 3$, $BE = 2\frac{1}{4}$, $BC = 8\frac{1}{4}$. b) $EC = 7$, $DC = 9\frac{1}{3}$, $AC = 13\frac{1}{3}$. c) $AC = 7$, $EC = 4\frac{2}{7}$, $BE = 1\frac{5}{7}$. d) $BE = 2$, $DC = 9\frac{1}{3}$, $AD = 2\frac{2}{3}$. e) $DC = 18$, $BE = 13\frac{1}{3}$, $BC = 33\frac{1}{3}$. f) $BE = 3$, $DC = 20$, $AC = 24$.

$CD = 17\frac{1}{3}$, $AD = 10\frac{5}{6}$; c) $CA = 38$, $AD = 18$, $CB = 7$, $CE = 4$; d) $AD = 5{,}2$, $DC = 3{,}9$, $BC = 4{,}9$, $BE = 2\frac{4}{5}$.

De ce nu s-a arătat care este unitatea de măsură. S-a aplicat teorema directă a lui Tales sau teorema reciprocă?

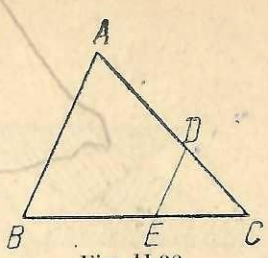


Fig. II.38

**11.** a) Așezăm două rigle de aceeași lungime și avînd aceeași gradație, astfel încît capetele cu diviziunea zero să coincidă, iar celelalte să fie depărtate. Unim punctul 5 de pe prima riglă cu punctul 5 de pe rigla a doua, punctul 10 de pe prima riglă cu punctul 10 de pe a doua ș.a.m.d. De ce obținem un șir de drepte paralele? b) Unim punctul 1 de pe prima riglă cu punctul 2 de pe a doua, punctul 2 de pe prima cu punctul 4 de pe a doua, punctul 3 de pe prima cu punctul 6 de pe a doua ș.a.m.d. Se obțin acum drepte paralele? Generalizare.

**12.** În paralelogramul din figura 39, punctele $M$, $N$, $P$ și $Q$ au fost alese astfel încît să împartă segmentele $OA$, $OB$, $OC$ și $OD$ în același raport. Să se demonstreze că $MNPQ$ este un paralelogram.

**13.** În figura 40, $ABCD$ este un patrulater oarecare, $E$ este un punct oarecare al laturii $AB$, $EF \parallel AC$, $FG \parallel BD$, $GH \parallel CA$. Să se demonstreze că paralela la $DB$ dusă prin punctul $H$ trece prin punctul $E$.

**14*.** În figura 41 $ABC$ este un triunghi oarecare, $D$ este un punct oarecare al laturii $BC$, $DE \parallel BA$, $EF \parallel CB$ și $FG \parallel AC$. a) Să se demonstreze că $BG = DC$. b). Cum trebuie ales punctul $D$ ca punctele $G$ și $D$ să împartă latura $BC$ în 3 părți egale? c) Pentru ca punctul $G$ să coincidă cu punctul $D$.

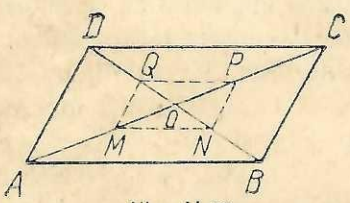


Fig. II.39

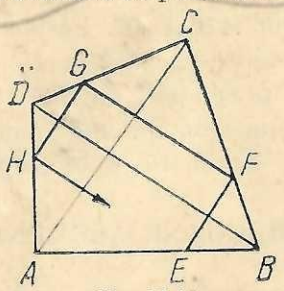


Fig. II.40

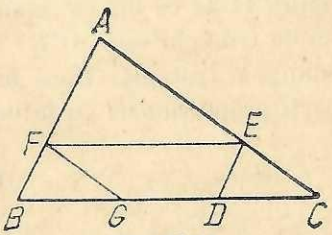


Fig. II.41

---

**R. — 10.** a) $\frac{1{,}8}{2{,}7} = \frac{2{,}4}{3{,}6}$, deci $DE \parallel AB$. b) Da. c) Punctul $E$ trebuie mutat cu $\frac{6}{19}$ spre punctul $C$ (se duce $DE' \parallel AB$, se calculează $CE'$, apoi diferența dintre $CE$ și $CE'$). d) Da. **11.** Se aplică reciproca teoremei lui Tales. **12.** Se aplică reciproca teoremei lui Tales în triunghiurile $AOB$, $BOC$ ș.a.m.d. **13.** Se compară rapoartele $\frac{EB}{EA}$, $\frac{BF}{FC}$, $\frac{DG}{GC}$ și $\frac{DH}{HA}$.

**14.** a) Se compară rapoartele $\frac{CD}{CB}$, $\frac{CE}{CA}$, $\frac{BF}{BA}$ și $\frac{BG}{BC}$; primul și ultimul raport sînt egale, deci...; b) $\frac{CD}{CB} = \frac{1}{3}$. c) La mijlocul laturii $BC$.

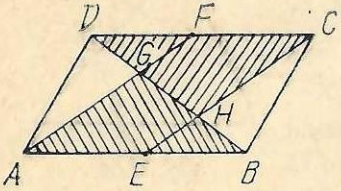


Fig. II.42

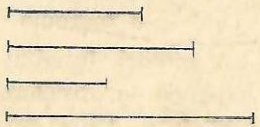


Fig. II.43

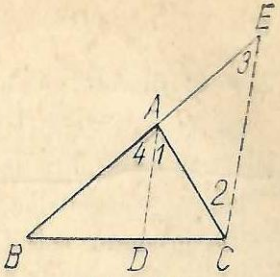


Fig. II.44

**15*.** În figura 42, $ABCD$ este un paralelogram, $E$ și $F$ sînt mijloacele laturilor. Să se demonstreze că $DG = GH = HB$.

## CONSTRUCȚII GEOMETRICE

**16.** Să se traseze un segment de 90 mm și să se împartă în părți proporționale cu numerele 2, 6, 10. Verificare prin măsurare.

**17.** Să se traseze un segment de 10 cm și să se împartă în 4 părți proporționale cu segmentele din figura 43.

**18.** Să se construiască un segment care, împreună cu primele trei segmente din figura 43 să formeze o proporție.

**19.** Să se împartă un segment în 5 părți egale fără a-l măsura.

**20*.** Să se ia un triunghi $ABC$, să se împartă latura $BC$ în două părți, $BD$ și $DC$, proporționale cu laturile $AB$ și $AC$. Făcînd construcția după modelul din figura 11 se va lua ca semidreaptă $Ax$ chiar latura $AB$ a triunghiului (fig. 44). Ce fel de triunghi este $ACE$? Să se compare unghiul 1 cu 2 și unghiul 3 cu 4. Să se enunțe o teoremă: Dacă într-un triunghi $ABC$ punctul $D$ împarte latura $BC$ în părți proporționale cu laturile $AB$ și $AC$, semidreapta $AD$ este...

## POLIGOANE ASEMENEA

**21.** Să se deseneze un patrulater oarecare și să se construiască un patrulater mai mic asemenea cu el, raportul de asemănare fiind $\frac{3}{5}$.

**22.** Laturile unui patrulater sînt de 5 m, 6 m, 7 m și 8 m. Într-un patrulater asemenea cu el, latura cea mai mare este de 20 m. Să se afle perimetrul patrulaterului al doilea.

**23.** Două pentagoane sînt asemenea. Lungimile laturilor primului pentagon (în metri) sînt: 7; 10; 8; 11; 6. Perimetrul poligonului al doilea este de 63 m. Să se afle lungimile laturilor sale.

---

R. — 15. $AECF$ este un paralelogram. Se aplică teorema lui Tales în triunghiurile $ABG$ și $DHC$. **22.** 65. m. **23.** 10,5; 15; 12; 16,5; 9.

**24.** a) Pe o hartă făcută la scara 1 : 5 000 000 căile ferate sînt arătate prin niște linii roșii groase de 0,5 mm (aproximativ). Cît de mare ar trebui să fie în realitate lățimea căii ferate, pentru ca această reprezentare să fie corectă? În realitate, lățimea căii ferate împreună cu terasamentul este de 6,20 m. Cît de groasă trebuie să fie pe hartă linia care reprezintă calea ferată? Ar mai fi ea vizibilă? b) Pe aceeași hartă, orașele sînt reprezentate prin niște cerculețe. Să se măsoare diametrul cercului care reprezintă un oraș cunoscut și să se vadă dacă, în reprezentarea orașelor, s-a putut respecta scara de reducere. c) În unele școli, se văd hărți în care munții sînt reprezentați în relief. Se poate respecta scara?

## TRIUNGHIURI ASEMENEA

**25.** (o) Laturile unui triunghi sînt: $a = 12$ m, $b = 15$ m și $c = 21$ m. Să se determine laturile unui triunghi asemenea cu el, raportul de asemănare fiind 2 : 3.

**26.** Laturile unui triunghi sînt: $a = 24$ m, $b = 36$ m, $c = 42$ m. Într-un alt triunghi, asemenea cu el, latura omoloagă cu $a$ este $a' = 40$ m. Se cer celelalte laturi ale acestui triunghi.

**27.** (o) a) Avem trei triunghiuri asemenea între ele. Raportul de asemănare dintre primul și al doilea triunghi este 1 : 2 și raportul de asemănare dintre triunghiul al doilea și al treilea este 1 : 3. Care este raportul de asemănare între primul triunghi și cel de-al treilea? b) Aceeași întrebare dacă rapoartele de asemănare sînt 2 : 3 și 5 : 7. Generalizare.

**28.** (o) Două unghiuri ale unui triunghi sînt de 53° și 68°. Un alt triunghi are un unghi de 53° și altul de 59°. Aceste două triunghiuri sînt asemenea?

**29.** (o) Un unghi de la baza unui triunghi isoscel este de 64° și unghiul de la vîrful unui alt triunghi isoscel este de 52°. Aceste două triunghiuri sînt asemenea?

**30.** În figura 45 se dă: $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 9$ cm. Punctul $M$ este mijlocul laturii $AB$ și $\hat{M} = \hat{C}$. Se cer laturile triunghiului $AMN$.

**31.** Într-un triunghi isoscel $ABC$, unghiul de la vîrf este $\hat{A} = 36°$. Bisectoarea unghiului $B$ taie latura $AC$ în $D$. Să se demonstreze că triunghiul $BCD$ este asemenea cu triunghiul $ABC$.

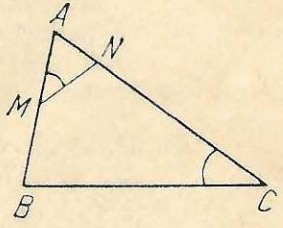


Fig. 45

---

**R.** — **24.** a) Lățimea = 2,5 km; 124 zecimi de miimi de milimetru. b) Nu. c) Nu. **25.** 8 m, 10 m, 14 m sau: 18 m, 22,5 m, 31,5 m. **26.** $b' = 60$ m, $c' = 70$ m. **27.** a) 1 : 6. b) 10 : 21. Rapoartele de asemănare se înmulțesc. **28.** Da. **29.** Da. **30.** $AM = 3$ cm, $AN = 2$ cm, $MN = 2\frac{2}{3}$ cm. **31.** Se calculează unghiurile $B$, $C$ și $D$.

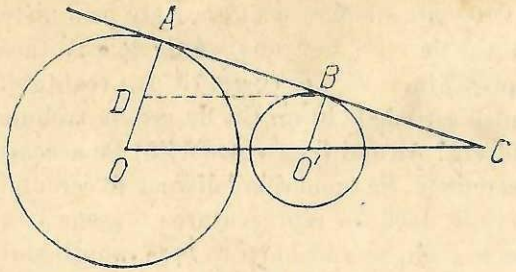



Fig. II.46

**32.** În figura 46, $AB$ este tangentă la ambele cercuri, $OA = 5$ cm, $O'B = 3$ cm, $OO' = 10$ cm. Se cere $O'C$.

**33.** Se consideră un trapez $ABCD (AB \parallel CD$, $A$ opus lui $C$) și fie $AD \cap BC = E$. a) Se dă (în cm): $AB = 17$, $BC = 12$, $CD = 9$, $DA = 7$. Să se afle segmentele $ED$ și $EC$. b) De asemenea, dacă $AB = a$, $BC = c$, $CD = b$, $AD = d$.

**34.** Fie $ABCD$ un trapez ($AB \parallel CD$). Printr-un punct $M$ al laturii $AD$ se duce paralela la bază și se notează cu $N$ intersecția ei cu latura $BC$. a) Se dă: $AB = 14$ cm, $CD = 9$ cm, $\frac{MA}{MD} = \frac{3}{7}$. Se cere lungimea segmentului $MN$.

**35.** a) Într-un triunghi $ABC$ se dau laturile $BC = 8$ cm, $AC = 13$ cm și înălțimea $AD = 10$ cm. Se cere înălțimea $BE$. b) Aceeași problemă dacă $BC = c$, $AC = b$ și $AD = h$.

**36.** Să se enunțe cîte un caz de asemănare: a) pentru triunghiurile isoscele; b) pentru triunghiurile echilaterale; c) pentru triunghiurile dreptunghice; d) pentru triunghiurile dreptunghice isoscele.

**37.** Să se demonstreze că, în două triunghiuri asemenea, următoarele rapoarte sînt egale cu raportul de asemănare a triunghiurilor: a) Raportul a două înălțimi omoloage; b) raportul a două bisectoare omoloage; c) raportul a două mediane omoloage.

**38.** a) Fie $ABC$ și $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea ($A$ omolog cu $A'$, $B$ cu $B'$). În primul triunghi se duc bisectoarele unghiurilor $A$ și $B$ și se notează cu $M$ intersecția lor; în triunghiul al doilea se duc bisectoarele unghiurilor $A'$ și $B'$ și se notează cu $M'$ intersecția lor. a) Să se demonstreze că rapoartele $\frac{MA}{M'A'}$ și $\frac{MB}{M'B'}$ sînt egale cu raportul de asemănare a triunghiurilor $ABC$ și $A'B'C'$. b) Aceeași problemă dacă în locul bisectoarelor se duc două înălțimi corespunzătoare. c)* Aceeași problemă

---

**R. — 32.** Ducem $BD$ paralel cu $OC$; $O'C = 15$ cm. **33.** Se duce dreapta $CF$ paralel cu $AD$ ($F \in AB$) și se folosesc triunghiurile asemenea $EDC$ și $CEB$ (sau se folosesc triunghiurile $EDC$ și $EAB$ și proporțiile derivate). a) $ED = 7\frac{7}{8}$ cm, $EC = 13\frac{1}{2}$ cm. b) $ED = \frac{bd}{a-b}$, $EC = \frac{bc}{a-b}$. **34.** a) Se duce prin $C$ paralela la $DA$; fie $E$ și $F$ intersecțiile ei cu $MN$ și $AB$. Se află $EN$ din triunghiurile $CEN$ și $CFB$. $MN = 12{,}5$ cm. **35.** b) $BE = \frac{ah}{b}$. **36.** a) Cîte un unghi de la bază egal sau unghiurile de la vîrf egale. b) Toate sînt asemenea. c) Cîte un unghi ascuțit egal. d) toate sînt asemenea. **37.** Fie $ABC$ și $A'B'C'$ cele două triunghiuri și $AD$ și $A'D'$ două înălțimi, bisectoare sau mediane omoloage. a) $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ după cazul II de asemănare. b) La fel. c) Aceleași triunghiuri sînt asemenea după cazul I de asemănare. v. 2.5.6. **38.** a) $\triangle ABM \sim \triangle A'B'M'$ (cazul II). b) La fel. c) Fie $D$ și $E$, $D'$ și $E'$ mijloacele laturilor; se consideră triunghiurile $ABD$ și $A'B'D'$, $ABE$ și $A'B'E'$, apoi $AMB$ și $A'M'B'$.

dacă în locul bisectoarelor se duc două mediane corespunzătoare.

**39*.** Triunghiurile $ABC$ și $A'B'C'$ din figura 47 sînt asemenea. $\frac{MB}{MC} = \frac{M'B'}{M'C'} = \frac{3}{5}$, $\frac{NC}{NA} = \frac{N'C'}{N'A'} = \frac{2}{7}$, $\frac{PA}{PB} = \frac{P'A'}{P'B'} = \frac{4}{9}$. Să se demonstreze că laturile triunghiurilor $MNP$ și $M'N'P'$ sînt proporționale.

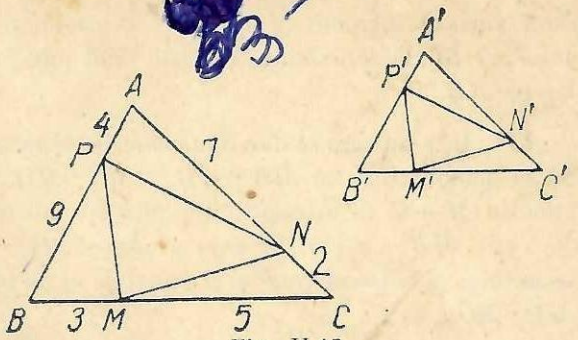


Fig. II.47

**40*.** Într-un triunghi $ABC$ se duce mediana $AD$, $EF \parallel BC$ ($E \in AB$, $F \in AC$). Fie $EF \cap AD = G$. Să se demonstreze că $EG = GF$.

**41*.** a) În figura 48, $ABCD$ este un trapez și $MN \parallel AB$. Să se demonstreze că $MP = QN$. b) Dacă $RS \parallel AB$, punctul $O$ este mijlocul segmentului $RS$.

**42.** a) În figura 49, $AB$ este un diametru, $M$ este un punct oarecare al cercului și $AD$ și $BC$ sînt tangente la cerc. Să se demonstreze că $AD \cdot BC = AB^2$.

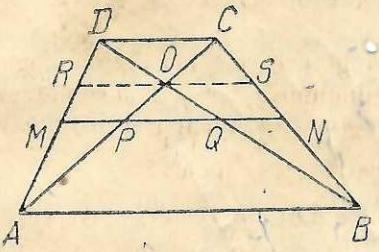


Fig. II.48

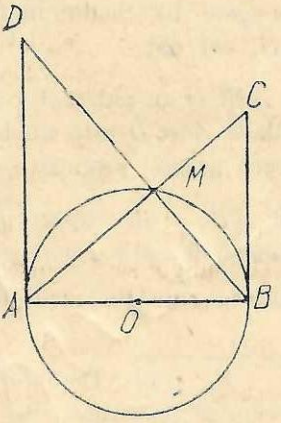


Fig. II.49

R. — **39.** $MC = \frac{5}{8} BC$, $M'C' = \frac{5}{8} B'C'$, deci $\frac{MC}{M'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, adică $\frac{MC}{M'C'} = k$, $k$ fiind raportul de asemănare a triunghiurilor date; la fel se arată că $\frac{NC}{N'C'} = k$; $\hat{C} = \hat{C'}$ (prin ipoteză); rezultă că $\triangle MCN \sim \triangle M'C'N'$ (cazul I), deci $\frac{MN}{M'N'} = \frac{MC}{M'C'} = k$. Analog: $\frac{NP}{N'P'} = k$, $\frac{PM}{P'M'} = k$. **40.** Se calculează rapoartele $\frac{EG}{BD}$ și $\frac{GF}{DC}$. **41.** a) $\triangle APM \sim \triangle ACD$, deci $\frac{MP}{DC} = \frac{AM}{AD}$; teorema cu privire la un șir de drepte paralele dă $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$; triunghiurile asemenea $BQN$ și $BDC$ dau $\frac{BN}{BC} = \frac{QN}{DC}$. Din aceste proporții rezultă că $\frac{MP}{DC} = \frac{QN}{DC}$, deci $MP = QN$. b) Analog cu a).

Cum variază segmentele $AD$ și $BC$ și produsul $AD \cdot BC$ cînd punctul $M$ se mișcă pe cerc? b) Să se examineze cazul cînd punctul $M$ este pe diametrul perpendicular pe $AB$.

**43*.** Într-un cerc se duc două coarde neparalele $AB$ și $CD$. Fie $AB \cap CD = M$. Să se demonstreze că $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Se vor considera două cazuri: cînd punctul $M$ este în interiorul cercului și cînd este exterior cercului. Se dă: $MA = 5$ cm, $MB = 8$ cm. Se cere produsul $MC \cdot MD$. Prin punctul $M$ se mai duce o secantă și se notează cu $P$ și $Q$ punctele ei de intersecție cu cercul. Se cere produsul $MP \cdot MQ$.

**44.** a) Fie $ABC$ un triunghi oarecare, $BM$ și $CN$ două mediane ale lui și $G$ intersecția lor. Să se demonstreze că $\frac{GM}{GB} = \frac{GN}{GC} = \frac{1}{2}$. b)* Reciproc, dacă $M \in AC$, $N \in AB$, $AM \cap BN = G$ și $\frac{GM}{GB} = \frac{GN}{GC} = \frac{1}{2}$, $BM$ și $CN$ sînt mediane.

**45.** a) Două triunghiuri asemenea sînt înscrise în același cerc. Este posibil ca ele să nu fie egale? b)* Se dau un triunghi și un cerc. Să se înscrie în cerc un triunghi asemenea cu cel dat.

**46.** Fie $ABCD$ un patrulater și $O$ intersecția diagonalelor sale. a) Să se demonstreze că, dacă $ABCD$ este un trapez, triunghiurile $OAB$ și $OCD$ sînt asemenea. b)* Reciproca acestei propoziții este adevărată?

**47*.** Fie $ABCD$ un trapez ($AB \parallel CD$) și $O$ intersecția diagonalelor $AC$ și $BD$. Prin $O$ se duce o dreaptă și se notează cu $M$ și $N$ intersecțiile ei cu $AB$ și $CD$ ($M \in AB$). Cum trebuie dusă această dreaptă ca raportul $\frac{ON}{OM}$ să fie maxim.

---

R. — 42. Triunghiurile $ABC$ și $ADB$ sînt asemenea: produsul rămîne constant. b) $BC = AD = AB$. 43. $\triangle MAD \sim \triangle MCB$; $MC \cdot MD = MP \cdot MQ = 5 \cdot 8 = 40$. 44. a) $\triangle GMN \sim \triangle GBC$ după cazul II; b) Aceleași triunghiuri sînt asemenea după cazul I, deci $\widehat{NMG} = \widehat{GBC}$ și $\frac{NM}{BC} = \frac{1}{2}$, deci $NM \parallel BC$, deci $\triangle ANM \sim \triangle ABC$, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$, deci... 45. a) Fie $ABC$ și $A'B'C'$ cele două triunghiuri. Deoarece $\hat{A} = \hat{A'}$, $\widehat{BC} = \widehat{B'C'}$, deci $BC = B'C'$. Triunghiurile sînt egale (ULU). b) Fie $ABC$ triunghiul dat, $O$ centrul cercului în care este înscris, $O'$ centrul cercului dat. Se construiește un unghi $A'O'B'$ egal cu unghiul $AOB$ și unghiul $B'O'C'$ egal cu $BOC$. 46. v. Cap. I., probl. 57. b) Nu! Dacă $\frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OA}$ $\left(= \frac{1}{2} \text{ de exemplu}\right)$ triunghiurile sînt asemenea (cazul I), dar $DC$ nu este paralel cu $AB$. 47. Nu există nici maxim, nici minim, căci $\frac{ON}{OM} = \frac{OC}{OA}$; $\frac{OC}{OA}$ rămîne același oricum am duce dreapta $MN$.

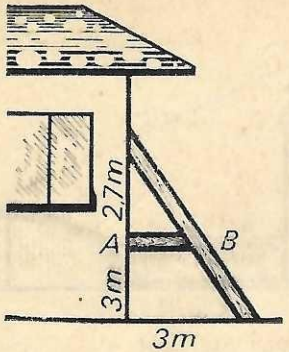



Fig. II.50

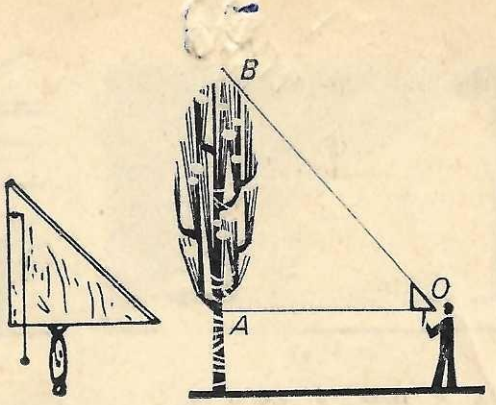



Fig. II.51

**48.** Un zid este sprijinit de o bîrnă ca în figura 50 și bîrna este unită cu zidul printr-o stinghie $AB$. Să se calculeze pe baza datelor din figură lungimea stinghiei. Cu cît trebuie să scurtăm stinghia, dacă vrem s-o fixăm mai sus cu 50 cm?

**49.** (o) În figura 51 se vede un instrument care se întrebuințează în unele regiuni pentru a determina înălțimea copacilor. Este o placă în formă de triunghi dreptunghi isoscel, cu un fir cu plumb. Să se explice întrebuințarea lui.

**50.** O scară dublă este înțepenită cu ajutorul unui cîrlig $AB$ (fig. 52). Să se calculeze pe baza datelor din figură lungimea cîrligului.

**51.** Un vînător (fig. 53) are o pușcă $AB$, lungă de 1,20 m. Partea $AD$ de la un capăt al puștii pînă la trăgaci este $\frac{1}{3}$ din pușcă. El ochește o pasăre $C$ care se află la 20 m depărtare de el. Dar vînătorului îi tremură mîna și, din cauza aceasta, în momentul cînd apasă pe trăgaci pușca se rotește în jurul capătului $A$ astfel încît punctul $D$ se ridică cu un segment $DD' = 2$ mm. Cu cîți metri deasupra țintei trece glonțul?

**52.** Să se determine pe baza datelor din figura 54 lungimea umbrei copilului.

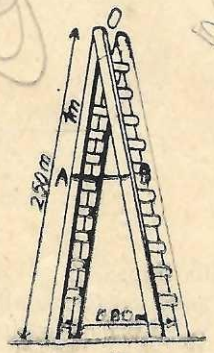



Fig. II.52

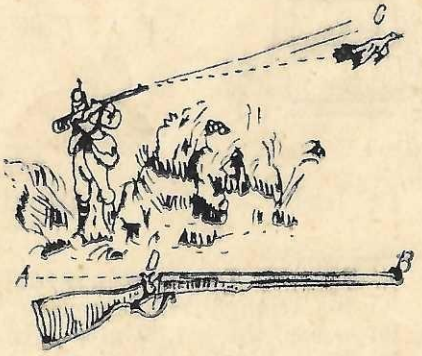



Fig. II.53

R. — 48. $AB = 1{,}42$ m; cu 27 cm. 50. 32 cm. 51. Cu 10 cm. 52. 2,30 m.

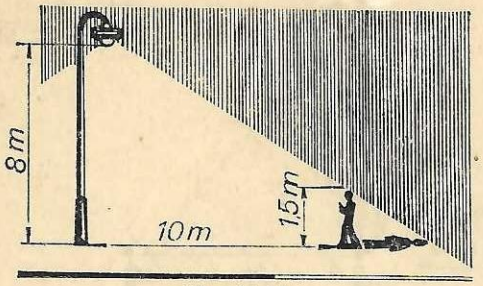



Fig. II.54

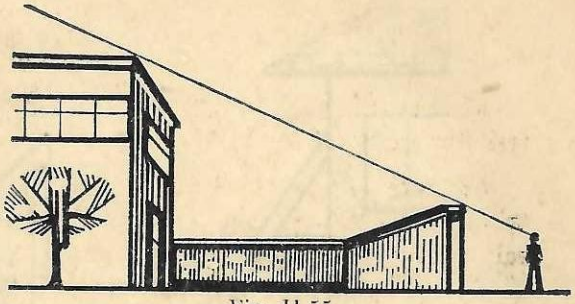


Fig. II.55

**53.** O clădire înaltă de 10 m este împrejmuită cu un zid, depărtat de fațada clădirii cu 50 m (fig. 55). Care trebuie să fie înălțimea zidului, ca un om înalt de 1,80 m să nu poată vedea clădirea de la o distanță de zid mai mică decît 10 m?

**54.** Pentru irigarea unui teren s-au săpat două șanțuri principale $AB$ și $CD$ legate între ele printr-un șir de 10 șanțuri transversale paralele între ele și egal depărtate unul de celălalt, ca în schița din figura 56. Să se calculeze pe baza datelor din figură lungimea totală a șanțurilor transversale.

**55.** Coșul unei căruțe are forma și dimensiunile din figura 57. Pentru a mări capacitatea coșului, se adaugă în partea de sus cîte o scîndură $BD$ lată de 20 cm. Cît de mare devine lățimea de sus a coșului? Cît de lată trebuie să fie scîndura, ca lățimea să devină de 1,10 m?

**56.** Secțiunea printr-un șanț are forma unui trapez isoscel (fig. 58). Să se afle pe baza datelor din figură care va fi lățimea fundului șanțului dacă săpăm șanțul mai adînc, astfel ca laturile neparalele ale trapezului să crească cu cîte 10 cm.

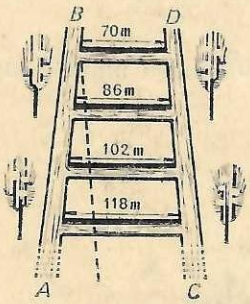



Fig. II.56

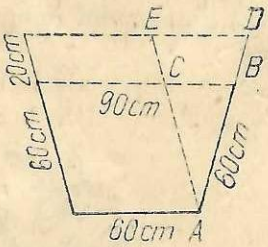



Fig. II.57

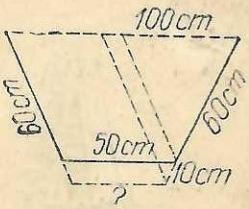



Fig. II.58

---

**R. — 53.** Ducem prin ochiul omului din figura 57 o orizontală și folosim triunghiurile asemenea ce se formează astfel; înălțimea zidului = 1,36 m + 1,80 m = 3,16 m. **54.** V. 2.6.1 Porțiunile situate la stînga liniei punctate sînt de: 16 m, 16 · 2 m, 16 · 3 m ș.a.m.d. Lungimea totală este de 16 (1 + 2 + 3 + ... + 9) + 70 · 10 = 1 420 m. **55.** Se folosesc triunghiurile asemenea $ABC$ și $ADE$; 1 m; 40 cm. **56.** Analog cu problema precedentă; 41,7 cm.

**57.** Laturile unui triunghi sînt de 6,8 cm, 7,6 cm și 10,2 cm. Să se calculeze cele trei linii mijlocii ale triunghiului.

**58.** Într-un triunghi $ABC$, notăm cu $M$, $N$ și $P$ mijloacele laturilor. Ce fel de triunghi este $MNP$, dacă triunghiul $ABC$ este: a) oarecare; b) isoscel; c) echilateral; d) dreptunghic; e) dreptunghic și isoscel.

Ce legătură există între perimetrul triunghiului $ABC$ și perimetrul triunghiului $MNP$?

**59.** Într-un triunghi $ABC$ latura $AB = 6$ cm, o linie mijlocie care trece prin mijlocul ei este de 3,5 cm, și perimetrul triunghiului este de 22 cm. Se cer lungimile laturilor $BC$ și $CA$.

**60.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare, $M$ mijlocul laturii $BC$ și $N$ mijlocul laturii $CA$. Prin $N$ se duce paralela la $BC$ și se notează cu $P$ intersecția ei cu $AB$. Să se demonstreze că $MP \parallel AC$.

**61.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare, și $M$, $N$ și $P$ mijloacele laturilor sale. Să se demonstreze că triunghiurile $MNP$ și $ABC$ sînt asemenea.

**62.** Fie $O$ centrul unui cerc, $AB$ un diametru, $C$ un punct oarecare al cercului și $D$ piciorul perpendicularei coborîte din $O$ pe $AC$. Să se compare $OD$ cu $BC$.

**63.** Fie $O$ centrul cercului circumscris unui triunghi $ABC$ și $M$, $N$ și $P$ picioarele perpendicularelor coborîte din $O$ pe laturile triunghiului. Ce relație există între laturile triunghiurilor $ABC$ și $MNP$.

**64.** Distanța centrelor a două cercuri secante este $d$. Fie $A$ unul dintre punctele lor de intersecție și $AB$ și $AC$ cîte un diametru. Se cere segmentul $BC$.

**65.** Fie $ABC$ un triunghi. Prin fiecare vîrf se duce paralela la latura opusă; se formează astfel un alt triunghi. Ce relație există între laturile acestor triunghiuri?

**66.** În figura 59 $M$, $N$ și $P$ sînt mijloacele laturilor triunghiului $ABC$ și $P$, $Q$ și $R$ sînt mijloacele laturilor triunghiului $MNP$. Să se demonstreze că $RS \parallel BC$, $SQ \parallel AB$ și $QR \parallel AC$.

**67.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare și $M$, $N$ și $P$ mijloacele laturilor sale. Să se demonstreze că medianele triunghiului $ABC$ sînt și medianele triunghiului $MNP$.

---

**R.** — **57.** 3,4 cm, 3,8 cm, 5,1 cm. **58.** Triunghiurile $ABC$ și $MNP$ sînt de același fel. **59.** 7 cm, 9 cm. **60.** După teorema lui Tales, $P$ este mijlocul laturii $AB$. **61.** Unghiurile celor două triunghiuri sînt egale două cîte două ca unghiuri cu laturile paralele, sau: cazul III de asemănare. **62.** $BC = 2OD$. **63.** $MN = \frac{AB}{2}$, $NP = \frac{BC}{2}$, $PM = \frac{AC}{2}$. **64.** $2d$. **65.** Fiecare latură a triunghiului mare este dublul unei laturi a triunghiului mic. **67.** Fie $AM \cap PN = Q$; $APMN$ este un paralelogram, deci $PQ = QN$.

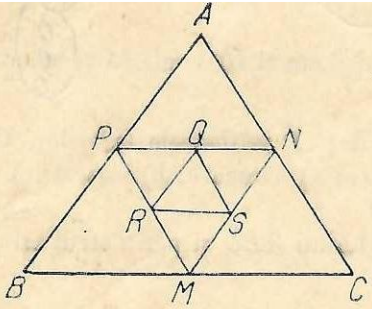



Fig. II.59

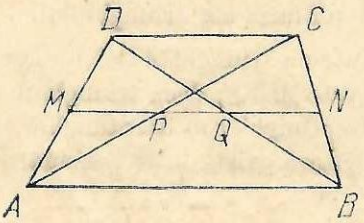



Fig. II.60

68*. În figura 60, $ABCD$ este un trapez, $AM = MD$ și $MN \parallel AB$. Să se demonstreze că: a) $MN = \frac{AB + CD}{2}$; b) $PQ = \frac{AB - CD}{2}$.

**69.** Să se demonstreze că, într-un triunghi dreptunghic $ABC$ ($\hat{A} = 90°$), mediana care cade pe ipotenuză este egală cu jumătate din ipotenuză.

**70.** a) Pe un segment $AB$ se construiește un semicerc. Fie $P$ un punct al semicercului și $M$ și $N$ mijloacele segmentelor $PA$ și $PB$. Să se aleagă punctul $P$ astfel încît segmentul $MN$ să fie minim. b) Aceeași chestiune dacă în locul semicercului se ia o dreaptă oarecare. c) De asemenea, dacă $P$ este un punct oarecare.

## DIVERSE

**71.** Să se enunțe cîte un caz de asemănare pentru: a) două pătrate; b) două dreptunghiuri; c) două romburi.

**72.** Într-un trapez, ducem o paralelă la baze. Se formează alte două trapeze. Să se compare unghiurile acestor trapeze cu unghiurile trapezului inițial. Sînt aceste trapeze asemenea între ele?

**73.** Aceeași problemă, în cazul unui paralelogram.

**74.** a) Pe un echer (fig. 61), se văd două triunghiuri (marginea interioară și cea exterioară). Să se demonstreze că ele sînt asemenea. b) Considerăm o ramă dreptunghiulară care are peste tot aceeași lățime. Marginea exterioară și cea interioară sînt două dreptunghiuri asemenea? Se va lua, de exemplu, cazul cînd dimensiunile exterioare sînt 10 cm și 20 cm, iar lățimea ramei este de 1 cm.

---

R. — 68. a) Triunghiul $DAB$ dă $MQ = \frac{AB}{2}$ și triunghiul $BDC$ dă $QN = \frac{CD}{2}$ b) $MQ$ s-a aflat și triunghiul $ACD$ dă $MP = \frac{CD}{2}$. **69.** Fie $ABC$ triunghiul și $D$ mijlocul ipotenuzei $BC$. Se duce $DE$ paralel cu $AC$, $E \in AB$. Punctul $E$ este mijlocul laturii $AB$ și $DE \perp AB$, deci triunghiul $ADB$ este isoscel. **72.** Nu. **73.** Nu **74.** b) Nu.

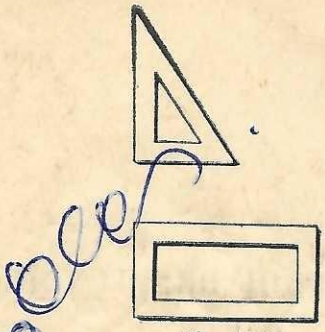


Fig. II.61

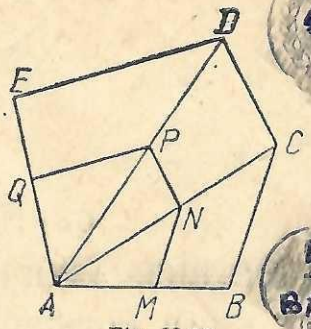



Fig. II.62

**75.** Fie $ABCDEF$ și $A'B'C'D'E'F'$ două hexagoane asemenea, raportul de asemănare fiind un număr dat $k$. Să se afle: a) raportul diagonalelor $AC$ și $A'C'$; b) raportul diagonalelor $AD$ și $A'D'$.

**76.** În poligonul $ABCDEF$ din figura 62 s-a făcut construcția următoare. Pornind de la un punct oarecare $M$ al laturii $AB$, s-au dus segmentele $MN$, $NP$ și $PQ$ respectiv paralel cu $BC$, $CD$ și $DE$.

Să se demonstreze că poligonul $AMNPQ$ este asemenea cu poligonul inițial.

**77.** *Recapitulare.* Să se formuleze în scris propozițiile următoare. Fiecare teoremă se va însoți de o figură și se va enunța în cuvinte și prescurtat, folosind literele din figură. a) Teorema lui Tales și reciproca ei. b) Teorema cu privire la un șir de drepte paralele tăiate de două secante. c) Definiția poligoanelor asemenea. d) Teorema cu privire la raportul perimetrelor a două poligoane asemenea. e) Teorema fundamentală a asemănării. f) Cazurile de asemănare a triunghiurilor. g) Teoreme cu privire la linia mijlocie a triunghiului.

---

**R. — 75.** a) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (cazul I), deci $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = k$. b) Se folosește rezultatul precedent; $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ (cazul I), deci $\frac{AD}{A'D'} = k$. **76.** Unghiurile sînt egale ca unghiuri cu laturile paralele sau corespondente. Triunghiurile $AMN$ și $ABC$, $ANP$ și $ACD$, precum și $APQ$ și $ADE$ sînt asemenea. Se scrie că laturile lor sînt proporționale, rapoartele $\frac{AM}{AB}$, $\frac{MN}{BC}$, $\frac{AN}{AC}$ ș.a.m.d. sînt egale. Se reține că $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{NP}{CD} = \frac{PQ}{DE} = \frac{AQ}{AE}$.

Capitolul III

# RELAȚII METRICE[1] ÎNTR-UN TRIUNGHI DREPTUNGHIC

## 3.1. NOȚIUNI PREGĂTITOARE

1. **Proiecții.** *Proiecția unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei coborîte din acel punct pe dreaptă.*

În figura 1, punctul $A'$ este proiecția punctului $A$ pe dreapta $xy$. Cînd punctul este situat pe dreaptă, ca de exemplu punctul $B$, proiecția sa coincide cu el însuși.

Proiecția unui segment pe o dreaptă este partea din dreaptă cuprinsă între proiecțiile capetelor acelui segment.

În figura 1 proiecția segmentului $CD$ pe dreapta $xy$ este segmentul $C'D'$, proiecția segmentului $EF$ este $E'F'$ și proiecția segmentului $GH$ este $G'H'$. Cînd segmentul face parte dintr-o dreaptă perpendiculară pe $xy$, cum este cazul segmentului $IJ$, proiecția lui se reduce la un punct.

2. **Media proporțională.** *Cînd între trei numere pozitive, $a$, $b$ și $c$ există relația $a^2 = bc$, se spune că $a$ este medie proporțională între $b$ și $c$.*

Din relația $a^2 = bc$ rezultă că $a = \sqrt{bc}$. Deci:

*Pentru a afla media proporțională a două numere, se scoate rădăcina pătrată din produsul lor.*

*Exemple:* 1. Media proporțională a numerelor 2 și 50 este $\sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10$.

2. Media proporțională a numerelor 5 și 8 este $\sqrt{5 \cdot 8} = \sqrt{40} = 6{,}32...$

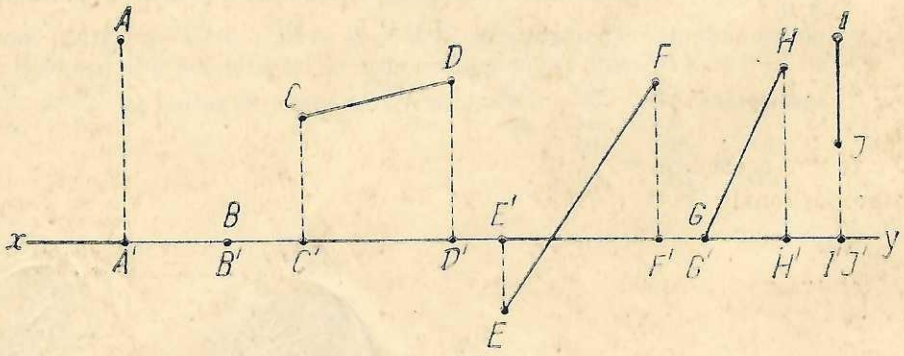



Fig. III.1

[1] *Relații metrice* sînt relații care privesc *măsurile* unor segmente, deci sînt relații între numere. $AB$, $BC$ ș.a.m.d. sau $a$, $b$ ș.a.m.d., reprezintă *măsurile* segmentelor respective deci ele reprezintă *numere*, nu segmente (v. § 32).

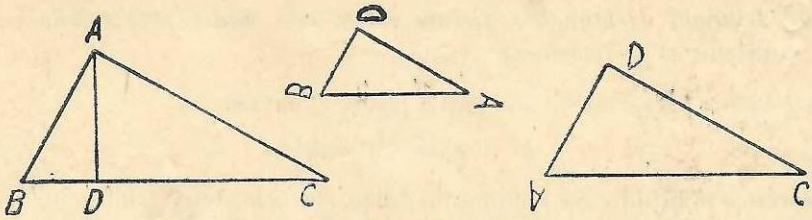



Fig. III.2

Denumirea de *medie proporţională* se explică astfel: relaţia $a^2 = bc$ se poate pune sub forma $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$. Aceasta înseamnă că din numerele $a$, $b$ şi $c$ se poate forma o proporţie în care mezii sînt egali între ei şi egali cu $a$, iar extremii sînt $b$ şi $c$. Media proporţională se mai numeşte şi *media geometrică*.

## 3.2. TEOREMA CATETEI. TEOREMA ÎNĂLŢIMII

1. Figura 2 reprezintă un triunghi dreptunghic $ABC$ în care s-a dus înălţimea $AD$. S-a făcut din carton un triunghi egal cu el, cartonul s-a tăiat după înălţimea $AD$ şi cele două triunghiuri $ADB$ şi $ADC$ s-au răsturnat şi s-au aşezat lîngă triunghiul iniţial[1]. Se observă că s-au obţinut trei triunghiuri care seamănă între ele. Vom demonstra că aceste triunghiuri sînt asemenea şi vom deduce două teoreme.

2. **Teorema catetei.** Reluăm triunghiul $ABC$ în care s-a dus înălţimea $AD$ (fig. 3) Triunghiurile $ABC$ şi $ABD$ sînt dreptunghice şi au unghiul $B$ comun. Avînd cîte două unghiuri egale, aceste triunghiuri sînt asemenea. Rezultă că laturile lor sînt proporţionale:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC}.$$

Reţinem numai primele două rapoarte şi scriem că produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}; \quad AB^2 = BC \cdot BD.$$

Se vede că $AB$ este medie proporţională între $BC$ şi $BD$.

2. Exact în acelaşi fel se arată că $AC$ este medie proporţională între $BC$ şi $DC$,

$$AC^2 = CB \cdot CD.$$

3. Observăm că $AB$ este o catetă a triunghiului $ABC$ şi $BD$ este proiecţia ei pe ipotenuză; tot aşa, $AC$ este o catetă şi $DC$ este proiecţia ei pe ipotenuză.

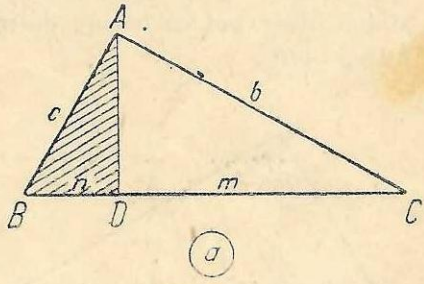



Fig. III.3

[1] Operaţia trebuie făcută *efectiv*, nu urmărită pe figură.

*Într-un triunghi dreptunghic, fiecare cateta este medie proporțională între ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză.*

Dacă folosim litere mici cum arată figura 3, avem:

$$b^2 = a \cdot m, \quad c^2 = a \cdot n.$$

3. **Teorema înălțimii.** Să comparăm între ele cele două triunghiuri mici $ABD$ și $ADC$ (fig. 4). Aceste triunghiuri sînt dreptunghice. Unghiurile $B$ și 2 sînt complementare, ca unghiuri ascuțite ale triunghiului dreptunghic $ABD$. Unghiurile 1 și 2 sînt de asemenea complementare, căci suma lor este unghiul drept $BAC$. Așadar unghiurile $B$ și 1 au același complement (unghiul 2) deci ele sînt egale. Triunghiurile $ABD$ și $ADC$ avînd cîte două unghiuri egale, unghiul drept și $\hat{B} = \hat{2}$ sînt asemenea. Scriem că laturile lor sînt proporționale:

$$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Reținem numai primele două rapoarte:

$$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DC}; \quad AD^2 = DB \cdot DC.$$

Se vede că $AD$ este medie proporțională între $DB$ și $DC$.

$AD$ este înălțimea triunghiului $ABC$, iar $DB$ și $DC$ sînt segmentele determinate de ea pe ipotenuză.

*Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea este medie proporțională între segmentele determinate de ea pe ipotenuză.*

Dacă folosim litere mici, ca în figura 4 avem $i^2 = m \cdot n$.

4. **Observări.** *1.* Faptul că triunghiul $ABD$ este asemenea cu triunghiul $ABC$ se poate demonstra și astfel: tăiem din hîrtie un triunghi egal cu $ABD$ și-l așezăm peste triunghiul $ABC$ așa cum arată figura 5. În noua sa poziție, unghiul $B$ este corespondent cu unghiul $B$ din vechea poziție. Rezultă că ipotenuza triunghiului mic ($BA$) este paralelă cu ipotenuza triunghiului mare ($BC$). Teorema fundamentală a asemănării ne arată că aceste triunghiuri sînt asemenea.

*2.* Faptul că triunghiul $ABD$ este asemenea cu triunghiul $ADC$ se poate stabili observînd că fiecare dintre aceste triunghiuri este asemenea cu triunghiul întreg $ABC$.

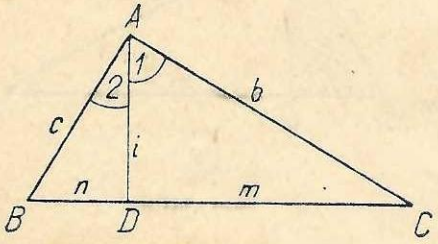



Fig. III.4

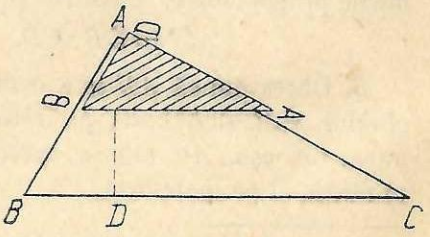



Fig. III.5

5. **Aplicaţie numerică.** *Notaţiile fiind cele din figura 4, se dă:* $BD = 4$ *cm*, $DC = 9$ *cm. Se cer catetele şi înălţimea triunghiului.*

1. Ipotenuza are: $4 + 9 = 13$ cm.

2. Teorema catetei, aplicată catetei $AB$, dă:

$$AB^2 = BD \cdot BC = 4 \cdot 13 = 52, \quad AB = \sqrt{52} = 7{,}21 \text{ cm.}$$

3. Teorema catetei, aplicată catetei $AC$, dă:

$$AC^2 = CD \cdot CB = 9 \cdot 13 = 117, \quad AC = \sqrt{117} = 10{,}81 \text{ cm.}$$

4. Teorema înălţimii dă:

$$AD^2 = DB \cdot DC = 4 \cdot 9 = 36, \quad AD = \sqrt{36} = 6 \text{ cm.}$$

## 3.3. TEOREMA LUI PITAGORA

1. Teorema care urmează este una dintre cele mai importante teoreme de geometrie. Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic (fig. 6) cu laturile $BC = a$, $CA = b$.

Construim pe fiecare dintre laturile lui cîte un pătrat: $ACDE$ (notat cu I) $ABFG$ (notat cu II) şi $BCHK$. Ariile acestor pătrate sînt: $b^2$, $c^2$ şi $a^2$. Ducem înălţimea $AN$. Fie $AN \cap KH = L$. Dreapta $AL$ împarte pătratul construit pe ipotenuză în două dreptunghiuri, I şi II. Dreptunghiul I are baza $CH$, care este egală cu $a$, şi înălţimea $NC$, care este egală cu $m$, deci aria sa este $a \cdot m$. La fel se vede că aria dreptunghiului II este $a \cdot n$.

Teorema catetei aplicată catetei $AC$ ne arată că

$$b^2 = a \cdot m.$$

$b^2$ este aria pătratului I şi $a \cdot m$ este aria dreptunghiului I, deci

aria pătratului I = aria dreptunghiului I.

Tot teorema catetei, aplicată catetei $AB$, ne dă $c^2 = a \cdot n$, deci

aria pătratului II = aria dreptunghiului II.

Rezultă că suma ariilor pătratelor I şi II, construite pe catete, este egală cu suma ariilor dreptunghiurilor I şi II. Dar dreptunghiurile I şi II formează pătratul construit pe ipotenuză. Deci aria pătratului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe catete, adică

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

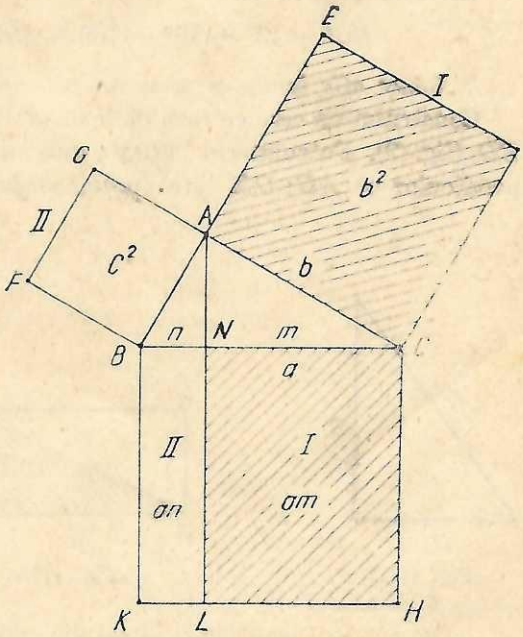


Fig. III.6

Dacă notăm laturile triunghiului cu cîte două litere, avem:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

*Într-un triunghi dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.*

Aceasta este *teorema lui Pitagora*[1].

2. **Aplicații.** Teorema lui Pitagora ne permite să aflăm o latură a unui triunghi dreptunghic cînd cunoaștem celelalte două, după cum se va vedea în exemplele următoare:

*1. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt* $b = 3$ m, $c = 4$ m. *Se cere ipotenuza triunghiului* (fig. 7).

Teorema lui Pitagora dă:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25; \quad a = \sqrt{25} = 5.$$

Ipotenuza acestui triunghi este de 5 m.

*2. Diagonala unui dreptunghi este de 13 cm, și lungimea dreptunghiului este de 12 cm. Se cere lățimea dreptunghiului* (fig. 8).

Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul $ABC$, dă:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Înlocuind $AC$ și $AB$ prin valorile lor, obținem:

$$13^2 = 12^2 + BC^2.$$

De aici rezultă că

$$BC^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25; \quad BC = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

*3. Să se afle latura și apotema pătratului înscris într-un cerc cu raza de 5 cm.*

Construim un cerc cu raza de 5 cm și ducem doi diametrii perpendiculari, $AC$ și $BD$ (fig. 9). Patrulaterul $ABCD$ este un pătrat înscris în cerc. Ducem $OM$ perpendicular pe $AB$; $OM$ este apotema acestui pătrat.

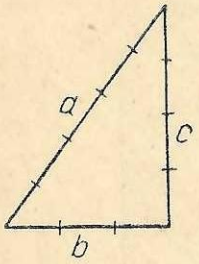


Fig. III.7

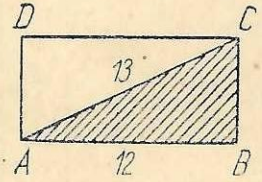


Fig. III.8

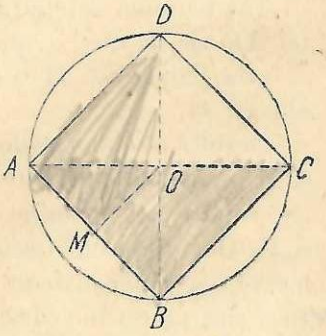


Fig. III.9

[1] *Pitagora*, matematician și filozof din antichitate, a trăit în jurul anului 500 î.e.n. El a întemeiat la Crotona (Italia de Sud) o școală în care s-a studiat matematica. Teorema care poartă numele lui Pitagora a fost cunoscută în parte înaintea lui Pitagora în Egipt și în China.

Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul $AOB$, dă

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50; \quad AB = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ cm}.$$

Să aflăm apotema $OM$. Considerăm triunghiul $ABD$. Deoarece $OM \perp AB$, $M$ este mijlocul laturii $AB$; $O$ este mijlocul laturii $BD$. Rezultă că $OM = \frac{AD}{2}$, adică apotema pătratului este jumătate din latură. În cazul de față, $OM = 7{,}07 : 2 = 2{,}54$ cm.

*4. Să se afle latura și apotema hexagonului regulat înscris într-un cerc cu raza de 7 cm.*

Se știe că latura hexagonului înscris este egală cu raza cercului (fig. 10), deci $AB = 7$ cm. Să aflăm apotema $OM$. Triunghiul $OAB$ este echilateral, deci înălțimea sa $OM$ este și mediană, $AM = \frac{AB}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$ cm. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul $OAM$, dă:

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 7^2 - 3{,}5^2 = 49 - 12{,}25 = 36{,}75;$$

$$OM = \sqrt{36{,}25} = 6{,}06 \text{ cm}.$$

*5. Să se afle latura și apotema triunghiului echilateral înscris într-un cerc cu raza de 4 cm.*

Fie $ABC$ un triunghi echilateral înscris în cerc (fig. 11), $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA} = 360° : 3 = 120°$. Notăm cu $D$ mijlocul arcului $BC$. Atunci $BD = 120° : 2 = 60°$ și $\widehat{ABD} = \widehat{AB} + \widehat{BD} = 120° + 60° = 180°$, deci $AD$ este un diametru al cercului, $AD = 2 \cdot 4 = 8$ cm și $CD$ este latura hexagonului înscris în cerc (căci $CD = 60°$), deci $CD = 4$ cm. Unghiul $ACB$, fiind înscris într-un semicerc, este drept. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul $ACD$:

$$AC^2 = AD^2 - DC^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48; \quad AC = \sqrt{48} = 6{,}92 \text{ cm}.$$

Fie $OM$ apotema triunghiului. Deoarece $OM \perp AC$, $M$ este mijlocul laturii $AC$; $O$ este mijlocul laturii $AD$. Rezultă că $OM$ este linie mijlocie în triunghiul $ADC$,

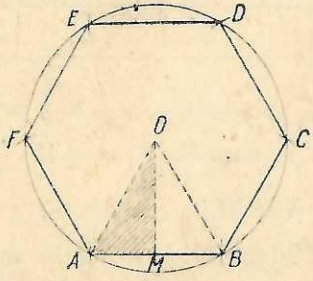


Fig. III.10

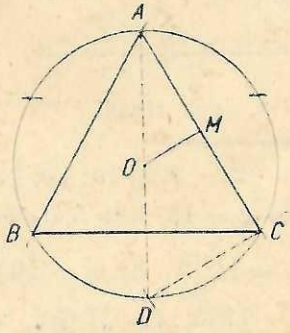


Fig. III.11

deci $OM = \frac{DC}{2}$. Deoarece $DC$ este egal cu raza cercului, apotema triunghiului este jumătate din rază:

$$OM = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}.$$

## EXERCIȚII

**1.** Să se exprime printr-o formulă că: a) $x$ este medie proporțională între 3 și $y$; b) 5 este medie proporțională între $a$ și $b$; c) $m$ este medie proporțională între 3 și 27.

**2.** Care este media proporțională a două numere egale?

**3.** Să se calculeze media proporțională (geometrică) a numerelor următoare: 4 și 16; 2 și 50; 9 și 16; 7 și 28; 3 și 5; 7 și 7.

Să se afle în fiecare caz și media aritmetică și să se compare cu media proporțională. Să se afle în primele trei cazuri de cîte ori media proporțională este mai mare ca numărul mai mic și de cîte ori este mai mică decît numărul mai mare.

### TEOREMA CATETEI, TEOREMA ÎNĂLȚIMII

În exercițiile 4—11 notațiile sînt cele din figura 12.

**4.** Să se scrie numerele următoare în ordinea crescătoare, după aprecierea din ochi: a) $c$, $n$ și $a$; b) $a$, $m$ și $b$; c) $i$, $m$ și $n$. Aprecierile corespund cu rezultatele date de teorema catetei și teorema înălțimii?

**5.** Notațiile fiind cele din figura 12, să se completeze tabelul următor. Lungimile sînt date în centimetri.

**6.** Fie $AB$ un diametru al unui cerc, $CD$ o coardă perpendiculară pe $AB$ și $AB \cap CD = E$. Ce relații există între: a) $AC$, $AB$ și $AE$; b) $BC$, $AB$ și $BE$; c) $AE$, $EB$ și $EC$?

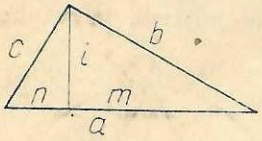



Fig. III.12

| | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 10 | | 29 | | |
| $b$ | | 12 | | | |
| $c$ | | | 20 | | |
| $m$ | | 9,6 | | | 4 |
| $n$ | 3,6 | | | 5 | 16 |
| $i$ | | | | 12 | |

**R — 3.** 8; 10; 12; 14; 3, 87; 7. **5.** a) $m = 6{,}4$, $c = 6$, $b = 8$, $i = 4{,}8$; b) $a = 15$, $n = 5{,}4$, $c = 9$, $i = 7{,}2$. c) $n = 13\frac{23}{29}$, $m = 15\frac{6}{29}$, $b = 21$, $i = 14\frac{14}{29}$. d) $m = 28{,}8$. $a = 33{,}8$, $b = 31{,}2$, $c = 13$. e) $a = 20$, $b = 8{,}944$, $c = 17{,}888$, $i = 8$. **6.** Triunghiul $ABC$ este dreptunghic. a) $AC^2 = AB \cdot AE$. b) $BC^2 = AB \cdot BE$. c) $CE^2 = EA \cdot EB$.

7*. Să se demonstreze că $i = \frac{bc}{a}$.

8*. Să se demonstreze că $\frac{m}{n} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$.

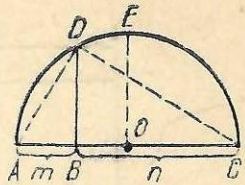


Fig. III.13

**9.** a) Fie $m$ și $n$ două segmente. Pentru a construi un segment egal cu media lor proporțională se poate proceda astfel. Pe o dreaptă se poartă segmentele $AB = m$ și $BC = n$, se construiește un semicerc de diametru $AC$, în $B$ se ridică perpendiculara pe $AC$ și se notează cu $D$ intersecția ei cu semicercul. Să se demonstreze că segmentul $BD$ este cel căutat. b) Să se deducă din această construcție că media proporțională a două numere este cel mult egală cu media lor aritmetică (fig. 13).

**10.** Se ridică în vîrful $B$ perpendiculara pe $BC$ și se notează cu $E$ intersecția ei cu dreapta $AC$. Să se demonstreze că $BE = \frac{ac}{b}$.

**11*.** Dacă $DE \perp AB$ și $DF \perp AC$ ($E \in AB$, $F \in AC$), să se demonstreze că $\frac{DE}{DF} = \frac{c}{b}$.

## TEOREMA LUI PITAGORA

**12.** Să se completeze tabelul alăturat, în care $b$ și $c$ sînt catetele și $a$ este ipotenuza unui triunghi dreptunghic. Lungimile sînt date în centimetri.

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 9,43 | 34 | 29 | 8,7 | 8,5 | 58 |
| $b$ | 5 | 16 | 20 | 6 | 6,8 | 40 |
| $c$ | 8 | 30 | 21 | 6,3 | 5,1 | 42 |

**13.** Să se calculeze ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel cu latura de 5 cm.

---

R. — **7.** $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ sau $\triangle ADC \sim \triangle ABC$. **8.** Rezultă, prin împărțire, din relațiile $b^2 = am$ și $c^2 = an$. **9.** a) Se aplică teorema înălțimii în triunghiul $ADC$. b) $OE \perp AC$. Raza $OE = \frac{AC}{2} = \frac{m+n}{2}$; $BD \leqslant OE$. **10.** $\widehat{ABE} = \hat{C}$; $\triangle AEB \sim \triangle ACB$. **11.** $AE = DF$; $\triangle AED \sim \triangle ABC$. **12.** a) $a = 9{,}43$ cm. b) $c = 30$ cm. c) $b = 20$ cm. d) $b = 6$ cm. e) $a = 8{,}5$ cm; f) $c = 42$ cm. **13.** 7,05 cm.



6*

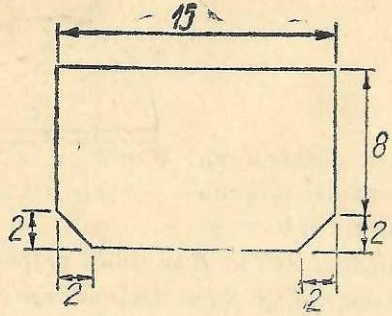


Fig. III.14

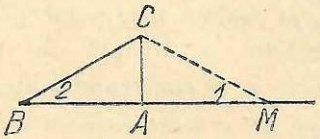


Fig. III.15

**14.** Latura unui romb este de 13 m și una din diagonale este de 10 m. Se cere cealaltă diagonală.

**15.** Într-un cerc, se dă o coardă de 40 cm. Se știe că distanța de la centrul cercului pînă la acea coardă este de 21 cm. Se cere raza cercului.

**16.** Să se determine perimetrul unei foi de tablă care are forma din figura 14. Lungimile sînt date în centimetri.

**17.** În figura 15 se dă: $CA = 4$ cm, $CB = 8{,}5$ cm, $AC \perp AB$. Să se determine poziția punctului $M$ pe dreapta $BA$ astfel încît unghiul 1 să fie egal cu unghiul 2.

**18.** În figura 16, triunghiul $ABC$ este isoscel, $AD \perp BC$ și $M$ este mijlocul lui $AD$. Se dă $AC = 13$ m, $BC = 10$ m. Se cere $CM$.

**19.** Un triunghi dreptunghic are catetele de 5 cm și 12 cm și un alt triunghi dreptunghic are catetele de 12 cm și 16 cm. Așezăm aceste triunghiuri unul lîngă altul, astfel încît laturile lor egale să coincidă. Se cere perimetrul triunghiului care se formează astfel.

**20.** Într-un triunghi dreptunghic $ABC$ se dau: cateta $AB = 33$ cm și ipotenuza $BC = 65$ cm. Se cer medianele $BD$, $CE$.

**21.** Notațiile fiind cele din figura 17 ($\hat{A} = 90°$) se dă: $AB = 45$ cm, $BC = 53$ cm, $BD = 12$ cm, $CE = AC$. Se cere $DE$.

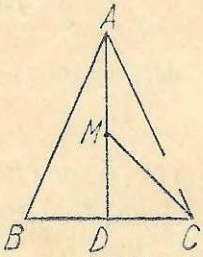


Fig. III.16

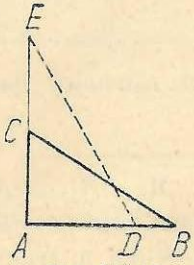


Fig. III.17

---

**R.** — **14.** 24 m. **15.** 29 cm. **16.** 47,64 cm. **17.** $AM = 7{,}5$ cm. **18.** $MC = 7{,}81$ m. **19.** 54 cm. **20.** $BD = 43{,}27$ cm; $CE = 58{,}38$ cm. **21.** $CA = 28$ cm, $DE = 65$ cm.

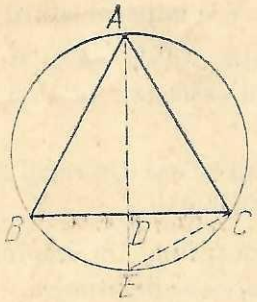



Fig. III.18

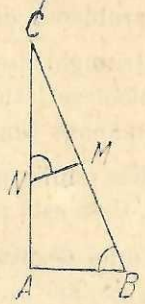



Fig. III.19

**22.** Într-un trapez isoscel, bazele sînt: $AB = 18$ m, $CD = 8$ m și perimetrul este de 52 m. Se cere înălțimea.

**23.** Într-un trapez, baza mică $DC = 3$ m, laturile neparalele sînt: $AD = 13$ m, $BC = 6{,}25$ m și înălțimea este de 5 m. Se cere baza mare.

**24.** Într-un trapez dreptunghic, una din baze este de 21 cm, și cealaltă de 17 cm. Înălțimea trapezului este de 3 cm. Se cere perimetrul trapezului.

**25.** Laturile unui trapez isoscel $ABCD$ sînt: $AB = 18$ cm, $BC = AD = 13$ cm, $CD = 8$ cm. Se cer diagonalele trapezului.

**26.** Se consideră două cercuri concentrice. Într-un punct $T$ al cercului mai mic se duce tangenta la el și se notează cu $A$ și $B$ punctele ei de intersecție cu cercul mai mare. Razele cercurilor sînt de 9 cm și 41 cm. Se cere coarda $AB$.

**27.** Diametrul $AB$ al unui cerc este de 10 cm. În punctul $A$ se duce tangenta la cerc și se poartă pe ea un segment $AC = 24$ cm. Se notează cu $D$ punctul (deosebit de $B$) în care dreapta $CB$ taie cercul. Se cer segmentele $AD$ și $BD$.

**28*** Laturile unui triunghi isoscel (fig. 18) sînt de 6 m, 5 m și 5 m. Să se calculeze raza cercului circumscris acestui triunghi.

**29.** În figura 19 se dă: $\hat{A} = 90°$, $AB = 5$ m, $AC = 12$ m. Punctul $M$ este mijlocul ipotenuzei, $MN \perp BC$. Se cer laturile triunghiului $MNC$.

---

R. — **22.** Se duce $CE$ paralel cu $DA$ ($E \in AB$); 12 m. **23.** 18,75 m. **24.** 46 cm. **25.** Fie $E$ și $F$ respectiv picioarele perpendicularelor coborîte din $D$ și $C$ pe baza mare $AB$. $AE = BF$, deci $BF = (18 - 8) : 2 = 5$. Triunghiul $CFB$ dă $CF$, apoi $AC$ se află din triunghiul $AFC$; $AC = 17{,}69$ cm. **26.** 80 cm; **27.** Triunghiul $CAB$ este dreptunghic și $AD$ este înălțimea lui. $BC = 26$ cm, $BD = 3\frac{11}{13}$ cm, $AD = 9\frac{3}{13}$ cm. **28.** Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul $ACD$ apoi teorema catetei în triunghiul $ACE$; 3,125 m. **29.** $CM = 6{,}5$ m, $NM = 2\frac{17}{24}$ m, $CN = 7\frac{1}{24}$ m.

**30.** Aceeași problemă, dacă se ia punctul $N$ la mijlocul laturii $AC$ și $NM \perp BC$.

**31.** Într-un triunghi dreptunghic, o catetă este de 2,4 m și ipotenuza este de 5,1 m. Să se calculeze laturile unui triunghi asemenea cu el și mai mic decît el, raportul de asemănare fiind 2 : 3.

**32.** Diagonalele unui romb sînt de 16 cm și 30 cm. Un romb asemenea cu el are latura de 68 cm. Care este raportul de asemănare?

**33.** Laturile unui dreptunghi sînt de 40 m și 9 m. Un dreptunghi asemenea cu el are diagonala de 205 m. Se cer laturile acestui dreptunghi.

*Să se demonstreze cu ajutorul teoremei lui Pitagora teoremele* 34—38.

**34.** a) Înălțimea unui triunghi isoscel este și mediană. b) Un triunghi în care o înălțime este și mediană este isoscel.

**35.** Dacă dintr-un punct se duce o perpendiculară pe o dreaptă și o oblică, perpendiculara este mai scurtă decît oblica.

**36.** a) Dacă dintr-un punct se duc spre o dreaptă două oblice, oblica care are proiecția mai mare este mai mare. b) Oblica mai mare are proiecția mai mare.

**37.** O coardă a unui cerc care nu este diametru este mai mică decît diametrul.

**38.** a) Din două coarde neegale ale aceluiași cerc, coarda mai mare este mai apropiată de centru. b) Coarda mai apropiată de centru este mai mare.

**39.** Notațiile fiind cele din figura 4 ($AD \perp BC$), să se demonstreze că: a) Dacă $b^2 = a \cdot m$, triunghiul $ABC$ este dreptunghic (reciproca teoremei catetei). b) Dacă $i^2 = m \cdot n$, triunghiul $ABC$ este dreptunghic (reciproca teoremei înălțimii).

---

**R. — 30.** $CN = 6$ m, $MN = 2\frac{4}{13}$ m, $CM = 5\frac{7}{13}$ m. **31.** 1,6 m; 3,4 m; 3 m. **32.** 1 : 4. **33.** 200 m; 45 m. **34.** Fie $ABC$ triunghiul și $AD$ o înălțime. $AB = AC = a$, $AD = i$. Se calculează $BD$ din triunghiul $ABD$ și $DC$ din triunghiul $ADC$. b) Se pune $BD = DC = a$ și se calculează $AB$ și $AC$. **35.** Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul care se formează. **36.** Fie $OA$ și $OB$ oblicele și $P$ piciorul perpendicularei duse din $O$ pe dreaptă. Se calculează $OA^2$ din triunghiul $OPA$ și $OB^2$ din triunghiul $OPB$ și se compară termenii sumelor. **37.** Fie $AB$ o coardă. Se duce diametrul $AC$ și se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul $ABC$. **38.** a) Fie $AB$ și $CD$ cele două coarde, $M$ și $N$ picioarele perpendicularelor coborîte din centrul $O$ pe ele, $M \in AB$. Se calculează $OM$ din triunghiul $OAM$ și $ON$ din triunghiul $OCN$. În prima diferență scăzătorul este mai mare. **39.** a) Din $b^2 = a \cdot m$, adică $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$ rezultă că $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ (cazul I). Dar triunghiul $ADC$ este dreptunghic, deci... b) Din $i^2 = m \cdot n$, adică $\frac{i}{m} = \frac{n}{i}$ rezultă că $\triangle ADB \sim \triangle ADC$ (cazul I), deci $\hat{B} = \hat{1}$. Dar $\hat{B} + \hat{2} = 90°$, deci $\hat{1} + \hat{2} = 90°$, deci $\widehat{BAC} = 90°$.

40. Un pătrat cu latura de 6 cm este înscris într-un cerc. Să se calculeze raza cercului.

41. Să se construiască un pătrat înscris și un pătrat circumscris aceluiași cerc. Să se afle raportul dintre laturile lor.

42. a) Avem o placă în formă de hexagon regulat, latura lui fiind de 10 cm. Vrem să facem o cutie dreptunghiulară cît mai mică în care să încapă. Ce lungime și ce lățime trebuie să aibă cutia? b) Aceeași problemă în cazul unei plăci în formă de triunghi echilateral cu latura de 10 cm.

43. O clădire (fig. 20) este înaltă de 8 m și dispunem de o scară lungă de 10 m. La ce distanță de clădire putem fixa piciorul scării pentru ca celălalt capăt al scării să ajungă la acoperiș?

44. O scară $AB$ lungă de 6,50 m este rezemată de un zid (fig. 20). $AC = 6$ m. Cu cît urcă punctul $A$ dacă apropiem punctul $B$ de punctul $C$ cu 1 m? Cu cît coboară punctul $A$ dacă depărtăm punctul $B$ de punctul $C$ cu 1 m?

45. Un stîlp de telegraf înalt de 8 m este fixat cu o ancoră de sîrmă $BC$ (fig. 21) lungă de 9 m. Ancora cuprinde stîlpul la o distanță de 2 m de vîrf. Care este distanța $AB$ dintre piciorul stîlpului și punctul $B$ unde ancora este fixată de pămînt?

46. O scară interioară este formată din 19 trepte, fiecare treaptă are o înălțime de 16 cm și o lățime de 25 cm. Scara este acoperită cu un preș care o depășește sus și jos cu cîte 1 m. Cu cît este mai lung preșul decît balustrada scării?

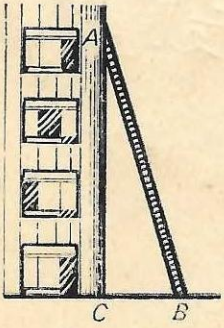


Fig. III.20

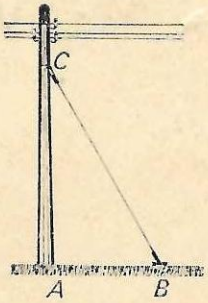


Fig. III.21

---

R. — 40. 4,21 cm. 41. $\sqrt{2} : 2 = 0{,}705$. 42. a) Baza cutiei trebuie să fie un pătrat cu latura 17,3 cm. b) 10 cm și 8,65 cm. 43. Cel mult 6 m. 44. Cu 0,32 m; cu 0,53 m. 45. 6,71 m. 46. Lungimea covorului $= 16 \cdot 19 + 25 \cdot 18 + 200 = 954$ cm; balustrada este ipotenuza unui triunghi dreptunghic în care cateta orizontală este de $25 \cdot 18$ cm și cea verticală de $16 \cdot 18$ cm; cu 4,20 m.

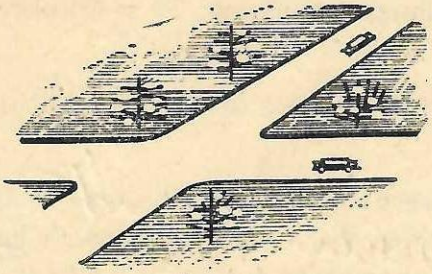


Fig. III.22

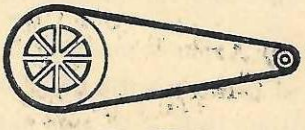


Fig. III.23

**47.** Printr-un punct trec două șosele, una avînd direcția est-vest, cealaltă nord-sud (fig. 22). Din acest punct pleacă simultan două mașini fiecare mergînd pe o altă șosea. Una merge cu o viteză de 60 km pe oră și celălalt cu 36 km pe oră. a) Care este distanța dintre ele după 10 minute? b) Cu cît crește această distanță în minutul următor?

**48.** O curea de transmisie leagă o roată direct cu axa de transmisie (fig. 23). Roata are un diametru de 1,20 m, grosimea axei de transmisie se neglijează și distanța de la centrul roții la axa de transmisie este de 3,50 m. Se cere lungimea părții rectilinii a curelei.

---

R. — **47.** a) 11,662 km. b) Se folosesc triunghiurile asemenea; cu o zecime, adică 1,166 km. **48.** 3,45 m.

CAPITOLUL IV

# ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

1. Se ştie că, atunci cînd cunoaştem un număr suficient de elemente ale unui triunghi, de exemplu, o latură şi cele două unghiuri alăturate ei, putem construi triunghiul. Triunghiul o dată construit, putem măsura celelalte elemente. Acest procedeu este însă foarte puţin precis. În cele ce urmează, vom învăţa o metodă mai precisă de a determina elementele unui triunghi, metodă bazată pe calcul.

2. **Definiţii.** Fie $ABC$ (fig. 1) un triunghi dreptunghic. Considerăm unul dintre unghiurile sale ascuţite, de exemplu, unghiul $C$. Se folosesc următoarele rapoarte dintre laturile triunghiului, numite funcţii *trigonometrice* ale acestui unghi:

$$\sin C = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}; \quad \cos C = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}};$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}, \quad \operatorname{ctg} C = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}.$$ [1]

În mod analog se definesc funcţiile oricărui unghi ascuţit. De exemplu, cele patru funcţii trigonometrice ale unghiului $B$ sînt:

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}.$$

În aceste expresii, $a$, $b$, $c$ reprezintă măsurile laturilor triunghiului (măsurate cu aceeaşi unitate de măsură).

*Exemplu*: Să luăm cazul cînd laturile triunghiului sînt: $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, $a = 5$ cm.

În acest caz, cele patru funcţii trigonometrice ale unghiului $C$ au valorile:

$$\sin C = \frac{3}{5} = 0{,}6, \quad \cos C = \frac{4}{5} = 0{,}8,$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \operatorname{ctg} C = \frac{4}{3} = 1{,}33.$$

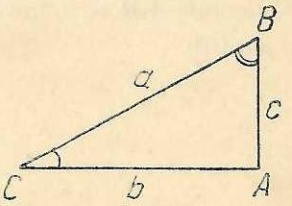


Fig. IV.1

[1] Semnul *sin* este o prescurtare pentru sinus. Expresia sin $u$ se citeşte: *sinus de u* sau aşa cum se scrie. Semnul *cos* este o prescurtare pentru cosinus. Expresia cos $u$ se citeşte: *cosinus de u* sau aşa cum se scrie. Semnul *tg* este o prescurtare pentru tangentă. Expresia tg $u$ se citeşte: *tangentă de u*. Semnul ctg este o prescurtare pentru cotangentă. Expresia ctg $u$ se citeşte: *cotangentă de u*.

3. **Observare.** Pentru a ține minte definițiile funcțiilor trigonometrice, se pot observa următoarele:

*a)* În cuvintele sinus și cosinus se găsește litera *i*; aceste funcții conțin ipotenuza (prima literă a cuvîntului ipotenuză este tot *i*). Trebuie să ținem minte că, în ambele rapoarte, ipotenuza figurează la numitor.

*b)* În cuvintele tangentă și cotangentă se găsește litera *a*; aceste funcții conțin numai catete (prima vocală a cuvîntului catetă este tot *a*).

*c)* Funcțiile propriu-zise, sinusul și tangenta, încep cu cateta opusă, iar cosinusul și cotangenta — cu cateta alăturată.

Deci, pentru a scrie sinusul unui unghi, judecăm astfel: fiind vorba de o funcție propriu-zisă, începem cu cateta opusă; fiind vorba de sinus, punem la numitor ipotenuza.

4. **Construcția unui unghi cînd se cunoaște valoarea uneia dintre funcțiile sale trigonometrice.**

*1.* Se dă $\sin M = \frac{5}{8}$. Trebuie să construim un triunghi dreptunghic în care o catetă să fie de 5 unități și ipotenuza de 8 unități.

Construim un unghi drept cu vîrful în $A$ (fig. 2), pe una din laturi purtăm un segment $AB = 5$ unități oarecare, apoi luăm între vîrfurile compasului un segment de 8 unități (egale cu cele precedente) și descriem un arc de cerc cu centrul în $B$, care să taie cealaltă latură a unghiului drept. Notăm cu $M$ punctul de intersecție. Unghiul $AMB$ este unghiul căutat. În adevăr, în triunghiul $AMB$, cateta opusă unghiului $M$ este de 5 unități și ipotenuza este de 8 unități, deci $\sin M = \frac{5}{8}$.

*2.* Se dă $\cos M = \frac{5}{6}$. Construim, ca în cazul precedent, un triunghi dreptunghic cu o catetă de 5 unități și ipotenuza de 6 unități. Unghiul alăturat acelei catete este unghiul căutat.

*3.* Se dă $\operatorname{tg} M = \frac{3}{5}$. Pe laturile unui unghi drept (fig. 3), purtăm segmentele $AB = 3$ unități și $AM = 5$ unități și unim $M$ cu $B$. Unghiul $M$ este unghiul căutat.

*4.* Se dă $\operatorname{ctg} M = \frac{5}{4}$. Pe laturile unui unghi drept cu vîrful în $A$, purtăm segmentele $AM = 5$ unități și $AB = 4$ unități și unim $M$ cu $B$. Unghiul $M$ este unghiul căutat.

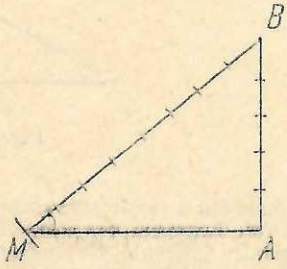


Fig. IV.2

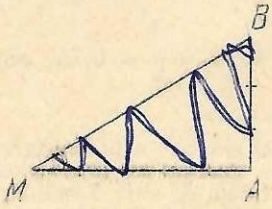


Fig. IV.3

5. **Funcțiile trigonometrice depind numai de unghi.** Fie $xAy$ un unghi ascuțit oarecare (fig. 4). Să luăm un punct oarecare $M$ ($M \in Ay$) și să coborîm perpendiculara $MN$ pe $Ax$. Triunghiul $MAN$ ne dă:

$$\sin A = \frac{MN}{AM}.$$

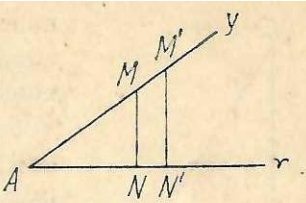


Fig. IV.4

În expresia sinusului unghiului $A$ intră laturile $MN$ și $AM$, dar valoarea sinusului nu depinde de mărimea fiecărei laturi în parte. Ea depinde numai de unghiul $A$.

În adevăr, dacă luăm un alt punct, $M'$ ($M' \in Ay$) și coborîm $M'N'$ perpendicular pe $Ax$, triunghiul $AM'N'$ ne dă:

$$\sin A = \frac{M'N'}{AM'},$$

care are în aparență o altă valoare. Dar triunghiul $AM'N'$ este asemenea cu triunghiul $AMN$, deci

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{AM'}{AM} \quad \text{sau} \quad \frac{M'N'}{AM'} = \frac{MN}{AM},$$

ceea ce înseamnă că obținem pentru sin $A$ aceeași valoare.

În același fel se dovedește că și cos $A$, tg $A$ și ctg $A$ depind numai de unghiul $A$, nicidecum de laturile triunghiului din care face parte.

6. **Table trigonometrice.** Valorile funcțiilor trigonometrice se calculează prin metode din matematici superioare. La sfîrșitul cărții se găsesc patru table, în care sînt gata calculate valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de la 0° la 90° din jumătate în jumătate de grad. Valorile din table sînt aproximative.

Fie de aflat sin 26°. În tabla de la pagina 140, căutăm în rîndul 26 și găsim 0,438. Deci, sin 26° = 0,438.

În același rînd, în coloana a doua, citim că sin 26°30′ = 0,446.

Pentru a afla, de exemplu, sin 58°30′, căutăm în rîndul 58, dar luăm numărul din coloana a doua; găsim: 0,853. Deci: sin 58°30′ = 0,853.

Cînd avem nevoie de sinusul unui unghi care are un număr oarecare de minute (nu 30′), îl rotunjim astfel: cînd unghiul are mai puțin de 15′ le neglijăm; cînd unghiul are 15′ sau este cuprins între 15′ și 45′, considerăm că are 30′; cînd unghiul are mai mult ca 45′ sau chiar 45′ mărim numărul gradelor cu o unitate.

*Exemple:* sin 38°12′ = sin 38° = 0,616;
sin 38°16′ = sin 38°30′ = 0,623;
sin 38°42′ = sin 38°30′ = 0,623;
sin 38°50′ = sin 39° = 0,629.

Valorile funcțiilor cosinus, tangentă și cotangentă se afla la fel în tablele respective, de la pagina 141.

Invers, dacă cunoaștem sinusul unui unghi, putem afla unghiul. Fie, de exemplu, sin $x$ = 0,572. Căutăm în tabla sinusurilor acest număr. Nu-l găsim, dar găsim

numerele 0,566 şi 0,574, dintre care primul e mai mic ca numărul nostru, iar al doilea e mai mare. Dintre aceste două numere, 0,566 diferă de numărul nostru cu 0,572 — 0,566 = = 6 miimi, iar 0,574 diferă numai cu 0,574 — 0,572 = 2 miimi, deci 0,574 este mai apropiat de numărul nostru. Luăm pentru unghiul $x$ valoarea corespunzătoare, adică $x = 35°$.

În acelaşi fel se procedează cînd se cunoaşte valoarea unei alte funcţii a unghiului.

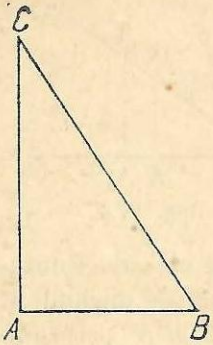


Fig. IV.5

7. **Rezolvarea triunghiului dreptunghic.** A rezolva un triunghi înseamnă a calcula elementele lui, adică toate laturile şi toate unghiurile lui. Cînd cunoaştem două elemente ale unui triunghi dreptunghic, din care cel puţin o latură, putem rezolva triunghiul — după cum se va vedea din exemplele următoare:

*1. Într-un triunghi dreptunghic $ABC$* (fig. 5), *se dă $AB = 5$ m, $BC = 8$ m. Să se rezolve triunghiul.*

*a)* Deoarece cunoaştem ipotenuza şi o catetă, putem folosi funcţia sinus. Avem:

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Găsim în tablă: $\hat{C} = 38°30'$.

*b)* Unghiul $B$ se află uşor, observînd că cele două unghiuri ale unui triunghi dreptunghic sînt complementare. Deci:

$$\hat{B} = 90° - \hat{C} = 89°60' - 38°30' = 51°30'.$$

Putem afla întîi unghiul $B$. Cunoscînd ipotenuza $BC$ şi cateta $AB$, luăm cosinusul unghiului $B$.

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Tabla dă: $\hat{B} = 51°30'$. Unghiul $C$ se află scăzînd unghiul $B$ din 90°.

*c)* Pentru a afla cateta $AC$, luăm sinusul unghiului $B$:

$$\sin B = \frac{AC}{AB}; \quad \sin 51°30' = \frac{AC}{8}.$$

Privim această egalitate ca o proporţie:

$$\frac{\sin 51°30'}{1} = \frac{AC}{8},$$

din care scoatem:

$$AC = 8 \sin 51°30'.$$

Găsim în tablă: $\sin 51°30' = 0{,}783$. Deci:

$$AC = 0{,}783 \cdot 8 = 6{,}264 \text{ m}.$$

Latura $AC$ se putea afla și prin teorema lui Pitagora, dar în acest caz calculele sînt mai lungi.

2. *Să se rezolve un triunghi dreptunghic $ABC$* (fig. 5), *cunoscînd $AB = 10$ m și $\hat{C} = 64°$.*

*a)* Deoarece cunoaștem o catetă și unghiul opus ei, putem folosi funcția sinus, tangentă sau cotangentă. Avem:

$$\operatorname{ctg} C = \frac{AC}{AB}; \quad \frac{\operatorname{ctg} 64°}{1} = \frac{AC}{10}; \quad AC = 10 \operatorname{ctg} 64°.$$

Găsim în tablă: $\operatorname{ctg} 64° = 0{,}488$. Deci $AC = 0{,}488 \cdot 10 = 4{,}88$ m.

Latura $AC$ se poate afla și cu ajutorul funcției tangentă, dar calculele sînt mai lungi.

*b)* Pentru a afla ipotenuza, folosim funcția sinus:

$$\sin C = \frac{AB}{BC}; \quad \frac{\sin 64°}{1} = \frac{10}{BC}; \quad BC = \frac{10}{\sin 64°}.$$

Tabla dă: $\sin 64° = 0{,}899$. Deci:

$$BC = 10 : 0{,}899 = 11{,}12 \text{ m}.$$

*c)* Unghiul $B$ se află ușor:

$$B = 90° - 64° = 26°.$$

8. **Latura și apotema unui poligon regulat oarecare.** Numai unele poligoane regulate se pot construi folosind numai rigla și compasul. Dar, folosind trigonometria, se pot calcula latura și apotema oricărui poligon regulat.

Fie $ABCD$... un poligon regulat cu $n$ laturi înscris într-un cerc de rază $R$, $n$ fiind un număr natural oarecare (fig. 6). Notăm latura și apotema sa cu $l_n$ și $a_n$. Ducem $OM$ perpendicular pe $AB$. Atunci $AM$ este jumătate din latura poligonului,

$$AM = \frac{l_n}{2}, \quad l_n = 2AM$$

și $OM$ este apotema poligonului, $OM = a_n$. Ne propunem să aflăm $l_n$ și $a_n$, cunoscînd $n$ și $R$.

Dacă poligonul are $n$ laturi, arcul $AB$ este a $n$-a parte din cerc unghiul la centru $AOB$ are $\frac{360}{n}$ grade, iar unghiul $AOM$ este jumătate din unghiul $\widehat{AOB}$, deci

$$\widehat{AOM} = \frac{360°}{n} : 2 = \frac{180°}{n}.$$

Din triunghiul $AOM$ scoatem:

$$\sin \widehat{AOM} = \frac{AM}{OA},$$

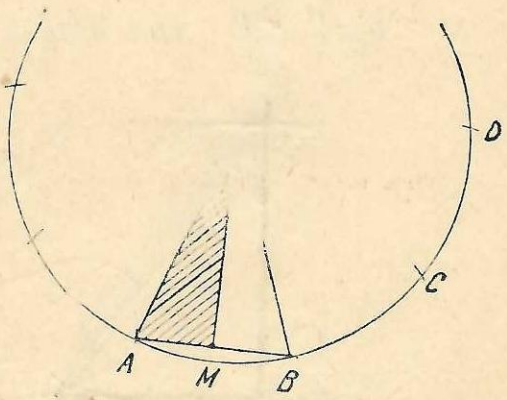


Fig. IV.6

adică $\sin\frac{180°}{n} = \frac{AM}{R}$, de unde $AM = R\sin\frac{180°}{n}$ şi, deoarece $l_n = 2AM$,

$$l_n = 2R\sin\frac{180°}{n}.$$

Tot din triunghiul $AOM$, $\cos\widehat{AOM} = \frac{OM}{AO}$, adică $\cos\frac{180°}{n} = \frac{a_n}{R}$ de unde

$$a_n = R\cos\frac{180°}{n}.$$

Aceste două formule dau latura şi apotema oricărui poligon regulat înscris în cerc.

*Exemplu.* Pentru $n = 15$, se obţine

$$l_{15} = 2R\sin\frac{180°}{15} = 2R\sin 12° = 2R\cdot 0{,}208 = 0{,}416\ R,$$

$$a_{15} = R\cos\frac{180°}{15} = R\cos 12° = R\cdot 0{,}978 = 0{,}978\ R.$$

9. **Aplicaţii.** *1. Un stîlp înalt de 4 m* (fig. 7) *aruncă o umbră lungă de 2,50 m. Ce unghi formează razele soarelui cu orizontala?*

În triunghiul $ABC$ cunoaştem catetele: $AB = 4$ m, $AC = 2{,}50$ m. Se cere unghiul $C$ pe care-l fac razele soarelui cu orizontala.

$$\operatorname{tg} C = \frac{4}{2{,}50} = 1{,}6.$$

Tabla dă: $\hat{C} = 58°$.

2. *Într-un cerc* (fig. 8) *se duc două raze $OA$ şi $OB$ care formează un unghi de 70°. Raza cercului este de 5 m. Se cere coarda $AB$.*

Din centrul cercului coborîm perpendiculara pe $AB$. Se formează triunghiul $OAD$, în care cunoaştem: $OA = 5$ m, $\widehat{AOD} = 70° : 2 = 35°$. Putem afla cateta $AD$.

$$\sin AOD = \frac{AD}{OA}.$$

Înlocuind $\sin AOD$ şi $OA$ prin valorile lor, obţinem:

$$0{,}574 = \frac{AD}{5};\quad AD = 0{,}574\cdot 5 = 2{,}87;\quad AB = 2{,}87\cdot 2 = 5{,}74 \text{ m}.$$

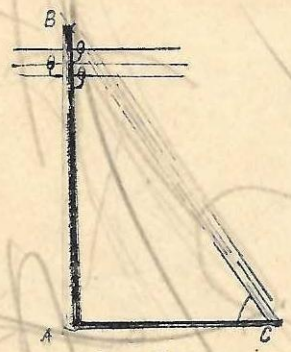


Fig. IV.7

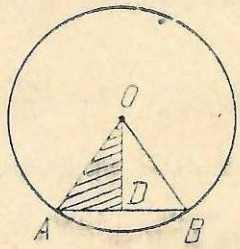


Fig. IV.8

## EXERCIȚII

**1.** Să se construiască unghiul $A$, știind că:

a) $\sin A = 0{,}7$; b) $\cos A = \frac{5}{8}$; c) $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$; d) $\operatorname{tg} A = 2$; e) $\operatorname{ctg} A = \frac{4}{7}$; f) $\operatorname{ctg} A = \frac{5}{2}$. Se va măsura de fiecare dată unghiul și se va compara rezultatul cu cel dat de tablă.

**2.** Să se determine cu ajutorul tablei:

a) $\sin 21°30'$; b) $\sin 81°$; c) $\sin 65°10'$; d) $\sin 6°51'$; e) $\cos 38°24'$; f) $\cos 71°35'$; g) $\cos 15°46'$; h) $\operatorname{tg} 60°30'$; i) $\operatorname{tg} 24°18'$; j) $\operatorname{ctg} 56°40'$; k) $\operatorname{ctg} 41°7'$.

**3.** Să se afle cu ajutorul tablei unghiul $x$ știind că:

a) $\sin x = 0{,}737$; b) $\cos x = 0{,}656$; c) $\operatorname{tg} x = 1{,}303$; d) $\operatorname{ctg} x = 1{,}455$; e) $\sin x = 0{,}651$; *f)* $\cos x = 0{,}234$; *g)* $\operatorname{tg} x = 0{,}853$; *h)* $\operatorname{ctg} x = 0{,}673$.

**4.** Notațiile fiind cele din figura 1 să se completeze tabelul alăturat.

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 10 | 200 | | | | 11 |
| $b$ | | | 15 | | 5 | |
| $c$ | | | | 40 | 8 | 6 |
| $B$ | | 41°25′ | | | | |
| $C$ | 34° | | 26°30′ | 66° | | |

**5.** Laturile unui triunghi isoscel sînt de 3 m, 5 m, 5 m. Se cer unghiurile triunghiului.

**6.** Laturile unui dreptunghic sînt de 5 m și 3 m. Se cere unghiul format de diagonalele dreptunghiului.

**7.** Diagonalele unui romb sînt de 4 cm și 10 cm. Să se afle unghiurile rombului.

**8.** Bazele unui trapez isoscel sînt de 8 cm și 5 cm și laturile neparalele au cîte 6 cm. Să se afle unghiurile trapezului.

**9.** Într-un cerc, unei coarde de 30 cm îi corespunde un unghi la centru de 28°. Să se afle raza cercului.

**10.** Dintr-un punct $A$ se duc cele două tangente la un cerc cu centrul în $O$. Raza cercului este de 5 cm și $OA = 7$ cm. Se cere unghiul format de tangente.

---

**R. — 4.** a) $\hat{B} = 56°$, $b = 8{,}29$, $c = 5{,}59$. b) $\hat{C} = 48°35'$, $b = 132{,}6$, $c = 149{,}8$. c) $\hat{B} = 63°30'$, $a = 16{,}759$, $c = 7{,}485$. d) $\hat{B} = 24°$, $a = 43{,}763$, $b = 17{,}80$. e) $\hat{B} = 58°$, $\hat{C} = 32°$, $a = 9{,}43$. f) $\hat{B} = 57°$, $\hat{C} = 33°$, $b = 9{,}24$. **5.** 72°30′, 72°30′, 35°. **6.** 62°. **7.** 44°, 136°. **8.** 75°30′, 104°30′. **9.** 61,98 m. **10.** 91°.

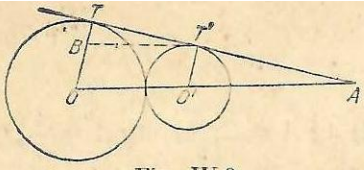



Fig. IV.9

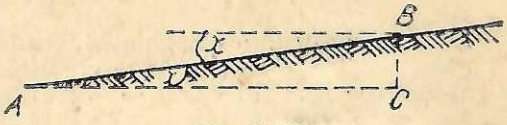



Fig. IV.10

**11.** Două cercuri sînt tangente exterior. Razele lor sînt: $R = 8$ cm, $r = 4$ cm. Se cere unghiul $A$ format de tangenta lor comună $TT'$ cu linia centrelor (fig. 9).

**12.** Razele a două cercuri sînt: $R = 8$ cm, $r = 5$ cm și distanța dintre centrele lor este de 15 cm. Să se calculeze unghiul format de tangenta lor comună exterioară (care nu taie segmentul determinat de centrele cercurilor) cu linia centrelor.

*Notă.* În cele mai multe dintre problemele următoare se va construi figura (la scară) pe baza datelor și rezultatele calculelor se vor verifica prin măsurare.

**13.** Prin *panta* unei șosele $AB$ (fig. 10) se înțelege raportul dintre lungimile $BC$ și $AC$. *a)* Ce funcție trigonometrică a unghiului $x$ reprezintă panta? *b)* Panta unei șosele este de 21/100. Ce unghi face șoseaua cu orizontala? *c)* O șosea face cu orizontala un unghi de 8°. Care este panta ei?

**14.** Panta liniei ferate este indicată prin niște tăbliițe, a căror formă este indicată în figura 11. Prima tăbliță arată că, pe o porțiune de 101 m, linia urcă (săgeata este îndreptată în sus) cu o pantă de 5/100 și tăbliița a doua arată că, pe o porțiune de 639 m, linia coboară (săgeata este îndreptată în jos) cu o pantă de 8/100. Să se afle pentru fiecare dintre aceste linii unghiul pe care-l face cu orizontala.

**15.** De la distanța de 50 m, o clădire se vede sub un unghi de elevație de 40°. Se cere înălțimea clădirii. Ochiul observatorului se află la 1,50 m deasupra solului. Unghiul de elevație este unghiul $x$ din figura 12, format de semidreapta care unește ochiul observatorului cu capătul de sus al clădirii și orizontala.

**16.** Un obiect aruncă o umbră lungă de 80 m. Unghiul pe care-l formează razele soarelui cu orizontala este de 60°. Să se afle înălțimea obiectului.

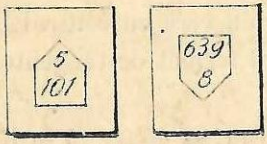



Fig. IV.11

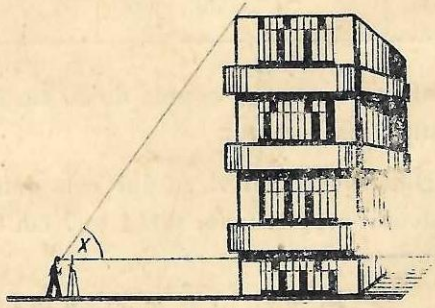



Fig. IV.12

---

**R. — 11.** Se duce $BT' \parallel OA$ și se folosește triunghiul $BTT'$; 19°30′.

**12.** Linie ajutătoare $T'B$ analogă cu cea din figura 9; $\widehat{TT'B} = 11°30'$.
**13.** *b)* 12°; *c)* 14/100. **14.** 3°, 4°30′. **15.** 43,45 m. **16.** 138,56 m.

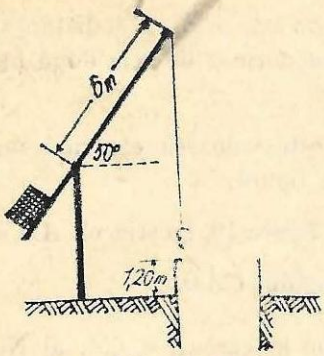



Fig. IV.13

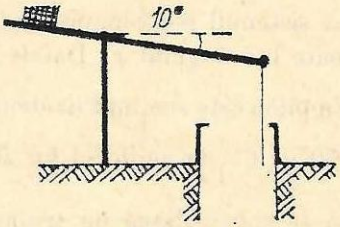



Fig. IV.14

17*. Cînd ciutura unei fîntîni se află la 1,20 m deasupra pămîntului, cumpăna face cu orizontala un unghi de 50° (fig. 13) și cînd ciutura se găsește la nivelul apei din fîntînă, cumpăna face cu orizontala un unghi de 10°, ca în figura 14. Lungimea cumpănei socotită de la punctul ei de sprijin este de 6 m. Să se afle adîncimea fîntînii (socotită pînă la nivelul apei).

18. Un observator se află la o distanță de 5 m de la o statuie pe care o vede sub un unghi de elevație de 30° (fig. 15). Cu cît trebuie să se apropie de statuie, ca statuia să-i apară sub un unghi de elevație de 60°?

19. O șosea este înclinată față de orizontală cu un unghi de 12°. Cu cît urcăm dacă înaintăm pe această șosea cu 250 m?

20. Figura 16 reprezintă harta unui munte la scara 1 : 20 000. Liniile curbe sînt linii de nivel. Toate punctele de pe prima curbă se găsesc la 1 600 m deasupra nivelului mării, cele de pe linia a doua la 1 700 m și cele de pe linia a treia la 1 800 m. $AB$, $CD$ și $MN$ sînt niște poteci. Să se determine unghiurile pe care le fac aceste poteci cu orizontala.

21. O lampă este fixată de perete printr-un dispozitiv ca cel din figura 17. Să se calculeze unghiul $x$.

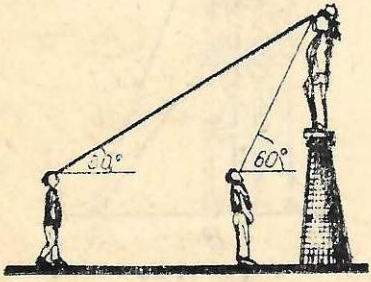



Fig. IV.15

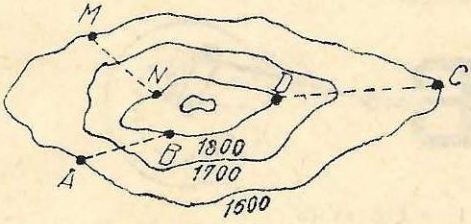



Fig. IV.16

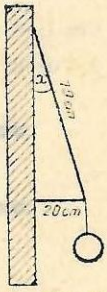



Fig. IV.17

R. — 17. 6 sin 50° + 6 sin 10° — 1,20 = 4,44 m. 18. Cu 3,34 m. 19. 52 m. 20. Distanța reală dintre punctele $A$ și $B$ este lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, în care cateta orizontală este lungimea segmentului $AB$ (mărit la scară), iar cateta verticală este de 200 m; 37°30'; 17°30'; 42°30'. 21. 16°30'.

**22.** O scară dublă are o înălțime de 2 m. Cînd scara este desfăcută, distanța dintre picioarele ei este de 80 cm. Să se calculeze unghiul format de cele două părți ale scării.

**23.** La sistemul bielă-manivelă (fig. 18), care este valoarea cea mai mare pe care o poate lua unghiul $x$? Datele se vor lua din figură.

**24.** Un pilon este susținut de două ancore, ca în figura 19. Se știe că $AD = 5$ m, $\widehat{BAD} = 70°$ și $C$ este mijlocul lui $BD$. Se cere unghiul $CAD$.

**25.** Să se construiască un triunghi dreptunghic în care $\hat{B} < 45°$. a) Notațiile fiind cele din figura IV.1. Ce este mai mare $\sin B$ sau $\cos B$? b) Aceeași întrebare dacă $\hat{B} > 45°$. c) De asemenea dacă $\hat{B} = 45°$. Să se verifice răspunsurile cu ajutorul tablei luînd pentru $\hat{B}$ cîte o valoare arbitrară, de exemplu $\hat{B} = 35°$ și $\hat{B} = 50°$.

**26.** Să se demonstreze că, dacă $\hat{B} < 45°$, $\operatorname{tg} B < 1$, și dacă $\hat{B} > 45°$, $\operatorname{tg} B > 1$. Verificare cu ajutorul tablei.

**27.** a) Notațiile fiind cele din figura 1, să se calculeze $\sin B$ și $\cos C$, apoi $\cos B$ și $\sin C$. Ținînd seama de faptul că unghiurile $B$ și $C$ sînt complementare, să se completeze: Dacă două unghiuri sînt complementare, sinusul unuia este egal cu... celuilalt. b) Să se calculeze $\operatorname{tg} B$ și $\operatorname{ctg} C$, apoi $\operatorname{ctg} B$ și $\operatorname{tg} C$ și să se completeze: Dacă două unghiuri sînt complementare, tangenta unuia este egală cu... celuilalt. Să se verifice aceasta cu ajutorul tablei, luînd la întîmplare două unghiuri complementare, de exemplu 27° și 63°.

**28.** Notațiile fiind cele din figura IV.1, să se calculeze $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{ctg} B$ și produsul lor. Să se completeze: Oricare ar fi unghiul $B$, $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} B = \ldots$ Să se verifice aceasta cu ajutorul tablei, luînd pentru $\hat{B}$ o valoare oarecare.

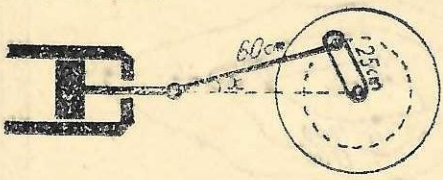



Fig. IV.18

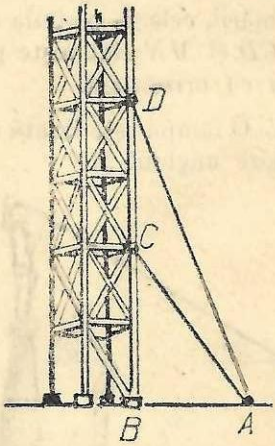



Fig. IV.19

---

R. — **22.** 23°. **23.** 22°30′. **24.** $DB = 4{,}70$ m, $BA = 1{,}71$ m; $\widehat{CAD} = 16°$. **25.** a) $\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{c}{a}$; dacă $\hat{B} < 45°$; $\hat{B} < \hat{C}$, deci $b < c$, deci $\frac{b}{a} < \frac{c}{a}$. **26.** $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$; dacă $\hat{B} < 45°$, $\hat{B} < \hat{C}$, deci $b < c$.

**29.** Notațiile fiind cele din figura 7, cap. III, să se calculeze cos $B$ din triunghiurile $ABD$ și $ABC$, și să se deducă de aici teorema catetei.

**30.** Notațiile fiind cele din figura 7, cap. III, să se calculeze tg $B$ din triunghiul $ABD$ și tg $DAC$ din triunghiul $ADC$ și să se deducă de aici teorema înălțimii.

**31.** Să se calculeze latura și apotema unui poligon regulat a) cu 12 laturi, b) cu 20 laturi înscris într-un cerc de rază 1.

**32.** a) Se consideră un triunghi dreptunghic cu cateta 1. Să se calculeze ipotenuza lui și să se afle sin 45°, cos 45°, tg 45° și ctg 45°. b) Fie $ABC$ un triunghi echilateral cu latura 1 și $AD$ o înălțime a lui ($D \in BC$). Să se calculeze $BD$ și $AD$. Cîte grade au unghiurile $B$ și $BAD$? Să se calculeze sin 30°, cos 30°, tg 30° și ctg 30°; sin 60°, cos 60°, tg 60° și ctg 60°. Cînd apare ca rezultat o fracție care are ca numitor o rădăcină pătrată, se amplifică cu numitorul și se ține seamă că $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. Exemplu: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Rezultatele sînt date în tabelul de mai jos.

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| ctg | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**R.** — **29.** $\cos B = \frac{n}{c}$ și $\cos B = \frac{c}{a}$, deci... **30.** $\widehat{DAC} = \hat{B}$; $\operatorname{tg} B = \frac{i}{n}$, $\operatorname{tg} \widehat{DAC} = \frac{m}{i}$, deci... **31.** $l_{12} = 0{,}518$, $a_{12} = 0{,}966$; $l_{20} = 0{,}312$, $a_{20} = 0{,}988$.

Capitolul V

# ARIILE POLIGOANELOR

## 5.1 NOȚIUNI DE BAZĂ

1. **Noțiunea de arie.** Orice poligon simplu[1] delimitează o parte mai mare sau mai mică din plan.

Se poate întîmpla ca un poligon să fie mult mai întins decît altul, dar partea din plan pe care o delimitează să fie mai mică. Acesta este cazul patrulaterelor din figura 2. Cel din stînga este cu mult mai „întins" decît cel din dreapta, dar partea din plan pe care o delimitează acest poligon este mai mică. Dacă aceste poligoane reprezintă două ogoare, cel din stînga va da o recoltă mai mică; dacă ele reprezintă două curți și vrem să le pavăm, pentru prima va trebui să aducem mai puțină piatră decît pentru a doua. Se poate întîmpla ca două poligoane să aibă forme cu totul diferite și, totuși, să delimiteze porțiuni din plan deopotrivă de mari. Acesta este cazul poligoanelor din figura 3. Dacă așezăm cele trei triunghiuri într-un fel sau altul, poligoanele obținute delimitează porțiuni din plan deopotrivă de mari.

Ca să ne dăm seama cît este de mare această parte din plan, trebuie să găsim un mijloc de a o măsura, adică de a exprima mărimea ei printr-un număr, care se numește *aria* acestui poligon. Acest număr joacă același rol ca lungimea unui segment. Știm de mult să aflăm aria unui dreptunghi, ea se obține înmulțind baza cu

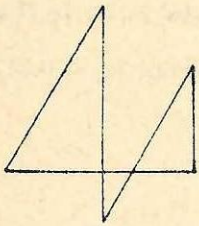


Fig. V.1

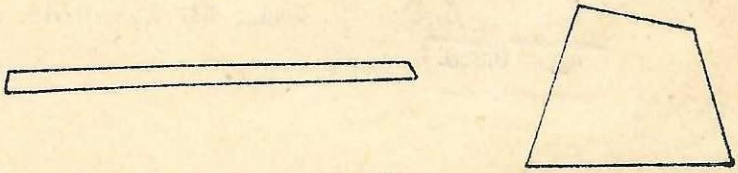


Fig. V.2

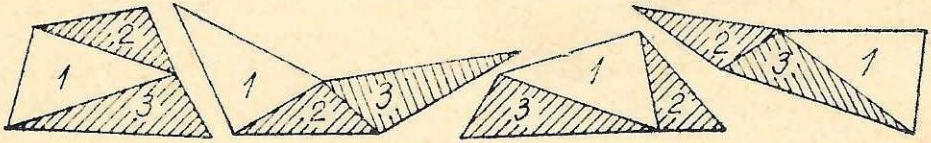



Fig. V.3

[1] Un poligon este simplu cînd laturile lui nu se intersectează. Poligonul din figura 1 nu este simplu, el nu delimitează o parte din plan. De astfel de poligoane nu ne ocupăm.

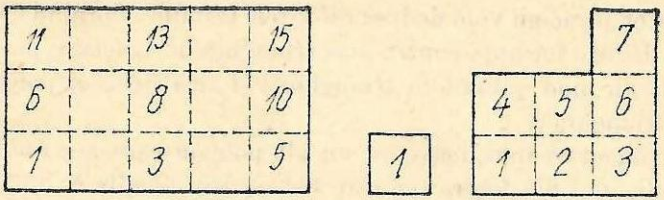



Fig. V.4

înălțimea sa. De exemplu, dacă baza unui dreptunghi este de 5 m și înălțimea de 3 m, aria sa este de $5 \cdot 3 = 15$ m². Aceasta înseamnă că metrul pătrat, reprezentat de pătratul mic, se *cuprinde* de 15 ori în acest dreptunghi sau, dacă vrem să acoperim dreptunghiul cu pătrate egale cu pătratul mic, ne trebuie 15 pătrate. Dar acest procedeu este posibil numai în cazuri foarte simple, ca în cazul dreptunghiului sau în cazul poligonului din figura 4. Dacă luăm aceeași unitate de măsură, aria acestui poligon este 7. Dar în cele mai multe cazuri acest procedeu nu este posibil. Nici măcar un poligon atît de simplu ca triunghiul nu se poate acoperi cu pătrate egale, după cum arată figura 5. Dacă se ia ca unitate de măsură un pătrățel, ea se cuprinde de un anumit număr de ori în triunghi, dar rămîn părți din triunghi care nu se pot acoperi cu pătrate-unitate. De aceea ariile poligoanelor se determină altfel.

2. **Aflarea ariei unui poligon.** În cele ce urmează vom da formule după care se află ariile diferitelor poligoane.

Este firesc să considerăm că două poligoane egale au aceeași arie.

De asemenea, dacă un poligon se compune din două sau mai multe părți alăturate, ca în figura 6-*a*, este firesc să considerăm ca aria poligonului să fie suma ariilor părților, căci partea din plan pe care o delimitează este cît părțile din plan delimitate de ele la un loc. De exemplu, poligonul din figura 6 se compune din patru părți, notate cu 1, 2, 3 și 4. Aria sa se obține adunînd ariile acestor părți.

Așadar, admitem principiile următoare:

1. *Poligoane egale au aceeași arie.*

2. *Dacă un poligon este format din două sau mai multe părți alăturate, aria sa este suma ariilor părților.*

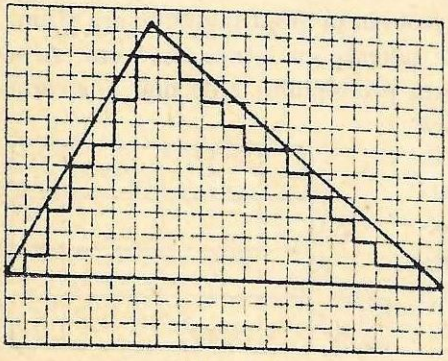


Fig. V.5

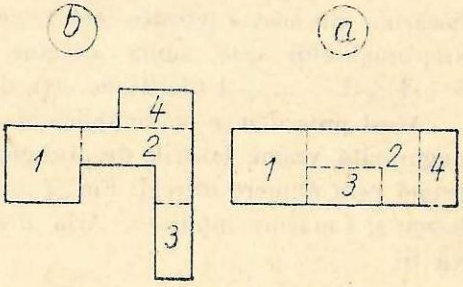



Fig. V.6

Pe baza acestor principii vom deduce diferitele formule. Pornind de la aria dreptunghiului, vom deduce formula pentru aria triunghiului. Celelalte poligoane, le vom descompune într-un mod anumit în triunghiuri și aria fiecărui poligon va fi suma ariilor acestor triunghiuri.

Uneori un poligon se înlocuiește cu un alt poligon care are aceeași arie cu el. De exemplu, poligonul din figura 6-*a* este format din părțile 1, 2, 3 și 4, egale cu cele din figura 6-*b*. Este ca și cum am fi tăiat poligonul în părțile 1, 2, 3 și 4 și le-am fi așezat ca în figura 6-*b*. Se spune că *am transformat* poligonul într-un dreptunghi care are aceeași arie cu el.

Două figuri care au aceeași arie se numesc *echivalente*. Două figuri egale sînt și echivalente, dar două figuri echivalente pot fi egale sau nu. De exemplu, poligonul și dreptunghiul din figura 6 sînt echivalente, dar nu egale.

3. **Observare.** În vorbirea curentă se spune deseori *suprafață* în loc de *arie*. Se spune, de exemplu, că suprafața Republicii Socialiste România este de 237 500 km²; trebuie spus că aria sa este de 237500 km². Suprafața unui poligon este partea din plan delimitată de el, iar aria sa este un număr.

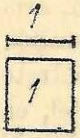


Fig. V.7

4. **Unități de arie.** Fiecărei unități de măsură pentru lungimi îi corespunde o unitate de măsură pentru arii, și anume pătratul care are ca latură o unitate de lungime (fig. 7).

Unitatea de măsură pentru arii este metrul pătrat (m²), cu submultiplii și multiplii lui: mm², cm², dm², m², dam², hm², km².

1 mm² este un pătrat cu latura de 1 mm, 1 cm² este un pătrat cu latura de 1 cm ș.a.m.d.

## 5.2. ARIILE POLIGOANELOR OBIȘNUITE

1. **Dreptunghiul.** Aria dreptunghiului se află foarte ușor, deoarece dreptunghiul, avînd numai unghiuri drepte, poate fi acoperit cu pătrate.

*I.* Considerăm (fig. 8) un dreptunghi în care o latură este, de exemplu, de 6 cm și cealaltă de 4 cm. Ducînd paralele la baza dreptunghiului, situate la distanța de 1 cm una de alta, se formează 4 fîșii, căci înălțimea dreptunghiului este de 4 cm. Dacă ducem paralele la înălțime situate la 1 cm una de alta, fiecare din aceste fîșii se descompune în 6 pătrate cu latura de 1 cm, căci baza dreptunghiului are 6 cm. Tot dreptunghiul este format din $6 \cdot 4 = 24$ de pătrate cu latura de 1 cm. Aria fiecăruia din aceste pătrate este 1 (cm²). Conform principiului 2 de mai sus, aria dreptunghiului este suma acestor arii, adică $1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ (de 24 de ori), deci 24(cm²).

Acest procedeu se poate aplica la orice dreptunghi, cîtă vreme laturile dreptunghiului se exprimă prin numere întregi. Fie $\mathcal{A}$ aria, $b$ măsura bazei, și $i$ măsura înălțimii. Aria dreptunghiului va fi:

$$\mathcal{A} = b\,i.$$

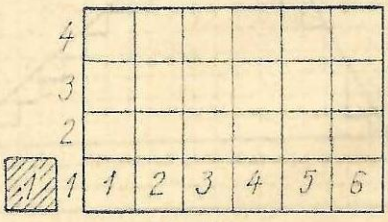


Fig. V.8

2. Să considerăm cazul cînd laturile dreptunghiului se exprimă prin numere fracționare, de exemplu (fig. 9):

$$b = 3\frac{1}{4},\ i = 2\frac{1}{3}$$

(unitatea de măsură pentru lungimi fiind oarecare, de exemplu centimetrul).

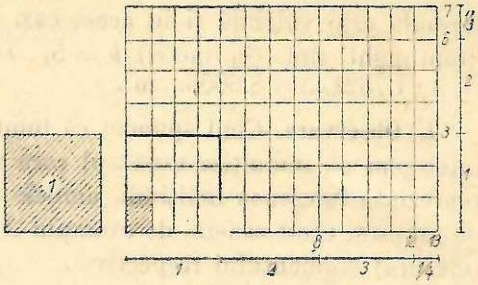


Fig. V.9

Aceasta înseamnă că baza dreptunghiului este formată din 3 segmente de cîte o unitate și 1 segment de un sfert dintr-o unitate, iar înălțimea este formată din două segmente de cîte o unitate și un segment de o treime. Împărțim fiecare segment de o unitate de pe bază în 4 părți egale; pe bază se formează $3 \cdot 4 + 1 = 13$ segmente egale. În mod analog, împărțim fiecare unitate de pe înălțime în 3 părți egale și obținem $2 \cdot 3 + 1 = 7$ segmente egale. Formăm rețeaua care se vede în figură. Unitatea de arie (marcată mai gros) se compune din $3 \cdot 4 = 12$ dreptunghiuri mici (unul din ele este haşurat în figură) egale între ele. Suma ariilor lor este 1, deci aria fiecăruia este $\frac{1}{12}$. Tot dreptunghiul se compune din 7 fîșii de cîte 13 dreptunghiuri mici, deci din $13 \cdot 7 = 91$ dreptunghiuri mici. Rezultă că aria dreptunghiului nostru este

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{12} \text{ (de 91 de ori), adică } \frac{1}{12} \cdot 91 = \frac{91}{12}. \text{ Deci}$$

$$\mathcal{A} = \frac{91}{12}.$$

Să vedem cum s-a născut această fracție.

Baza dreptunghiului este de $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ unități, iar înălțimea este de $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ unități. Numărătorul 91, provine din înmulțirea numerelor 13 și 7, care sînt numărătorii celor două fracții, iar numitorul, 12, s-a născut din înmulțirea numerelor 4 și 3, care sînt numitorii celor două fracții. Fracția $\frac{91}{12}$ s-a obținut deci prin înmulțirea fracțiilor $\frac{13}{4}$ și $\frac{7}{3}$, dintre care prima este măsura bazei și a doua măsura înălțimii. Deci și în cazul cînd măsurile laturilor unui dreptunghi sînt fracții, aria lui se obține înmulțind baza cu înălțimea. Așadar, aria dreptunghiului este dată de formula:

$$\boxed{\mathcal{A} = bi.}$$

Această demonstrație nu este completă, deoarece s-au considerat numai cazurile cînd măsurile laturilor dreptunghiului sînt numere raționale. Nu s-a examinat și cazul în care măcar una dintre laturile dreptunghiului este un număr irațional, dar

formula este valabilă şi în acest caz. De exemplu, dacă baza şi înălţimea unui dreptunghi sînt (în metri) $b = 5$, $i = \sqrt{3}$, aria dreptunghiului este $5\sqrt{3} = 5 \cdot 1{,}7321... = 8{,}6605...$ m².

2. **Observare.** Cînd spunem că înmulţim baza dreptunghiului cu înălţimea lui, înţelegem că înmulţim numărul care reprezintă lungimea bazei cu numărul care reprezintă lungimea înălţimii, ambele segmente fiind măsurate cu aceeaşi unitate de măsură. Cînd scriem, de exemplu $AB = b$, atît $AB$ cît şi $b$ reprezintă lungimea (măsura) segmentului respectiv.

De asemenea cînd spunem, de exemplu, că baza este $b$, se înţelege că lungimea bazei este $b$.

Aria este exprimată în unitatea de măsură corespunzătoare, adică, dacă laturile dreptunghiului sînt exprimate în metri, aria se obţine în metri pătraţi; dacă laturile dreptunghiului sînt exprimate în decimetri, aria se obţine în decimetri pătraţi ş.a.m.d. Această observare este valabilă pentru toate teoremele privitoare la arii.

3. **Variaţia ariei dreptunghiului.** Se vede uşor că dacă baza sau înălţimea unui dreptunghi creşte, aria sa creşte de asemenea. Aceste mărimi sînt proporţionale?

Pentru a răspunde la această întrebare amintim faptul următor: Dacă într-o înmulţire mărim un factor de un număr de ori, produsul se măreşte de acel număr de ori, $a(bc) = (ab)c$.

Să considerăm acum două dreptunghiuri (fig. 10) care au aceeaşi bază $b$, primul are înălţimea $i$, iar al doilea are înălţimea $i'$. Ariile acestor dreptunghiuri sînt:

$$\mathcal{A} = b\,i, \qquad \mathcal{A}' = b\,i'.$$

Dacă $i'$ este, de exemplu, de 7 ori mai mare decît $i$, înseamnă că în înmulţirea a doua, înmulţitorul este de 7 ori mai mare decît în prima înmulţire. Atunci şi produsul al doilea, $\mathcal{A}'$, va fi de 7 ori mai mare decît primul. Aşadar, dacă înălţimea unui dreptunghi se măreşte de un număr de ori, aria dreptunghiului se măreşte de acelaşi număr de ori. Adică: *aria unui dreptunghi este direct proporţională cu înălţimea sa (cînd baza este constantă).*

Acest lucru se verifică pe figura 11. Cînd baza unui dreptunghi (I) rămîne constantă şi înălţimea sa se măreşte de două ori (dreptunghiul II) sau de trei ori (dreptunghiul III), aria sa devine de asemenea de două ori, respectiv de trei ori mai mare (dreptunghiul II se compune din două dreptunghiuri egale cu I, iar III se compune din trei dreptunghiuri egale cu I).

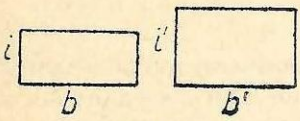


Fig. V.10

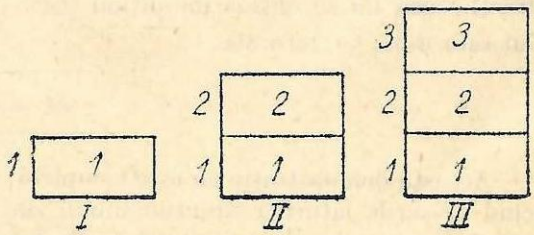


Fig. V.11

În același fel se demonstrează că *aria unui dreptunghi este direct proporțională cu baza sa (cînd înălțimea este constantă)*. În concluzie: *Aria unui dreptunghi este direct proporțională cu baza și cu înălțimea sa.*

Exemplu. Aria unui dreptunghi este de 358 m². Să se calculeze aria unui dreptunghi care este de 4 ori mai lung și de 3 ori mai lat ca primul.

Dacă baza dreptunghiului se înmulțește cu 4, aria sa se înmulțește de asemenea cu 4; dacă înălțimea se înmulțește cu 3, aria se înmulțește de asemenea cu 3. În total, aria se înmulțește cu $4 \cdot 3 = 12$. Aria dreptunghiului al doilea este de $358 \cdot 12 = 4\,296$ m².

4. **Pătratul.** Pătratul este un dreptunghi în care baza este egală cu înălțimea; în loc de bază și înălțime putem spune latura pătratului. Deci, aria pătratului este $\mathcal{A} = l \cdot l$ sau

$$\boxed{\mathcal{A} = l^2}$$

unde $l$ reprezintă latura pătratului.

5. **Observări.** *1.* Pe figura 12 se vede că, dacă latura unui pătrat se dublează, aria pătratului devine de 4 ori mai mare; dacă latura se înmulțește cu 3, aria se înmulțește cu 9. Dacă latura unui pătrat se înmulțește cu un număr, aria nu se înmulțește cu același număr. Aria pătratului *nu* este proporțională cu latura sa.

*2.* Dacă latura unui pătrat se înmulțește cu 10, aria sa se înmulțește cu 100 (fig. 13). Așa se explică faptul că multiplii și submultiplii metrului pătrat cresc din 100 în 100, nu din 10 în 10 — ca multiplii metrului. De exemplu, latura decimetrului pătrat este de 10 ori mai mare decît latura centimetrului pătrat, deci aria sa este de $10^2 = 100$ de ori mai mare decît aria pătratului cu latura de 1 cm, adică decît 1 cm².

*3.* Cînd înmulțim un număr cu el însuși, spunem că-l ridicăm la pătrat. Această expresie se explică prin faptul că, atunci cînd aflăm aria unui pătrat, înmulțim cu el însuși numărul care reprezintă latura pătratului.

6. **Triunghiul.** Pentru a găsi regula după care se află aria triunghiului, trebuie să stabilim o legătură cu dreptunghiul, de aceea considerăm întîi cazul cînd triunghiul este dreptunghic, apoi vom trece la triunghiul oarecare.

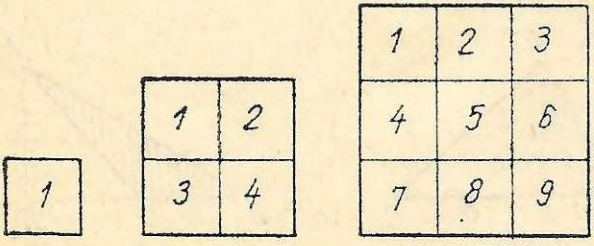



Fig. V.12

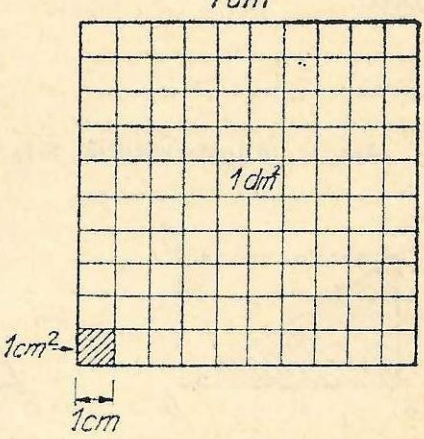



Fig. V.13

*1.* Considerăm un triunghi dreptunghic $ABC$ (fig. 14) cu baza $AB = b$ și înălțimea $AC = i$. Ducem prin $B$ și $C$ câte o paralelă la latura opusă. Se formează dreptunghiul $ABCD$, a cărui arie este $b\,i$. Se poate spune că acest dreptunghi s-a obținut prin alăturarea celor două triunghiuri $ABC$ și $BCD$, deci aria dreptunghiului este suma ariilor celor două triunghiuri. Dar aceste triunghiuri sînt egale, deci aria dreptunghiului este dublul ariei triunghiului $ABC$, sau aria triunghiului $ABC$ este jumătate din aria dreptunghiului. Rezultă că aria $\mathcal{A}$ a triunghiului este:

$$\mathcal{A} = \frac{bi}{2}.$$

*2.* Considerăm acum un triunghi ascuțitunghic (fig. 15). Ducem înălțimea $AD$. Se formează triunghiurile dreptunghice I și II, și se poate considera că triunghiul $ABC$ se compune din aceste triunghiuri, deci aria sa este suma ariilor acestor triunghiuri (principiul 2). Ele au ca baze segmentele $m$ și $n$ și aceeași înălțime $i$. Aria triunghiului $ABC$ este deci

$$\mathcal{A} = \frac{mi}{2} + \frac{ni}{2} = \frac{mi + ni}{2} = \frac{(m + n)i}{2}.$$

Dar $m + n = b$, deci:

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{bi}{2}.}$$

*3.* Fie, în sfîrșit, un triunghi obtuzunghic $ABC$ (fig. 16). Ducem din nou înălțimea $AD$. Aria triunghiului $ABD$ este suma ariilor triunghiurilor $ABC$ și $ACD$ deci aria triunghiului $ABC$ este diferența dintre ariile triunghiurilor $ABD$ și $ACD$. Aria lui este:

$$\mathcal{A} = \frac{BD \cdot i}{2} - \frac{CD \cdot i}{2} = \frac{BD \cdot i - CD \cdot i}{2} = \frac{(BD - CD)i}{2}.$$

Diferența $BD - CD$ este tocmai baza triunghiului nostru $BC$, care este egală cu $b$. Deci:

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{bi}{2}.}$$

Așadar, în toate cazurile, aria triunghiului se află prin aceeași formulă.

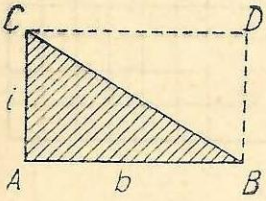


Fig. V.14

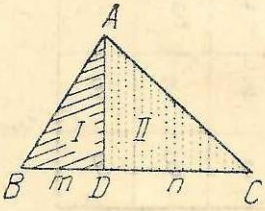


Fig. V.15

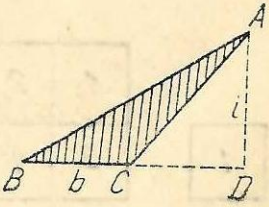


Fig. V.16

7. **Observări.** *1.* Pentru a afla aria triunghiului putem lua ca bază oricare dintre laturile sale, cu condiția să luăm ca înălțime perpendiculara coborîtă din vîrful opus pe ea. În adevăr, fie $ABC$ (fig. 17) un triunghi oarecare și $AD$ și $CE$ două înălțimi. Triunghiurile $BCE$ și $ABD$ sînt asemenea, căci ele sînt dreptunghice și au unghiul $B$ comun. Rezultă că:

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AB}{BC}; \; AB \cdot CE = BC \cdot AD; \; \frac{AB \cdot CE}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2}.$$

Dacă luăm $AB$ ca bază, aria triunghiului este dată de prima dintre aceste fracții, iar dacă luăm $BC$ ca bază, aria aceluiași triunghi este dată de fracția a doua. Fracțiile fiind egale, se obține pentru aria triunghiului același rezultat.

*2.* Formula pentru aria unui triunghi ne arată că aria unui triunghi depinde numai de baza și de înălțimea triunghiului, nu de forma lui. Rezultă că toate triunghiurile care au baze egale și înălțimi egale au și arii egale. În special, dacă baza $AB$ a unui triunghi rămîne fixă (fig. 18) și vîrful opus se mișcă pe o paralelă la bază, ocupînd pozițiile $C$, $D$, $E$ ș.a.m.d., aria triunghiului rămîne constantă.

8. **Aplicații.** 1. *Să se calculeze aria unui triunghi cu baza* $b = 18$ cm *și înălțimea* $i = 7$ cm.

$$\mathcal{A} = \frac{18 \cdot 7}{2} = 63 \text{ cm}^2.$$

Cînd baza sau înălțimea triunghiului se exprimă printr-o fracție, este mai bine să dăm formulei forma $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bi$, pentru a evita fracțiile etajate.

De exemplu, pentru

$$b = \frac{5}{9}, \; i = 7, \text{ se obține: } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot 7 = \frac{35}{18}.$$

2. *Baza unui triunghi este de* 31 m *și aria sa este de* 150 m². *Să se afle înălțimea.*

În formula $\mathcal{A} = \frac{bi}{2}$, înlocuim $\mathcal{A}$ și $b$ prin valorile lor. Obținem:

$$150 = \frac{31i}{2}.$$

De aici rezultă că $31i = 300$, deci $i = \frac{300}{31} = 9{,}67$ cm.

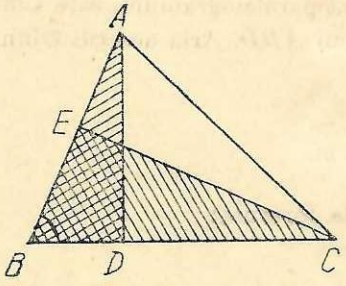


Fig. V.17

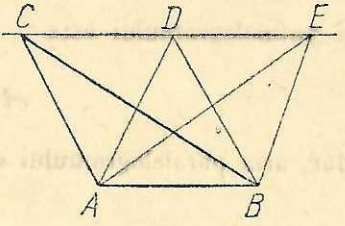


Fig. V.18

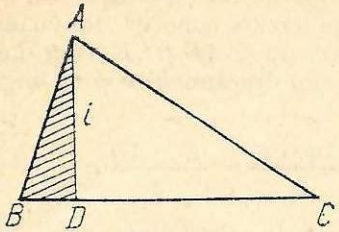



Fig. V.19

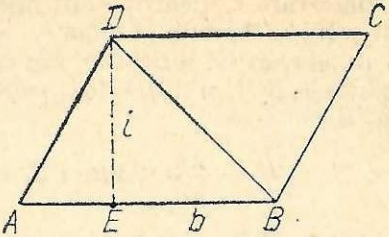



Fig. V.20

3. *Să se afle aria unui triunghi ABC, știind că* $AB = 10$ m, $BC = 18$ m, $\hat{B} = 50°$ (fig. 19).

Pentru a putea aplica formula care dă aria unui triunghi, trebuie să cunoaștem baza și înălțimea sa. Baza este $BC = 18$ m. Pentru a afla înălțimea, ne folosim de triunghiul $ABD$. Avem:

$$\sin B = \frac{i}{AB}\ ;\ \sin 50° = \frac{i}{10}\ ;\ 0{,}766 = \frac{i}{10};\ i = 0{,}766 \cdot 10 = 7{,}66 \text{ m}.$$

Aria triunghiului este

$$\mathcal{A} = \frac{18 \cdot 7{,}66}{2} = 68{,}94 \text{ m}^2.$$

9. **Variația ariei triunghiului.** Considerăm formula

$$A = \frac{bi}{2}.$$

La numărător figurează produsul $bi$. Judecînd ca în cazul dreptunghiului, se vede dacă unul dintre factorii $b$ sau $i$ (baza sau înălțimea) se înmulțește cu un număr oarecare, produsul se înmulțește cu acel număr. Atunci și fracția, care reprezintă aria triunghiului, se înmulțește cu acel număr.

*Aria unui triunghi este direct proporțională cu baza sa și cu înălțimea sa.*

10. **Paralelogramul.** Fie $ABCD$ un paralelogram oarecare. Oricare dintre laturile lui poate fi privită ca bază. Atunci perpendiculara coborîtă pe ea printr-un punct al laturii opuse se numește înălțimea paralelogramului. În figura 20, dacă privim $AB$ ca bază, înălțimea este $DE$. Punem $AB = b$, $DE = i$.

Pentru a afla aria paralelogramului, ducem o diagonală, de exemplu $BD$. Se formează triunghiurile egale $ABD$ și $BCD$. Aria paralelogramului este suma ariilor acestor triunghiuri, deci dublul ariei triunghiului $ABD$. Aria acestui triunghi fiind $\frac{bi}{2}$, aria paralelogramului este

$$\mathcal{A} = \frac{bi}{2} \cdot 2 = bi.$$

Așadar, aria paralelogramului este dată de formula:

$$\boxed{\mathcal{A} = bi}$$

11. **Observare.** Orice latură a unui paralelogram poate fi luată ca bază, cu condiția să luăm înălțimea corespunzătoare.

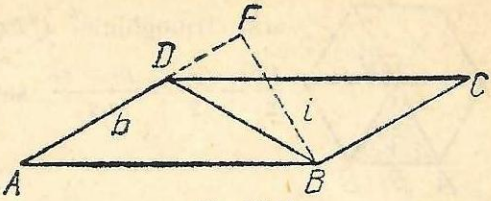


Fig. V.21

În adevăr, aria paralelogramului din figura 21 este dublul ariei triunghiului $ABD$. În acest triunghi, putem lua ca bază latura $AD$, deci ca înălțime $BF$. Atunci aria este egală cu $\frac{AD \cdot BF}{2}$, deci aria paralelogramului este $\frac{AD \cdot BF}{2} \cdot 2 = AD \cdot BF$.

12. **Variația ariei paralelogramului.** Judecînd ca în cazul dreptunghiului, se stabilește că:

*Aria unui paralelogram este direct proporțională cu baza și înălțimea sa.*

13. **Rombul.** Rombul fiind un paralelogram, aria sa se poate afla ca aria oricărui paralelogram ($\mathcal{A} = bi$). Diagonalele rombului fiind perpendiculare, aria sa se poate afla și astfel.

Fie $ABCD$ un romb (fig. 22). Dacă ducem diagonalele, se formează patru triunghiuri egale. Aria rombului este suma ariilor acestor triunghiuri, deci de 4 ori aria unuia dintre ele, de exemplu a triunghiului $AOB$. Fie $d_1$ și $d_2$ diagonalele rombului. Atunci catetele triunghiului $AOB$ sînt $\frac{d_1}{2}$ și $\frac{d_2}{2}$, aria sa este $\frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{8}$, deci aria rombului este $\frac{d_1 d_2}{8} \cdot 4$, adică

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{d_1 d_2}{2}.}$$

14. **Trapezul.** Considerăm un trapez oarecare $MNPQ$ (fig. 23). Cele două laturi paralele se numesc bazele trapezului și se notează cu $B$ (baza mare) și $b$ (baza mică) și distanța $i$ dintre ele se numește înălțimea trapezului.

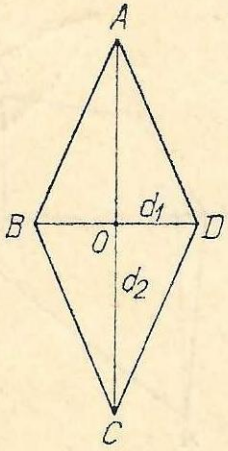


Fig. V.22

Dacă ducem o diagonală, de exemplu $MP$, se formează două triunghiuri, iar aria trapezului este suma ariilor lor. Aria triunghiului $MNP$ este $\frac{B \cdot i}{2}$,

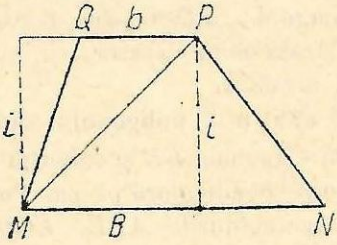


Fig. V.23

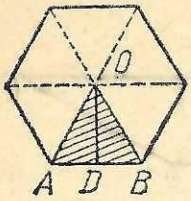


Fig. V.24

aria triunghiului $MPQ$ este $\frac{b \cdot i}{2}$, deci aria trapezului este $\frac{Bi}{2} + \frac{bi}{2} = \frac{Bi + bi}{2}$ sau

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{(B + b)i}{2}.}$$

15. **Aplicații.** *1. Bazele unui trapez sînt (în cm): $B = 15$, $b = 8$ și înălțimea sa este $i = 10$. Se cere aria trapezului.*

Avem:

$$\mathcal{A} = \frac{(15 + 8) \cdot 10}{2} = 115 \text{ cm}^2.$$

*2. Aria unui trapez este de 198 m², baza mare este $B = 24$ m și înălțimea este $i = 12$ m. Se cere baza mică.*

În formula care dă aria trapezului, înlocuim $\mathcal{A}$, $B$ și $i$ prin valorile lor:

$$198 = \frac{(24 + b) \cdot 12}{2}.$$

De aici rezultă că $(24 + b)12 = 396$, $24 + b = 33$, $b = 9$ cm.

16. **Aria unui poligon regulat.** Fie de aflat, de exemplu, aria unui hexagon regulat înscris într-un cerc de rază $R$. Dacă unim centrul lui cu toate vîrfurile, hexagonul se descompune în șase triunghiuri (fig. 24). Aceste triunghiuri sînt egale (LUL). Pentru a afla aria hexagonului, aflăm aria unuia dintre aceste triunghiuri, de exemplu a triunghiului $AOB$ și o înmulțim cu 6.

*Exemplu.* Să aflăm aria unui hexagon regulat cu latura de 8 m.

Avem (fig. 24) $OA = OB = AB = 8$ m. $DB = 8 : 2 = 4$ m.

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul $ODB$:

$$OD^2 = OB^2 - DB^2 = 64 - 16 = 48; \; OD = \sqrt{48} = 6{,}92 \text{ m}.$$

Aria triunghiului $AOB$ este

$$\frac{8 \cdot 6{,}92}{2} = 27{,}68 \text{ m}^2.$$

Aria hexagonului este

$$27{,}68 \cdot 6 = 166{,}08 \text{ m}^2.$$

17. **Aria unui poligon oarecare.** Pentru a afla aria unui poligon oarecare, îl descompunem în triunghiuri, trapeze ș.a.m.d., aflăm aria fiecăruia dintre aceste figuri și facem suma acestor arii, cum se va vedea în exemplul următor.

Fie de aflat aria poligonului din figura 25.

Ducem diagonala $EB$ și coborîm din vîrfurile $A$, $C$ și $D$ cîte o perpendiculară pe ea. Poligonul se descompune în triunghiurile $ABE$, $EGD$ și $BCH$ și trapezul $CDGH$. Determinăm, prin măsurare pe figură,

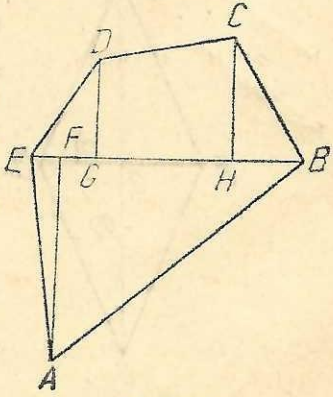


Fig. V.25

elementele necesare pentru a afla aria fiecăruia dintre aceste poligoane. Luăm cazul cînd se obține (în mm):

$EB = 68$, $AF = 50$,

$EG = 16$, $GD = 24$,

$GH = 34$, $CH = 30$.

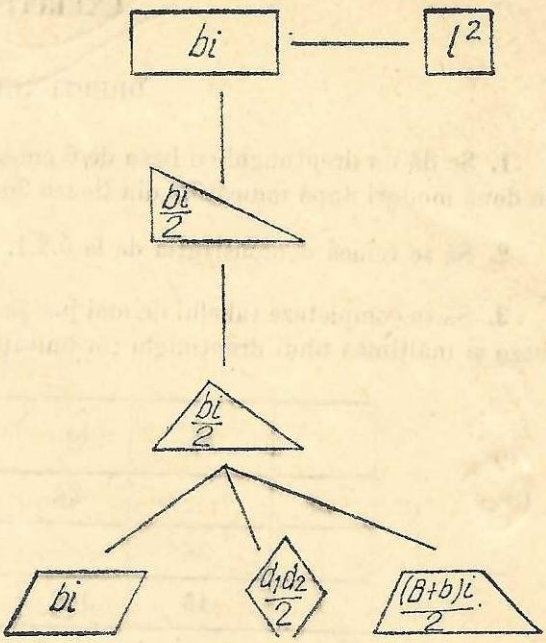
Calculul dă (în mm²):

aria $AEB = \frac{68 \cdot 50}{2} = 1700$,

aria $EGD = \frac{16 \cdot 24}{2} = 192$,

aria $DGHC = \frac{(24 + 30) \cdot 34}{2} = 918$,

$(EB = 68 - 16 - 34 = 18)$




aria $BHC = \frac{18 \cdot 30}{2} = 270$; $1\,700 + 192 + 918 + 270 = 3\,080$. Aria poligonului este 3 080 mm².

18. **Determinarea unei arii pe teren.** Pentru a determina aria unui lot de pămînt (loc de casă, curte, grădină ș.a.m.d.), se face planul acelui lot și se determină aria lui cu ajutorul planului.

Să presupunem că poligonul din figura 26 reprezintă o curte, planul fiind făcut la scara 1 : 1 000. În acest caz, toate lungimile sînt exprimate în metri, deci rezultatul se obține în metri pătrați. Aria curții este de 3 080 m².

REZUMAT

*Schema din figura de mai sus arată cum se deduc formulele pentru ariile poligoanelor obișnuite.*

*În primul rînd, se stabilește formula pentru aria dreptunghiului din care se deduce imediat aria pătratului. Din aria dreptunghiului se deduce aria triunghiului, iar de aici aria paralelogramului, rombului și a trapezului.*

| Figura | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Aria | $bi$ | $l^2$ | $\frac{b \cdot i}{2}$ | $bi$ | $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ | $\frac{(B + b)\, i}{2}$ |

## EXERCIȚII

### DREPTUNGHIUL

**1.** Se dă un dreptunghi cu baza de 6 cm și înălțimea de 4 cm. Să se afle aria lui în două moduri după indicațiile din figura 26.

**2.** Să se refacă demonstrația de la 5.2.1. luînd $b = 3\frac{1}{2}$, $i = 2\frac{1}{5}$.

**3.** Să se completeze tabelul de mai jos, în care $\mathcal{A}$, $b$ și $i$ reprezintă aria, respectiv baza și înălțimea unui dreptunghi (în unități de măsură corespunzătoare).

| | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{A}$ | | 48 | 320 | 70 | 280 |
| $b$ | 38 | | 150 | | 60 |
| $i$ | 15 | 120 | | 200 | |

**4.** Într-o grădină în formă de dreptunghi cu laturile de 150 m și 60 m se fac două alei perpendiculare late de 3 m, care se intersectează. Se cere aria totală a celor două alei.

**5.** O sală dreptunghiulară se pardosește cu pietre în formă de pătrat. Lungimea și lățimea sălii sînt de 3,25 m și 0,85 m și latura unei pietre este de 15 cm. Cîte pietre sînt necesare? Între pietre nu rămîne nici un loc liber. Dacă folosim o parte dintr-o piatră, restul nu se mai poate folosi.

**6.** Un tablou dreptunghiular împreună cu rama are lungimea de 60 cm și lățimea de 50 cm. Rama are o lățime de 8 cm. Se cere aria ramei.

**7.** Baza unui dreptunghi este de 54 m și înălțimea de 38 m. Un alt dreptunghi are aria egală cu $\frac{3}{4}$ din aria acestui dreptunghi și baza sa este cu 10 m mai mare ca baza primului. Se cere înălțimea dreptunghiului al doilea.

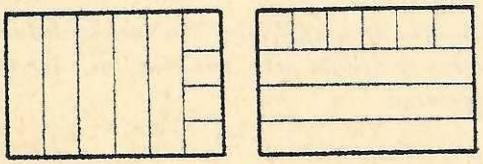


Fig. V.26

**8.** Diagonala unui dreptunghi este de 41 cm și baza sa este de 40 cm. Se cere aria dreptunghiului.

**9.** Baza unui dreptunghi este de 15 m și aria sa este de 120 m². Se cere diagonala dreptunghiului.

---

**R. — 3.** a) 570; b) 0,4; c) 2,13; d) 0,35; e) 4,66. **4.** Atenție la partea comună celor două alei! 1616 m². **5.** Nu se calculează aria sălii. 132 de pietre. **6.** 1 504 cm². **7.** 24,04 m. **8.** 360 cm². **9.** 17 m.

**10.** (o) Aria unui dreptunghi este de 483 257,4856 m². Să se afle aria unui alt dreptunghi care are aceeași bază cu primul și înălțimea de 10 ori mai mare.

**11.** (o) Mărim baza unui dreptunghi de 2, 3, 4... ori. Cum trebuie să schimbăm înălțimea lui, pentru ca aria să rămînă neschimbată?

**12.** (o) Aria unui dreptunghi este de 125 m². Cît de mare devine aria sa dacă-i mărim baza de 4 ori și-i micșorăm înălțimea de 5 ori?

**13.** (o) Cu cît se înmulțește aria unui dreptunghi dacă: a) înmulțim baza sa cu 3 și înălțimea cu 4; b) împărțim baza la 2 și înălțimea la 5; c) înmulțim baza cu 3 și împărțim înălțimea la 4; d) împărțim baza la 5 și înmulțim înălțimea cu 4?

**14.** În mijlocul unei camere în formă de pătrat a cărui latură este de 6 m, se așează un covor care are tot formă de pătrat. Partea din parchet rămasă neacoperită este de 20 m². Să se afle lungimea covorului.

**15.** Avem un pătrat cu latura de 8 m. Cu cît trebuie să-i mărim latura, pentru ca aria sa să crească cu 57 m²? Cu cît trebuie să-i micșorăm latura pentru ca aria sa să scadă cu 28 m²?

**16.** (o) Perimetrul unui pătrat și aria sa, măsurate în unități corespunzătoare, se exprimă prin același număr. Ce lungime are latura pătratului?

**17.** Cîte pătrățele de cîte 1 mm² conține un metru de hîrtie milimetrică? Evaluați răspunsul înainte de a face calculul!

**18.** Raportul dintre laturile a două pătrate este: a) 2; b) 3; c) $k$. Care este raportul dintre ariile lor. Se va desena un pătrat oarecare, apoi un pătrat cu latura de două ori, de trei ori mai mare și se va descompune în pătrate egale cu primul.

**19.** Aria unui pătrat este de 1 369 m². Să se afle diagonala pătratului.

**20.** Diagonala unui pătrat este de 10 m. Să se afle aria pătratului.

**21.** Care este raportul dintre aria unui pătrat și aria pătratului construit pe diagonala sa?

**22.** Baza unui dreptunghi este de 5 ori mai mare decît înălțimea și aria dreptunghiului este de 180 m². Se cer laturile dreptunghiului.

**23*.** Să se afle latura unui pătrat știind că, dacă o mărim cu 6 m, aria pătratului crește cu 156 m². Soluție prin calcul și geometric (fig. 28).

**24*.** Să se afle latura unui pătrat știind că, dacă o micșorăm cu 5 m, aria pătratului scade cu 125 m².

---

R. — **10.** Se mută virgula peste o cifră spre dreapta. **12.** 100 m². **14.** 4 m. **15.** Cu 3 m; cu 2 m. **17.** Un milion. **18.** a) 4. b) 9. c) $k^2$. **19.** 52,17 m. **20.** Se află întîi aria triunghiului hașurat în figura 27. **21.** Pătratul inițial se compune din două triunghiuri egale cu cel hașurat în figura 27 și pătratul construit pe diagonală din patru. **22.** Dreptunghiul se descompune în 5 pătrate cu latura de 6 m; 6 m și 30 m. **23.** Fie $ABCD$ pătratul inițial (fig. 28). Din cele două dreptunghiuri punctate se poate forma un dreptunghi cu o dimensiune de 6 m și aria de 156 — 36 = 120 m²; latura = 10 m. **24.** 15 m.

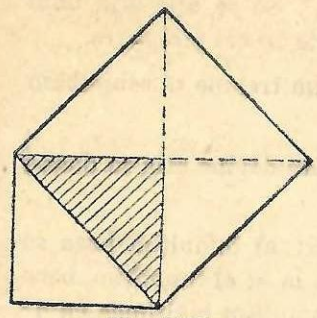


Fig. V.27


Fig. V.28

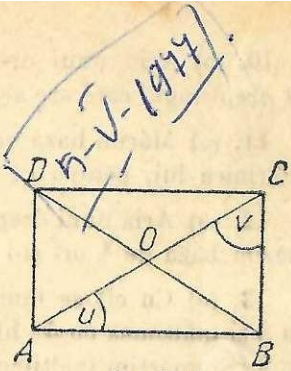



Fig. V.29

*În problemele 25—27, notațiile sînt cele din figura 29.*

25. $AB = 15$ m, $u = 32°$; se cere aria dreptunghiului.

26. $AC = 50$ m, $u = 36°30'$; se cere aria dreptunghiului.

27. Aria dreptunghiului este de 180 m², $AB = 20$ m; se cere unghiul $u$.

## TRIUNGHIUL

28. (p) Să se deducă pe baza indicațiilor din figura 31 formula pentru aria triunghiului.

Figura 30-a arată cum din două triunghiuri egale se poate face un dreptunghi (tăind unul din ele în două părți, 1 și 2); figura 30-b arată cum se poate transforma un triunghi într-un dreptunghi echivalent cu el. Părțile notate cu aceeași cifră sînt egale. Se va folosi hîrtie colorată și părțile se vor lipi pe caiet conform indicațiilor. Aceste procedee nu sînt demonstrații. De ce?

29. (o) Să se compare ariile triunghiurilor din figura 31.

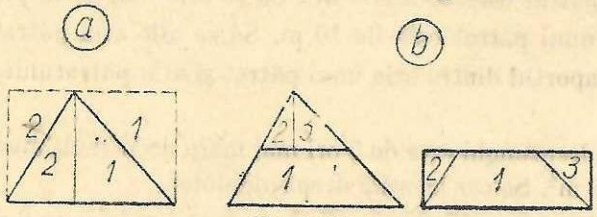



Fig. V.30

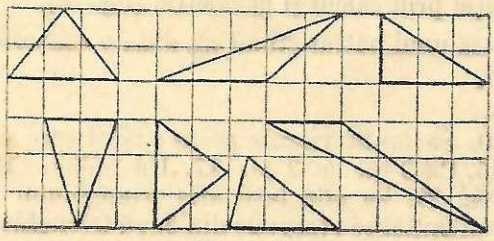


Fig. V.31

R — 25. 140,625 m². 26. 1 195,95 m². 27. 24°. 28. Ele nu pot fi folosite dacă triunghiul este obtuzunghic. 29. Dacă se ia ca unitate pentru lungimi latura unui pătrățel și ca unitate pentru arii un pătrățel, se vede că toate au aria 3.

**30.** O latură a unui triunghi se împarte în mai multe părți egale și punctele de diviziune se unesc cu vîrful opus. Să se compare între ele ariile triunghiurilor care se formează astfel.

**31.** Să se completeze tabelul următor, în care $\mathcal{A}$, $b$ și $i$ reprezintă aria, baza și înălțimea unui triunghi (în unități corespunzătoare).

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{A}$ | | 50 | 130 | 134 | 60 | |
| $b$ | 18 | | 25 | | 70 | $5\frac{1}{3}$ |
| $i$ | 30 | 20 | | 13,4 | | 3,8 |

**32.** Să se afle aria unui triunghi dreptunghic și isoscel cu ipotenuza de 5 cm.

**33.** Într-un triunghi oarecare $ABC$, se dau laturile $AB = 9$ m, $AC = 10$ m și înălțimea $BD = 5$ m. Se cere înălțimea care cade pe $AB$.

**34.** Catetele unui triunghi dreptunghic sînt: $b = 3$ m, $c = 4$ m. Să se afle înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Generalizare, cînd catetele sînt $b$ și $c$, și ipotenuza este $a$.

**35.** Să se afle aria unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 29 m și o catetă de 21 m.

**36.** Aria unui triunghi dreptunghic este de 360 m² și o catetă a triunghiului este de 9 m. Se cere ipotenuza.

**37.** Să se completeze tabelul alăturat, în care $b$ reprezintă baza, $i$ — înălțimea corespunzătoare bazei, $a$ — una dintre laturile egale și $\mathcal{A}$ — aria unui triunghi isoscel. Unitățile de măsură sînt corespunzătoare.

| | a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 16 | 10 | 40 | | |
| $i$ | | 12 | | 12 | 13 |
| $a$ | 17 | | | 37 | |
| $\mathcal{A}$ | | | 420 | | 1 092 |

---

**R. — 30.** Ele sînt egale. **31.** a) 270. b) 5. c) 10,4. d) 20. e) $1\frac{5}{7}$. f) 10,45. **32.** Se ia ca bază ipotenuza; 6,25 cm². **33.** Se află întîi aria triunghiului; $5\frac{5}{9}$ m. **34.** Se află întîi aria triunghiului; 2,4 m; $\frac{bc}{a}$. **35.** 210 m². **36.** 80,50 m. **37.** a) $i = 15$; $\mathcal{A} = 120$. b) $a = 13$, $\mathcal{A} = 60$; c) $i = 21$, $a = 29$. d) $b = 70$, $\mathcal{A} = 420$. e) $b = 168$, $a = 85$.



S S
VIORICA.

**38*.** Avem o coală de hîrtie dreptunghiulară $ABCD$. Să se determine un punct $M$ al laturii $BC$ astfel încît aria triunghiului $ABM$ să fie o treime din aria dreptunghiului întreg. A cîta parte din aria triunghiului $ABC$ este aria triunghiului $ABM$?

**39*.** Într-un triunghi dreptunghic cu catetele $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm se duce înălțimea $AD$. Se cer ariile triunghiurilor $ABD$, $ACD$ și raportul lor.

**40.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare. Latura $AB$ se împarte în 13 părți egale și se notează cu $D$ al 4-lea punct de diviziune socotit de la $A$ spre $B$. Care este raportul dintre ariile triunghiurilor $ADC$ și $BDC$? Aceeași întrebare în cazul general, dacă $\frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}$.

**41.** (o) Aria unui triunghi este de 102 801,9986 m². Să se determine aria unui alt triunghi, a cărui bază este de 5 ori mai mare și a cărui înălțime este de două ori mai mare decît baza, respectiv înălțimea primului triunghi.

**42.** (o) Cum variază aria unui triunghi: a) dacă mărim baza de 3 ori și micșorăm înălțimea de 3 ori; b) dacă mărim baza de 3 ori și înălțimea de 2 ori; c) dacă înmulțim baza cu 6 și împărțim înălțimea la 2; d) dacă înmulțim baza cu $\frac{2}{3}$ și înmulțim înălțimea cu $\frac{3}{2}$?

**43.** Aria unui triunghi $ABC$ este de 156 m². Împărțim înălțimea $AD$ a triunghiului în trei părți egale și notăm cu $M$ și $N$ punctele de diviziune. Să se afle ariile triunghiurilor $BMC$ și $BNC$, precum și ariile patrulaterelor $BNCM$ și $BACN$.

**44*.** Aria unui triunghi $ABC$ este de 180 cm². Se ia un punct oarecare $D$ al bazei și se notează cu $M$ mijlocul segmentului $AD$. Se cere aria triunghiului $BMC$.

**45*.** Aria unui triunghi $ABC$ este de 120 m². Împărțim baza $BC$ în patru părți egale și notăm cu $M$ punctul de diviziune cel mai apropiat de vîrful $C$, apoi împărțim latura $AC$ în trei părți egale și notăm cu $N$ punctul de diviziune cel mai apropiat de $C$. Se cere aria triunghiului $CMN$.

**46*.** a) Într-un triunghi $ABC$ se notează cu $M$ și $N$ mijloacele laturilor $AB$ și $AC$. A cîta parte din aria triunghiului $ABC$ este aria triunghiului $AMN$? b) Aceeași întrebare dacă $AM$ este o treime din $AB$ și $AN$ este o treime din $AC$.

---

**R. — 38.** $BM = \frac{2}{3} BC$. **39.** Cu ajutorul relațiilor metrice se află $DB$, $DC$ și $AD$; $\frac{54}{25}$ cm², $\frac{96}{25}$ cm², $\frac{9}{16}$. **40.** $\frac{4}{9}$; $\frac{m}{n}$. **41.** De $5 \cdot 2 = 10$ ori mai mare ca aria primului triunghi. **42.** a) Rămîne neschimbată. b) se mărește de 6 ori. c) se mărește de 3 ori. d) rămîne neschimbată. **43.** 52 m²; 104 m²; aria $BNCM$ = aria $BNC$ — aria $BMC$ = 52 m²; aria $BACN$ = 52 m². **44.** Fie $AE$ și $MF$ înălțimile triunghiurilor $ABC$ și $MBC$. Raportul lor se află din triunghiurile asemenea $AED$ și $MFD$; 90 cm². **45.** Se compară bazele și înălțimile triunghiurilor $ABC$ și $MNC$; 10 m². **46.** Se compară bazele și înălțimile celor două triunghiuri. a) Un sfert. b) A 9-a parte.

**47.** Se dă un dreptunghi. Să se construiască un triunghi dreptunghic, avînd aceeași bază și aceeași arie cu el.

**48.** Se dă un triunghi oarecare. Să se construiască un triunghi dreptunghic, avînd una din catete egală cu baza triunghiului dat și aceeași arie cu el.

**49*.** Într-un triunghi $ABC$ se duce mediana $AD$. a) Să se demonstreze că triunghiurile $ABD$ și $ACD$ sînt echivalente. b) $M$ fiind un punct oarecare al medianei, să se compare ariile triunghiurilor $BMD$ și $CMD$? c) Să se demonstreze că, dacă $M$ este mijlocul medianei, triunghiul se descompune în patru triunghiuri echivalente.

**50.** Aria unui triunghi dreptunghic este de 24 m² și una din catete $AB = 8$ m. Se cer unghiurile triunghiului.

În problemele 51—56 notațiile sînt cele din figura 32 unde $AB = AC$, $AD \perp BC$.

**51.** Se dă $AB = 8$ cm, $\hat{C} = 74°$; se cere aria triunghiului.

**52.** Se dă $AC = 12$ cm, $\widehat{BAC} = 112°$; se cere aria triunghiului.

**53.** Se dă $AD = 20$ cm, $\hat{B} = 48°$; se cere aria triunghiului.

**54.** Se dă $AD = 25$ cm, $\widehat{BAD} = 86°$; se cere aria triunghiului.

**55.** Aria unui triunghi este de 340 m², $BC = 17$ m; se cer unghiurile triunghiului.

**56.** Aria triunghiului este de 230 m², $AD = 20$ m; se cer unghiurile triunghiului.

**57.** Într-un triunghi $ABC$, se dă: $\hat{A} = 74°$, $\hat{C} = 53°$, înălțimea $BD = 15$ m. Se cere aria triunghiului.

**58.** Într-un triunghi $ABC$ se dă: $AB = 15$ m, $BC = 10$ m și aria $\mathcal{A} = 45$ m². Se cere unghiul $B$.

**59*.** Catetele unui triunghi dreptunghic sînt $AB = 8$ m, $AC = 6$ m. Se notează cu $D$ punctul în care bisectoarea unghiului $B$ taie cateta $AC$. Să se afle ariile triunghiurilor $ABD$ și $BCD$.

**60.** a) Într-un triunghi dreptunghic $ABC$ se dau: ipotenuza $BC = 8$ m și $\hat{B} = 54°$. Se cere aria triunghiului b) Aceeași chestiune în cazul general, cînd ipotenuza este $a$ și unghiul este $\hat{B}$.

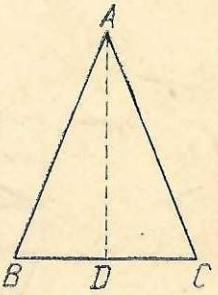


Fig. V.32

---

**R — 47.** Se prelungește înălțimea dreptunghiului cu un segment egal cu ea și se unește cu celălalt capăt al bazei. **48.** Se duce prin vîrf o paralelă la bază și într-un capăt al bazei se ridică o perpendiculară pe ea. **49.** a) Triunghiurile au baze egale și aceeași înălțime; b) ele sînt echivalente; c) $BM$ și $CM$ sînt, la rîndul lor, mediane în triunghiurile $BAD$ și $CAD$. **50.** 37°, 53°. **51.** 16,96 cm². **52.** 66,744 cm². **53.** 360 cm². **54.** 8 938 cm². **55.** 78°. **56.** 60°. **57.** Se află întîi $DA$ și $DC$; 117, 11 m². **58.** 37°. **59.** Se află întîi unghiul $B$; 10,672 m²; 13,328 m². **60.** a) 15,2221 m². b) $\frac{a^2 \sin B \cos B}{2}$.

**61.** Într-un triunghi $ABC$ se dă: $AB = 5$ m, $BC = 8$ m, $\hat{B} = 56°$. Se cere aria triunghiului.

**62.** Într-un triunghi $ABC$ se dă: $AB = 15$ m, $\hat{B} = 73°$, aria $\mathcal{A} = 120$ m². Se cere latura $BC$.

**63*.** Să se transforme un triunghi $ABC$ într-un triunghi echivalent cu el, care să aibă aceeași bază $BC$ și să fie: a) isoscel; b) dreptunghic.

**64.** Să se demonstreze că aria unui triunghi ascuțitunghic $ABC$ cu laturile $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ este dată de formulele:

$$\mathcal{A} = \frac{ab \sin C}{2}, \quad \mathcal{A} = \frac{bc \sin A}{2}, \quad \mathcal{A} = \frac{ca \sin B}{2}.$$

Să se deducă de aici o formulă pentru aria unui triunghi isoscel cînd se cunoaște una dintre laturile egale, $l$ și unghiul de la vîrf, $A$.

**65*.** Într-un dreptunghi se dă diagonala $d$ și unghiul $u$ pe care-l formează diagonala cu o latură. Se cere aria dreptunghiului.

## PARALELOGRAMUL

**66.** Să se deducă formula care dă aria unui paralelogram, pe baza indicațiilor din figura 33. Paralelogramul $ABCD$ este format din trapezul I și triunghiul II; dreptunghiul din dreapta, $EFCD$ este echivalent cu paralelogramul și are aceeași bază și înălțime cu el. În ce caz nu este valabilă această demonstrație?

**67.** (o) Să se compare ariile paralelogramelor din figura 34.

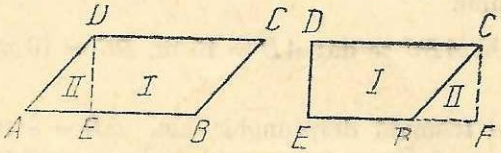



Fig. V.33

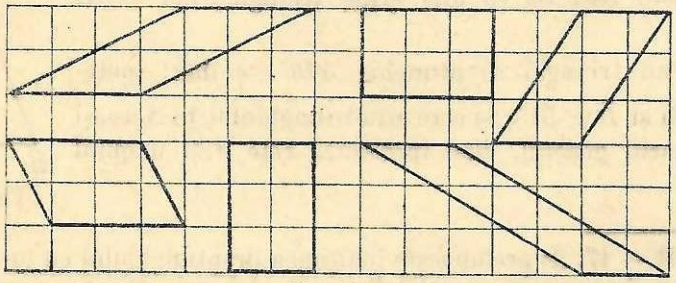


Fig. V.34

---

**R — 61.** 16,58 m². **62.** Se află întîi înălțimea $AD$. 16,73 m. **63.** Se duce prin $A$ paralele la $BC$ și: a) mediatoarea bazei $BC$; b) perpendiculara în $B$ sau $C$ pe $BC$. **64.** $\mathcal{A} = \frac{l^2 \sin A}{2}$. **65.** $\mathcal{A}\, d^2 \sin u \cos u$. **66.** Demonstrația nu este valabilă cînd înălțimea cade pe prelungirea bazei.

**68.** Să se compare ariile paralelogramelor $ABCD$ și $ABEF$ din figura 35.

**69.** Să se completeze tabelul de mai jos, în care $b$, $i$ și $\mathcal{A}$ reprezintă respectiv baza, înălțimea și aria unui paralelogram.

**70.** Laturile unui paralelogram $ABCD$ sînt: $AB = 15$ m, $AD = 12$ m și înălțimea corespunzătoare laturii $AB$ este de 10 m. Se cere înălțimea corespunzătoare laturii $AD$.

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 18 | | 30 | 3,5 | | 0,75 |
| $i$ | 7 | 25 | | 0,8 | 0,15 | |
| $\mathcal{A}$ | | 300 | 180 | | 24 | 30 |

**71.** Într-un paralelogram (fig. 36) se dă: $AB = 10$ m, $AD = 6$ m. Aria paralelogramului este de 45 m². Cu cît crește aria paralelogramului: a) dacă mărim latura $AB$ cu 2 m; b) dacă mărim latura $AD$ cu 2 m?

**72.** Diagonalele unui paralelogram $ABCD$ se taie în $O$. Să se demonstreze că aria fiecăruia dintre triunghiurile $AOB$, $BOC$, $COD$, $DOA$ este $\frac{1}{4}$ din aria paralelogramului. A cîta parte din aria $ABCD$ este aria triunghiului $ABD$?

**73.** Într-un paralelogram $ABCD$ se dă: $AB = 45$ m, $AD = 62$ m, $\hat{A} = 70°$; se cere aria paralelogramului.

**74.** Într-un paralelogram $ABCD$ se dă $AB = 20$ m, $AD = 10$ m. Aria paralelogramului este de 60 m². Să se afle unghiurile paralelogramului.

**75.** Diagonalele unui paralelogram $ABCD$ sînt $AC = 18$ cm, $BD = 12$ cm, și unghiul format de ele este $\widehat{AOB} = 100°$. Se cere aria paralelogramului.

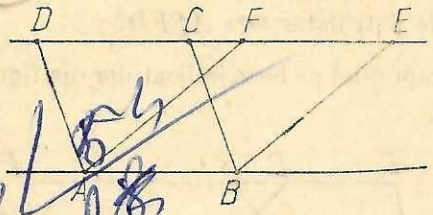


Fig. V.35

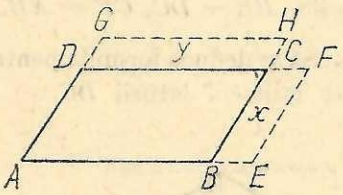


Fig. V.36

**R. — 68.** Ele sînt egale. **69.** a) 126. b) 12. c) 6. d) 2,8. e) 160. f) 40. **70.** 12,5 m. **71.** a) Paralelogramul dat și cel notat cu $x$ au aceeași înălțime și raportul bazelor lor este $\frac{1}{5}$; aria $x = 9$ m². b) Paralelogramul dat și cel notat cu $y$ au aceeași înălțime, și raportul dintre bazele lor este $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; aria $y = 45 : 3 = 15$ m². **72.** Se compară aria $ABD$ cu aria $AOD$. **73.** 2622,60 m². **74.** 17°30′, 162°30′. **75.** Se află întîi aria triunghiului $AOB$; 106,38 cm².

76*. Să se demonstreze că aria paralelogramului este dată de formula $\mathcal{A} = \frac{d_1 d_2 \sin O}{2}$, în care $d_1$ și $d_2$ sînt diagonalele paralelogramului și $O$ este unghiul (ascuțit) format de ele. Ce devine această formulă în cazul dreptunghiului?

## ROMBUL

77. Să se deducă formula pentru aria rombului pe baza indicațiilor din figura 37. S-au dus paralele la diagonale. Din cîte triunghiuri egale cu cel hașurat se compune rombul și din cîte dreptunghiul?

78. Să se afle aria unui romb, știind că diagonalele sale sînt: $d_1 = 8$ cm, $d_2 = 12$ cm.

79. Latura unui romb este de 20 m și una din diagonale este de 32 m. Se cere aria rombului.

80. Aria unui romb este de 120 m² și una din diagonale este de 10 m. Se cere latura rombului.

81. Una din diagonalele unui romb este de 16 m și unul din unghiurile sale este de 140°. Se cere aria rombului. Se vor considera două cazuri: cînd diagonala dată este cea mare și cînd este cea mică.

82. Latura unui romb este de 8 m și unul din unghiurile sale este de 68°. Se cere aria rombului.

## TRAPEZUL

83. Să se deducă formula pentru aria trapezului pe baza indicațiilor din figura 38. $BE = DC$, $CF = AB$. Ce fel de patrulater este $AEFD$?

84. Să se deducă formula pentru aria trapezului pe baza indicațiilor din figura 39. $M$ este mijlocul laturii $BC$.

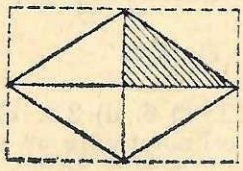


Fig. V.37

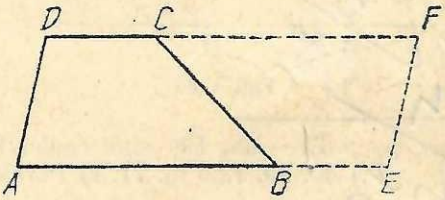



Fig. V.38

**R.** — **76.** V. problema 64. $\mathcal{A} = \frac{d^2 \sin O}{2}$. **78.** 48 cm². **79.** 384 m². **80.** 13 m. **81.** 46,592 m² sau 351,616 m². **82.** 59,316608 m². **84.** $\triangle BEM = \triangle CDM$ (ULU), trapezul este echivalent cu triunghiul $ADE$.

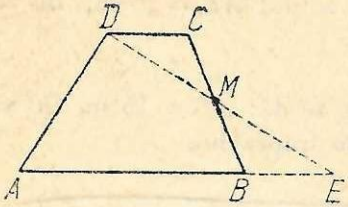



Fig. V.39

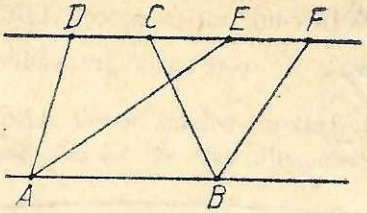



Fig. V.40

85. În figura 40, $DC \parallel AB$, $DC = EF$. Să se compare ariile trapezelor $ABCD$ și $ABFE$.

86. Să se completeze tabelul de mai jos, în care $B$, $b$, $i$ și $\mathcal{A}$ reprezintă respectiv baza mare, baza mică, înălțimea și aria unui trapez. Unitățile sînt corespunzătoare.

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) | g) | h) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | 12 | 20 | 25 | | 50 | 40 | 45 | 34 |
| $b$ | 10 | 14 | | 11 | 25 | 30 | | 20 |
| $i$ | 5 | | 8 | 18 | 6 | | 11 | 700 |
| $\mathcal{A}$ | | 187 | 124 | 315 | | 910 | 330 | |

87. Notațiile fiind cele din figura 41, să se compare între ele ariile triunghiurilor următoare: a) $ABC$ și $ABD$; b) $DAC$ și $DBC$; c) $AOD$ și $BOC$.

88. Într-un trapez isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se dă $AB = 13$ cm, $CD = 7$ cm, $AD = BC = 5$ cm. Se cere aria trapezului.

89. Într-un trapez dreptunghic, baza mare este de 60 m, latura oblică este de 36 m și unghiul ascuțit de 40°. Se cere aria trapezului.

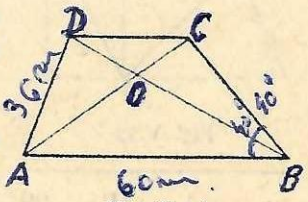



Fig. V.41

R. — 86. a) 55. b) 11. c) 6. d) 24. e) 225. f) 26. g) 15. h) 36. 87. c) Triunghiurile se obțin scăzînd din triunghiurile echivalente $ABC$ și $ABD$ triunghiul $AOB$. 88. Se duce $DE \perp AB$ și se află înălțimea $DE$ din triunghiul $ADE$; 40 cm². 89. 1 069 m².

**90.** Într-un trapez isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$), se dă: $AB = 10$ m, $BC = 7$ m, $\hat{B} = 73°$. Se cere aria trapezului.

**91.** Într-un trapez isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$), se dă: $AB = 15$ m, $DC = 9$ m. Aria trapezului este de 84 m². Se cer unghiurile trapezului.

## POLIGOANE

**92.** Să se afle aria unui hexagon regulat înscris într-un cerc cu raza $R = 8$ cm.

**93.** a) Să se afle aria triunghiului echilateral înscris într-un cerc cu raza de 10 cm. Se vor folosi două metode: a) se vor afla latura și înălțimea triunghiului; b) se va afla întîi aria unui triunghi format dintr-o latură a triunghiului dat și razele duse la capetele ei.

**94.** Să se demonstreze geometric, fără calcul, că aria unui hexagon regulat este dublul ariei triunghiului echilateral înscris în același cerc.

**95.** Să se afle aria pătratului înscris într-un cerc de rază $R$.

**96.** Să se afle aria unui poligon regulat: a) cu 5 laturi, b) cu 18 laturi, înscris într-un cerc cu raza 1.

**97*.** Să se demonstreze că aria unui poligon regulat cu $n$ laturi înscris într-un cerc de rază $R$ este $\frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360°}{n}$.

**98.** a) În figura 42, $ABCD$ este un patrulater ale cărui diagonale sînt perpendiculare. Să se demonstreze că aria sa este $\mathcal{A} = \frac{d_1 d_2}{2}$ unde $d_1$ și $d_2$ sînt diagonalele. S-au dus paralele la diagonale. b) Să se demonstreze aceeași formulă considerînd patrulaterul ca fiind format din triunghiurile $AOB$, $BOC$ etc., $O$ fiind intersecția diagonalelor.

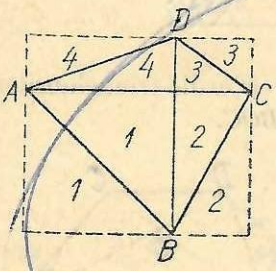


Fig. V.42

**99.** Într-un patrulater $ABCD$ se dau laturile (în metri): $AB = 10$, $BC = CD = 13$, $AD = 12$ și diagonala $DB = 10$. Se cere aria sa.

**R.** — **90.** 55,36 m². **91.** 67°, 113°. **92.** 166,08 cm². **93.** 43,25 cm². **94.** Fie $ABCDEF$ hexagonul și $ACE$ triunghiul. Din cîte triunghiuri ca $AOC$ se compune triunghiul? Dar hexagonul? **95.** $2R^2$. **96.** a) 2,3775 m². b) 3,078 m². **97.** Se află întîi aria unui triunghi format de o latură a poligonului și razele duse la capetele ei; v. problema 64. **99.** 108 m².

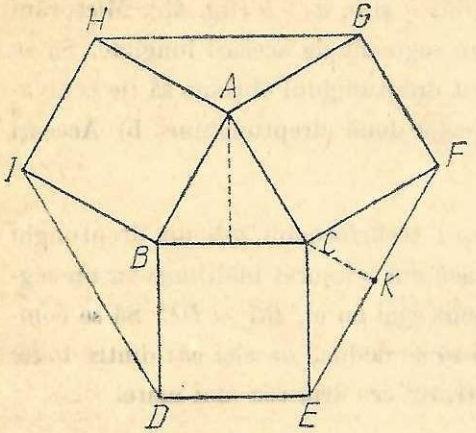



Fig. V.43

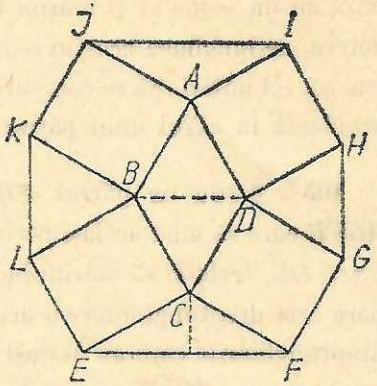



Fig. V.44

**100.** În figura 43 triunghiul $ABC$ este echilateral, latura sa este de 1 m. Pe laturile lui s-au construit pătrate și s-au unit vîrfurile. Se cere aria hexagonului $DEFGHI$.

**101.** În figura 44, $ABCD$ este un romb cu latura de 1 m. $\hat{A} = 60°$. Pe laturile lui s-au construit pătrate și s-au unit vîrfurile. Se cere aria octogonului $EFGHIJKL$.

**102.** Pe fiecare latură a unui pătrat cu latura de 1 m se construiește cîte un triunghi echilateral și se unesc vîrfurile lor. Să se afle aria poligonului care se formează astfel.

DIVERSE

**103*.** Avem un dreptunghi cu baza $a$ și înălțimea $b$ unde $a > b$. Mărim baza sa cu un segment de lungime $x$ și înălțimea cu un segment de lungime $y$, unde $x > y$. Apoi mărim baza cu segmentul de lungime $y$ și înălțimea cu segmentul de lungime $x$. Care dintre aceste dreptunghiuri are aria mai mare?

---

**R. — 100.** Triunghiul $ECF$ se compune din două triunghiuri egale cu triunghiurile care se formează cînd se duce înălțimea triunghiului $ABC$. Aria $= (3 + \sqrt{3})$ m². **101.** Triunghiul $ECF$ se compune din două triunghiuri egale cu triunghiurile care se formează cînd se duc diagonalele rombului. Aria $= \frac{8 + 3\sqrt{3}}{2}$. **102.** v. ex. 100 și 101; $1 + 2\sqrt{3}$ m². **103.** Cele două dreptunghiuri care se formează au o parte comună și fiecare din ele are un dreptunghi în plus. Aceste dreptunghiuri au aceeași lățime $(x - y)$; dreptunghiul al doilea are aria mai mare.

**104*.** Baza și înălțimea unui dreptunghi sînt $a$ și $b$, $a > b$ (fig. 45). Micșorăm baza cu un segment și mărim înălțimea cu un segment de aceeași lungime. Să se determine lungimea acestui segment astfel încît dreptunghiul obținut să fie echivalent cu cel inițial. Să se compare dimensiunile celor două dreptunghiuri. b) Aceeași problemă în cazul unui pătrat.

**105*.** Avem un pătrat $ABCD$ (fig. 46) și-l transformăm într-un dreptunghi $AGFE$ care să aibă același perimetru cu el. Dacă am micșorat înălțimea cu un segment $DE$, trebuie să mărim baza cu un segment egal cu el, $BG = DE$. Să se compare aria dreptunghiului cu aria pătratului și să se deducă de aici că: dintre toate dreptunghiurile care au același perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

**106*.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare și $AD$ bisectoarea unghiului $A$. Se cere: a) Să se afle raportul dintre ariile triunghiurilor $ADB$ și $ADC$ considerînd ca bază laturile $AB$ și $AC$. b) Să se afle același raport luînd ca baze $DB$ și $DC$. c) Să se deducă de aici o relație între rapoartele $\frac{AB}{AC}$ și $\frac{DB}{DC}$. Să se completeze: O bisectoare a unui triunghi împarte latura opusă unghiului în părți proporționale cu...

**107.** Un elev își învelește caietele în hîrtie. Un caiet deschis este un dreptunghi cu dimensiunile de 29 cm și 21 cm. Foaia de hîrtie cu care se învelește caietul

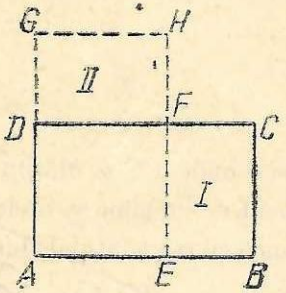


Fig. V.45

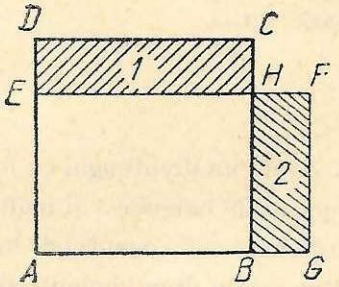


Fig. V.46

---

**R. — 104.** a) Fie $ABCD$ (fig. 45) dreptunghiul dat și $AEHG$ cel transformat. Partea $AEFD$ este comună, deci dreptunghiurile I și II sînt echivalente. Deoarece $EB = DG$, $DF = BC = b$. Dar $DF = AE$, deci $AE = b$ și $EB = a - b$. Dreptunghiurile au aceleași dimensiuni. b) Ar trebui ca $DF$ să fie egal cu $BC$, ceea ce este imposibil, căci $BC$ este latura pătratului și $DF < DC$. **105.** Care este partea comună pătratului și dreptunghiului? Se compară aria dreptunghiului 1 cu aria dreptunghiului 2, precum și laturile acestor dreptunghiuri. **106.** Punctul $D$ este egal depărtat de laturile $AB$ și $AC$. **107.** 12 caiete.

trebuie să aibă o margine de 5 cm jur împrejur. Hîrtia de învelit se cumpără sub formă de coli mari, lungi de 1,24 m şi late de 1,17 m. Cum trebuie tăiată coala pentru a putea înveli cît mai multe caiete? Cîte caiete se pot înveli cu o coală de hîrtie?

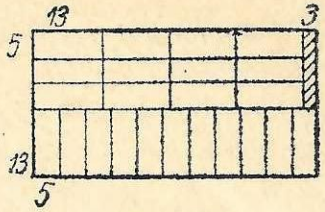


Fig. V.47

**108.** Avem o foaie de carton în formă de dreptunghi cu lungimea de 55 cm şi lăţimea de 28 cm. Trebuie s-o tăiem în dreptunghiuri lungi de 13 cm şi late de 5 cm. Să se arate că se pot scoate din această foaie 23 de dreptunghiuri mici. Să se arate că nu există o împărţire mai bună (fig. 47).

**109.** Problemă analoagă, dacă dimensiunile dreptunghiului mare sînt de 46 cm şi 31 cm şi ale dreptunghiului mic, 15 cm şi 8 cm. Care este numărul cel mai mare de dreptunghiuri mici ce se pot obţine?

---

R. — **108.** V. figura 47. Să se compare aria porţiunii care se pierde (haşurată) cu aria unui dreptunghi mic. **109.** 11.

Capitolul VI

# LUNGIMEA ŞI ARIA CERCULUI

## 6.1. LUNGIMEA CERCULUI ŞI A ARCULUI DE CERC

**1. Lungimea cercului.** Problema de a afla lungimea cercului este una dintre cele mai vechi probleme de geometrie. Problema constă în a afla lungimea unui fir cu care putem înconjura un cerc dat.

Fie $R$ raza unui cerc şi $L$ lungimea sa. Vom admite fără demonstraţie că

$$\boxed{L = 2\pi R},$$

unde $\pi$ (pi) $= 3{,}14\ldots$ Acest număr nu poate fi reprezentat printr-un număr zecimal (finit). În practică, se ia pentru $\pi$ o valoare aproximativă, 3,14 sau 3,141 sau 3,1415 ş.a.m.d.

Iată un mijloc de a ţine minte primele zecimale ale numărului $\pi$. Luăm fraza: Dar e bine a vedea lucrările de foarte multe ori.

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3

Fiecare cuvînt indică prin numărul literelor sale cîte o cifră a numărului $\pi$: dar = 3, e = 1 bine = 4 ş.a.m.d. Deci, $\pi = 3{,}141592653\ldots$

Primul care a tratat în mod ştiinţific problema de a afla lungimea cercului a fost *Arhimede*, un matematician din antichitate[1]. El a găsit pentru numărul $\pi$ o valoare destul de apropiată de cea exactă.

**2. Aplicaţii.** *1. Să se afle lungimea unui cerc cu raza $R = 25$ cm.*

Formula dă: $L = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 = 157$ cm.

*2. Să se afle raza unui cerc, ştiind că lungimea lui este $L = 2{,}40$ m.*

Formula pentru lungimea cercului ne dă:

$$R = \frac{2{,}40}{2\pi} = \frac{1{,}20}{\pi} = 0{,}382.$$

---

[1] *Arhimede* a fost unul dintre cei mai mari matematicieni din antichitate. El a trăit la Siracuza, în Sicilia (287—212 î.e.n.). Cînd oraşul său natal a fost asediat de romani, Arhimede, deşi bătrîn, a luat parte la apărarea lui şi a pus în aplicare unele mijloace tehnice inventate de el.

Importanţa deosebită a lui Arhimede constă în faptul că el s-a ocupat de unele probleme de matematică puse de practică şi de tehnică şi a pus bazele unor părţi din matematică (calculul integral), care nu s-au putut dezvolta decît cu mult mai tîrziu, începînd cu secolul al XVII-lea. De asemenea, el a fost unul dintre puţinii matematicieni antici care s-au ocupat cu calculele numerice, spre deosebire de ceilalţi, care s-au ocupat mai mult cu chestiuni teoretice.

3. **Lungimea arcului de cerc.** Considerăm un arc de cerc $AB$ (fig. 1). Se dă raza cercului și măsura arcului în grade. Ne propunem să aflăm lungimea acestui arc.

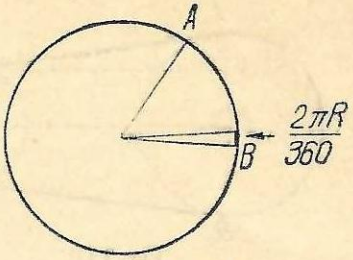


Fig. VI.1

Ne închipuim cercul împărțit în 360 de arce egale. Fiecare arc va avea 1 grad[1] și lungimea sa va fi a 360-a parte din lungimea cercului: lungimea arcului de 1 grad $= \frac{2\pi R}{360}$. Dacă măsura arcului nostru este de $n°$, înseamnă că el se compune din $n$ astfel de arce. Rezultă că lungimea lui va fi de $n$ ori mai mare decît lungimea arcului de 1°, adică:

$$l = \frac{2\pi Rn}{360}.$$

Simplificînd această fracție cu 2, obținem pentru lungimea arcului de cerc formula:

$$\boxed{l = \frac{\pi Rn}{180}}$$

unde $R$ reprezintă raza cercului și $n$ reprezintă măsura în grade a arcului sau a unghiului la centru corespunzător.

4. **Aplicații.** În formula de mai sus figurează trei litere: $l$, $R$ și $n$. Dacă cunoaștem valoarea a două din ele putem afla valoarea celei de-a treia.

1. *Să se afle lungimea unui arc de 25° care face parte dintr-un cerc cu raza $R =$ $= 5$ m.*

Formula dă:

$$l = \frac{\pi Rn}{180} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 25}{180} = 0{,}694\pi = 2{,}18 \text{ m}.$$

2. *Să se afle lungimea unui arc de cerc, știind că raza cercului este de 5 m și arcul are 10°13′.*

Pentru a putea aplica formula, trebuie să exprimăm arcul în grade:

$$10°13' = 10 + \frac{13}{60} = \frac{613}{60} \text{ grade}.$$

Formula dă:

$$l = \frac{\pi \cdot 5 \cdot \frac{613}{60}}{180} = \frac{\pi \cdot 613}{180 \cdot 12} = 0{,}891 \text{ m}.$$

---

[1] **În figura 1 arcul este mai mare.**

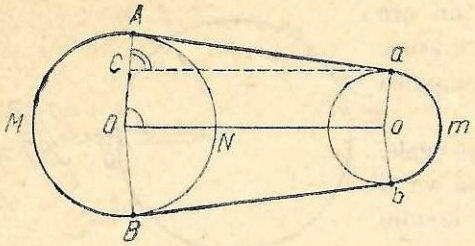


Fig. VI.2

*3. Două roți sînt legate printr-o curea de transmisie* (fig. 2). *Razele lor sînt* $R = 60$ *cm*, $r = 35$ *cm şi distanţa dintre centrele lor este* $d = 1{,}60$ *m. Se cere lungimea curelei.*

Cureaua se compune din două părţi rectilinii $Aa$ şi $Bb$, şi două părţi în formă de arc de cerc $AMB$ şi $amb$. Să calculăm lungimea fiecăreia din aceste părţi.

Părţile rectilinii $Aa$ şi $Bb$ sînt tangente la cele două cercuri. Unim $O$ cu $A$ şi $o$ cu $a$. Aceste drepte vor fi paralele, căci amîndouă sînt perpendiculare pe $Aa$.

*a)* Ducem $aC$ paralel cu $Oo$. Patrulaterul $OoaC$ este un paralelogram, deci $OC = oa$ şi $Oo = Ca$. Se formează triunghiul $ACa$, dreptunghic în $A$ (raza este perpendiculară pe tangentă). În acest triunghi cunoaştem ipotenuza $Ca = Oo = 1{,}60$ cm şi cateta $AC = OA - OC = R - r = 60 - 35 = 25$ cm. Putem rezolva triunghiul. Avem:

$$\cos C = \frac{CA}{Ca} = \frac{25}{160} = 0{,}156;\ \widehat{C} = 81°.$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{Aa}{AC};\ 6{,}314 = \frac{Aa}{25};\ Aa = 6{,}314 \cdot 25 = 157{,}85 \text{ cm}.$$

*b)* Unghiul $O$ este egal cu unghiul $C$ (corespondente), deci $O = 81°$, deci $\widehat{AN} = 81°$. Rezultă că arcul $ANB$ are $81° \cdot 2 = 162°$, deci arcul $AMB$ are $360° - 162° = 198°$. Lungimea sa este:

$$l = \frac{\pi \cdot 60 \cdot 198}{180} = 207{,}34 \text{ cm}.$$

*c)* Pentru a afla lungimea arcului $amb$, observăm că $\widehat{aob} = \widehat{AOB}$ (unghiuri cu laturi paralele). Rezultă că $\widehat{amb} = \widehat{ANB} = 162°$. Lungimea acestui arc este:

$$l' = \frac{\pi \cdot 35 \cdot 162}{180} = 98{,}96 \text{ cm}.$$

Lungimea curelei este:

$$157{,}85 \cdot 2 + 207{,}34 + 98{,}96 = 622 \text{ cm}.$$

## 6.2. ARIA CERCULUI ŞI A SECTORULUI DE CERC

1. **Aria cercului.** Problema de a afla aria unui cerc nu poate fi studiată în cadrul acestei cărţi. Vom da numai unele indicaţii.

Considerăm un cerc oarecare (fig. 3-*a*). Îl împărţim în 6 părţi egale şi aşezăm părţile aşa cum arată figura. Se obţine o figură care seamănă cu un paralelogram. Dintre cele 6 arce în care a fost împărţit cercul, 3 formează „baza" paralelogramului.

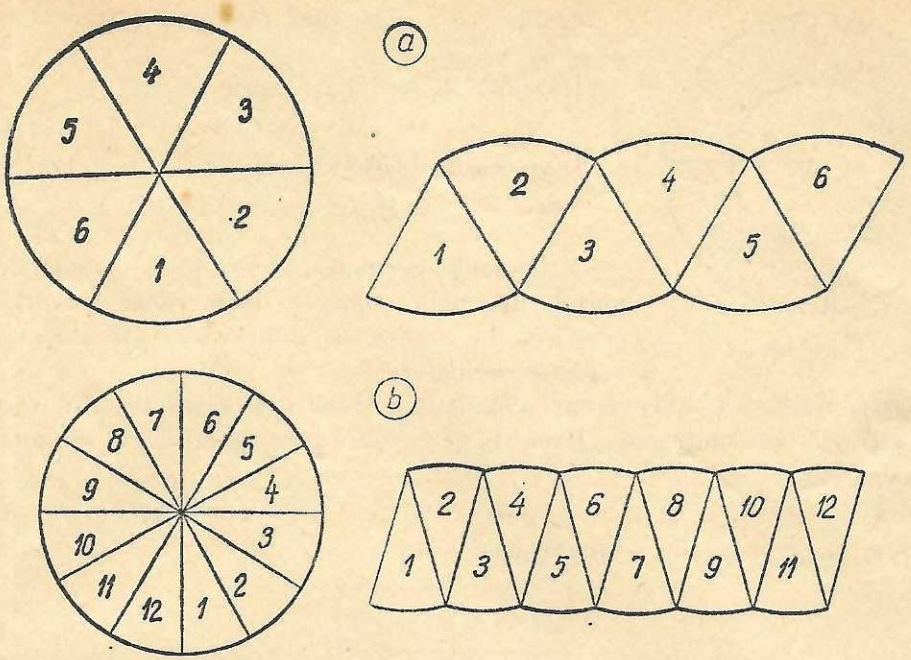



Fig. VI.3

Putem considera că baza acestui paralelogram este jumătate din lungimea cercului. Înălțimea paralelogramului este raza cercului. Aria acestui paralelogram, care este egală cu aria cercului, va fi egală cu jumătate din lungimea cercului înmulțită cu raza.

Figura 3-*b* reprezintă cazul cînd cercul se împarte în 12 părți egale. Judecînd ca în cazul figurii 3-*a*, se vede că aria „paralelogramului" este aceeași.

Dacă împărțim cercul într-un număr din ce în ce mai mare de părți egale, obținem figuri care seamănă din ce în ce mai mult cu un paralelogram și ariile paralelogramelor ce se obțin sînt în toate cazurile egale cu jumătate din lungimea cercului înmulțită cu raza. Deci putem spune că aceasta este și aria cercului.

Dacă notăm raza cercului cu $R$ și aria sa cu $\mathcal{A}$, lungimea cercului este egală cu $2\pi R$, deci aria sa este:

$$\mathcal{A} = \frac{2\pi \cdot R \cdot R}{2} = \pi R^2.$$

Așadar, aria cercului este dată de formula:

$$\boxed{\mathcal{A} = \pi R^2}$$

2. **Aplicații.** *1. Să se afle aria unui cerc cu raza* $R = 3$ cm. Formula dă:

$$\mathcal{A} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 9 = 28{,}27 \text{ m}^2.$$

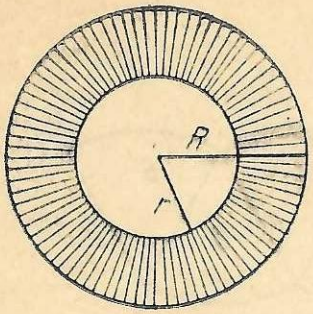


Fig. VI.4

*2. Să se afle raza unui cerc, știind că aria sa este* $\mathcal{A} = 50$ m².

Înlocuim în formulă $\mathcal{A}$ prin 50:

$$50 = \pi \cdot R^2.$$

Din această relație scoatem:

$$R^2 = \frac{50}{\pi} = 15{,}915; \quad R = \sqrt{15{,}915} = 3{,}98 \text{ m}.$$

3. **Coroana circulară.** O coroană circulară este partea din plan cuprinsă între două cercuri concentrice. În figura 4, suprafața hașurată este o coroană circulară.

Pentru a afla aria unei coroane circulare, n-avem decît să scădem aria cercului mic din aria cercului mare. Dacă $R$ și $r$ sînt razele celor două cercuri, aria coroanei este:

$$\pi R^2 - \pi r^2.$$

Scoatem factorul comun $\pi$ și obținem:

$$\boxed{\mathcal{A} = \pi(R^2 - r^2)}$$

*Exemplu. Să se afle aria unei coroane circulare în care* $R = 7{,}5$ m, $r = 5{,}5$ m. Formula dă:

$$\mathcal{A} = \pi(7{,}5^2 - 5{,}5^2) = \pi(56{,}25 - 30{,}25) = \pi \cdot 26 = 81{,}681 \text{ m}^2.$$

**4. Aria sectorului circular.** Un sector circular este o parte din cerc cuprinsă între două raze și arcul corespunzător. În figura 5, porțiunea hașurată este un sector circular.

Ne proprunem să aflăm aria unui sector circular, cunoscînd raza cercului din care face parte sectorul și măsura în grade a unghiului la centru corespunzător.

Ne închipuim că am împărțit cercul în 360 de părți egale și am unit punctele de diviziune cu centrul. Aria cercului se împarte în 360 de sectoare egale, unghiul fiecărui sector fiind de 1°. Aria unui astfel de sector este a 360-a parte din aria cercului, adică $\frac{\pi R^2}{360}$. Dacă sectorul nostru are $n°$, el cuprinde $n$ astfel de sectoare, deci aria sectorului circular este dată de formula:

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{\pi R^2 n}{360}}$$

5. **Aplicații.** *Să se afle aria unui sector circular cu raza de* 3 m, *unghiul său fiind de* 25°.

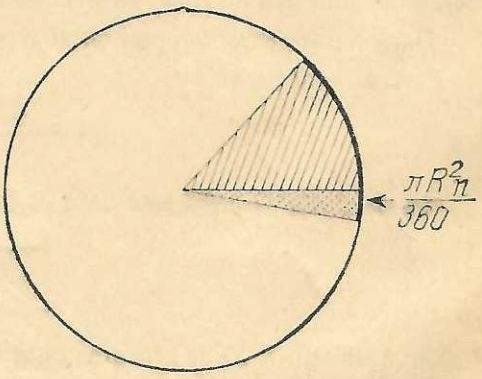


Fig. VI.5

Formula dă:

$$\mathcal{A} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 25}{360} = \frac{5\pi}{8} = 1{,}96 \text{ m}^2.$$

2. *Ce unghi la centru are un sector, dacă raza sa este* $R = 4$ cm *şi aria sa este* $\mathcal{A} = 15$ cm²?

Formula dă:

$$15 = \frac{\pi \cdot 16 \cdot n}{360}.$$

De aici rezultă că:

$$n = \frac{360 \cdot 15}{\pi \cdot 16} = 107{,}43;\ 0{,}43 \cdot 60' = 25{,}8' \approx 26'.$$

Unghiul la centru are aproximativ 107°26'.

6. **Observare.** Să comparăm formula care dă lungimea unui arc de cerc cu formula care dă aria unui sector circular:

$$l = \frac{2\pi Rn}{360}, \quad \mathcal{A} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

Se observă că, pentru a obţine fracţia a doua, trebuie să împărţim prima fracţie cu 2 (suprimăm factorul 2) şi s-o înmulţim cu $R$ (în loc de $R$ apare $R^2$). Deci:

$$\mathcal{A} = \frac{lR}{2}.$$

**Expresia $\frac{lR}{2}$ reprezintă aria unui triunghi cu baza $l$ şi înălţimea $R$. Rezultă** *că sectorul circular poate fi privit cu un triunghi care are ca bază arcul de cerc al sectorului şi ca înălţime raza cercului.*

**Rezumat**

| | | |
|---|---|---|
| Lungimea cercului | | $2\pi R$ |
| Lungimea arcului de cerc | | $\frac{\pi Rn}{180}$ |
| Aria cercului | | $\pi R^2$ |
| Aria coroanei circulare | | $\pi(R^2 - r^2)$ |
| Aria sectorului circular | | $\frac{\pi R^2 n}{360}$ |

## EXERCIȚII

### LUNGIMEA CERCULUI

**1.** (o) De cîte ori se cuprinde diametrul unui cerc în perimetrul hexagonului regulat înscris în cerc? De cîte ori se cuprinde diametrul unui cerc în perimetrul pătratului circumscris cercului? Să se deducă de aici că numărul $\pi$ este cuprins între 3 și 4.

**2.** (p) Să se măsoare pe diferite obiecte (un pahar, o placă de patefon ș.a.m.d.) lungimile și diametrii unor cercuri și să se calculeze de fiecare dată cîte o valoare aproximativă a numărului $\pi$.

**3.** Să se calculeze lungimea unui cerc cu raza:

a) $R = 8$ m; b) $R = 25$ m; c) $R = 38{,}2$ m.

**4.** Să se calculeze raza unui cerc, știind că lungimea sa este:

a) 54 m; b) 3,82 m; c) 1 650 m.

**5.** Un mosor de ață are un diametru de 3 cm. Pentru a acoperi complet lemnul, trebuie să-l înfășurăm de 300 de ori. Ce lungime are firul de ață?

Se va considera că ața formează un șir de cercuri așezate unul lîngă celălalt. Rezultatul este aproximativ.

**6.** Butucul unei fîntîni cu roată are un diametru de 35 cm (fig. 6). Ciutura fiind la nivelul pămîntului, roata trebuie să facă 10 învîrtituri ca ciutura să ajungă la nivelul apei. Să se afle adîncimea fîntînii (socotită de la nivelul pămîntului pînă la nivelul apei). Vezi indicația la exercițiul precedent.

**7.** Roata unei biciclete are raza de 35 cm. Ce drum parcurge bicicleta în timp ce roata face 300 de învîrtituri?

**8.** a) O navă cosmică a făcut ocolul Pămîntului în 108 minute, zburînd la o înălțime medie de 250 km. Să se calculeze viteza medie a navei. Raza Pămîntului este de 6 370 km. (Se va admite că drumul descris de nava cosmică a fost un cerc; nu se va socoti timpul necesar pentru urcarea și coborîrea ei.) b) O altă navă zburat la o înălțime de 220 km și a făcut de 17 ori ocolul Pămîntului în 25 ore 18 minute. Să se calculeze viteza medie a navei.

Fig. VI.6

Viteza medie a unui avion cu reacție este de 900 km/oră. Să se compare vitezele celor două nave cosmice cu viteza avionului cu reacție.

---

**R.** — **3.** a) 50,265 m. b) 157 m. c) 240,018 m. **4.** a) 8,595 m. b) 0,608 m. c) 262,6 m. **5.** 28,27 m. **6.** 11 m. **7.** 659,7 m. **8.** a) cca 23 000 km/oră; b) cca 27 800 km/oră.

**9.** (o) Lungimea unui cerc este de 24 m. Să se afle lungimea unui cerc a cărui rază este: a) de 5 ori mai mare; b) de 3 ori mai mică; c) $\frac{2}{3}$ din raza acestui cerc; d) $\frac{11}{6}$ din raza acestui cerc.

## LUNGIMEA ARCULUI DE CERC

**10.** Să se completeze tabelul următor, în care $l$, $R$ și $n$ reprezintă respectiv: lungimea unui arc de cerc, raza cercului (în unități corespunzătoare) și măsura unghiului la centru corespunzător arcului.

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | | 24 | 30 | | 30 | 3 |
| $R$ | 5 | | 7 | 6 | | 6 |
| $n$ | 30° | 48° | | 25°40′ | 65°20′ | |

**11.** Acul mare al unui ceasornic are o lungime de 2 cm. Să se afle lungimea drumului parcurs de capătul acului într-un minut?

**12.** Un pendul lung de 80 cm oscilează depărtîndu-se cu 20° de poziția de echilibru (fig. 7). Ce lungime are arcul descris de capătul pendulului într-o oscilație completă?

**13.** a) Avem o vergea de fier lungă de 50 cm. O încovoiem astfel încît să formeze un semicerc. Care este acum distanța dintre capetele ei?

b)* Aceeași întrebare, dacă dăm vergelei forma unui sfert de cerc.

**14.** Se dă un cerc cu raza $R = 50$ cm și un punct $A$ (fig. 8) situat la distanța $OA = 1$ m de centrul lui. Din $A$ se duc tangentele la cerc. Să se afle lungimea liniei $ABMCA$ (lungimea unei curele de transmisie cînd roata $A$ este foarte mică) (v. și fig. 2).

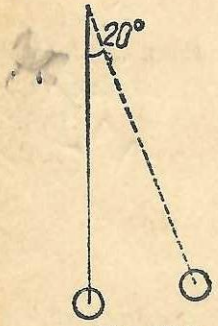


Fig. VI.7

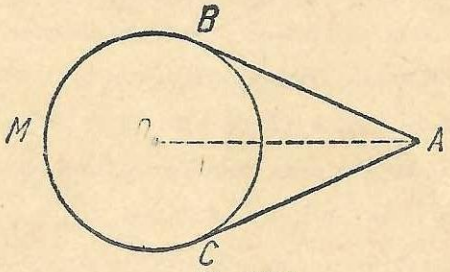


Fig. VI.8

**R. — 9.** a) 120 m. b) 8 m. c) 16 m. d) 44 m. **10.** a) 2,618. b) 28,648; c) 245°30′; d) 2,688; e) 26,308; f) 28°39′. **11.** $\frac{\pi}{15} = 0{,}21$ cm. **12.** 55,8 cm. **13.** a) 31,8 cm. b) $\frac{2 \cdot 50 \cdot \sqrt{2}}{\pi} = 45$ cm. **14.** 209,33 cm + 2·86,60 cm = 382,93 cm.

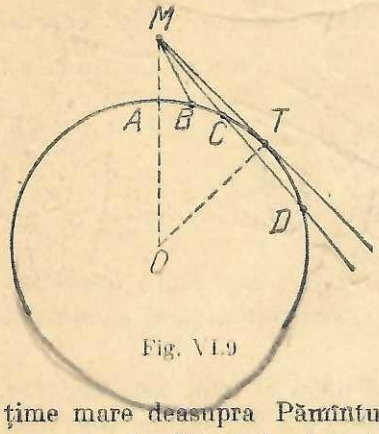


Fig. VI.9

**15.** Într-un cerc cu raza $R = 5$ m se duce o coardă $AB = 8$ m. Se cere lungimea arcului $AB$.

**16.** Într-un cerc cu raza de 1 m se duce o coardă situată la o distanță de 0,80 m de centru. Să se afle lungimea arcului subîntins de coardă.

**17.** Într-un cerc cu raza de 1 m se ia un arc a cărui lungime este de 2 m. Se cere lungimea coardei care subîntinde acest arc.

**18.** În figura 9 cercul (necomplet) reprezintă Pămîntul, și $M$ este un punct situat la înălțime mare deasupra Pămîntului. Din $M$ se văd punctele $B$, $C$ ,...; punctul $D$ nu se vede. Punctul cel mai depărtat de pe acest cerc care se poate vedea din $M$ este $T$, în care o tangentă dusă din $M$ la cerc atinge cercul. Lungimea arcului $AT$ ne arată „cît de departe se poate vedea" din $M$.
O navă cosmică, în zborul său în jurul Pămîntului, a atins o înălțime de cca 330 km. Să se calculeze lungimea arcului $AT$ corespunzător. Raza Pămîntului este de 6 370 km.

**19.** (o) Cum variază lungimea unui arc de cerc: a) cînd raza cercului devine de 2, 3, ... ori mai mare; b) cînd unghiul la centru corespunzător devine de 2, 3, ... ori mai mare.

**20.** Se numește *milă marină* lungimea arcului de 1′ de pe meridian. Cîți metri are o milă marină? Se va considera că meridianul are 40 de milioane de metri.

## ARIA CERCULUI

**21.** (p) Să se traseze un cerc pe hîrtie milimetrică, să se numere cîte pătrățele de cîte 1 mm² conține și să se verifice astfel formula care dă aria cercului.

**22.** Să se afle aria unui cerc cu raza:

*a)* $R = 1$ m; *b)* $R = 3$ m; *c)* $R = 5$ m.

**23.** Să se afle raza unui cerc, știind că aria sa este:

*a)* $\mathcal{A} = 10$ cm²; *b)* $\mathcal{A} = 250$ m²; *c)* $\mathcal{A} = 380$ m².

**24.** (o) Aria unui cerc are atîția metri pătrați cîți metri are lungimea sa. Să se afle raza cercului.

---

**R. — 15.** Din centrul cercului $O$ se duce $OC$ perpendicular pe $AB$ și se calculează unghiul $AOC$; 9,25 m. **16.** v. problema precedentă; 1,291 m. **17.** 1,678 m. **18.** 200 km. **19.** Arcul este direct proporțional cu raza și cu unghiul. **20.** 1 852 m. **22.** a) 3,1416 m². b) 28,2743 m². c) 78,54 m². **23.** a) 1,78 cm. b) 8,91 m. c) 10,99 m. **24.** 2 m.

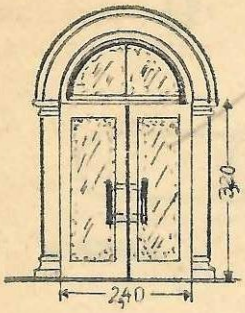



Fig. VI.10

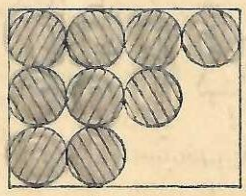


Fig. VI.11

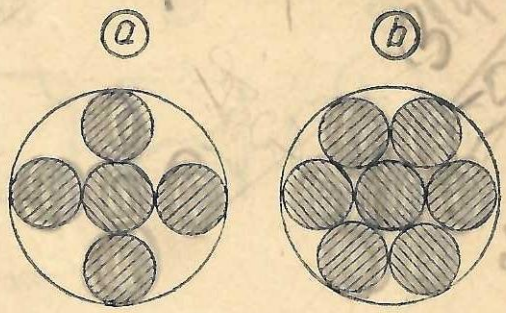



Fig. VI.12

**25.** Cît la sută din aria cercului reprezintă; a) aria triunghiului echilateral; b) aria pătratului; c) aria hexagonului regulat înscris în acel cerc? Se poate lua $R = 1$.

**26.** Pe un cazan cu diametrul de 1,20 m se pune un capac de tablă, care depășește deschiderea cazanului cu 5 cm. 1 m² de tablă cîntărește 3,5 kg. Să se calculeze masa capacului.

**27.** O poartă are forma și dimensiunile indicate în figura 10. Care este prețul ei, socotit cu 200 de lei metrul pătrat?

**28.** Să se afle aria unui cerc, știind că lungimea sa este de 157,080 m.

**29.** Să se afle lungimea unui cerc, știind că aria sa este de 314,16 m².

**30.** Dintr-o foaie de tablă dreptunghiulară lungă de 80 cm și lată de 60 cm se taie discuri circulare cu raza de 5 cm (fig. 11). a) Cîte discuri se scot? b) cît la sută din material se pierde?

**31*.** Razele a două cercuri sînt $r$ și $R$. a) Să se afle raportul dintre ariile lor. b) În figurile 12-*a* și 12-*b*, a cîta parte din aria cercului mare reprezintă partea neacoperită de cercurile mici?

**32.** (o) Într-o presă hidraulică (fig. 13), pistonul $P$ are un diametru de 20 cm și pistonul $Q$ are un diametru de 1 m. Apăsăm pistonul $P$ în jos cu o forță de 60 kgf. Ce masă are corpul pe care îl putem ridica?


Fig. VI.13

**33.** (o) Aria unui cerc este de 18 cm². Să se afle aria unui cerc a cărui rază este: a) de 3 ori mai mare; b) de 3 ori mai mică; c) $\frac{2}{3}$ din raza acestui cerc; d) $1\frac{1}{2}$ cît raza acestui cerc.

---

**R.** — **25.** *a)* 41%; *b)* $\frac{2}{\pi} = 63\%$; *c)* $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = 82\%$. **26.** 4,6 kg. **27.** 1 988 de lei. **28.** 1 963,49 m². **29.** 62,832 m. **30.** *a)* Nu se calculează ariile! 48 de discuri. *b)* 21,5%. **31.** *a)* $\left(\frac{r}{R}\right)^2$. *b)* $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{9}$. **32.** v. probl. 31; 1 500 kg. **33.** a) 162 cm². b) 2 cm². c) 8 cm². d) 40,50 cm².

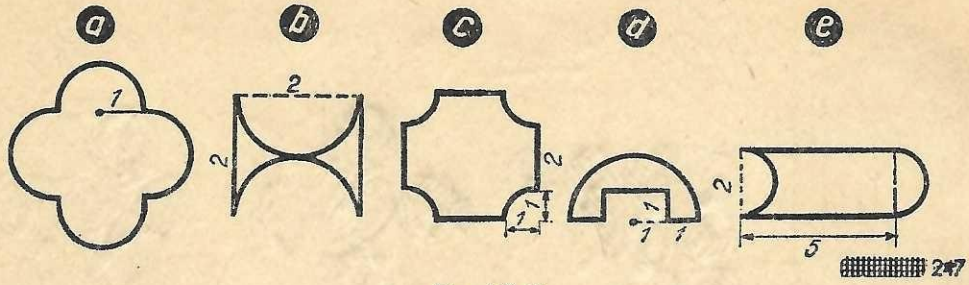



Fig. VI.14

**34.** Să se afle pe baza datelor din figură ariile și perimetrele figurilor 14-*a* — 14-*e*.

**35.** Aria unei coroane circulare este de 2 826 m² și raza cercului mic este de 18 m. Se cere lățimea coroanei.

**36.** Un circ are formă de cerc, raza cercului fiind de 25 m. Partea pe care se fac exercițiile (arena) are forma unui cerc cu raza de 20 m. Să se afle cîți spectatori încap în acest circ, dacă se socotește 0,5 m² de spectator.

**37.** (o) Avem o coroană circulară în care raza cercului mare este dublul razei cercului mic. De cîte ori se cuprinde aria cercului mic în aria coroanei? Aceeași întrebare dacă raza cercului mare este de 3, 4, 5 ori mai mare decît raza cercului mic.

## SECTORUL CIRCULAR

**38.** Să se completeze tabelul următor, în care $\mathcal{A}$, $R$ și $n$ reprezintă respectiv: aria unui sector circular, raza sectorului (în unități corespunzătoare) și măsura unghiului la centru.

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{A}$ | | 42 | 25 | | 35 | 100 |
| $R$ | 4 | | 15 | 10 | | 17 |
| $n$ | 50° | 108° | | 25°15′ | 153°20′ | |

**R.** — **34.** a) $2\pi + 4$; $4\pi$. b) $4 - \pi$; $2\pi + 4$. c) $16 - \pi$; $2\pi + 8$. d) $2\pi - 2$; $2\pi + 6$. e) 10; $10 + 2\pi$. **35.** 16,98 m. **36.** 1 413 spectatori. **37.** De 3 ori; de 8 ori; de 15 ori; de 24 ori. **38.** a) 6,98. b) 6,67. c) 12°44′. d) 22,035. e) 5,11. f) 39°39′.

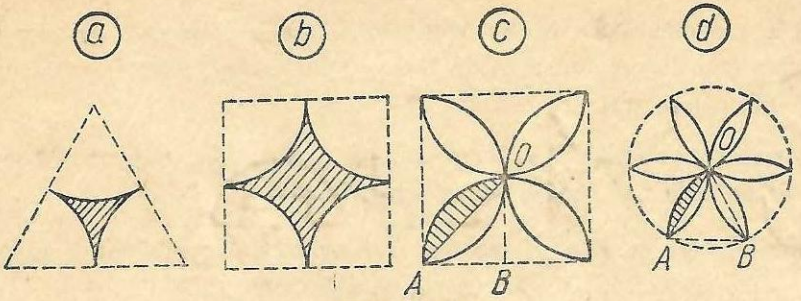


Fig. VI.15

**39.** (o) Ce fracție din aria cercului reprezintă un sector de: a) 90°; b) 45°; c) 60°; d) 180°; e) 210°; f) 270°; g) 300°.

**40.** Să se afle lungimea conturului și aria desenelor din figura 15.

a) Figura 15-*a* reprezintă un motiv decorativ care se obține ducînd trei arce de cerc egale, cu centrele în vîrfurile unui triunghi echilateral, a cărui latură este de 2 dm. b) Figura 15-*b* reprezintă un motiv decorativ mărginit de 4 sferturi de cerc. Latura pătratului este de 2 dm. c) Figura 15-*c* reprezintă o „rozetă cu 4 foi". Ea se obține construind 4 semicercuri avînd ca diametri laturile unui pătrat. Raza acestor semicercuri este de 1 dm. d) Figura 15-*d* reprezintă o „rozetă cu 6 foi". Ea se construiește astfel: se împarte un cerc în 6 părți egale, apoi, luînd punctele de diviziune ca centre și o rază egală cu raza cercului, se descriu 6 arce de cerc situate în interiorul primului cerc.

**41.** Să se afle aria piesei din figura 16.

**42.** Se numește *segment de cerc* o parte din cerc mărginită de un arc de cerc și coarda corespunzătoare — hașurată în figura 17. Segmentul $CD$ se numește *săgeata* segmentului. Să se afle aria segmentului din figura 17 știind că raza $OA = 10$ cm, $\widehat{AOB} = 50°$.

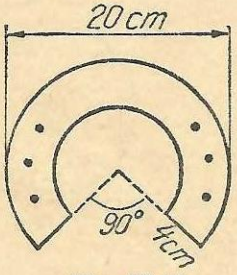


Fig. VI.16

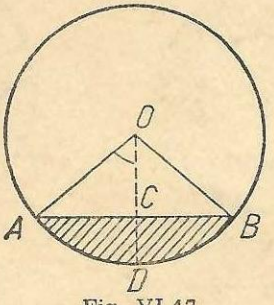


Fig. VI.17

---

**R. — 40.** a) $\pi$ dm; $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ dm². b) $2\pi$ dm; $(4 - \pi)$ dm². c). Se află întîi aria porțiunii hașurate, care este diferența dintre un sfert de cerc și triunghiul $AOB$; $4\pi$ dm; $(2\pi - 4)$ dm². d) Porțiunea hașurată este diferența dintre 1/6 din cerc și triunghiul echilateral $AOB$, $4\pi$ dm; $(2\pi - 3\sqrt{3})$ dm². **41.** 150,72 cm². **42.** 43,61 — 38,30 = 15,31 cm².

43. Să se calculeze aria fiecăruia dintre segmentele de cerc care se formează cînd înscriem într-un cerc cu raza de 1 m. a) un hexagon regulat; b) un pătrat; c) un triunghi echilateral.

44. Într-un cerc cu raza $R = 5$ cm se duce o coardă $AB = 6$ cm. Să se afle aria segmentului de cerc determinat de această coardă.

45* Într-un cerc cu raza $R = 5$ cm se consideră un segment a cărui *săgeată* este $CD = 1{,}25$ m (fig. 17). Se cere aria segmentului.

## DIVERSE

46* Un bazin circular este înconjurat de o coroană de beton (fig. 18). Nu putem măsura razele celor două cercuri care mărginesc bazinul căci nu cunoaștem centrul lor, și bazinul este plin cu apă. În schimb, putem măsura segmentul $AB$ de pe tangenta la cercul mic. Cum putem deduce de aici aria coroanei?

47. Ne închipuim un fir de sîrmă care înconjură Pămîntul la ecuator (fig. 19). Mărim lungimea firului cu 1 m și-i dăm din nou forma de cerc, astfel încît să formeze un cerc concentric cu ecuatorul. Între ecuator și firul de sîrmă rămîne o anumită distanță. Să se afle această distanță. Va putea o pisică să treacă pe sub sîrmă?

48. Razele a două roți de frecare[1] sînt: $R = 15$ cm, $r = 10$ cm (fig. 20). Cu cîte grade se rotește roata mare, cînd roata mică face o rotație completă?

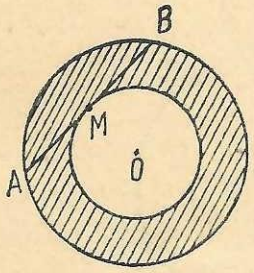


Fig. VI.18

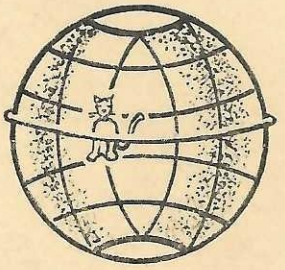


Fig. VI.19

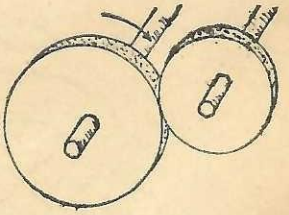


Fig. VI.20

R. — 43. a) 0,091 m². b) 0,286 m². c) 0,614 m². 44. Se află întîi unghiul $AOB$; 4,11 cm². 45. 5,68 m². 46. Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul $AOM$; aria coroanei $= \pi \cdot AM^2$. 47. Rămîne o distanță de $\frac{1}{2\pi} = 0{,}15$ m. 48. Cu 240°.

[1] Roți lipite una de alta ca în figură, așa fel ca, atunci cînd una din ele se învîrtește, să se învîrtească și cealaltă.

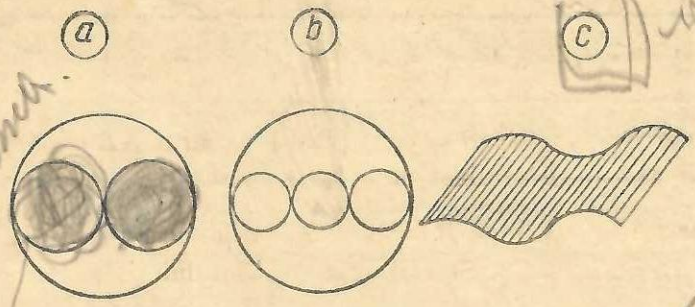



Fig. VI.21

**49.** Două roți sînt legate printr-o curea de transmisie. Razele lor sînt: $R = 30$ cm și $r = 20$ cm. Roata mare face 50 de ture (învîrtituri) pe minut. Să se afle: a) cîte ture pe minut face roata mică; b) ce viteză are un punct oarecare de pe porțiunea rectilinie (dreaptă) a curelei.

**50.** a) În interiorul unui cerc de rază $R$, se construiesc, 2, 3, ..., $n$, cercuri egale, ca în figurile 21-*a* și 21-*b*. Să se compare suma lungimilor acestor cercuri cu lungimea cercului mare. b) Dintr-o foaie de tablă obișnuită se face o foaie de tablă ondulată secțiunea ei este formată dintr-un șir de semicercuri cu raza $r = 3$ cm, (fig. 21-*c*). Cîți metri de tablă ondulată se obțin dintr-o foaie de tablă lungă de 1 m? c) Se face economie de material dacă se ia pentru $r$ o altă valoare?

---

**R. — 49.** a) 75 de ture; b) 94,2 metri pe minut. **50.** a) Suma lungimilor cercurilor mici = lungimea cercului mare. b) Lungimea tablei este egală cu diametrul unui semicerc a cărui lungime este de 1 m. $\frac{2}{\pi} = 0{,}636$ m. c) Nu.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 30′ | ° | 0′ | 30′ |
| | | | 30 | 0,500 | 0,508 | 60 | 0,866 | 0,870 |
| | | | 31 | 515 | 523 | 61 | 875 | 879 |
| | | 044 | 32 | 530 | 537 | 62 | 883 | 887 |
| 3 | 052 | 061 | 33 | 545 | 552 | 63 | 891 | 895 |
| 4 | 070 | 078 | 34 | 559 | 566 | 64 | 899 | 903 |
| 5 | 0,087 | 0,096 | 35 | 0,574 | 0,581 | 65 | 0,906 | 0,910 |
| 6 | 105 | 113 | 36 | 588 | 595 | 66 | 914 | 917 |
| 7 | 122 | 131 | 37 | 602 | 609 | 67 | 921 | 924 |
| 8 | 139 | 148 | 38 | 616 | 623 | 68 | 927 | 930 |
| 9 | 156 | 165 | 39 | 629 | 636 | 69 | 934 | 937 |
| 10 | 0,174 | 0,182 | 40 | 0,643 | 0,649 | 70 | 0,940 | 0,943 |
| 11 | 191 | 199 | 41 | 656 | 663 | 71 | 946 | 948 |
| 12 | 208 | 216 | 42 | 669 | 676 | 72 | 951 | 954 |
| 13 | 225 | 233 | 43 | 682 | 688 | 73 | 956 | 959 |
| 14 | 242 | 250 | 44 | 695 | 701 | 74 | 961 | 964 |
| 15 | 0,259 | 0,267 | 45 | 0,707 | 0,713 | 75 | 0,966 | 0,968 |
| 16 | 276 | 284 | 46 | 719 | 725 | 76 | 970 | 972 |
| 17 | 292 | 301 | 47 | 731 | 737 | 77 | 974 | 976 |
| 18 | 309 | 317 | 48 | 743 | 749 | 78 | 978 | 980 |
| 19 | 326 | 334 | 49 | 755 | 760 | 79 | 982 | 983 |
| 20 | 0,342 | 0,350 | 50 | 0,766 | 0,772 | 80 | 0,985 | 0,986 |
| 21 | 358 | 367 | 51 | 777 | 783 | 81 | 988 | 989 |
| 22 | 375 | 383 | 52 | 788 | 793 | 82 | 990 | 991 |
| 23 | 391 | 399 | 53 | 799 | 804 | 83 | 993 | 994 |
| 24 | 407 | 415 | 54 | 809 | 814 | 84 | 995 | 995 |
| 25 | 0,423 | 0,431 | 55 | 0,819 | 0,824 | 85 | 0,996 | 0,997 |
| 26 | 438 | 446 | 56 | 829 | 834 | 86 | 998 | 998 |
| 27 | 454 | 462 | 57 | 839 | 843 | 87 | 999 | 999 |
| 28 | 469 | 477 | 58 | 848 | 853 | 88 | 999 | 1,000 |
| 29 | 485 | 492 | 59 | 857 | 862 | 89 | 1,000 | 1,000 |
| | | | | | | 90 | 1,000 | 1,000 |

Tabla II — Cosinus

| ° | 0′ | 30′ | ° | 0′ | 30′ | ° | 0′ | 30′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000 | 1,000 | 30 | 0,866 | 0,862 | 60 | 0,500 | 0,492 |
| 1 | 1,000 | 1,000 | 31 | 857 | 853 | 61 | 485 | 477 |
| 2 | 0,999 | 0,999 | 32 | 848 | 843 | 62 | 469 | 462 |
| 3 | 999 | 998 | 33 | 839 | 834 | 63 | 454 | 446 |
| 4 | 998 | 997 | 34 | 829 | 824 | 64 | 438 | 431 |
| 5 | 0,996 | 0,995 | 35 | 0,819 | 0,814 | 65 | 0,423 | 0,415 |
| 6 | 995 | 994 | 36 | 809 | 804 | 66 | 407 | 399 |
| 7 | 993 | 991 | 37 | 799 | 793 | 67 | 391 | 383 |
| 8 | 990 | 989 | 38 | 788 | 783 | 68 | 375 | 367 |
| 9 | 988 | 986 | 39 | 777 | 772 | 69 | 358 | 350 |
| 10 | 0,985 | 0,983 | 40 | 0,766 | 0,760 | 70 | 0,342 | 0,334 |
| 11 | 982 | 980 | 41 | 755 | 749 | 71 | 326 | 317 |
| 12 | 978 | 976 | 42 | 743 | 737 | 72 | 309 | 301 |
| 13 | 974 | 972 | 43 | 731 | 725 | 73 | 292 | 284 |
| 14 | 970 | 968 | 44 | 719 | 713 | 74 | 276 | 267 |
| 15 | 0,966 | 0,964 | 45 | 0,707 | 0,701 | 75 | 0,259 | 0,250 |
| 16 | 961 | 959 | 46 | 695 | 688 | 76 | 242 | 233 |
| 17 | 956 | 954 | 47 | 682 | 676 | 77 | 225 | 216 |
| 18 | 951 | 948 | 48 | 669 | 663 | 78 | 208 | 199 |
| 19 | 946 | 943 | 49 | 656 | 649 | 79 | 191 | 182 |
| 20 | 0,940 | 0,937 | 50 | 0,643 | 0,636 | 80 | 0,174 | 0,165 |
| 21 | 934 | 930 | 51 | 629 | 623 | 81 | 156 | 148 |
| 22 | 927 | 924 | 52 | 616 | 609 | 82 | 139 | 131 |
| 23 | 921 | 917 | 53 | 602 | 595 | 83 | 122 | 113 |
| 24 | 914 | 910 | 54 | 588 | 581 | 84 | 105 | 096 |
| 25 | 0,906 | 0,903 | 55 | 0,574 | 0,566 | 85 | 0,087 | 0,078 |
| 26 | 899 | 895 | 56 | 559 | 552 | 86 | 070 | 061 |
| 27 | 891 | 887 | 57 | 545 | 537 | 87 | 052 | 044 |
| 28 | 883 | 879 | 58 | 530 | 523 | 88 | 035 | 026 |
| 29 | 875 | 870 | 59 | 515 | 508 | 89 | 017 | 009 |
| | | | | | | 90 | 0,000 | |

## Tabla III — Tangenta

| ° | 0′ | 30′ | ° | 0′ | 30′ | ° | 0′ | 30′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,000 | 0,009 | 30 | 0,577 | 0,589 | 60 | 1,732 | 1,767 |
| 1 | 017 | 0,026 | 31 | 601 | 613 | 61 | 804 | 1,842 |
| 2 | 035 | 044 | 32 | 625 | 637 | 62 | 881 | 1,921 |
| 3 | 052 | 061 | 33 | 649 | 662 | 63 | 963 | 2,006 |
| 4 | 070 | 079 | 34 | 675 | 687 | 64 | 2,050 | 2,097 |
| 5 | 0,087 | 0,096 | 35 | 0,700 | 0,713 | 65 | 2,145 | 2,194 |
| 6 | 105 | 114 | 36 | 727 | 740 | 66 | 246 | 2,300 |
| 7 | 128 | 132 | 37 | 754 | 767 | 67 | 356 | 2,414 |
| 8 | 141 | 150 | 38 | 781 | 795 | 68 | 475 | 2,539 |
| 9 | 158 | 167 | 39 | 810 | 824 | 69 | 605 | 2,675 |
| 10 | 0,176 | 0,185 | 40 | 0,839 | 0,854 | 70 | 2,747 | 2,824 |
| 11 | 194 | 203 | 41 | 869 | 885 | 71 | 2,904 | 2,989 |
| 12 | 213 | 222 | 42 | 900 | 916 | 72 | 3,078 | 3,172 |
| 13 | 231 | 240 | 43 | 933 | 949 | 73 | 271 | 3,376 |
| 14 | 249 | 259 | 44 | 966 | 983 | 74 | 487 | 3,606 |
| 15 | 0,268 | 0,277 | 45 | 1,000 | 1,018 | 75 | 3,732 | 3,867 |
| 16 | 287 | 296 | 46 | 036 | 054 | 76 | 4,011 | 4,165 |
| 17 | 306 | 315 | 47 | 072 | 091 | 77 | 4,331 | 4,511 |
| 18 | 325 | 335 | 48 | 111 | 130 | 78 | 4,705 | 4,915 |
| 19 | 344 | 354 | 49 | 150 | 171 | 79 | 5,145 | 5,396 |
| 20 | 0,364 | 0,374 | 50 | 1,192 | 1,213 | 80 | 5,671 | 5,976 |
| 21 | 384 | 394 | 51 | 235 | 257 | 81 | 6,314 | 6,691 |
| 22 | 404 | 414 | 52 | 280 | 303 | 82 | 7,115 | 7,596 |
| 23 | 424 | 435 | 53 | 327 | 351 | 83 | 8,144 | 8,777 |
| 24 | 445 | 456 | 54 | 376 | 402 | 84 | 9,514 | 10,385 |
| 25 | 0,466 | 0,477 | 55 | 1,428 | 1,455 | 85 | 11,430 | 12,706 |
| 26 | 488 | 499 | 56 | 483 | 511 | 86 | 14,301 | 16,350 |
| 27 | 510 | 521 | 57 | 540 | 570 | 87 | 19,081 | 22,904 |
| 28 | 532 | 543 | 58 | 600 | 632 | 88 | 28,636 | 38,188 |
| 29 | 554 | 566 | 59 | 664 | 698 | 89 | 57,290 | 114,589 |

## Tabla IV — Cotangenta

| ° | 0′ | 30′ | ° | 0′ | 30′ | ° | 0′ | 30′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 114,589 | 30 | 1,732 | 1,689 | 60 | 0,577 | 0,566 |
| 1 | 57,290 | 38,188 | 31 | 664 | 632 | 61 | 554 | 543 |
| 2 | 28,636 | 22,904 | 32 | 600 | 570 | 62 | 532 | 521 |
| 3 | 19,081 | 16,350 | 33 | 540 | 511 | 63 | 510 | 499 |
| 4 | 14,301 | 12,706 | 34 | 483 | 455 | 64 | 488 | 477 |
| 5 | 11,430 | 10,385 | 36 | 1,428 | 1,402 | 65 | 0,466 | 0,456 |
| 6 | 9,514 | 8,777 | 36 | 376 | 351 | 66 | 445 | 435 |
| 7 | 8,144 | 7,596 | 37 | 327 | 303 | 67 | 424 | 414 |
| 8 | 7,115 | 6,691 | 38 | 280 | 257 | 68 | 404 | 394 |
| 9 | 6,314 | 5,976 | 39 | 235 | 213 | 69 | 384 | 374 |
| 10 | 5,671 | 5,396 | 40 | 1,192 | 1,171 | 70 | 0,364 | 0,354 |
| 11 | 5,145 | 4,915 | 41 | 150 | 130 | 71 | 344 | 335 |
| 12 | 4,705 | 4,511 | 42 | 111 | 091 | 72 | 325 | 315 |
| 13 | 4,331 | 4,165 | 43 | 072 | 054 | 73 | 305 | 296 |
| 14 | 4,011 | 3,867 | 44 | 036 | 018 | 74 | 287 | 277 |
| 15 | 3,732 | 3,606 | 45 | 1,000 | 0,983 | 75 | 0,268 | 0,259 |
| 16 | 3,487 | 3,376 | 46 | 0,966 | 949 | 76 | 249 | 240 |
| 17 | 3,271 | 3,172 | 47 | 933 | 916 | 77 | 231 | 222 |
| 18 | 3,078 | 2,989 | 48 | 900 | 885 | 78 | 213 | 203 |
| 19 | 2,904 | 2,824 | 49 | 869 | 843 | 79 | 193 | 185 |
| 20 | 2,747 | 2,675 | 50 | 0,839 | 0,824 | 80 | 0,176 | 0,167 |
| 21 | 2,605 | 2,539 | 51 | 810 | 795 | 81 | 158 | 150 |
| 22 | 2,475 | 2,414 | 52 | 781 | 767 | 82 | 141 | 132 |
| 23 | 2,356 | 2,300 | 53 | 754 | 740 | 83 | 123 | 114 |
| 24 | 2,246 | 2,194 | 54 | 727 | 713 | 84 | 105 | 096 |
| | | | | | | 85 | 0,087 | 0,079 |
| 25 | 2,145 | 2,097 | 55 | 0,700 | 0,687 | 86 | 070 | 061 |
| 26 | 2,050 | 2,006 | 56 | 675 | 662 | 87 | 052 | 044 |
| 27 | 1,963 | 1,921 | 57 | 649 | 637 | 88 | 035 | 026 |
| 28 | 1,881 | 1,842 | 58 | 625 | 613 | 89 | 017 | 009 |
| 29 | 1,804 | 1,767 | 59 | 601 | 589 | 90 | 0,000 | |

# CUPRINS

7

Lei 6,45