MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÂNTULUI

ION CUCULESCU

CONSTANTIN OTTESCU

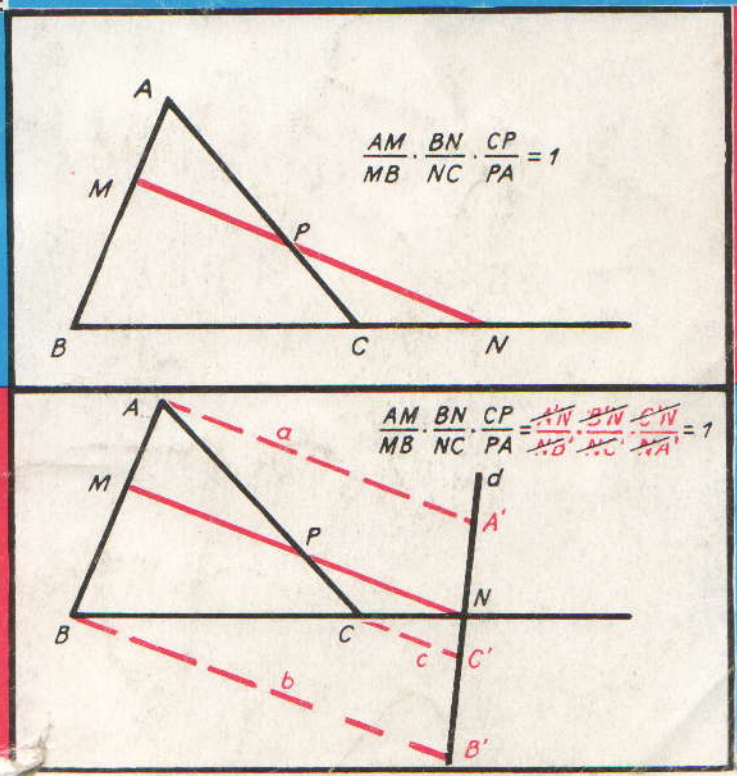
LAURENȚIU N. GAIU

VII

Matematică

Geometrie

Manual pentru clasa a VII-a



EXERCIŢII ŞI PROBLEME RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A VI-A

EXERCIŢII

1. (oral) Folosind cuvintele *necesar* şi *suficient,* separat sau împreună, enunţaţi:

a) Cazurile de congruenţă a triunghiurilor oarecare.

b) Cazurile de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice.

c) Proprietăţile paralelogramului, punând în evidenţă şi pe cele caracteristice.

2. (oral) Ştim că într-un triunghi *suma a două laturi**) este mai mare decât cea de-a treia latură. Este aceasta o condiţie necesară pentru „construcţia" lui? Sau numai suficientă? Sau şi necesară şi suficientă? Formulaţi o propoziţie care să exprime acest fapt utilizând cuvintele *„dacă* sau *numai dacă"* sau *„dacă şi numai dacă".*

3. (oral) Enunţaţi proprietăţile necesare şi suficiente pentru ca:

a) un paralelogram să fie romb;

b) un paralelogram să fie dreptunghi;

c) un dreptunghi să fie pătrat;

d) un romb să fie pătrat.

A. TRIUNGHIUL

4. Ilustraţi grafic:

a) Medianele $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ ale triunghiului ABC în care: $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 8$ cm, iar $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ şi $AA' \cap BB' = \{G\}$.

b) Bisectoarele $[MM'$, $[NN'$, $[PP'$ ale triunghiului MNP, în care $MN = 4{,}2$ cm, $m(\sphericalangle NMP) = 70°$, $m(\sphericalangle MNP) = 50°$, iar $M' \in (NP)$, $N' \in (MP)$, $P' \in (MN)$ şi $MM' \cap NN' = \{I\}$.

---

*) Vom folosi de aici înainte de multe ori exprimări de forma: „suma a două laturi", în loc de „suma lungimilor a două laturi", pentru a scurta exprimarea.

c) Înălțimile $[A_1A'_1]$, $[B_1B'_1]$, $[C_1C'_1]$ ale triunghiului $A_1B_1C_1$, dacă:

1) $A_1B_1 = 4{,}6$ cm; $m(\sphericalangle B_1A_1C_1) = 60°$; $m(\sphericalangle A_1B_1C_1) = 70°$;

2) $A_1B_1 = 4$ cm; $m(\sphericalangle A_1B_1C_1) = 90°$; $B_1C_1 = 3$ cm,

3) $A_1B_1 = 3{,}5$ cm; $B_1C_1 = 5$ cm; $m(\sphericalangle A_1B_1C_1) = 110°$, unde $A'_1 \in B_1C_1$; $B'_1 \in C_1A_1$; $C'_1 \in A_1B_1$ și $A_1A'_1 \cap B_1B'_1 = \{H_1\}$.

5. Fie triunghiurile:

a) ABC, în care: $AB = 3$ cm, $BC = 50$ mm, $CA = 0{,}3$ dm;

b) $A'B'C'$, în care: $A'B' = 3$ cm, $B'C' = 0{,}5$ dm, $C'A' = 0,32$ dm;

c) $A_1B_1C_1$, în care: $A_1B_1 = 4$ cm, $B_1C_1 = 40$ mm, $C_1A_1 = 0{,}4$ dm;

d) MNP, în care: $MN = 40$ mm, $NP = 6$ cm, $MP = \frac{2}{3}$ din NP;

e) $M'N'P'$, în care: $M'N' = 5$ cm, $N'P' = 0{,}5$ dm, $M'P' = \frac{M'N' + N'P'}{2}$.

1) Precizați, după caz, în care din aceste triunghiuri sunt:

a) Numai două unghiuri congruente între ele.

b) Toate unghiurile congruente între ele.

c) În care din triunghiurile de mai sus nu există unghiuri congruente între ele.

2) Calculați perimetrul triunghiului, în fiecare caz în parte.

La exercițiile **6–9**, justificați răspunsurile date, scriind în caietele voastre ce proprietăți ale triunghiurilor ați folosit.

6. În triunghiul ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$ și $D \in (BC)$:

a) Dacă $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ și $DC = 4$ cm, calculați lungimea segmentului $[BD]$. Este adevărat că $AD \perp BC$? Punctele B și C sunt sau nu sunt simetrice față de dreapta AD?

b) Dacă $m(\sphericalangle BAD) = 23°$, $m(\sphericalangle CAD) = 21°\ 120'$ și $DC = 7$ cm, calculați lungimea laturii $[BC]$. Este adevărat că $m(\sphericalangle ADC) = 90°$?

c) Dacă $m(\sphericalangle BAC) = 70°$, $m(\sphericalangle BAD) = 35°$ și $BC = 9$ cm, calculați lungimea segmentului $[BD]$. Este adevărat că $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$?

d) Dacă $m(\sphericalangle BAD) = 40°$, $m(\sphericalangle CAD) = 36°239'60''$, calculați măsura unghiului BDA. Cercetați dacă $[BD] \equiv [DC]$ și dacă dreapta AD este axă de simetrie pentru punctele B și C.

7. În triunghiul ABC cu: $[AB] \equiv [AC]$, $D \in (BC)$ și $m(\sphericalangle BAD) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle BAC)$, cercetați dacă:

a) Segmentul $[AD]$ este inclus în bisectoarea unghiului BAC.

b) Bisectoarea unghiului BAC este inclusă în mediatoarea laturii $[BC]$.

c) Înălțimea triunghiului ABC corespunzătoare laturii $[BC]$ se confundă cu mediana triunghiului ABC corespunzătoare aceleiași laturi $[BC]$.

8. În triunghiul ABC cu: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ și $D \in (BC)$.

a) Dacă $AB = 6$ cm, $AD \perp BC$ și $m(\sphericalangle BAC) = 35°$, calculați lungimea laturii $[AC]$ și măsura unghiului BAD. Precizați dacă triunghiul ABC are sau nu are o axă de simetrie.

b) Dacă $AB + AC = 24$ cm şi $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$, calculaţi lungimea laturii $[AB]$. Cercetaţi dacă $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ şi $[BD] \equiv [DC]$.

c) Dacă perimetrul triunghiului ABC este de 20 cm, $BC = 4$ cm şi $BD = 2$ cm, calculaţi lungimea laturii $[AB]$ şi măsura unghiului ADC. Este adevărat că $m(\sphericalangle BAD) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle BAC)$ şi că dreapta AD este axă de simetrie pentru segmentele $[AB]$ şi $[AC]$? Triunghiul ABC are cel mult sau cel puţin o axă de simetrie?

9. În triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$, $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$, $AD \cap BE = \{O\}$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, $CF \perp AB$, $AE = EC$, $AB = 6$ cm şi $BD = 3$ cm.

a) Calculaţi perimetrul triunghiului ABC şi $m(\sphericalangle BEC)$.

b) Cercetaţi dacă dreptele AD şi BE sunt perpendiculare pe dreptele BC şi respectiv CA şi dacă CF este axă de simetrie a triunghiului ABC. Triunghiul ABC are cel mult sau cel puţin o axă de simetrie?

c) Cercetaţi dacă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BAC$.

d) Dreptele AD, BE şi CF sunt concurente două câte două în puncte diferite sau sunt concurente toate în acelaşi punct?

e) Dreptele AD, BE şi CF sunt identice cu mediatoarele sau cu bisectoarele triunghiului ABC?

f) Cercetaţi dacă $OD = OE = OF$.

g) Exprimarea: în triunghiul echilateral ABC segmentul $[AB]$ este simetricul segmentelor $[AC]$ şi $[BC]$ este incompletă. Care este exprimarea completă?

B. PARALELISM

La exerciţiile **10–16,** justificaţi răspunsurile date, scriind în caietele voastre ce proprietăţi ale figurilor geometrice aţi folosit.

Drepte paralele

10. a) Scrieţi definiţia dreptelor paralele şi axioma lui Euclid.

b) Dacă $A \in a$ şi $a \parallel b$, care este ilustrarea grafică a axiomei lui Euclid?

11. În figura 1 ştim că $d_1 \parallel d_2$. Cercetaţi dacă:

a) $\sphericalangle A_4 \equiv \sphericalangle B_2$; b) $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle B_4$; c) $\sphericalangle B_2 \equiv \sphericalangle B_4$; d) $m(\sphericalangle A_4) + m(\sphericalangle B_1) = 180°$; e) $m(\sphericalangle A_2) + m(\sphericalangle B_1) = 180°$; f) În ipoteza suplimentară că $m(\sphericalangle A_1) = 24°$, calculaţi: $m(\sphericalangle A_3)$; $m(\sphericalangle B_1)$; $m(\sphericalangle B_3)$.

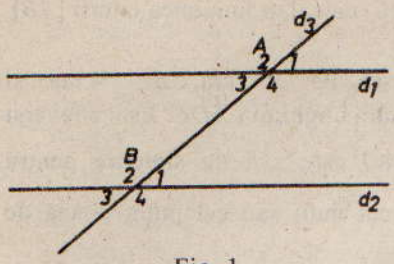


Fig. 1

12. În figura 1, dacă știm că:

a) $\sphericalangle A_4 \equiv \sphericalangle B_2$, este adevărat că $d_1 \parallel d_2$?

b) $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle B_4$, este adevărat că $d_1 \parallel d_2$?

c) $m(\sphericalangle A_1) = 27°$ și $m(\sphericalangle B_4) = 153°$, cercetați dacă $d_1 \parallel d_2$.

d) $m(\sphericalangle A_3) = 48°$ și $m(\sphericalangle B_2) = 132°$, cercetați dacă $d_1 \parallel d_2$.

Unghiuri cu laturile respectiv paralele

13. Despre unghiurile AOB și $A_1O_1B_1$ știm că: $AO \parallel A_1O_1$, $BO \parallel B_1O_1$, $[ON$ este opusă semidreptei $[OA$, $[O_1P$ este opusă semidreptei $[O_1B_1$ și $m(\sphericalangle AOB) = 27°$. Cercetați dacă:

a) $m(\sphericalangle A_1O_1B_1) = 27°$; b) $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle A_1O_1P) = 180°$;

c) $m(\sphericalangle A_1O_1B_1) + m(\sphericalangle BON) = 180°$; d) $m(\sphericalangle A_1O_1P) = 153°$;

e) $m(\sphericalangle BON) + m(PO_1A_1) = 306°$;

f) $360° - 2 \cdot m(\sphericalangle AOB) - m(\sphericalangle BON) - m(\sphericalangle A_1O_1P) = 0°$.

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

14. Fie ABC un triunghi, $D \in BC$ (C între B și D), $CE \parallel AB$, unde A și E aparțin aceluiași semiplan determinat de BC și $P \in (AB)$.

a) Folosind ipoteza $CE \parallel AB$, demonstrați că în triunghiul ABC suma măsurilor unghiurilor triunghiului este egală cu 180°.

b) Este adevărat că dacă $\sphericalangle ACP \equiv \sphericalangle BCP$ și $m(\sphericalangle ACE) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ACD)$, atunci $CP \perp CE$?

15. Fie ABC un triunghi. Este adevărat că:

a) Dacă $AB \perp AC$, atunci $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 90°$ și $m(\sphericalangle B) < 90°$, $m(\sphericalangle C) < 90°$?

b) Dacă $AB = AC$, atunci $m(\sphericalangle B) < 90°$ și $m(\sphericalangle C) < 90°$?

c) Dacă $AB \perp BC$ și $m(\sphericalangle C) = 30°$, atunci $AB = \frac{1}{2} \cdot AC$?

Unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare

16. Despre unghiurile MOP și SOT știm următoarele: $OM \perp OS$, $OP \perp OT$, $[OT$ interioară unghiului SOV, $[OV$ și $[OM$ sunt semidrepte opuse, ca și $[OR$ și $[OS$ și $m(\sphericalangle MOP) = 35°$. Cercetați dacă:

a) $m(\sphericalangle SOT) = 45°$; b) $m(\sphericalangle ROT) = 145°$; c) $\sphericalangle ROT \equiv \sphericalangle POV$;

d) $OT \perp OP$; e) $OV \perp OS$; f) $m(\sphericalangle POS) = 55°$; g) $[OS$ este bisectoarea unghiului MOV.

C. CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR

În exercițiile **17–27**, stabiliți, pentru fiecare exercițiu în parte, dacă perechile de triunghiuri sunt congruente, indicând cazul de congruență și care sunt elementele „respectiv congruente" (congruența elementelor omoloage).

17. În triunghiul ABC, $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm și $m(\sphericalangle B) = 40°$, iar în triunghiul MNP, $MN = 0{,}8$ dm; $MP = 60$ mm și $m(\sphericalangle M) = \frac{2}{3} \cdot 60°$.

18. În triunghiul $A_1B_1C_1$, $A_1B_1 = 5$ cm, $m(\sphericalangle B_1) = 24°$ și $m(\sphericalangle C_1) = 56°$, iar în triunghiul $M_1N_1P_1$, $N_1P_1 = 0{,}05$ m, $m(\sphericalangle N_1) = \frac{1}{2} \cdot 48°$; $m(\sphericalangle P_1) = 100°$.

19. În triunghiul $A_2B_2C_2$, $A_2B_2 = 13{,}4$ cm, $B_2C_2 = 8{,}2$ cm și $C_2A_2 = 7{,}5$ cm, iar în triunghiul $M_2N_2P_2$, $M_2N_2 = 0{,}12$ dm, $M_2P_2 = 1{,}34$ dm, $P_2N_2 = 75$ mm.

20. În triunghiul $A_3B_3C_3$, $A_3B_3 = 7$ cm, $m(\sphericalangle B_3) = 34°$, și $m(\sphericalangle C_3) = 68°$, iar în triunghiul $M_3N_3P_3$, $M_3N_3 = 7$ cm, $m(\sphericalangle M_3) = 78°$ și $m(\sphericalangle N_3) = 34°$.

21. În triunghiul $A'B'C'$, $A'B' + A'C' = 32$ cm, perimetrul triunghiului $A'B'C' = 40$ cm și $m(\sphericalangle B') = m(\sphericalangle C')$, iar în triunghiul $M'N'P'$, $M'N' = M'P' = 16$ cm și $N'P' = 8$ cm.

22. În triunghiul $A_4B_4C_4$, $A_4B_4 = 10$ cm și $m(\sphericalangle B_4) = m(\sphericalangle A_4) = 25°$, iar în triunghiul $M_4N_4P_4$, $M_4N_4 = M_4P_4 = 100$ mm și $m(\sphericalangle M_4) = 130°$.

23. În triunghiul $A_5B_5C_5$, $B_5C_5 = 12$ cm, $C_5A_5 \perp A_5B_5$ și $m(\sphericalangle B_5) = 56°$, iar în triunghiul $M_5N_5P_5$, $m(\sphericalangle M_5) = 90°$, $N_5P_5 = 1{,}2$ dm și $m(\sphericalangle P_5) = 34°$.

24. În triunghiul $A_6B_6C_6$, $A_6B_6 = 9$ cm, $A_6C_6 = 3$ cm și $m(\sphericalangle A_6) = \frac{1}{2} \cdot 180°$, iar în triunghiul $M_6N_6P_6$, $N_6P_6 = 90$mm, $M_6N_6 = \frac{1}{3} \cdot N_6P_6$ și $M_6N_6 \perp N_6P_6$.

25. În triunghiul OST, $m(\sphericalangle O) = 90°$, $OT = 8$ cm și $m(\sphericalangle S) = 30°$, iar în triunghiul DEF, $EF \perp DE$, $DF = 16$ cm și $m(\sphericalangle D) = 60°$.

26. În triunghiul ABC, $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $m(\sphericalangle B) = 90°$, iar în triunghiul MNP, $m(\sphericalangle N) + m(\sphericalangle P) = 90°$; $MN + MP = 7$ cm și $MP = 3$ cm.

27. În triunghiul UVT, $m(\sphericalangle U) + m(\sphericalangle T) = 90°$, perimetrul triunghiului $UVT = 12$ cm, $UT = 5$ cm și $VT - UV = 1$ cm, iar în triunghiul KLM, $m(\sphericalangle L) = 90°$, $KM = 5$ cm, $KL = 3$ cm.

D. PATRULATERE

28. În patrulaterul convex $ABCD$ în care $[AC]$ este o diagonală și:

a) $m(\sphericalangle A) = 70°$, $m(\sphericalangle B) = 120°$ și $m(\sphericalangle C) = 60°$, calculați $m(\sphericalangle D)$;

b) $m(\sphericalangle B) = 85°$ și $m(\sphericalangle C) = 98°$, calculați $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle D)$;

c) $m(\sphericalangle ABD) = 35°$, $m(\sphericalangle ADB) = 55°$, $m(\sphericalangle DBC) = 20°$ şi $m(\sphericalangle CDB) = 70°$, calculaţi $m(\sphericalangle BAD)$ şi $m(\sphericalangle BCD)$.

d) $AC \cap BD = \{O\}$, $AC \perp BD$, $[BO] \equiv [OD]$, $m(\sphericalangle ADB) = 30°$ şi $m(\sphericalangle CDB) = 60°$, calculaţi $m(\sphericalangle BAD)$ şi $m(\sphericalangle BCD)$. Este adevărat că $[BC] \equiv [CD] \equiv [BD]$? Dar că $AO = \frac{1}{2} \cdot AB$?

e) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ şi $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle D) = 130°$, calculaţi $m(\sphericalangle A)$. Este adevărat că $AB \parallel DC$ şi $AD \parallel BC$?

f) $AC \cap BD = \{O\}$, $[AO] \equiv [BO] \equiv [CO]$ şi $m(\sphericalangle ADC) = 90°$, calculaţi $m(\sphericalangle ABC)$. Cercetaţi dacă O este mijlocul segmentului $[BD]$ şi dacă laturile opuse ale patrulaterului $ABCD$ sunt paralele.

g) $[AB] \equiv [AD]$, $m(\sphericalangle DAB) = 90°$ şi $\triangle DAB \equiv \triangle BCD$. Calculaţi măsurile celorlalte trei unghiuri ale patrulaterului $ABCD$. Cercetaţi dacă $AC \perp BD$.

E. PARALELOGRAMUL

29. Folosind o proprietate carcateristică a paralelogramelor relativă la diagonale, ilustraţi grafic paralelogramul $MNPQ$ şi diagonalele lui $[MP]$ şi $[NQ]$ $(MP \cap NQ = \{O\})$.

*
* *

La exerciţiile **30–32** justificaţi răspunsurile date scriind în caietele voastre ce proprietăţi ale paralelogramului aţi folosit.

30. În paralelogramul $MNPQ$ $(MP \cap NQ = \{O\})$ cunoaştem:

a) $MN = 5$ cm şi $NP = 8$ cm. Calculaţi $MN + NP + PQ + QM$.

b) $MN = 5$ cm şi $MN + NP + PQ + QM = 12$ cm. Calculaţi lungimea laturii $[NP]$.

c) $m(\sphericalangle MNP) = 40°$. Calculaţi $m(\sphericalangle NPQ)$ şi $m(\sphericalangle PQM)$.

d) $NQ = 8$ cm şi $PO = 3$ cm. Calculaţi lungimile segmentelor $[NO]$ şi $[MP]$.

31. În patrulaterul convex $A_1B_1C_1D_1$ $(A_1C_1 \cap B_1D_1 = \{O_1\})$, cunoaştem că $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ şi $A_1B_1 = D_1C_1 = 3$ cm. Este adevărat că $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ şi că $[A_1D_1] \equiv [B_1C_1]$? Stabiliţi dacă punctele B_1 şi D_1 sunt simetrice faţă de punctul O_1. Descoperiţi alte două puncte simetrice faţă de O_1.

32. Fie $ABCD$ un paralelogram ($[AC]$ diagonală) de centru O şi d o dreaptă care conţine punctul O. Dacă $d \cap AB = \{E\}$, $d \cap CD = \{F\}$, $d \cap BC = \{G\}$, $d \cap DA = \{H\}$, stabiliţi care dintre punctele E, F, G, H sunt simetrice faţă de O.

Este adevărat că segmentele $[AE]$ şi $[CF]$ sunt simetrice faţă de O? Cercetaţi dacă segmentele $[AH]$ şi $[CG]$ sunt simetrice faţă de O.

F. DREPTUNGHIUL

33. Folosind o proprietate carcatcristică a dreptunghiurilor relativă la diagonale, ilustrați grafic dreptunghiul $MNPQ$ și diagonalele lui $[MP]$ și $[NQ]$ $(MP \cap NQ = \{O\})$.

34. Scrieți proprietățile comune paralelogramelor și dreptunghiurilor. Scrieți o proprietate comună patrulaterelor convexe și dreptunghiurilor.

*
* *

La exercițiile **35–37** justificați răspunsurile date, scriind în caietele voastre ce proprietăți ale dreptunghiului ați folosit.

35. În dreptunghiul $MNPQ$ $(MP \cap NQ = \{O\})$ cunoaștem:

a) $MN = 7$ cm și $NP = 3$ cm. Este adevărat că perimetrul dreptunghiului $MNPQ$ este egal cu 20 cm? Cercetați dacă $m(\sphericalangle QMN) + m(NPQ) = m(\sphericalangle MNP) + m(\sphericalangle PQM)$.

b) $MP = 5$ cm. Calculați $MP + NQ$. Este adevărat că $OM + ON = 5$ cm?

c) $m(\sphericalangle ONP) = 20°$. Calculați $m(\sphericalangle QMP)$. Este adevărat că $m(\sphericalangle NQP) = 70°$?

36. În patrulaterul convex $A_1B_1C_1D_1$ punctul O_1 este intersecția diagonalelor $[A_1C_1]$ și $[B_1D_1]$.

a) Dacă $m(\sphericalangle O_1A_1B_1) = m(\sphericalangle O_1B_1A_1) = m(\sphericalangle O_1C_1D_1)$ și $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, calculați $m(\sphericalangle A_1B_1C_1)$.

b) Dacă $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, $A_1B_1 \parallel D_1C_1$, și $O_1B_1 = \frac{1}{2} \cdot A_1C_1$, calculați $m(\sphericalangle A_1D_1C_1)$. Este adevărat că $[A_1C_1] \equiv [B_1D_1]$?

37. Fie $ABCD$ un dreptunghi ($[AC]$ diagonală) de centru O și d o dreaptă care conține punctul O.

a) Dacă $d \cap AB = \{E\}$, $d \cap BC = \{G\}$, $d \cap CD = \{F\}$, și $d \cap AD = \{H\}$, stabiliți care din punctele E, F, G, H sunt simetrice față de O.

b) Dacă $d \parallel AB$, care dintre laturile dreptunghiului sunt simetrice față de dreapta d?

c) Dacă $d \perp AB$, care dintre laturile dreptunghiului sunt simetrice față de dreapta d?

G. ROMBUL

38. Folosind o proprietate caracteristică a romburilor relativă la diagonale, ilustrați grafic rombul $ABCD$ cu diagonalele lui $[AC]$ și $[BD]$ $(AC \cap BD = \{O\})$.

30. Scrieți proprietățile comune paralelogramelor și romburilor.

*
* *

La exercițiile **40–41** justificați răspunsurile date, scriind în caietele voastre ce proprietăți ale rombului ați folosit.

40. În rombul $ABCD$ ($AC \cap BD = \{O\}$) cunoaștem:

a) $AB = 7$ cm. Calculați perimetrul rombului.

b) $m(\sphericalangle BAD) = 20°$. Calculați $m(\sphericalangle OAD)$, $m(\sphericalangle BCD)$ și $m(\sphericalangle ABC)$. Cercetați dacă $m(\sphericalangle COD) = 90°$ și $m(\sphericalangle ADC) = 140°$.

c) $[AB] \equiv [BD]$. Calculați $m(\sphericalangle BAD)$, $m(\sphericalangle ADC)$ și $m(\sphericalangle CBD)$.

d) $M \in (AB)$, $N \in (DC)$ și că punctele M, O, N sunt coliniare. Demonstrați că punctele M și N sunt simetrice față de O. (Cercetați și situațiile în care $M = A$ sau $M = B$).

41. În patrulaterul convex $MNPQ$, în care $[NQ]$ este o diagonală și $NQ \cap MP = \{O\}$, cunoaștem:

a) $MN = NP = PQ = QM = 1$ cm. Cercetați dacă $MN \parallel QP$.

b) $MN \parallel QP$, $NP \parallel MQ$ și $m(\sphericalangle MON) = 90°$. Stabiliți dacă $[MN] \equiv [NP]$.

c) $MN \parallel QP$, $[MN] \equiv [QP]$ și $\sphericalangle NMO \equiv \sphericalangle QMO$. Demonstrați că $[MN] \equiv [MQ]$.

H. PĂTRATUL

42. Folosind o proprietate caracteristică a pătratelor relativă la diagonale, ilustrați grafic pătratul $ABCD$ și diagonalele lui $[AC]$ și $[BD]$ ($AC \cap BD = \{O\}$).

43. Enumerați proprietățile comune dreptunghiurilor și pătratelor . Scrieți o proprietate comună patrulaterelor convexe, paralelogramelor și pătratelor.

*
* *

La exercițiile **44–46** justificați răspunsurile date, scriind în caietele voastre ce proprietăți ale pătratelor ați folosit.

44. În pătratul $ABCD$ ($AC \cap BD = \{O\}$) cunoaștem:

a) $AB = 3$ cm. Calculați $AB + BC + CD + DA$. Este adevărat că $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle CDA) = 180°$?

b) $OB = 1$ cm. Calculați AC. Este adevărat că $m(\sphericalangle BOC) = 90°$ și $m(\sphericalangle BCO) = 45°$?

c) $OE \parallel AD$ ($E \in (DC)$). Calculați OE, dacă $AD = 3$ cm. Este adevărat că OE este mediatoarea segmentului $[AB]$?

45. În patrulaterul convex $A_1B_1C_1D_1$ punctul O_1 este intersecția diagonalelor $[A_1C_1]$ și $[B_1D_1]$.

a) Dacă $A_1B_1 \parallel D_1C_1$, $m(\sphericalangle A_1D_1C_1) + m(\sphericalangle B_1C_1D_1) = 180°$, $m(\sphericalangle A_1B_1C_1) = 90°$ și $m(\sphericalangle B_1C_1A_1) = 45°$, calculați $m(\sphericalangle A_1O_1B_1)$. Este adevărat că $[D_1C_1] \equiv [D_1A_1]$?

b) Dacă $A_1C_1 \perp B_1D_1$, $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1D_1$ și $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, calculați $m(\sphericalangle B_1C_1D_1)$. Este adevărat că $[A_1B_1] \equiv [B_1C_1]$?

46. Fie $ABCD$ un pătrat ($[AC]$ diagonală) de centru O și d o dreaptă care conține punctul O.

a) Dacă $d \nparallel AB$ și $d \nparallel BC$, notați cu M, N, P, Q intersecțiile dreptei d respectiv cu AB, BC, CD, DA. Care dintre aceste puncte sunt simetrice față de O?

b) Dacă $[BD] \subset d$, cercetați dacă $[AB]$ și $[AD]$ sunt respectiv simetricele segmentelor $[CB]$ și $[CD]$ față de d. Care este simetricul lui B față de d?

c) Dacă $d \parallel AB$, este adevărat că $[AB]$ este simetricul lui $[DC]$ față de d?

d) Dacă $d \perp AB$, care sunt simetricele segmentelor $[AO]$ și $[DO]$ față de dreapta d? Dar simetricul punctului O față de d?

I. TRAPEZUL

47. Folosind proprietatea caracteristică a trapezului isoscel relativă la diagonale, ilustrați grafic trapezul isoscel $ABCD$ și diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ $(AC \cap BD = \{O\})$.

48. Scrieți proprietățile comune:

a) patrulaterelor convexe și trapezelor; b) paralelogramelor și trapezelor.

La exercițiile **49–50** justificați răspunsurile date, scriind în caietele voastre care dintre proprietățile trapezelor ați folosit.

49. În trapezul isoscel $ABCD$, în care $AC \cap BD = \{O\}$, cunoaștem:

a) $AB = DC = 3$ cm și $AD = \frac{1}{2} \cdot BC = 4$ cm. Calculați $AB + BC + CD + DA$.

b) $AO = 1$ cm și $BO = 3$ cm. Calculați $AC + BD$.

c) $m(\sphericalangle DBC) = 15°$ și $m(\sphericalangle BAD) = 120°$. Calculați $m(\sphericalangle CDA)$ și $m(\sphericalangle ACD)$.

50. În patrulaterul convex $A_1B_1C_1D_1$, în care $A_1C_1 \cap B_1D_1 = \{O_1\}$, cunoaștem:

a) $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, $m(\sphericalangle A_1B_1C_1) = m(\sphericalangle D_1C_1B_1) = 40°$ și $D_1C_1 = 4$ cm. Calculați lungimea segmentului $[A_1B_1]$.

b) $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, $O_1B_1 = O_1C_1 = 6$ cm și $O_1D_1 = 2$ cm. Calculați lungimea segmentului $[A_1C_1]$.

c) $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, $B_1D_1 \perp D_1C_1$ și $A_1B_1 = D_1C_1 = \frac{1}{2} \cdot B_1C_1$ Este adevărat că $[A_1C_1] \equiv [D_1B_1]$? Calculați $m(\sphericalangle D_1B_1C_1)$ și $m(\sphericalangle B_1C_1D_1)$.

J. LINIA MIJLOCIE ÎN TRIUNGHI ȘI TRAPEZ

La exercițiile **51–55** justificați răspunsurile date, scriind în caietele voastre ce proprietăți ale triunghiurilor sau trapezelor ați folosit.

51. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, D, E, F mijloacele laturilor $(D \in (AB)$, $E \in (BC)$, $F \in (AC))$ și A_1, A_2 picioarele înălțimii, respectiv bisectoarei din A ale

acestui triunghi. Notăm $AA_1 \cap DF = \{P\}$, $AA_2 \cap DF = \{R\}$, $AE \cap DF = \{S\}$. Cercetați dacă:

a) $DF \parallel BC$; b) $[DF] \equiv [BE]$; c) $FE \parallel AB$; d) $DE = \frac{1}{2} \cdot AC$; e) $[AP] \equiv [PA_1]$; f) $[AR] \equiv [RA_2]$; g) Patrulaterul $ADEF$ este paralelogram; h) $[DS] \equiv [SF]$; i) $PR = \frac{1}{2} \cdot A_1A_2$.

52. Presupunem că triunghiul ABC din exercițiul **51** este isoscel ($\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$). Cercetați dacă:

a) $P = R = S$ (puncte identice); b) $P \in (AE)$; c) $AE \perp DF$; d) patrulaterul $ADEF$ este romb.

53. Presupunem că triunghiul ABC din exercițiul **51** este isoscel și dreptunghic ($m(\sphericalangle A) = 90°$). Cercetați dacă:

a) $[DF] \equiv [AE]$; b) $DF \perp AE$; c) $AE = \frac{1}{2} \cdot BC$; d) punctul S este egal depărtat față de punctele A, D, E, F; e) patrulaterul $ADEF$ este pătrat.

54. Fie $ABCD$ un trapez în care $AD \parallel BC$, $[BD]$ este o diagonală, $[EF]$ este linie mijlocie ($E \in (AB)$), $AD = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Notăm $EF \cap BD = \{P\}$ și $EF \cap CA = \{R\}$. Cercetați dacă:

a) $EF \parallel AD$; b) $EF = 7$ cm; c) $EP = RF = 3$ cm; d) $PR \parallel BC$; e) $PR = 1$ cm.

55. Fie $MNPR$ un trapez isoscel ($MR \parallel NP$, $[NR]$ diagonală și $[MN] \equiv [RP]$) în care $MR = 6$ cm. Paralela prin M la RP și paralela prin R la MN se intersectează într-un punct S care aparține bazei $[NP]$. Calculați lungimea liniei mijlocii $[EF]$ a trapezului $MNPR$.

K. PROBLEME

56. Dacă $ABCD$ este un paralelogram și dacă înălțimea din A pe CD este congruentă cu cea din A pe BC, atunci paralelogramul este romb.

57. Într-un patrulater convex diagonalele sunt și bisectoare. Precizați natura lui (cu ce patrulater avem de-a face).

58. Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ ale unui triunghi luăm respectiv punctele C', A', B'. Demonstrați că perimetrul triunghiului ABC este mai mare decât cel al triunghiului $A'B'C'$.

59. În triunghiul ABC unghiurile B și C au respectiv 70° și 60°. Fie $[BB']$, $[CC']$ înălțimi și $[BD$ bisectoare. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului format de dreptele BB', CC', BD.

60. Fie $ABCD$ un pătrat și punctele M, N, P, Q respectiv pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, astfel încât $MP \perp QN$. Demonstrați că $[MP] \equiv [QN]$.

61. În triunghiul OAB din figura 2 segmentele $[AC]$, $[CD]$, $[DB]$ sunt congruente. Să se demonstreze că unghiurile O_1, O_2, O_3 nu pot fi toate congruente între ele.

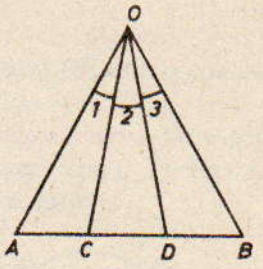


Fig. 2

62. Dându-se patru puncte M, N, P, Q, desenați prin fiecare din ele câte o dreaptă astfel încât ele să determine un pătrat.

63. Fie B, C puncte fixe. Se știe că înălțimea din A a triunghiului ABC are 2 cm. Care este locul geometric al punctului A?

64. Se dă triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), fie $[AH]$ înălțimea din A și P un punct oarecare pe baza $[BC]$; perpendiculara în P pe bază intersectează dreptele AB și AC respectiv în M și N. Să se arate că:

a) Triunghiul AMN este isoscel.

b) $AH = \frac{1}{2} \cdot (MP + NP)$. Să se deducă de aici că suma $MP + NP$ este constantă când P parcurge segmentul $[BC]$.

c) Care este locul geometric al mijlocului segmentului $[MN]$?

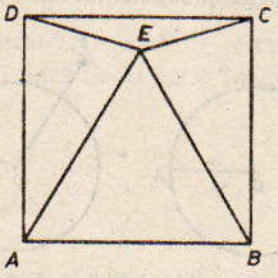


Fig. 3

65. Triunghiul ABC este isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$ și unghiul A cu măsura de 100°. „Prelungim" latura $[AB]$ cu segmentul $[BD]$ astfel încât $[AD] \equiv [BC]$. Se cere măsura unghiului ADC. (Indicație: se completează trapezul isoscel $ACED$, unde $DE \parallel AC$.)

66. În interiorul pătratului $ABCD$ se ia un punct E astfel încât triunghiul ABE să fie echilateral (fig. 3).

a) Să se demonstreze că triunghiul ECD este isoscel.

b) Să se determine măsurile unghiurilor AED și CDE.

I. CERCUL

§ 1. CERCUL. DEFINIȚII

D e f i n i ț i e. Dacă se dă un punct fix O și un număr pozitiv r și considerăm toate punctele care se găsesc la distanța r de punctul O, mulțimea acestor punctе o vom numi *cerc* de centru O și de rază r și putem s-o notăm $\mathcal{C}(O, r)$.

Definiția cercului o mai putem formula și astfel:

Se numește cerc locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix, numit centru.

Distanța de la centru la un punct al cercului se numește *rază*. Uneori prin *rază* se înțelege și segmentul care unește centrul O cu un punct A al cercului. În figura 4, *a* este desenat un cerc de centru O și de rază OA ($OA = r$).

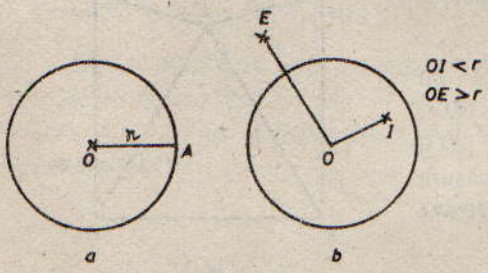


Fig. 4

Toate punctele care sunt față de centrul cercului la distanțe mai mici decât raza alcătuiesc *interiorul cercului*. Punctul I din figura 4, *b* este un punct din interiorul cercului ($OI < r$). Deci, centrul unui cerc aparține interiorului cercului și nu cercului.

Toate punctele care sunt față de centrul cercului la distanțe mai mari decât raza alcătuiesc *exteriorul cercului*. Punctul E din figura 4, *b* este un punct din exteriorul cercului ($OE > r$).

T e o r e m ă. **Dacă trei puncte sunt necoliniare, atunci ele determină un cerc și numai unul.**

Această teoremă, pe care nu o vom demonstra, afirmă două lucruri: 1) că prin trei puncte necoliniare „trece" un cerc și 2) că acest cerc este unic (în sensul că nu mai există încă un alt cerc, diferit de primul, care să „treacă" prin aceleași trei puncte necoliniare).

D e f i n i ț i e. **Două cercuri se numesc congruente dacă raza primului cerc este egală cu raza celui de-al doilea cerc.**

§ 2. COARDĂ[1)]

Definiţie. Segmentul cu capetele în două puncte ale unui cerc se numeşte coardă (pentru acel cerc). În figura 5, segmentul $[AB]$ este o coardă în cercul de centru O.

Coarda care conţine şi centrul cercului se numeşte diametru, iar capetele diametrului se numesc **puncte diametral opuse** (în acel cerc). În figura 6, segmentul $[MN]$ este un diametru în cercul de centru O ($O \in (MN)$).

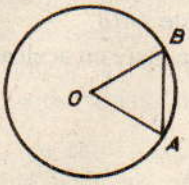


Fig. 5

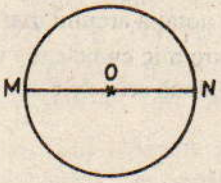


Fig. 6

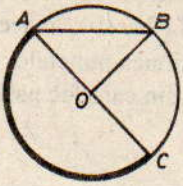


Fig. 7

Teoremă. Lungimea unei coarde ce nu conţine centrul cercului este mai mică decât 2 r (r fiind raza cercului).

Demonstraţia. În triunghiul AOB, care are vârful O în centrul cercului şi $OA = OB = r$ (fig. 7), lungimea laturii $[AB]$ este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două:

$$AB < OA + OB.$$

Cum $OA = OB = r$, rezultă că $AB < r + r$ sau $AB < 2r$.

q.e.d.

Observaţie. Cum $OB = OC$ (ca raze în cerc), rezultă că relaţia $AB < OA + OB$ mai poate fi scrisă $AB < OA + OC$. Cum A, O, C sunt puncte coliniare, putem scrie $AB < AC$, de unde putem formula:

Teoremă. Într-un cerc, diametrul este cea mai mare dintre coarde.

§ 3. UNGHI LA CENTRU

Definiţie. Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numeşte unghi la centru (pentru cercul respectiv).

În figura 8 este desenat un unghi la centru, iar în figura 7 unghiurile AOB şi BOC sunt unghiuri la centru.

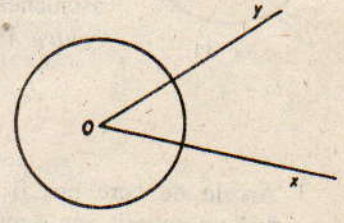


Fig. 8

[1)] Cuvântul „coardă" vine din limba latină: *chorda* = coardă, strună.

§ 4. ARC[1] DE CERC

D e f i n i ţ i i. Dacă A şi B sunt două puncte distincte ale unui cerc cu centrul în O, atunci intersecţia acestui cerc cu interiorul unghiului la centru AOB, reunită cu punctele A şi B, se numeşte *arcul mic* AB şi se notează $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 9). Punctele A şi B se numesc *capetele arcului* (sau *extremităţile arcului*).

Mulţimea punctelor din exteriorul unghiului la centru AOB care aparţin cercului, reunită cu punctele A şi B, se numeşte *arcul mare* AB. Pentru notarea unui arc mare este nevoie să folosim încă un punct al arcului, diferit de capetele lui, de exemplu M (fig. 10); în acest caz notaţia arcului mare AB este $\overset{\frown}{AMB}$.

Reuniunea punctelor unui arc mic cu cele ale unui arc mare cu aceleaşi capete este cercul din care fac parte cele două arce de cerc.

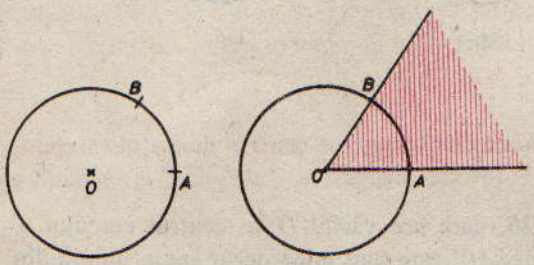


Fig. 9

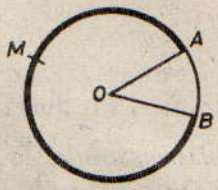


Fig. 10

Punctele A, B ale unui cerc sunt extremităţi atât pentru arcul AB cât şi pentru coarda $[AB]$. Se spune în acest caz că „arcul AB este subîntins de coarda $[AB]$", iar „coarda $[AB]$ subîntinde arcul AB".

Dacă cele două capete ale unui arc de cerc sunt extremităţile unui diametru, atunci arcul de cerc se numeşte *semicerc*. Deci diametrul „subîntinde" un semicerc.

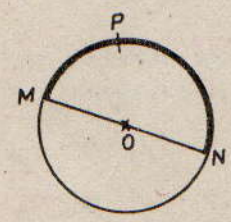


Fig. 11

În figura 11 este desenat semicercul $\overset{\frown}{MPN}$. Oricare diametru determină în cerc două semicercuri.

Într-un cerc cu centrul în O, între arcul de cerc AB şi unghiul la centru AOB există o strânsă legătură. Se spune că *unghiul la centru* AOB *determină pe cerc arcul* AB; de asemenea, se spune că *arcul* AB *corespunde unghiului la centru* AOB.

§ 5. MĂSURA UNUI ARC DE CERC

Arcele de cerc pot fi „măsurate". Ca unitate de măsură pentru arce se consideră un anumit arc, numit „arcul de un grad", care corespunde unui unghi la centru cu măsura de un grad.

[1] Cuvântul „*arc*" vine din limba latină: *arcus*.

Definiție. Măsura unui arc mic AB, din cercul de centru O, exprimată în „grade de arc“[1], este egală cu măsura unghiului la centru AOB exprimată în „grade de unghi“ și se notează $m(\overset{\frown}{AB})$.

Măsura arcului mare AB, din cercul de centru O, exprimată în „grade de arc“, este egală cu diferența dintre 360° și măsura unghiului la centru AOB (exprimată în „grade de unghi“).

Din cele de mai sus rezultă că măsura unui semicerc este de 180°, iar un cerc „întreg“ are 360°.

Observație: Fiind date mai multe cercuri concentrice cu centrul în O de raze OA_1, OA_2, OA_3,... etc. și un unghi la centru AOB (fig. 12), se constată că acest unghi determină pe cercurile concentrice arcele mici de cerc $\overset{\frown}{A_1B_1}$, $\overset{\frown}{A_2B_2}$, $\overset{\frown}{A_3B_3}$,... . Aceste arce, corespunzând aceluiași unghi la centru, au măsurile egale:

$$m(\overset{\frown}{A_1B_1}) = m(\overset{\frown}{A_2B_2}) = m(\overset{\frown}{A_3B_3}) = \dots .$$

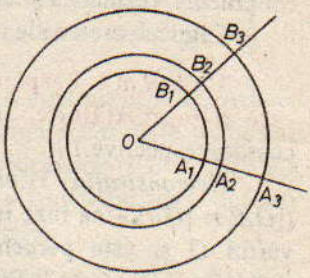


Fig. 12

Trebuie să nu se confunde „măsura unui arc de cerc“ (care este exprimată în grade) cu „lungimea unui arc de cerc“ (care este exprimată în unități de lungime). În cazul unor cercuri concentrice, același unghi la centru determină pe cercurile respective arce de cerc care au aceeași măsură dar lungimi diferite.

§ 6. ARCE CONGRUENTE

Definiție. Două sau mai multe arce ale aceluiași cerc sau făcând parte din cercuri congruente se numesc *arce congruente* dacă au aceeași măsură.

Faptul că arcele $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{MN}$ sunt congruente se scrie: $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{MN}$.

Teoremă. **În același cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente** (arcele congruente sunt subîntinse de coarde congruente).

Vom face demonstrația pentru arce congruente din același cerc. În cazul arcelor din cercuri congruente, demonstrația se face la fel.

Fie, în cercul de centru O (fig. 13), arcele congruente $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{CD}$ ($\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$). Conform definiției măsurii unui arc de cerc, arcelor congruente le corespund unghiuri la centru congruente, deci:

$$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD \quad (1)$$

Cum $AO = CO = r$ (2) și $BO = DO = r$ (3), rezultă, din (1), (2) și (3), că $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (LUL). Ca urmare, $[AB] \equiv [CD]$.

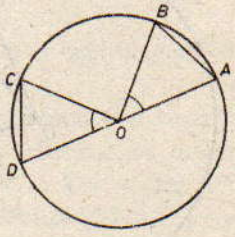


Fig. 13

[1] De aici încolo vom numi *gradele de arc* pe scurt „grade“, ca pe *gradele de unghi*. Prin măsura unui arc sau a unui unghi se înțelege un număr.

Teoremă reciprocă. În același cerc sau în cercuri congruente, la coarde congruente corespund arce congruente (coardele congruente subîntind arce congruente).

Pentru demonstrarea acestei teoreme se folosește al treilea caz de congruență a triunghiurilor oarecare (LUL). Câte două dintre laturi sunt congruente ca raze în același cerc și cele „de a treia" laturi sunt coardele congruente din ipoteză. De aici rezultă că unghiurile la centru sunt congruente. Unghiurile la centru fiind congruente, rezultă că și arcele de cerc ce le corespund sunt congruente.

Câteva teoreme ale căror demonstrații sunt simple:

Teoremă. Perpendiculara din centrul unui cerc pe o coardă a aceluiași cerc o înjumătățește. (Diametrul perpendicular pe o coardă este mediatoarea coardei respective.)

Demonstrația. Triunghiul OAB (fig. 14) este isoscel ($[OA] \equiv [OB]$ – ca raze în cerc), iar dreapta d, care conține vârful O și este perpendiculară pe baza AB ($d \perp AB$, $d \cap AB = \{D\}$), este înălțimea corespunzătoare bazei și deci este și mediatoare ($[AD] \equiv [DB]$).

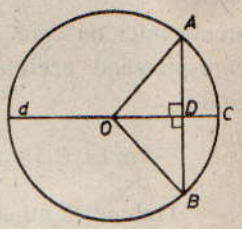


Fig. 14

q.e.d.

Cum într-un triunghi isoscel înălțimea corespunzătoare bazei este și bisectoarea unghiului de la vârf, rezultă că $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOC$. Dar acestea sunt niște unghiuri la centru, iar congruența lor implică și congruența arcelor de cerc ce le corespund: $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{BC}$. Am demonstrat astfel și următoarea teoremă.

Teoremă. Dacă un diametru este perpendicular pe o coardă a aceluiași cerc, atunci el determină, pe fiecare din arcele subîntinse de coardă, arce congruente.

Teoremă. În același cerc sau în cercuri congruente, dacă două coarde sunt congruente, atunci ele sunt egal depărtate de centru și reciproc.

Demonstrația a fost, de fapt, făcută, ținând seama că în două triunghiuri congruente înălțimile corespunzătoare laturilor omoloage sunt și ele congruente.

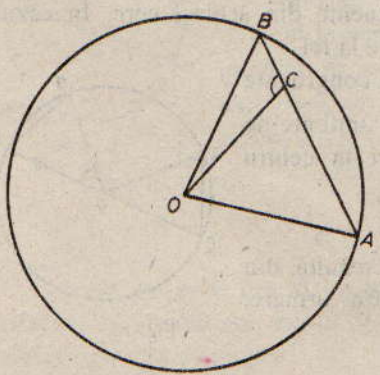


Fig. 15

Teoremă. Toate punctele unei coarde sunt, față de centru, la distanțe mai mici decât raza cercului.

Demonstrație. Fie C un punct ce aparține coardei $[AB]$ (fig. 15). Cel puțin unul dintre unghiurile OCA și OCB nu este unghi ascuțit. Fie (fără a micșora generalitatea) unghiul OCB unghi drept sau unghi obtuz. În triunghiul OBC unghiului mai mare ($\sphericalangle OCB$) i se opune latura mai mare ($[OB]$). Deci $OC < OB = r$.

§ 7. POZIȚIILE RELATIVE ALE UNEI DREPTE FAȚĂ DE UN CERC

Afirmăm că numai unul din următoarele cazuri poate avea loc:

O dreaptă poate avea, cu un cerc, fie *exact două puncte comune*, fie *un singur punct comun*, fie *nici un punct comun*.

Pentru a demonstra aceasta, trebuie să arătăm în prealabil că:

1) *O dreaptă nu poate avea mai mult de două puncte distincte comune cu un cerc.*

Presupunem, prin absurd, că o dreaptă ar avea trei puncte comune cu un cerc.

Fie O centrul cercului și A, B, C cele trei puncte distincte coliniare, care ar aparține și cercului (fie, de pildă, B între A și C) (fig. 16).

Ducem bisectoarele $[OM$ a unghiului AOB și $[ON$ a unghiului BOC. Atunci triunghiurile AOB și OBC ar fi isoscele, iar bisectoarele unghiurilor de la vârfuri ar fi perpendiculare pe AB, respectiv pe BC; deci pe dreapta $d(AB = BC = d)$. Ar însemna că din punctul O am obținut două perpendiculare distincte pe una și aceeași dreaptă, ceea ce este absurd, și deci teorema a fost demonstrată.

2) *Există drepte care au două puncte comune cu un cerc.*

Afirmația se demonstrează imediat. Fie A și B două puncte distincte ale unui cerc. Considerăm dreapta AB determinată de aceste puncte. Această dreaptă nu

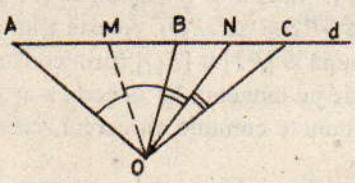


Fig. 16

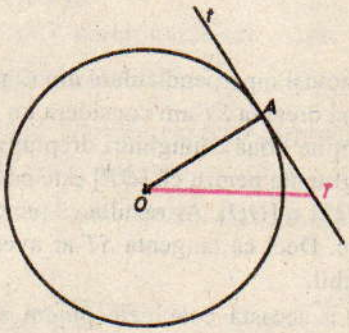


Fig. 17

poate avea, așa cum am arătat înainte, încă un punct comun cu cercul! Afirmația este astfel demonstrată. O astfel de dreaptă, care are două puncte comune cu un cerc, se numește *secantă* (pentru cercul respectiv).

3) *Există drepte care au un singur punct comun cu cercul.*

Vom numi aceste drepte *tangente* la cerc. Punctul comun al unei tangente cu cercul se numește punct de tangență.

Pentru a dovedi că există astfel de drepte, să luăm un punct A al cercului de centru O. Ducem în A o perpendiculară t pe raza $[OA]$. Afirmăm că oricare punct al dreptei t, diferit de A, este exterior cercului. Fie $T \in t$, $T \neq A$ (fig. 17). Triunghiul OAT este dreptunghic în A, și fiindcă OT este ipotenuză, $OT > OA = r$. Deci punctul T este exterior cercului. Există, deci, drepte tangente la cerc (care au un singur punct comun cu cercul). O dată cu demonstrarea existenței tangentei am

demonstrat implicit că tangenta este perpendiculară pe rază în punctul de contact.

Să demonstrăm acum şi reciproca:

Dacă T este un punct al unui cerc dat de centru O şi ST tangenta sa în punctul T, atunci raza OT este perpendiculară pe această tangentă.

Demonstraţia o vom face prin reducere la absurd. Presupunem că ST este tangentă în T, dar că nu ar fi perpendiculară pe raza OT (fig. 18). Atunci ar

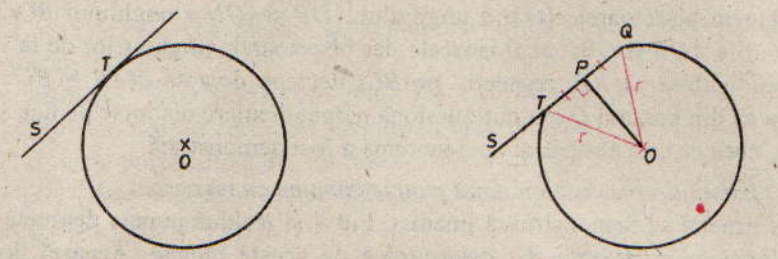


Fig. 18

exista totuşi o perpendiculară din O pe ST. Fie OP această perpendiculară ($P \in ST$). Dacă pe dreapta ST am considera un punct Q (P între T şi Q), astfel ca $[TP] \equiv [PQ]$, s-ar obţine două triunghiuri dreptunghice ($\triangle OPT$ şi $\triangle OPQ$). Aceste triunghiuri ar fi congruente pentru că $[OP]$ este catetă comună şi $[PT] \equiv [PQ]$ (prin construcţie) şi deci $[OT] \equiv [OQ]$. Ar rezulta că punctul Q, de pe tangenta ST la cerc, s-ar găsi şi el pe cerc. Deci că tangenta ST ar avea două puncte comune cu cercul, ceea ce este imposibil.

La această concluzie putem ajunge şi mai repede, ţinând seama de faptul că în triunghiul dreptunghic OPT: $OP < OT = r$ (cateta este mai „mică" decât ipotenuza-rază). Ar însemna că tangenta ar avea un punct în interiorul cercului, ceea ce este imposibil.

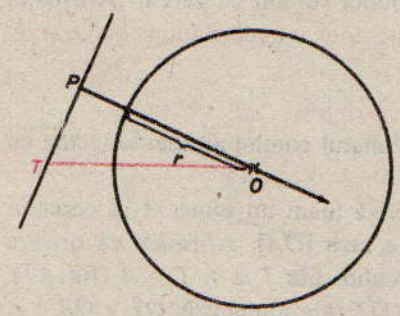


Fig. 19

4) Să arătăm, în fine, că există şi drepte exterioare cercului (care nu au nici un punct comun cu cercul).

Fie $\mathcal{C}(O, r)$ (un cerc de centru O şi de rază r) şi un punct P astfel încât $OP > r$ (adică P exterior cercului). Ducem în P o perpendiculară d pe OP (fig. 19). Oricare ar fi $T \in d$ ($T \neq P$), avem $OT > OP$ (ipotenuza este mai „mare" decât cateta). Deci, orice punct al dreptei d este exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ şi deci dreapta d este exterioară cercului.

§ 8. UNGHI ÎNSCRIS ÎN CERC

Definiție. **Se numește unghi înscris în cerc unghiul cu vârful pe cerc și care are ca laturi două coarde.**

În figura 20 sunt desenate trei unghiuri înscrise în cerc ($\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle MNP$ și $\sphericalangle RST$).

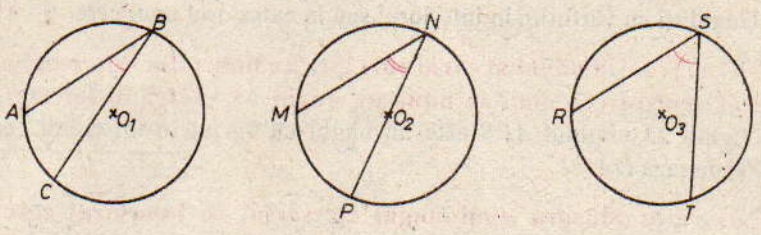
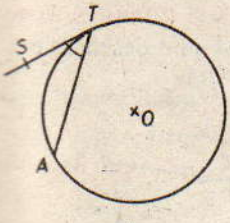


Fig. 20

Teoremă. **Măsura unui unghi cu vârful pe cerc care are una dintre laturi secantă iar cealaltă tangentă este jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.**

Demonstrația. În figura 21, *a*, unghiul *ATS* este un unghi format de secanta *TA* și tangenta *TS*. Ducem din *O*, centrul cercului, perpendiculara *OQ* pe coarda *TA* (fig. 21, *b*), care intersectează cercul în *P* (*OP* – rază).

În triunghiul isoscel *AOT*, înălțimea *OQ* corespunzătoare bazei este și bisectoarea unghiului de la vârf ($\sphericalangle AOT$), deci $m(\sphericalangle POT) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle AOT)$. Dar unghiurile *POT* și *ATS* sunt congruente, având laturile respectiv perpendiculare ($OT \perp TS$ – raza în punctul de tangență este perpendiculară pe tangentă; $OP \perp TA$ – prin construcție). Deci $m(\sphericalangle ATS) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle AOT)$. Cum unghiul *AOT*



a

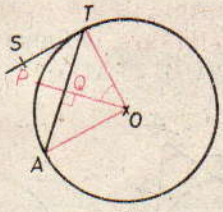
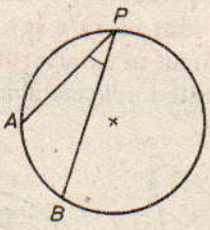


Fig. 21 *b*



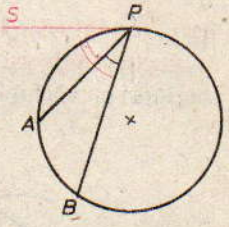


Fig. 22

este un unghi la centru, iar măsura sa este egală cu măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale, avem și $m(\sphericalangle ATS) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{APT})$.

q.e.d.

Teorema. **Măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.**

Demonstrația. Fie $\sphericalangle APB$ un unghi înscris în cerc (fig. 22). Ducem tangenta *PS* la cerc. Unghiul *APB* apare acum ca diferență a unghiurilor *SPB* și *SPA*, măsura

lui fiind deci egală cu diferența măsurilor semiarcelor PAB și PA, deci $m(\sphericalangle APB) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AB})$.

q.e.d.

Aplicații:

1. Unghiuri cu vârfurile în interiorul sau în exteriorul unui cerc.

Definiție. **Un unghi al cărui vârf este un punct din interiorul unui cerc, altul decât centrul cercului, se numește unghi cu vârful în interiorul acelui cerc.** În figura 23 unghiul APB este un unghi cu vârful în interiorul cercului de centru O și de rază OA.

Teoremă: **Măsura unui unghi cu vârful în interiorul cercului este egală cu semisuma măsurilor arcelor cuprinse între laturile unghiului și prelungirile laturilor lui.**

Demonstrația. Fie $[AC]$ și $[BD]$ două coarde și $\sphericalangle APB$ un unghi cu vârful în interiorul unui cerc (fig. 23). Ducem coarda $[AD]$ și constatăm că unghiul APB este un unghi exterior triunghiului PAD, deci are măsura egală cu suma măsurilor unghiurilor PAD și PDA (interioare și neadiacente cu el), care sunt unghiuri înscrise în cerc și deci au ca măsuri jumătăți ale măsurilor arcelor mici CD și AB. Putem deci scrie $m(\sphericalangle APB) = \frac{1}{2} \cdot [m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{AB})]$.

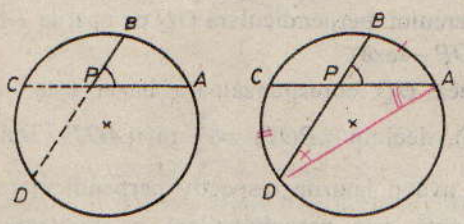


Fig. 23

q.e.d.

Definiție. **Un unghi al cărui vârf este un punct din exteriorul unui cerc, iar laturile lui sunt secante sau tangente (sau o secantă și o tangentă) se numește unghi cu vârful în exteriorul acelui cerc.** În figura 24 sunt desenate trei unghiuri cu vârful în exteriorul cercului ($\sphericalangle BMD$, $\sphericalangle FNG$ și $\sphericalangle T_1PT_2$).

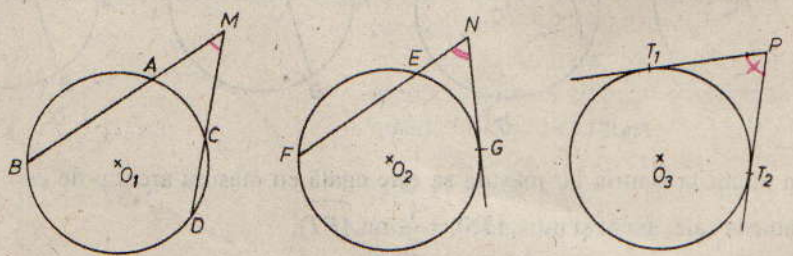


Fig. 24

Teoremă. **Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul cercului este egală cu jumătate din valoarea absolută a diferenței măsurilor arcelor cuprinse între laturile lui.**

Demonstrația. a) În cazul când ambele laturi sunt secante.

Fie $\sphericalangle APD$ un unghi cu vârful în exteriorul cercului O_1 și cu laturile secante (fig. 25, *a*). Ducem coarda $[BD]$ și constatăm că unghiul ABD este un unghi exterior triunghiului PBD. Măsura unghiului APD poate fi exprimată ca diferență a măsurilor ABD și BDP ($m(\sphericalangle APD) = m(\sphericalangle ABD) - m(BDC)$). Ambele unghiuri din membrul doi sunt unghiuri înscrise în cerc, deci:

$$m(\sphericalangle APD) = \frac{1}{2} \cdot [m(\overset{\frown}{AD}) - m(\overset{\frown}{BC})].$$

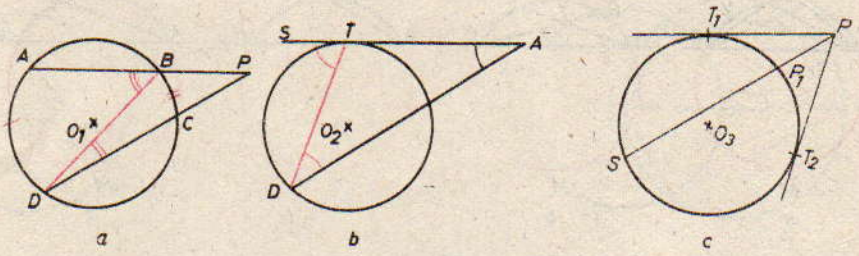


Fig. 25

b) În cazul când una dintre laturi este secantă, iar cealaltă tangentă.

Fie $\sphericalangle TAD$ un unghi cu vârful în exteriorul cercului O_2 și cu laturile AD secantă și AT tangentă (fig. 25, *b*). Ducem coarda $[TD]$ și procedăm analog.

c) În cazul când ambele laturi sunt tangente.

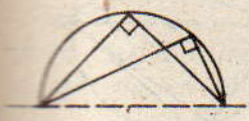
Vom folosi figura 25, *c*. Ducem dreapta PP_1, care intersectează a doua oară cercul în S. Unghiul T_1PT_2 este suma unghiurilor T_1PS și T_2PS, care sunt unghiuri formate de o coardă și o tangentă (cazul *b*)). Prin însumarea măsurilor celor două unghiuri se găsește măsura unghiului T_1PT_2.

2. Unghiuri înscrise într-un semicerc.

Toate unghiurile înscrise într-un semicerc sunt unghiuri drepte. Acest adevăr este evident dacă se completează cercul cu celălalt semicerc (fig. 26). Unghiurile înscrise într-un semicerc au ca măsuri jumătate din 180°, deci 90°.

Generalizare. **Toate unghiurile care au vârful pe un arc de cerc și ale căror laturi conțin capetele arcului sunt congruente.**

Demonstrația congruenței se face completând cercul din care face parte arcul de cerc considerat (fig. 27). Dacă măsura unghiurilor cu vârful pe acest arc de cerc este $\alpha°$, arcul de cerc se numește *arc capabil de* $\alpha°$.



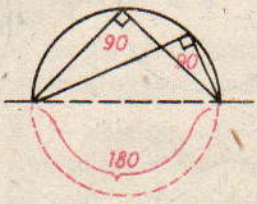
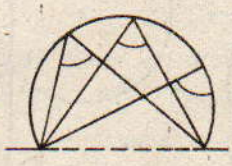


Fig. 26



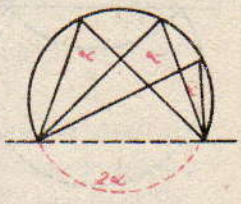


Fig. 27

Să ne ocupăm acum și de reciproca acestei proprietăți. Să considerăm un arc de cerc AB și semiplanul în care acest arc este inclus. Am demonstrat că toate unghiurile AVB, cu V aparținând acestui arc de cerc, au aceeași măsură (fig. 28, *a*). Să notăm această măsură cu m. Vrem să arătăm că, în acest semiplan, dintre toate unghiurile ale căror laturi conțin punctele A, respectiv B, numai unghiurile acestea (AVB) au măsura m.

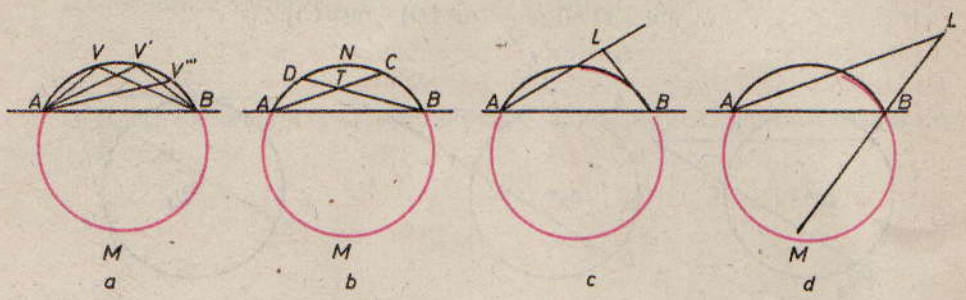


Fig. 28

Într-adevăr, fie un punct oarecare T din acest semiplan și interior cercului (fig. 28, *b*). Dreapta AT intersectează a doua oară cercul în C, iar dreapta BT în D. Unghiul ATB fiind un unghi cu vârful în interiorul cercului, putem scrie:

$$m(\sphericalangle ATB) = \frac{1}{2} \cdot [m(\overset{\frown}{AMB}) + m(\overset{\frown}{DNC})] > m(\overset{\frown}{AM}) = m.$$

Pentru ca un punct oarecare L din semiplanul arcului de cerc și exterior cercului (fig. 28, *c*) se demonstrează, similar, că măsura unghiului ALB este mai mică decât m.

În semiplanul opus, punctele care au aceeași proprietate (de a fi vârfuri ale unui unghi cu măsura m și ale cărui laturi să conțină punctele A, respectiv B) se află pe un arc de cerc simetric cu arcul inițial, axa lor de simetrie fiind coarda AB (fig. 29).

În particular putem afirma că, dându-se un segment (AB), mulțimea punctelor M astfel încât AM și MB să fie perpendiculare este cercul de diametru (AB) – mai puțin punctele A și B (fig. 30).

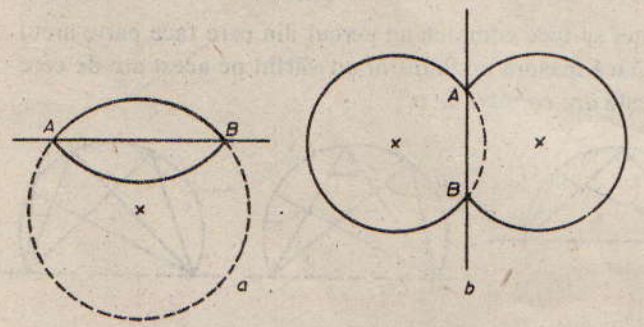


Fig. 29

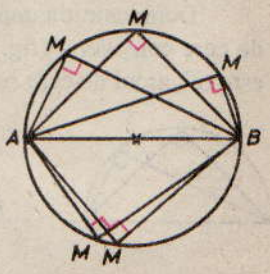


Fig. 30

Şi acum să revenim la tangentă. Vrem să demonstrăm că:

Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce două tangente la acest cerc şi numai două.

Fie O centrul cercului şi A punctul exterior lui (fig. 31). Pentru că raza cercului dusă în punctul de contact este perpendiculară pe tangentă, punctul de contact trebuie să se găsească pe cercul de diametru $[OA]$. Acest cerc are un punct O

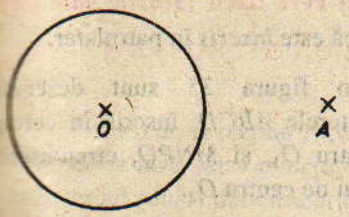


Fig. 31

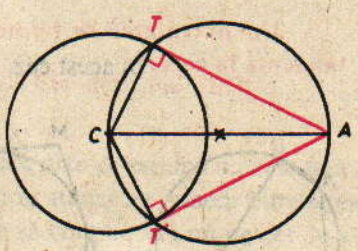


Fig. 32

interior cercului iniţial şi un punct A exterior acestuia, deci intersectează cercul iniţial în două puncte (T şi T') – (fig 32). Afirmaţia este demonstrată!

Fie A un punct exterior unui cerc de centru O şi AT şi AT' tangentele din A la cerc (T şi T' pe cerc) – figura 33. Se pot demonstra următoarele propoziţii:

1. Tangentele (luate ca segmente) sunt congruente: $[AT] \equiv [AT']$.
2. $[AO$ este bisectoarea unghiului TAT'.
3. $[OA$ este bisectoarea unghiului TOT'.
4. OA este mediatoarea segmentului $[TT']$.

Demonstrarea acestor propoziţii este foarte simplă. Ea se bazează pe congruenţa triunghiurilor dreptunghice OTA şi $OT'A$, care au ipotenuza comună şi

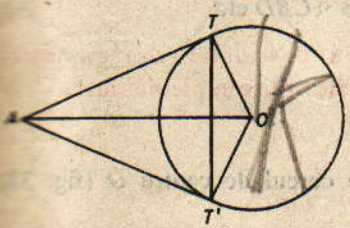


Fig. 33

Fig. 34

$[OT] \equiv [OT']$ (ca raze în acelaşi cerc). Lăsăm pe seama cititorului să completeze amănuntele... Aceste teoreme se folosesc foarte des în probleme.

Anecdotă. Odată, într-o recreaţie, un elev a completat, ca în figura 34, desenul făcut de un profesor pe tablă în ora care tocmai se terminase. Şi toată clasa a cuprins de atunci aceste patru teoreme într-o singură denumire: „proprietăţile ciocului de cioară"!

§ 9. PATRULATER ÎNSCRIS ÎN CERC. PATRULATER CIRCUMSCRIS UNUI CERC

Definiţii. **Un patrulater se numeşte înscris într-un cerc dacă vârfurile sale aparţin cercului.** Despre cerc se spune, în aces caz, că este *circumscris* patrulaterului.

Un patrulater se numeşte circumscris unui cerc dacă laturile sale sunt tangente la cerc. În acest caz, despre cerc se spune că este *înscris* în patrulater.

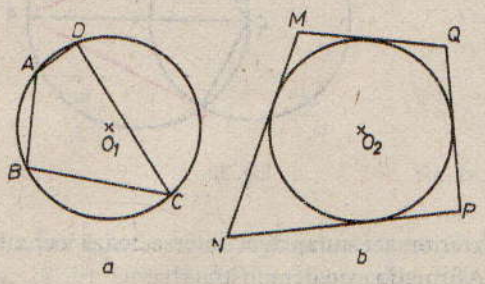


Fig. 35

În figura 35 sunt desenate patrulaterele $ABCD$, înscris în cercul de centru O_1, şi $MNPQ$, circumscris cercului de centru O_2.

Observaţie. **Patrulaterul înscris într-un cerc este patrulater convex.** Această proprietate, care este evidentă intuitiv, o vom admite fără demonstraţie.

Teorema 1. **Dacă un patrulater convex este înscris într-un cerc, atunci diagonalele sale formează unghiuri congruente cu două laturi opuse ale patrulaterului.**

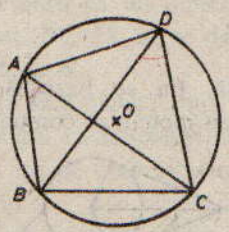


Fig. 36

Într-adevăr, fie $ABCD$ patrulaterul înscris în cercul de centru O (fig. 36). Unghiurile BAC şi BDC sunt congruente fiind înscrise în cerc şi cuprinzând între laturile lor acelaşi arc BC. De asemenea, $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CBD$ etc.

Teorema 2. **Un patrulater convex înscris într-un cerc are unghiurile opuse suplementare.**

Într-adevăr, fie $ABCD$ patrulaterul înscris în cercul de centru O (fig. 37). Unghiurile BAD şi BCD fiind înscrise în cerc, avem:

$$m(\sphericalangle BAD) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{BCD}) \text{ şi } m(\sphericalangle BCD) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{BAD}).$$

Adunând, membru cu membru, aceste două relaţii, obţinem:

$$m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle BCD) = \frac{1}{2}\,[m(\overset{\frown}{BCD}) + m(\overset{\frown}{BAD})].$$

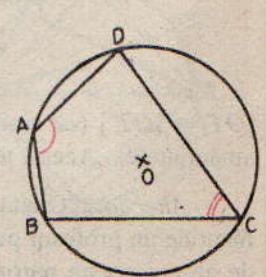


Fig. 37

Cum arcele $\overset{\frown}{BCD}$ şi $\overset{\frown}{BAD}$ dau prin însumare întregul cerc, rezultă că:

$$m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

q.e.d.

Evident, vom avea şi $m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ADC) = 180°$.

§ 10. PUNCTE CONCICLICE. PATRULATER INSCRIPTIBIL

Am văzut, la pagina 14, că trei puncte necoliniare date determină un cerc unic. Dacă avem însă patru puncte, trei câte trei necoliniare, atunci ne punem întrebarea dacă cercul (unic) determinat de trei dintre ele poate să conţină sau nu pe cel de-al patrulea punct.

Fiind date patru puncte, oricare dintre ele necoliniare, se pot întâlni următoarele cazuri:

a) unul dintre ele să aparţină cercului determinat de celelalte trei, ca de exemplu punctul D să aparţină cercului determinat de celelalte trei (A, B, C) din figura 38.

b) Cel de-al patrulea punct să fie interior (sau exterior) cercului determinat de primele trei, ca de exemplu în figura 39, *a* (D interior cercului determinat de A, B, C) sau în figura 39, *b* (Q exterior cercului determinat de M, N, P).

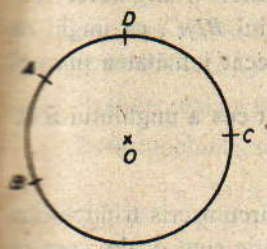


Fig. 38

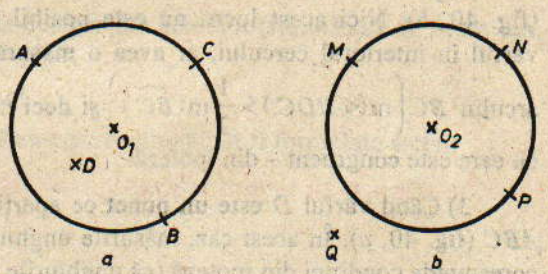


Fig. 39

Definiţie. **Patru puncte se numesc conciclice, dacă există un cerc căruia să-i aparţină toate cele patru puncte.**

În figura 38 punctele A, B, C, D sunt puncte conciclice. În figura 39, *a* şi *b* punctele A, B, C, D şi respectiv M, N, P, Q nu sunt puncte conciclice.

Definiţie. **Un patrulater se numeşte inscriptibil dacă cele patru vârfuri ale sale sunt puncte conciclice.**

Teoremă reciprocă (a teoremei 1 de la pagina 26). **Un patrulater în care unghiurile formate de diagonale cu două laturi opuse ale lui sunt congruente este un patrulater inscriptibil.**

Fie patrulaterul $ABCD$, în care $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDC$ (fig. 40). Sunt de analizat trei situații:

1) Când vârful D ar fi un punct exterior cercului circumscris triunghiului ABC (fig. 40, *a*). Acest lucru este imposibil pentru că unghiul BDC, ca unghi cu vârful în exteriorul cercului, ar avea o măsură mai mică decât jumătatea măsurii arcului $BC\left(\mathrm{m}(\sphericalangle BDC) < \frac{1}{2}\mathrm{m}(\overset{\frown}{BC})\right)$, în timp ce măsura unghiului înscris BAC este egală cu jumătate din măsura arcului BC. Cum unghiurile BAC și BDC sunt congruente, din ipoteză, rezultă că trebuie să aibă aceeași măsură.

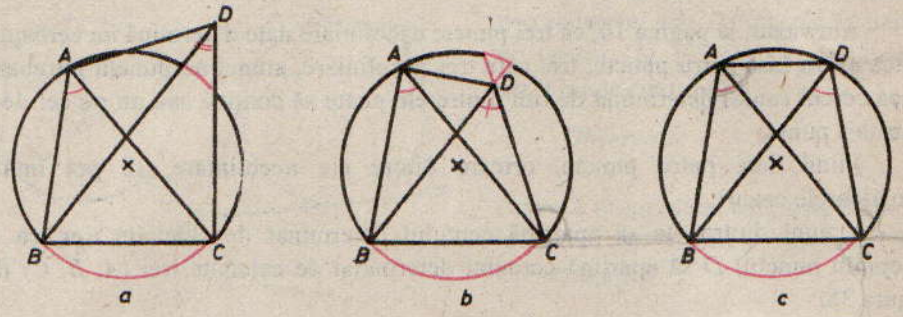


Fig. 40

2) Când vârful D ar fi un punct interior cercului circumscris triunghiului ABC (fig. 40, *b*). Nici acest lucru nu este posibil întrucât unghiul BDC, ca unghi cu vârful în interiorul cercului, ar avea o măsură mai mare decât jumătatea măsurii arcului $BC\left(\mathrm{m}(\sphericalangle BDC) > \frac{1}{2}\mathrm{m}(\overset{\frown}{BC})\right)$ și deci mai mare decât cea a unghiului BAC cu care este congruent – din ipoteză.

3) Când vârful D este un punct ce aparține cercului circumscris triunghiului ABC (fig. 40, *c*). În acest caz, măsurile unghiurilor în discuție sunt egale, ceea ce corespunde condiției din ipoteză (că unghiurile sunt congruente).

Deci teorema a fost demonstrată!

Înmănuncheate, teorema directă cu cea reciprocă, pot fi formulate astfel:

O condiție necesară și suficientă ca un patrulater să fie inscriptibil este ca unghiul format de o diagonală cu o latură să fie congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă primeia.

Teoremă reciproeă (a teoremei 2 de la pagina 26). **Un patrulater în care unghiurile opuse sunt suplementare este un patrulater inscriptibil.**

Fie patrulaterul $ABCD$ în care $\mathrm{m}(\sphericalangle ABC) + \mathrm{m}(\sphericalangle ADC) = 180°$ (fig. 41). Considerând cercul circumscris triunghiului ABC, sunt de analizat trei situații:

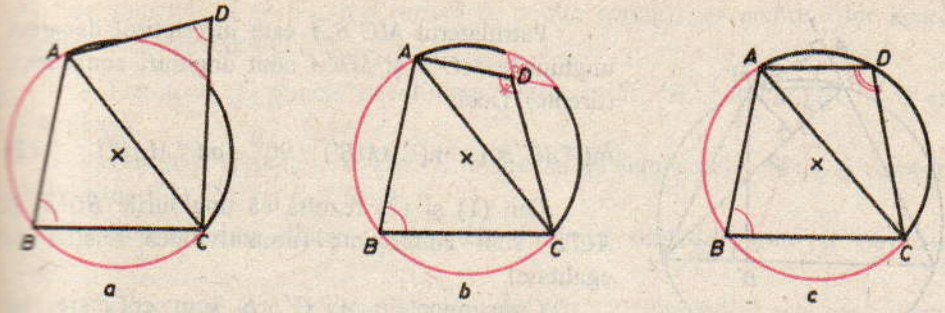


Fig. 41

1) Când vârful D ar fi un punct exterior cercului (fig. 41, *a*). Acest lucru este imposibil pentru că unghiul ADC, ca unghi cu vârful în exteriorul cercului, ar avea măsura mai mică decât jumătatea măsurii arcului ABC $\left(\text{m}(\sphericalangle ADC) < \frac{1}{2}\text{m}(\overset{\frown}{ABC})\right)$, iar $\text{m}(\sphericalangle ABC) + \text{m}(\sphericalangle ADC) < 180°$, ceea ce contrazice ipoteza.

2) Când vârful D ar fi un punct interior cercului (fig. 41, *b*). Nici acest lucru nu este posibil, întrucât unghiul ADC, ca unghi cu vârful în interiorul cercului, ar avea o măsură mai mare decât jumătatea măsurii arcului ABC $\left(\text{m}(\sphericalangle ADC) > \frac{1}{2}\text{m}(\overset{\frown}{ABC})\right)$, iar $\text{m}(\sphericalangle ABC) + \text{m}(\sphericalangle ADC) > 180°$, ceea ce ar contraveni ipotezei.

3) Când vârful D este un punct ce aparţine cercului (fig. 41, *c*). În acest caz, într-adevăr $\text{m}(\sphericalangle ABC) + \text{m}(\sphericalangle ADC) = 180°$.

Deci teorema a fost demonstrată!

Înmănunchiate, teorema directă cu cea reciprocă pot fi formulate astfel:

Un patrulater convex este inscriptibil dacă şi numai dacă unghiurile lui opuse sunt suplementare.

Problemă cu puncte coliniare

Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct M al cercului determinat de punctele A, B, C (distincte două câte două) pe dreptele AB, BC, CA sunt coliniare.

Demonstraţia. În figura 42 următoarele drepte sunt perpendiculare: MA' pe BC, MB' pe AC şi MC' pe AB. Deci patrulaterul $MA'BC'$ este inscriptibil, având unghiurile opuse din A' şi C' drepte. Atunci $\text{m}(\sphericalangle BC'A') = \text{m}(\sphericalangle BMA') = 90° - \text{m}(\sphericalangle MBA') = 90° - [180° - \text{m}(\sphericalangle MBC)] = 90° - \text{m}(\sphericalangle MAC)$ – (din patrulaterul înscris în cercul $AMBC$). Deci $\text{m}(\sphericalangle BC'A') = 90° - \text{m}(\sphericalangle MAC)$. (1)

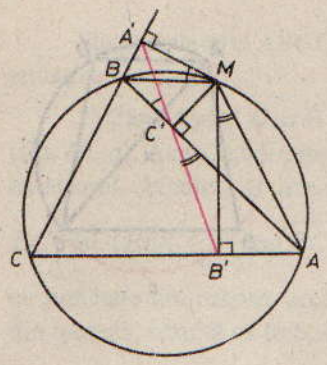


Fig. 42

Patrulaterul $MC'B'A$ este inscriptibil deoarece unghiurile $MC'A$ și $MB'A$ sunt unghiuri congruente (drepte). Deci:

$$m(\sphericalangle AC'B') = m(\sphericalangle AMB') = 90° - m(\sphericalangle MAB'). \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că unghiurile $BC'A'$ și $AC'B'$ sunt congruente (tranzitivitatea relației de egalitate).

Cum punctele A, C', B sunt coliniare, iar $\sphericalangle BC'A' \equiv \sphericalangle AC'B'$, rezultă că aceste unghiuri sunt opuse la vârf, deci punctele A', C', B' sunt coliniare.

q.e.d.

Dreapta căreia îi aparțin punctele A', C', B', din problema de mai sus, se numește „dreapta lui Simpson“[1].

Problema mai putea fi formulată și astfel: Proiecțiile[2] unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi pe laturile sale sunt coliniare.

1. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

A. DETERMINAREA CERCULUI

1. Fie A un punct fixat în planul foii de caiet.

a) Desenați cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, O_1A = 3 \text{ cm})$; $\mathcal{C}_2(O_2, O_2A = 4 \text{ cm})$; $\mathcal{C}_3(O_3, O_3A = 5 \text{ cm})$, unde $O_1 \neq O_2 \neq O_3 \neq O_1$.

b) Stabiliți care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate și care sunt false. Prin punctul A mai pot „trece“:

1) încă cinci cercuri; 2) încă 200 de cercuri; 3) oricât de multe cercuri de raze diferite; 4) punctul A nu mai aparține nici unui alt cerc, diferit de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ și $\mathcal{C}_3$.

2. Fie d o dreaptă, $[AB] \subset d$ și $AB = 6$ cm. Notăm cu xy mediatoarea segmentului $[AB]$.

a) Desenați cercurile $\mathcal{C}'(O')$, cu $O'A = O'B = 4$ cm; $\mathcal{C}''(O'')$, cu $O''A = O''B = 4$ cm; $\mathcal{C}_1(O_1)$, cu $O_1A = O_1B = 5$ cm și $\mathcal{C}_2(O_2)$ cu $O_2A = O_2B = 5$ cm, unde $O' \neq O''$ și $O_1 \neq O_2$.

b) Stabiliți care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate și care sunt false:

1) Punctele O' și O'' aparțin semiplanelor opuse determinate de dreapta d; 2) $O_1 \notin (dO_2$; 3) $O_2 \in (dO_1$; 4) O' O'' aparțin mediatoarei xy; 5) $O_1 \notin xy$ și $O \notin xy$; 6.a) Prin punctele A și B nu mai „trec“ cercuri care nu au centrele pe xy;

---

[1] Thomas Simpson (1710–1761) matematician englez, cu contribuții în domeniul geometriei și analizei matematice.

[2] Cuvântul *„proiectie“* vine din limba latină; *proiectio* = aruncare înainte.

b) Prin punctele A și B „trec" oricât de multe cercuri, iar centrele lor aparțin mediatoarei segmentului $[AB]$.

3. Fie A, B, C puncte necoliniare, astfel încât $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 6$ cm.

a) Desenați dreptele DO și EO, mediatoarele segmentelor $[BC]$ și respectiv $[CA]$, unde $D \in (BC)$ și $E \in (CA)$;

b) Stabiliți care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate și care sunt false:

1) Punctul O este exterior triunghiului ABC; 2) Punctul O este centrul unui cerc $\mathcal{C}_1$ care „trece " prin B și C; 3) $D \in \mathcal{C}_1$; 4) punctele C și A aparțin unui cerc $\mathcal{C}_2$ al cărui centru aparține dreptei EO; 5) $E \in \mathcal{C}_2$; 6) Cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ au același centru, iar razele lor sunt egale, deci $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$; 7) Perpendiculara din O pe dreapta AB nu conține mijlocul segmentului $[AB]$; 8) $[OA] \equiv [OB]$; 9) Punctele A și B aparțin cercului $\mathcal{C}_1$; 10) $A \in \mathcal{C}_1$; $B \in \mathcal{C}_1$; $C \in \mathcal{C}_1$; 11) Prin punctele A, B și C nu mai „trec" alte cercuri diferite de cercul care are centrul în punctul O; 12) $OA = OB = OC$.

4. Construiți (desenați) triunghiul ABC și apoi cercul de centru O, circumscris triunghiului ABC, dacă:

a) $AB = 5$ cm; $BC = 7$ cm; $CA = 6$ cm;
b) $AB = 6$ cm; $BC = 8$ cm; $CA = 10$ cm;
c) $AB = 4$ cm; $BC = 2{,}5$ cm; $CA = 6$ cm;
d) $AB = 3$ cm; $BC = CA = 6$ cm;
e) $AB = AC = 4$ cm și $BA \perp AC$;
f) $AB = AC = 4{,}2$ cm și $m(\sphericalangle BAC) = 100°$;
g) $AB = AC = CA = 5$ cm.

Pentru fiecare caz în parte stabiliți dacă:

1) Punctul O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC, este punct interior, exterior sau aparține unei laturi a triunghiului desenat.

2) Există vreun caz, printre cele de mai sus, în care punctul O să aparțină: a) unei singure înălțimi a triunghiului ABC; b) unei singure mediane a triunghiului ABC; c) unei singure bisectoare a triunghiului ABC; d) cel puțin unei înălțimi a triunghiului ABC; e) cel mult unei bisectoare a triunghiului ABC.

5. Pe laturile unui unghi xOy cu măsura de 120° considerăm punctele A și B astfel încât $OA = OB = 4$ cm. Desenați cercul circumscris triunghiului AOB. Care este lungimea razei lui?

6. Considerați în plan două puncte A și B situate la distanța de 6 cm unul față de celălalt. Căutați toate punctele din plan care se află față de ambele puncte la distanța de: a) 2 cm; b) 3 cm; c) 4 cm.

7. Să se construiască un cerc care să „treacă" prin punctele A și B, știind că $AB = 4$ cm și $m(\sphericalangle OAB) = 30°$, unde O este centrul cercului care trebuie construit.

8. Se dau două puncte A și B și o dreaptă d. Să se construiască un cerc care să „treacă" prin A și B și care să aibă centrul pe dreapta d. Cercetați și cazul când $d \perp AB$.

9. Demonstrați că orice dreaptă care conține centrul unui cerc $\mathcal{C}$ este axă de simetrie a punctelor care aparțin cercului $\mathcal{C}$.

B. CERCURI CONGRUENTE. ARCE ȘI COARDE ÎN CERC

10. Două cercuri $\mathcal{C}_1(O_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2)$ cu razele egale se intersectează în punctele A și B ($O_1 \neq O_2$). a) Demonstrați că arcele de cerc, mai mici decât un semicerc, cuprinse între punctele A și B sunt congruente. b) Ce fel de patrulater este AO_1BO_2?

11. Fie $[AB]$ un diametru în cercul $\mathcal{C}$ (O, r). Coarda $[CD]$ intersectează diametrul $[AB]$ în punctul E astfel încât $m(\sphericalangle CEB) = 30°$, $AE = 6$ cm și $EB = 2$ cm. Calculați distanța de la O la CD.

12. Punctele A, B, C, diferite între ele, aparțin cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Știind că $AB \perp AC$ și că distanțele de la O la AB și AC sunt respectiv egale cu 2 cm și 4 cm, calculați lungimile AB și AC.

13. Punctele M, N, P, diferite două câte două, aparțin cercului $\mathcal{C}$ de centru O. Știind că:

a) $MN = NP = 6$ cm; $m(\sphericalangle MNP) = 120°$, calculați raza cercului $\mathcal{C}$. Dacă $ON \cap MP = \{S\}$, calculați SO.

b) $OM = 5$ cm; $MN = NP$; $m(\sphericalangle MNP) = 120°$, calculați lungimea MN. Este adevărat că segmentele $[ON]$ și $[MP]$ au același mijloc?

14. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ punctele A și B sunt diametral opuse, iar punctele C și D aparțin cercului $\mathcal{C}$ astfel încât $[OC$ este bisectoarea unghiului DOB și $[OD$ este bisectoarea unghiului COA.

a) Știind că $DC = 2$ cm, calculați lungimea diametrului cercului.

b) Care este natura patrulaterelor $OBCD$ și $ABCD$?

c) Dacă punctul E este diametral opus punctului C, demonstrați că $AD \parallel CE$.

d) Cercetați dacă punctele A și B sunt egal depărtate de dreapta CO.

15. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $[AB]$ și $[CD]$ sunt diametre neperpendiculare. Dacă $[OM] \equiv [ON]$, unde $M \neq N$ și $M, N \in (AB)$, demonstrați că $MD \parallel NC$. Concluzia rămâne adevărată dacă $AB \perp CO$?

16. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, $[MN]$ este un diametru, $[OA] \equiv [OB]$, unde $A \neq B$ și $A, B \in (MN)$. Prin A și B „ducem" coardele paralele $[PQ]$ și $[RS]$ (unde P și S sunt în semiplane opuse determinate de MN, iar $P, Q, R, S \in \mathcal{C}$).

Demonstrați: a) $[PQ] \equiv [RS]$; b) $m(\widehat{PQ}) = m(\widehat{SR})$; c) Punctele P și S sunt simetrice față de punctul O; la fel punctele Q și R; d) Patrulaterul $PQRS$ este dreptunghi.

C. DREAPTA TANGENTĂ LA CERC ÎNTR-UN PUNCT AL CERCULUI

17. Fie un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și $A \in \mathcal{C}$. Dreapta a conține punctul A și este tangentă cercului $\mathcal{C}$. Punctele B și C aparțin dreptei a astfel încât $[BA] \equiv [AC]$ $(B \neq C)$.

a) Demonstrați că triunghiul BOC este isoscel.

b) Presupunând $m(\sphericalangle BOC) = 90°$, calculați lungimea BC cu ajutorul razei r.

c) Presupunând că $m(\sphericalangle BOC) = 120°$, calculați lungimea OC cu ajutorul razei r.

18. Dreptele a, b, c sunt tangente cercului $\mathcal{C}(O, r)$ în punctele N, M, P, unde $N \in b$, $M \in c$, $P \in a$ (fig. 43).

Dacă $a \cap b = \{C\}$, $b \cap c = \{A\}$, $c \cap a = \{B\}$ și $CN = x$, $AM = y$, $BP = z$, calculați perimetrul triunghiului ABC în funcție de x, y, z. (Cercul $\mathcal{C}$ se numește „cerc înscris" în triunghiul ABC, iar triunghiul ABC se numește „triunghi circumscris" cercului $\mathcal{C}$.)

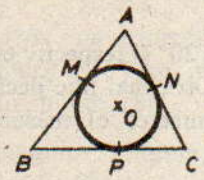


Fig. 43

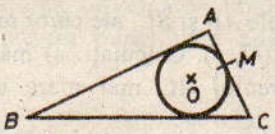


Fig. 44

19. Perimetrul unui triunghi ABC este de 30 cm, iar latura $[BC]$ are lungimea de 13 cm (fig. 44). Laturile triunghiului ABC sunt tangente unui cerc $\mathcal{C}$, latura $[AB]$ fiind tangentă cercului $\mathcal{C}$ în punctul N. Calculați lungimea AN.

20. Dreptele a, b, c, d sunt tangente cercului $\mathcal{C}(O, r)$ în punctele M, N, P, Q, unde $M \in a$, $N \in b$, $P \in c$, $Q \in d$. Dacă $a \cap b = \{A\}$, $b \cap c = \{B\}$, $c \cap d = \{C\}$, $d \cap a = \{D\}$, demonstrați că $AB + CD = BC + DA$.

21. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ punctele A și B sunt diametral opuse. Fie $C \in \mathcal{C}$. Tangentele duse cercului $\mathcal{C}$ în A și B intersectează tangenta în C respectiv în punctele D și E. Demonstrați că: a) $DE = AD + BE$; b) $m(\sphericalangle DOE) = 90°$; c) triunghiul MON este dreptunghic, unde $\{M\} = AC \cap OD$ și $\{N\} = BC \cap OE$.

D. MĂSURA UNGHIULUI ÎNSCRIS ÎNTR-UN CERC

22. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ ştim că $A, B, C \in \mathcal{C}$. Dacă $m(\sphericalangle AOB)$ este egală cu: a) 40°; b) 90°; c) 120°; d) 180°, calculaţi, în fiecare caz în parte, măsura unghiului ACB.

23. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$, ştim că $M, N, P \in \mathcal{C}$. Dacă $m(\sphericalangle MNP)$ este egală cu: a) 20°; b) 45°; c) 90°; d) 135°, calculaţi, în fiecare caz în parte, măsura unghiului MOP. Cercetaţi dacă într-unul din aceste cazuri avem: 1) M, O, P sunt coliniare; 2) $MO \perp OP$.

24. Într-un cerc de centru O şi raza egală cu 2 cm, ştim că punctele A şi B sunt diametral opuse şi C aparţine cercului. Să se arate că dacă:

a) $m(\sphericalangle CAB) = 30°$, atunci $BC = 2$ cm;
b) $m(\sphericalangle CAB) = 45°$, atunci $[AC] \equiv [BC]$ şi $CO \perp AB$.

25. Punctele distincte A şi B aparţin unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$. În punctul A „ducem" tangenta MN la cercul $\mathcal{C}$ (A între M şi N). Calculaţi $m(\sphericalangle MAB)$ şi $m(\sphericalangle NAB)$, dacă $m(\overset{\frown}{AB})$ este de: a) 30°; b) 40°; c) 90°; d) 180°.

26. Punctele distincte M, N, P, Q aparţin unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$. Dacă $MP \perp PN$ şi $PQ \perp MN$, demonstraţi că:

a) $[PN] \equiv [NQ]$; b) Punctele P şi Q sunt simetrice faţă de dreapta MN; c) Mediana triunghiului MPQ relativă laturii $[PQ]$ este inclusă în segmentul $[MN]$. (Patrulaterul $MQNP$ se numeşte „ortodiagonal" deoarece are diagonalele perpendiculare.)

27. Arcele AB şi BC, ale căror măsuri sunt de 20° şi respectiv 60°, sunt incluse într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$. Calculaţi: a) măsura arcului AC, mai mic decât un semicerc; b) măsura arcului AC mai mare decât un semicerc; c) măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

28. Pe un cerc se iau punctele A, B, C, D care se succed în sens opus mişcării acelor unui ceasornic. Ştiind că $m(\overset{\frown}{AB}) = 110°$; $m(\overset{\frown}{BC}) = 50°$; $m(\overset{\frown}{CD}) = 140°$, calculaţi:

a) unghiurile patrulaterului $ABCD$;
b) unghiurile formate de diagonale cu laturile patrulaterului $ABCD$.

29. Fie un arc de cerc AB. Dacă M descrie arcul AB, demonstraţi că toate bisectoarele unghiurilor AMB sunt concurente într-un punct fix.

30. Două coarde $[AB]$ şi $[CD]$ ale unui cerc au un punct comun interior cercului şi sunt perpendiculare. Demonstraţi că $m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{BC}) = 180°$.

31. Punctele distincte A, D, C, B aparţin unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ şi se succed în sensul invers al mişcării acelor unui ceasornic (fig. 45). Ştim că $m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{CD}) = 180°$. Fie $OM \perp AB$, unde $M \in (AB)$ şi $ON \perp CD$, unde $N \in (CD)$. Demonstraţi că triunghiurile OMA şi DNO sunt congruente.

32. În triunghiul ABC, se ştie că $m(\sphericalangle A) = 70°$, $m(\sphericalangle B) = 50°$.

a) Bisectoarele triunghiului ABC, $[AA'$, $[BB'$ şi $[CC'$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A', B' şi C'. Calculaţi măsurile arcelor: $\overset{\frown}{BA'}, \overset{\frown}{CB'}, \overset{\frown}{AC'}, \overset{\frown}{A'B'}, \overset{\frown}{B'C'}, \overset{\frown}{C'A'}$.

b) Înălţimile triunghiului ABC, AA'', BB'', CC'' intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A'', B'', C''. Calculaţi măsurile arcelor: BA'', CB'', AC'', $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$.

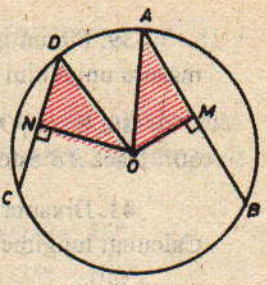


Fig. 45

33. Folosind proprietatea relativă la unghiul înscris într-un semicerc, să se demonstreze că:

a) Într-un triunghi dreptunghic lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

b) Dacă lungimea medianei unui triunghi este egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic.

34. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}$. Notăm $CH \cap \mathcal{C} = \{C'\}$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC. Demonstraţi că dreapta AB este axă de simetrie pentru punctele H şi C'.

(Dacă intersectăm cercul $\mathcal{C}$ cu dreptele BH sau AH se obţin alte două puncte B' şi respectiv A' care sunt simetricele punctului H faţă de dreptele CA şi respectiv BC.)

35. Fie ABC un triunghi. Demonstraţi că bisectoarea unghiului ABC şi mediatoarea laturii $[AC]$ se intersectează într-un punct care aparţine cercului circumscris triunghiului ABC.

36. În triunghiul ascuţitunghic ABC, $[AA']$ este înălţimea relativă laturii $[BC]$ ($A' \in (BC)$), iar $[AA''$ este bisectoarea unghiului BAC, unde A'' aparţine cercului $\mathcal{C}(O)$ circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că $\sphericalangle A'AA'' \equiv \sphericalangle A''AO$ (AA' şi AO se numesc *ceviene izogonale*).

37. Fie cercul $\mathcal{C}(O, r)$ şi $\triangle ABC$ un triunghi oarecare (scalen) înscris în cercul $\mathcal{C}$. Tangenta în punctul A la cercul $\mathcal{C}$ intersectează dreapta BC în punctul D.

a) Cercetaţi dacă $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCA$.

b) Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului ADC în funcţie de măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

E. DREAPTA TANGENTĂ LA CERC DUSĂ DINTR-UN PUNCT EXTERIOR CERCULUI

38. Folosind proprietatea relativă la unghiul înscris într-un semicerc, „duceţi" tangentele AB şi AC la cercul $\mathcal{C}$, ştiind că $AO = 7$ cm, $OB = 4$ cm, unde O este centrul cercului $\mathcal{C}$ şi $B, C \in \mathcal{C}$.

39. Fie un cerc $\mathcal{C}$ de centru O și rază $OB = 3$ cm. Dacă $OA = 6$ cm, calculați măsura unghiului OAB, știind că dreapta AB este tangentă cercului $\mathcal{C}$.

40. Raza $[OB]$ a cercului $\mathcal{C}$ și segmentul $[OA]$ formează între ele un unghi de $60°$. Dacă AB este tangentă cercului $\mathcal{C}$ și $OB = 5$ cm, calculați lungimea OA.

41. Dreapta AB este tangentă cercului $\mathcal{C}$ de centru O și rază $OB = 6$ cm. Calculați lungimea AB, știind că $m(\sphericalangle OAB) = 45°$.

42. Segmentul $[AB]$ este tangent cercului $\mathcal{C}$ în punctul B. Calculați $m(\sphericalangle AOB)$ dacă $[AB] \equiv [OB]$, unde O este centrul cercului.

43. Un cerc $\mathcal{C}$ are centrul O și raza de 5 cm. Fie A un punct în planul cercului $\mathcal{C}$, astfel încât $OA = 10$ cm. Calculați:

a) Unghiul format de dreptele OA și AB, unde $B \in \mathcal{C}$ și $OB \perp AB$.

b) Unghiul format de dreapta AB și tangenta CD la cercul $\mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \cap OA = \{C\}$ și $D \in (AB)$.

c) Lungimea segmentului $[BC]$.

44. Fie AB și AC două tangente la cercul $\mathcal{C}$, unde $B, C \in \mathcal{C}$. Cercetați dacă patrulaterul $OBAC$ (O centrul cercului $\mathcal{C}$) poate fi: a) romb; b) pătrat; c) dreptunghi.

45. Din punctul A „ducem" semidreptele $[AB$ și $[AC$, prima tangentă unui cerc $\mathcal{C}$ în punctul B, a doua astfel încât intersectează cercul $\mathcal{C}$ în punctele distincte C și D (C între D și A). Demonstrați că triunghiurile ABC și ABD au unghiurile congruente.

46. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle B) = 90°$), $[AA']$ este bisectoarea unghiului BAC ($A' \in (BC)$). Ducem $A'D \perp AC$ ($D \in (AC)$) și apoi „trasăm" cercul $\mathcal{C}$ de centru A și raza $r = AD$. Dreapta AC intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}$ în punctul E.

Demonstrați:

a) $B \in \mathcal{C}$, b) $m(\sphericalangle EBD) = 90°$, c) perpendiculara în E pe dreapta AC intersectează dreapta BC într-un punct F, astfel încât $[EF] \equiv [FB]$;

d) Cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ cu centrele în A', respectiv F și care au razele egale cu $A'D$ și respectiv FE sunt cercuri tangente exterioare.

e) Dreptele AB și AC sunt tangente cercurilor $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$.

F. PATRULATERUL INSCRIPTIBIL

47. Patrulaterul convex $ABCD$ este înscris într-un cerc ($[AC]$ diagonală). Calculați măsurile unghiurilor B și C în funcție de măsurile unghiurilor A și D, știind că:

a) $m(\sphericalangle A) = 85°$ și $m(\sphericalangle D) = 86°$; b) $m(\sphericalangle A) = 70°36'$ și $m(\sphericalangle D) = 12832''$, c) $m(\sphericalangle A) = 110°24'26''$ și $m(\sphericalangle D) = 130°15'45''$; d) $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$; în acest

caz ce proprietăți au laturile și diagonalele patrulaterului $ABCD$?; e) $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle D) = 180°$. Aceleași întrebări ca și la punctul d).

48. Patrulaterul convex $MNPQ$ este înscris într-un cerc ($[MP]$ diagonală). Calculați măsurile unghiurilor NMQ, MQP, QPN, MQN, QMP, MPN, în funcție de măsurile unghiurilor MNQ, QNP, NQP, știind că:

a) $m(\sphericalangle MNQ) = 40°$; $m(\sphericalangle QNP) = 70°$; $m(\sphericalangle NQP) = 55°$;

b) $m(\sphericalangle MNQ) = 50°$; $m(\sphericalangle QNP) = 20°$; $m(\sphericalangle NQP) = 100°$;

c) $m(\sphericalangle MNQ) = m(\sphericalangle QNP) = m(\sphericalangle NQP) = 40°$, în acest caz ce proprietăți au laturile și diagonalele patrulaterului $MNPQ$? d) $m(\sphericalangle MNQ) = m(\sphericalangle NQP) = 50°$ și $m(\sphericalangle QNP) = 40°$. Aceleași întrebări ca la punctul c); e) $\sphericalangle MNQ \equiv \sphericalangle QNP \equiv \sphericalangle NQP$ și $MP \perp NQ$. Aceleași întrebări ca la punctul c).

49. Într-un cerc se duc două coarde perpendiculare $[AB]$ și $[CD]$. Fie M un punct care aparține arcului BD care este mai mic decât un semicerc. Demonstrați că $m(\sphericalangle AMD) + m(\sphericalangle BMC) = 90°$. Cercetați dacă această proprietate rămâne adevărată când punctul M aparține arcului CA care este mai mic decât un semicerc. (Indicație: notați $\{R\} = AB \cap CD$ și apoi evaluați – în triunghiul BRD – suma $m(\sphericalangle RBD) + m(\sphericalangle RDB)$.)

50. Pe un cerc se iau patru puncte A, B, C, D care se succed în sensul invers de mers al acelor de ceasornic. Fie M, N, P, Q respectiv mijloacele arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$. Demonstrați că dreptele MP și NQ sunt perpendiculare. (Indicație: notați $MP \cap NQ = \{R\}$ și apoi în triunghiul RNP evaluați $m(\sphericalangle RNP) + m(\sphericalangle RPN)$.)

51. Demonstrați că bisectoarele interioare ale unghiurilor unui patrulater convex se intersectează formând un patrulater inscriptibil (fig. 46).

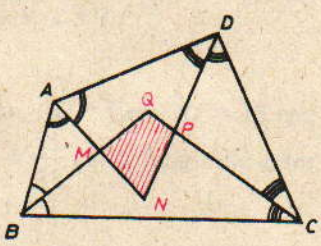


Fig. 46

52. Într-un cerc $\mathcal{C}$ se înscrie un triunghi isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$). Două semidrepte $[Ax$ și $[Ay$, interioare unghiului BAC, intersectează latura $[BC]$ respectiv în M și N și cercul $\mathcal{C}$ respectiv în M' și N'. Demonstrați că patrulaterul $MM'NN'$ este inscriptibil. (Indicație: De exemplu, gândiți unghiul MNN' ca fiind unghi exterior triunghiului ABN.)

53. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$, diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ sunt perpendiculare una pe cealaltă în punctul E. Fie E_1, E_2, E_3, E_4 picioarele perpendicularelor duse din punctul E respectiv pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

Demonstrați că patrulaterul $E_1E_2E_3E_4$ este inscriptibil.

54. În triunghiul ABC, A_1, este piciorul înălțimii din A pe BC, iar A', B', C' sunt respectiv mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

a) Demonstrați că patrulaterul $A'B'C'A_1$ este un trapez isoscel.

b) Cercetați dacă punctele B_1 și C_1, picioarele înălțimilor duse din B și C pe AC, respectiv AB, aparțin cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$.

55. În triunghiul ABC, punctul H este ortocentrul și A', B', C' sunt respectiv mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Dacă A_2 este mijlocul segmentului $[HA]$, atunci:

a) $m(\sphericalangle A_2C'A') = 90°$; b) Patrulaterul $A'B'A_2C'$ este inscriptibil; c) Cercetați dacă punctele B_2 și C_2, mijloacele segmentelor $[HB]$ respectiv [HC] aparțin cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$.

56. Într-un triunghi, picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfuri sunt puncte conciclice[1]. (Indicație: folosiți rezultatele problemelor **54** și **55**.)

[1] Cercul căruia îi aparțin picioarele înălțimilor, mijloacele laturilor și mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfurile triunghiului se numește *cercul lui Euler* sau *cercul celor nouă puncte* al triunghiului dat. (Leonhard Euler (1707–1783) a fost un matematician, fizician și astronom elvețian.)

II. RELAȚII METRICE

§ 1. RAPORTUL A DOUĂ SEGMENTE. SEGMENTE PROPORȚIONALE

În figura 47 segmentele $[AB]$ și $[CD]$ au lungimile de 3, respectiv 5 centimetri. Raportul lungimilor lor este, evident, $\frac{3}{5}$. Scriem $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$ și spunem, prescurtând, că raportul lor este $\frac{3}{5}$.

Definiție. **Prin raportul a două segmente înțelegem raportul lungimilor lor.**

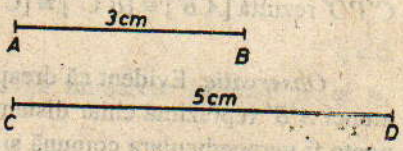


Fig. 47

Raportul a două segmente nu depinde de unitatea de măsură pe care am ales-o pentru măsurarea segmentelor, cu condiția ca amândouă segmentele să fie măsurate cu aceeași unitate de lungime.

Fie acum patru segmente cu lungimile de: $AB = 3$ cm, $CD = 5$ cm, $EF = 15$ cm, $GH = 25$ cm. Constatăm că $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$. Într-adevăr $\frac{3}{5} = \frac{15}{25}$, deci lungimile celor patru segmente formează o proporție.

Definiție. **Spunem că patru segmente sunt proporționale, dacă lungimile lor reprezintă cei patru termeni ai unei proporții.**

Teoremă **(a paralelelor echidistante). Dacă mai multe paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe oricare secantă segmente congruente.**

Demonstrația. Fie $a \parallel b \parallel c \parallel d$ niște drepte paralele și dreapta AD prima secantă, care intersectează dreptele a, b, c, d respectiv în punctele A, B, C, D (fig. 48). Știm din ipoteză că $AB = BC = CD = k$ (am notat cu k măsura lor comună). Fie dreapta $A'D'$ cea de-a doua secantă din enunțul teoremei. Atunci, cu notațiile din figură, trebuie să arătăm că: $[A'B'] \equiv [B'C'] \equiv [C'D']$.

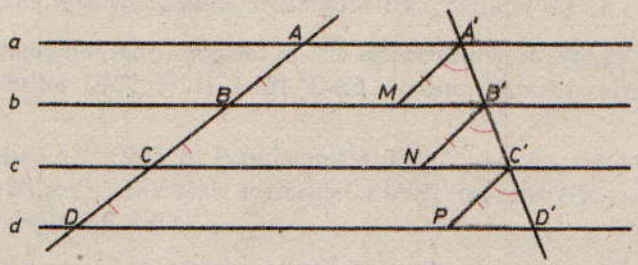


Fig. 48

Considerăm dreptele $A'M$, $B'N$, $C'P$ paralele cu dreapta AD ($M \in b$, $N \in c$, $P \in d$).

Să demonstrăm că triunghiurile $A'MB'$, $B'NC'$, $C'PD'$, sunt congruente. Din paralelogramele $ABMA'$, $BCNB'$, $CDPC'$, care s-au format, rezultă congruențele de segmente: $[A'M] \equiv [B'N] \equiv [C'P]$. De asemenea, $\sphericalangle MA'B' \equiv \sphericalangle NB'C' \equiv \sphericalangle PC'D'$ (unghiuri corespondente) și $\sphericalangle A'MB' \equiv \sphericalangle B'NC' \equiv \sphericalangle C'PD'$ (unghiuri cu laturile respectiv paralele – care nu sunt suplementare datorită congruenței unghiurilor corespondente $A'B'M$, $B'C'N$, $C'D'P$). Din congruența triunghiurilor $A'MB'$, $B'NC'$, $C'PD'$ rezultă $[A'B'] \equiv [B'C'] \equiv [C'D']$.

q.e.d.

Observație. Evident că dreapta $A'D'$ poate fi și perpendiculară pe a, b, c, d și atunci $A'B'$ reprezintă chiar distanța dintre paralele consecutive. Dar și dreapta AD poate fi perpendiculara comună și atunci $AB = k$ reprezintă distanța dintre paralele. Aceasta explică și denumirea care se dă uneori acestei teoreme.

§ 2. TEOREMA LUI THALES[1)]

O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.

Demonstrația. Fie triunghiul ABC în care $DE \parallel BC$, unde $D \in AB$, $E \in AC$ (fig. 49). Trebuie de arătat că $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Demonstrația o vom face în cazul în care unul dintre rapoarte este rațional. Să presupunem că $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{5}$. Să împărțim segmentul $[AB]$ în 7 părți congruente prin punctele D_1, D_2, ..., D_6 (fig. 50). Vom avea deci $[AD_1] \equiv [D_1D_2] \equiv ... \equiv [D_6B]$.

[1)] Thales din Milet (sec. 6 î.e.n.), filozof și matematician grec de origine feniciană este fondatorul „Școlii din Milet". El a inițiat teoria figurilor asemenea. I se atribuie teorema ce-i poartă numele. Conform legendei, Thales s-a făcut celebru prin „măsurarea" înălțimilor piramidelor egiptene, utilizînd umbrele acestora și i-a impresionat pe contemporanii săi prin prevederea eclipsei de soare din anii 585 î.e.n.

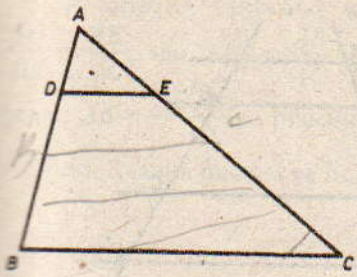


Fig. 49

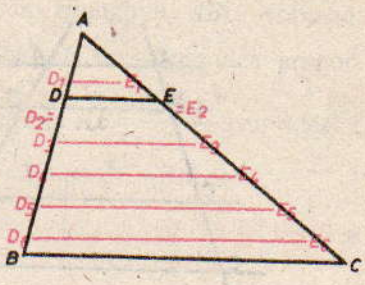


Fig. 50

Considerăm paralelele prin D_1, D_2,..., D_6 la BC, care intersectează latura $[AC]$ respectiv în punctele E_1, E_2, ..., E_6. Deci, în figură vom avea $D_1E_1 \parallel D_2E_2 \parallel ... \parallel D_6E_6 \parallel BC$. Aplicând teorema paralelelor echidistante, obținem: $[AE_1] \equiv [E_1E_2] \equiv \equiv ... \equiv [E_5E_6] \equiv [E_6C]$. (Să observăm că $\frac{AD_2}{D_2B} = \frac{2}{5} = \frac{AD}{DB}$, deci $AD_2 = AD$, adică $D = D_2$. Deducem că $E = E_2$.) Fie $AD_1 = k$ și $AE_1 = u$. Rezultă că $\frac{AD}{DB} = \frac{2k}{5k} = \frac{2}{5}$ și $\frac{AE}{EC} = \frac{2u}{5u} = \frac{2}{5}$. Deci $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

q.e.d

În general, dacă în loc de 2 și 5 am avea numerele naturale m și n, raționamentul este același.

Observație: Aplicând o proprietate a proporțiilor, plecând de la $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, putem scrie: $\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC}$, deci $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Aceasta este o altă formă sub care poate fi scrisă concluzia teoremei lui Thales.

Consecință. **Mai multe drepte paralele determină pe două secante segmente proporționale.**

Demonstrația. Fie $a \parallel b \parallel c \parallel d$ patru drepte paralele și AD și $A'D'$ două secante care le intersectează ($A, A' \in a$ și $D, D' \in d$) – figura 51. Trebuie să demonstrăm că $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

Considerăm $A'C_1 \parallel AC$, unde $C_1 \in CC'$ și notăm $A'C_1 \cap BB' = \{B_1\}$ (fig. 51, *b*). Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul $A'C_1C'$: $\frac{A'B_1}{B_1C_1} = \frac{A'B'}{B'C'}$ (1). Din paralelogramele ABB_1A' și BCC_1B_1 rezultă că $A'B_1 = AB$, respectiv $B_1C_1 = BC$, iar relația (1) devine: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ sau, schimbând mezii între ei: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. Astfel prima parte a dublei egalități a fost demonstrată.

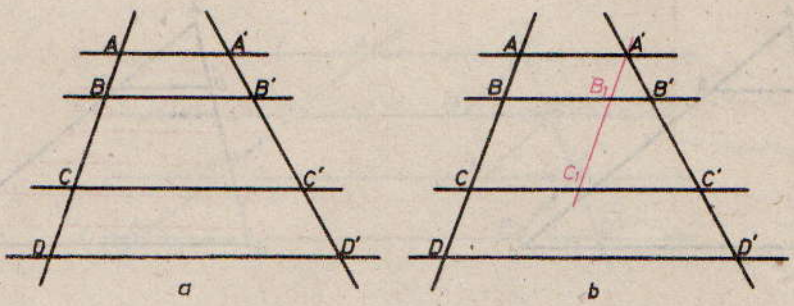


Fig. 51

Dacă vom considera și paralela din B' la BD, printr-o demonstrație similară se ajunge la: $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$, care ne conduce la șirul de rapoarte egale $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

q.e.d.

Problemă rezolvată 1. Fie D un punct pe latura $[AB]$ a unui triunghi ABC în care $AB = 3$ cm și $AC = 6$ cm (fig. 52). Se știe că $AD = 1{,}2$ cm. Paralela prin D la BC intersectează pe AC în E. Să se calculeze lungimile segmentelor $[AE]$ și $[EC]$.

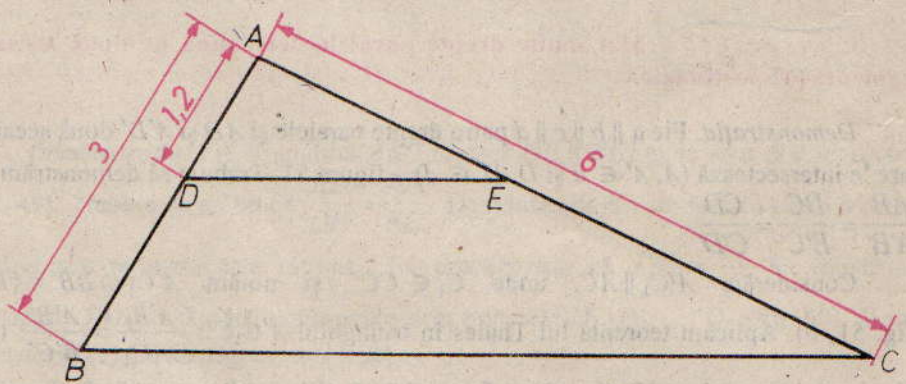
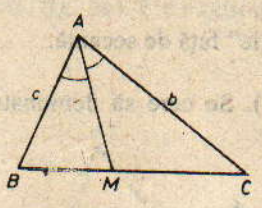


Fig. 52

Rezolvarea. Aplicând teorema lui Thales în triunghiul ABC obținem: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ sau $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$. De unde, scoțând pe AE ca al patrulea proporțional: $AE=\frac{AD\cdot AC}{AB}$. Înlocuind datele cunoscute, găsim: $AE=\frac{1,2\cdot 6}{3}$ cm $\Rightarrow AE=$ $=2,4$ cm. Rezultă imediat că $EC=AC-AE$, $EC=6-2,4\Rightarrow EC=3,6$ cm.

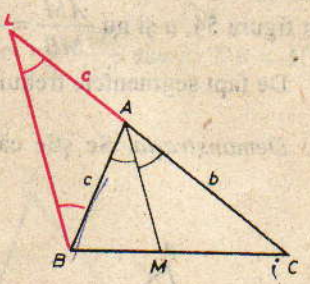
Problemă rezolvată 2. Să se demonstreze că într-un triunghi o bisectoare determină pe latura opusă două segmente proporționale cu celelalte două laturi[1)].

Demonstrația. Fie, în triunghiul ABC, [AM bisectoarea unghiului BAC (fig. 53, *a*). Facem o „construcție ajutătoare" și anume: paralela din B la MA, care



a

Fig. 53



intersectează dreapta AC în L (fig. 53, *b*). S-a format astfel triunghiul ABL, care este insoscel pentru că: $m(\sphericalangle ABL)=m(\sphericalangle BAM)$ – alterne interne – și apoi $m(\sphericalangle ABL)=\frac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle BAC)$ – [AM fiind bisectoare. Pe de altă parte, $m(\sphericalangle BLC)=$ $=m(\sphericalangle MAC)$ – corespondente – și apoi $m(\sphericalangle BLC)=\frac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle BAC)$. Deci $[AL]\equiv[AB]$ (1).

Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul CBL: $\frac{CM}{MB}=\frac{CA}{AL}$. Ținând seama de (1), putem scrie $\frac{CM}{MB}=\frac{CA}{AB}$ sau $\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}$, ceea ce exprimă tocmai concluzia problemei.

Propunem ca „temă de cercetare" găsirea unei proprietăți asemănătoare pentru bisectoarea unghiului exterior BAL din problema precedentă (fig. 53, *b*). Se va găsi $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}$ (unde N este intersecția bisectoarei unghiului exterior BAL cu dreapta BC).

Reciproca teoremei lui Thales. Dacă o dreaptă determină pe laturile unui triunghi segmente respectiv proporționale cu aceste laturi, atunci această dreaptă este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului

[1)] Această problemă este cunoscută sub denumirea de *teorema bisectoarei.*

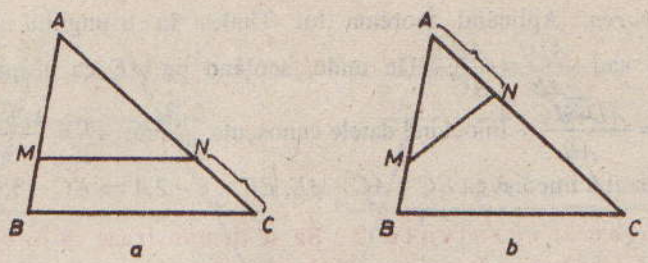


Fig. 54

Prin „respectiv" se înţelege „aşezate asemănător" pe laturi adică $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, ca în figura 54, *a* şi nu $\frac{AM}{MB} = \frac{NC}{AN}$, ca în figura 54, *b*.

De fapt segmentele trebuie să aibă aceeaşi „poziţie" faţă de secantă.

Demonstraţia. Se ştie că $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ (fig. 55). Se cere să demonstrăm că

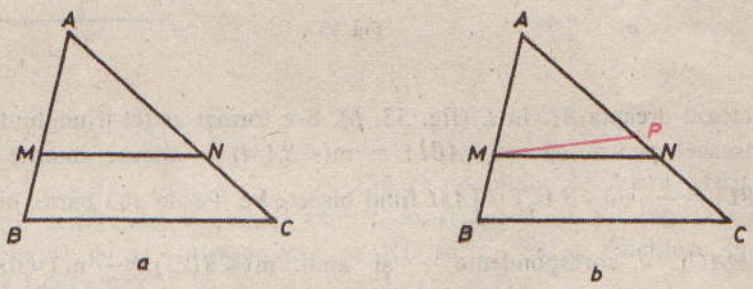


Fig. 55

$MN \parallel BC$. Se foloseşte metoda reducerii la absurd şi se bazează pe faptul că există un singur punct care să aparţină segmentului şi să-l împartă într-un raport dat.

Presupunem că dreapta MN nu ar fi paralelă cu latura $[BC]$ a triunghiului ABC. Atunci, ar exista totuşi o paralelă la $[BC]$ care să conţină punctul M. Fie MP această paralelă ($P \in AC$, $P \neq N$). Conform teoremei lui Thales ar rezulta că $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC}$. Dar din ipoteză ştim că $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$. Ar rezulta că $\frac{AN}{NC} = \frac{AP}{PC}$, ceea ce este imposibil, întrucât două puncte distincte nu pot împărţi în acelaşi raport un segment dat.

Demonstrarea teoremei lui Thales în cazul rapoartelor reale oarecare.

Reamintim că un număr raţional este un raport de numere întregi. Scris zecimal, un număr raţional are fie un număr finit de zecimale, fie, dacă sunt o infinitate, are perioadă. Dar există şi numere reale „care pot fi figurate pe axă", fără să se poate scrie ca un raport de numere întregi. Dacă am încerca să le scriem

zecimal, ele ar avea o infinitate de zecimale, şi nu au perioadă. Acestea sunt numerele iraţionale.

Între oricare numere iraţionale $a \neq b$ există cel puţin un număr raţional r. Exemplu: Fie: $a = 2{,}738...$, $b = 3{,}060...$, $r = 2{,}9$ şi $a < r < b$. Bineînţeles că nu există un singur număr cu această proprietate; de exemplu: 3,05 o îndeplineşte şi el! Dar dacă între a şi b nu există nici un număr raţional, adică oricare ar fi r raţional cu proprietatea $r < a$ îndeplineşte şi proprietatea $r < b$, şi oricare ar fi p raţional cu proprietatea $p < b$ are şi proprietatea că $p < a$, atunci evident $a = b$.

Putem trece acum la demonstrarea teoremei lui Thales în cazul general, bazându-ne pe valabilitatea ei în cazul când unul din rapoarte este raţional.

În triunghiul ABC fie $DE \parallel BC$ ($D \in (AB)$, $E \in (AC)$) şi $\frac{AD}{DB} = u$, număr iraţional (fig. 56). Fie r raţional astfel încât $r < u$, deci $r < \frac{AD}{DB}$ sau $r \cdot DB < AD$. Să

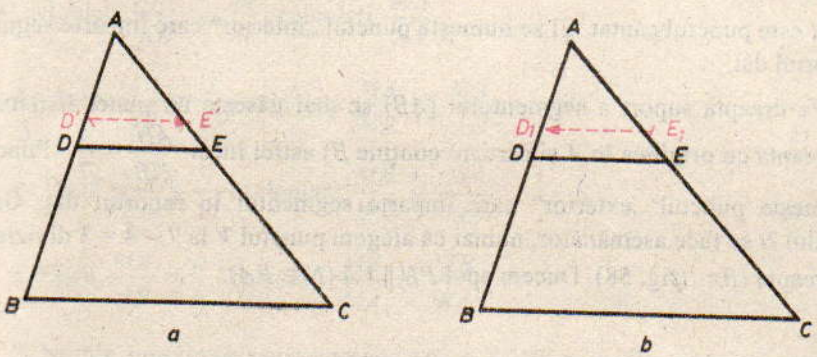


Fig. 56

desenăm punctul D' pe (AB) astfel încât $AD' = r \cdot DB$. El se va afla între A şi D. Ducem prin D' dreapta $D'E' \parallel BC$. Prin urmare, E' este între A şi E. Avem deci $r = \frac{AD'}{DB} = \frac{AE'}{EC} < \frac{AE}{EC}$. Putem deci afirma că orice număr $r < \frac{AD}{DB}$ are şi proprietatea că $r < \frac{AE}{EC}$.

Fie $p < \frac{AE}{EC}$, deci $p \cdot EC < AE$. Luăm punctul E_1 astfel încât $p \cdot EC = AE_1$, deci E_1 este între A şi E. Ducem $D_1E_1 \parallel BC$, deci $D_1E \parallel DE$, deci D_1 va fi între A şi D, deci orice $p < \frac{AE}{EC}$ verifică şi inegalitatea $p < \frac{AD}{DB}$. De aici $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

q.e.d.

Aplicaţie. Împărţirea unui segment într-un raport dat.

Pentru un început să considerăm cazul particular al segmentului $[AB]$ ($AB = 3{,}7$ cm), din figura 57, pe care vrem să-l împărţim printr-un punct M în

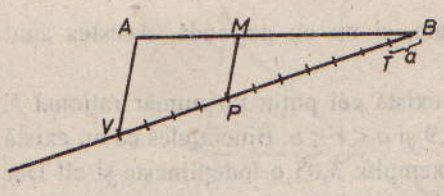


Fig. 57

raportul $\frac{4}{7}$. Deci $\frac{AM}{MB}=\frac{4}{7}$. În fond, problema revine la a împărți segmentul $[AB]$ în 11 părți egale (4 + 7) și de a fixa punctul depărtat la patru diviziuni de A și la 7 diviziuni de B.

Pentru aceasta considerăm, după voie, o semidreaptă (Bx cu originea în B, diferită de (BA. Ne fixăm un segment de lungime constantă $BT = a$, pe care-l purtăm cu ajutorul compasului de 11 ori în continuare pe semidreapta (Bx. Deci $BV = 11\ a$. Considerăm pe (Bx punctul P astfel încât $VP = 4 \cdot BT$ și ducem $PM \parallel VA$ ($M \in (AB)$). Conform teoremei lui Thales

$$\frac{BM}{AM}=\frac{BP}{PV}=\frac{7a}{4a}=\frac{7}{4} \text{ sau } \frac{AM}{MB}=\frac{4}{7}.$$

Deci M este punctul căutat. El se numește punctul „interior" care împarte segmentul în raportul dat.

Pe dreapta suport a segmentului $[AB]$ se mai găsește un punct N (situat pe semidreapta cu originea în A și care nu conține B) astfel încât $\frac{AN}{NB}=\frac{4}{7}$. Punctul N se numește punctul „exterior" care împarte segmentul în raportul dat. Găsirea punctului N se face asemănător, numai că alegem punctul V la 7 – 4 = 3 diviziuni pe semidreapta (Bx (fig. 58). Ducem apoi $PN \parallel VA$ ($N \in BA$).

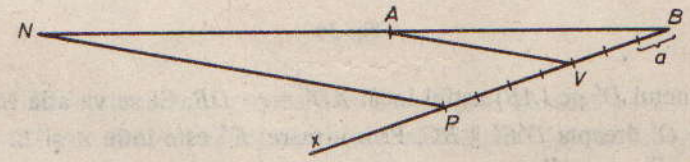


Fig. 58

În general, dacă dorim să găsim punctul „interior" M care să împartă segmentul $[AB]$ în raportul $\frac{m}{n}(m, n \in \mathbf{N}^*)$, purtăm pe semidreapta construită (Bx de $m+n$ ori un segment de lungime constantă $BT = a$ și „unim" diviziunea ultimă cu punctul A. În triunghiul BVA astfel format „ducem" prin diviziunea a $(m) - a$ paralela la VA, iar intersecția acesteia cu $[AB]$ este punctul căutat.

Dacă dorim să găsim punctul „exterior", unim diviziunea $(m-n)-a$ cu extremitatea A a segmentului $[AB]$ și „ducem" prin a $(m) - a$ diviziune paralela la VA, iar intersecția acesteia cu semidreapta (BA este punctul căutat.

2. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

A. RAPORTUL A DOUĂ SEGMENTE

1. Un segment $[MN]$ se împarte în 14 părţi congruente. Fie A, B, C şi D respectiv al 4-lea, al 6-lea, al 7-lea şi al 11-lea punct de diviziune. Calculaţi valoarea rapoartelor:

a) $\frac{AM}{AN}$; b) $\frac{BM}{BN}$; c) $\frac{CN}{CM}$; d) $\frac{DN}{DM}$; e) $\frac{AM}{MN}$; f) $\frac{AN}{MN}$;

g) $\frac{DM}{DN}$; h) $\frac{DN}{NM}$; i) $\frac{CN}{MN}$.

2. Fie $[AB]$ un segment şi $M \in (AB)$. Dacă $\frac{MA}{MB}$ este: a) $\frac{3}{5}$, calculaţi $\frac{MA}{AB}$; b) $\frac{6}{5}$, calculaţi $\frac{MA}{AB}$; c) $\frac{m}{n}$, calculaţi $\frac{MA}{AB}$.

d) Dacă $\frac{MA}{AB} = \frac{2}{13}$, calculaţi $\frac{MA}{MB}$ şi $\frac{MB}{AB}$;

e) Dacă $\frac{MB}{BA} = \frac{7}{11}$, calculaţi $\frac{MB}{MA}$ şi $\frac{MA}{MB}$;

f) Dacă $\frac{MA}{AB} = \frac{a}{b}$, calculaţi $\frac{MB}{MA}$ şi $\frac{MB}{BA}$.

3. Notăm lungimile segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$ respectiv cu m şi n. Calculaţi lungimea segmentului $[CD]$ dacă $m = 12$ cm şi

a) $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$; c) $\frac{m}{n} = \frac{n}{m}$.

4. Fie $AB = 16,8$ dm. Câte puncte diferite, interioare segmentului $[AB]$ există, care să-l împartă în raportul: a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{2}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{4}$? Precizaţi, în fiecare caz în parte, care este poziţia acestor puncte faţă de mijlocul segmentului $[AB]$.

5. Să se „construiască" pe segmentul $[AB]$ ($AB = 10,5$ cm), punctele interioare C şi D care să-l împartă respectiv în rapoartele:

a) $\frac{1}{2}$ şi $\frac{2}{1}$; b) $\frac{2}{3}$ şi $\frac{3}{2}$; c) $\frac{3}{4}$ şi $\frac{4}{3}$.

Precizaţi, în fiecare caz, care este poziţia punctelor C şi D faţă de mijlocul segmentului $[AB]$.

6. Fie $C \in (AB)$ astfel încât $AC = \frac{1}{4} \cdot AB$. a) A câta parte din lungimea lui $[CB]$ este lungimea lui $[AC]$?; b) Aceeaşi întrebare dacă AC este: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, din AB; c) Dar dacă AC este $\frac{1}{n}$ din AB?

7. Segmentul $[AB]$ are lungimea a. Fie $M \in (AB)$. Notăm $AM = x$. Determinaţi x astfel încât $\frac{AM}{MB}$ să fie egal cu:

a) 0, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1; b) $\frac{1}{n}$; c) cercetaţi cum variază valoarea numerică a raportului $\frac{AM}{MB}$?

8. a) Segmentul $[AB]$ cu $AB = 120$ mm se împarte în părţi proporţionale cu trei segmente date, de 14 mm, 16 mm şi 30 mm lungime. Aflaţi lungimile celor trei părţi ale segmentului $[AB]$.

b) Aceeaşi problemă dacă $AB = m$ şi este împărţit în patru părţi proporţionale cu segmente ale căror lungimi sunt a, b, c, d.

9. a) Fie segmentul $[AB]$ cu $AB = 5$ cm. Să se deseneze punctul interior M care îl împarte în raportul $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}$. De asemenea, punctul exterior N astfel încât $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{5}$.

b) Aceleaşi cerinţe dacă $AB = 8$ cm, $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{4}$ şi $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{5}$.

B. TEOREMA LUI THALES

10. Latura $[AB]$ a triunghiului oarecare ABC este împărţită de punctele M_1, M_2, M_3 în patru segmente congruente astfel ca: $[AM_1] \equiv [M_1M_2] \equiv [M_2M_3] \equiv [M_3B]$. Paralelele prin M_1, M_2 şi M_3 la latura $[BC]$ intersectează latura $[AC]$ respectiv în N_1, N_2 şi N_3. Demonstraţi că: a) $[BN_1]$ este mediană în triunghiul ABN_2; b) $[BN_3]$ este mediană în triunghiul CBN_2; c) $[BN_2]$ este mediană în triunghiurile ABC şi N_1BN_3.

11. În triunghiul MNP, $A \in (MN)$, $B \in (MP)$. Dacă $AB \parallel NP$ şi

a) $AM = 4$, $AN = 3$, $MB = 2$, aflaţi BP şi MP;

b) $AM = 5$, $AN = 2$, $BP = 3$, aflaţi MB şi MP;

c) $AM = 6$, $MN = 12$, $MB = 4$, aflaţi AN, BP şi MP;

d) $AM = 8$, $MN = 14$, $BP = 5$, aflaţi AN, MB şi MP;

e) $AN = 6$, $MN = 10$, $MB = 2$, aflaţi AM, BP şi MP;

f) $AN = 3$, $MN = 8$, $BP = 5$, aflaţi AM, MB şi MP.

12. În triunghiul ABC, $M \in (AB)$, $MN \parallel BC$, $N \in (AC)$ (fig. 59). În tabelul următor figurează lungimile diferitelor segmente ale figurii. Copiaţi în caietele voastre tabelul de mai jos şi completaţi (pe orizontală) cu numerele potrivite căsuţele libere.

	AB	AC	AM	AN	MB	NC
a	8	6	3			
b	15		12	4		
c		11		5	4	
d	18		12			4
e		10			3	2
f	8				3	6

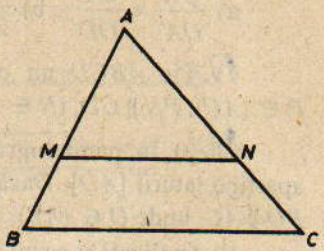


Fig. 59

13. Fie ABC un triunghi oarecare, $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$. Arătaţi că $MN \parallel BC$, ştiind că:

a) $AM = 6$, $MB = 10$, $AN = 3$, $NC = 5$;

b) $AM = 1$, $AB = 7$, $AC = 21$, $NC = 18$;

c) $AB = 7$, $MB = 2$, $AN = 5$, $NC = 2$.

14. Punctele B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 aparţin semidreptei $[Ax$. Punctele B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2 aparţin semidreptei $[Ay \cdot ([Ax \neq [Ay)$.

Dacă $AB_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = a$ şi

$AB_2 = B_2C_2 = C_2D_2 = D_2E_2 = E_2F_2 = F_2G_2 = b$,

atunci:

a) $B_1B_2 \parallel C_1C_2 \parallel D_1D_2 \parallel E_1E_2 \parallel F_1F_2$;

b) $B_1C_2 \parallel C_1E_2 \parallel D_1G_2$.

15. a) Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC = 8$ cm). Notăm $D \in (AB)$ şi $E \in (AC)$, astfel încât $AD = 1$ cm şi $AE = 2$ cm. Demonstraţi că mediana $[CF]$ ($F \in (AB)$) este paralelă cu dreapta DE.

b) Aceeaşi cerinţă pentru cazul: $AB = AC = 6$ cm, $AD = 2$ cm şi $AE = 4$ cm.

16. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC considerăm punctele A_1, A_2, A_3, A_4 şi respectiv B_1, B_2, B_3, B_4.

a) Dacă $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \parallel BC$ şi $AA_1 = 2$, $A_1A_2 = 4$, $A_2A_3 = 10$, $A_3A_4 = 14$, $A_4B = 12$, $AB_1 = 3$, calculaţi B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4C;

b) Aceleaşi cerinţe în cazul în care $AA_1 = 1$, $A_1A_2 = 5$, $A_2A_3 = 7$, $A_3A_4 = 9$, $A_4B = 8$, $AB_1 = 4$.

17. Punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 aparţin dreptei a astfel încât $A_1A_2 = 4$ cm, $A_2A_3 = 6$ cm, $A_3A_4 = 7$ cm, $A_4A_5 = 3$ cm. Prin aceste puncte se duc drepte paralele care intersectează o dreaptă b neparalelă cu a respectiv în punctele B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Să se afle lungimile B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, ştiind că: a) $B_1B_5 = 48$ cm; b) $B_1B_2 + B_3B_4 = 20$ cm; c) $B_3B_4 - B_2B_3 = 5$ cm.

18. Semidreptele $[Oz$ şi $[Ot$ sunt interioare unghiului xOy, iar $[Oz$ este interioară unghiului xOt.

Dacă A şi $A' \in [Ox$, B şi $B' \in [Oz$, C şi $C' \in [Ot$, D şi $D' \in [Oy$ şi $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$, atunci

a) $\frac{OA}{OA'} = \frac{OD}{OD'}$; b) $\frac{OA}{AA'} = \frac{OD}{DD'}$.

19. Fie $ABCD$ un paralelogram unde $AB \parallel CD$ şi $[AC]$ diagonală. Dacă $P \in (AC)$, $PN \parallel CD$, $(N \in AD)$ şi $PM \parallel BC$, $(M \in AB)$, atunci $MN \parallel BD$.

20. a) În paralelogramul $ABCD$ ($AB \parallel CD$ şi $[BD]$ diagonală), punctul M aparţine laturii $[AD]$. Dacă $MN \parallel AC$, unde $N \in (DC)$, $NP \parallel BD$, unde $P \in (BC)$, $PQ \parallel AC$, unde $Q \in (AB)$, atunci $QM \parallel BD$.

b) Analizaţi şi cazul când $ABCD$ este un paralelogram convex oarecare.

21. Fie triunghiul ABC şi $M \in (BC)$. Dreptele MN şi MP sunt paralele respectiv cu dreptele AB şi AC ($N \in (AC)$, $P \in (AB)$). Demonstraţi că $\frac{NC}{AC} + \frac{PB}{AB} = 1$.

22. În triunghiul ABC, $M \in (BC)$. Paralela prin M la mediana $[AA_1]$, $(A_1 \in (BC))$ intersectează dreptele AC şi AB respectiv în E şi F. Demonstraţi că lungimile segmentelor $[AE]$ şi $[AF]$ sunt proporţionale cu lungimile laturilor $[AC]$ şi $[AB]$.

23. În triunghiul ABC, fie $D \in (BC)$ astfel încât $\frac{DB}{DC} = \frac{p}{q}$. Dacă $E \in (AD)$, astfel încât $\frac{ED}{EA} = \frac{p}{q}$, calculaţi $\frac{AF}{FC}$, unde $\{F\} = BE \cap AC$.

24. Punctul M aparţine laturii (AB) a triunghiului ABC. Dreptele MN şi MP sunt respectiv paralele cu BC şi AC ($N \in (AC)$ şi $P \in (BC)$). Prin P „ducem" $PQ \parallel AB$, $(Q \in (AC))$.

a) Demonstraţi că punctele N şi Q sunt simetrice faţă de mijlocul laturii $[AC]$.

b) Să se calculeze lungimea segmentului $[NQ]$ cu ajutorul lungimii laturii $AC = B$ şi a raportului $\frac{MA}{MB} = k$.

c) În ce caz punctele N şi Q se confundă?

25. Punctele D şi F aparţin respectiv laturilor (AB) şi (AC) ale triunghiului ABC astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = k$. Fie $E' \in BE$, (E între B şi E'), cu $EE' = k \cdot BE$ şi $D' \in CD$, (D între C şi D'), cu $DD' = k \cdot CD$.

Demonstraţi că punctele D', A, E' sunt coliniare.

26. Un pătrat $ABCD$ are latura de 8 pătrăţele de caiet de matematică. Folosind numai rigla să se găsească punctul M pe diagonala $[AC]$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{7}{8}$. Acelaşi lucru dacă $\frac{AM}{AC} = \frac{3}{4}$.

27. Cu notaţiile din figura 60, unde MN, PQ şi BC sunt paralele între ele, determinaţi lungimile x, y şi z.

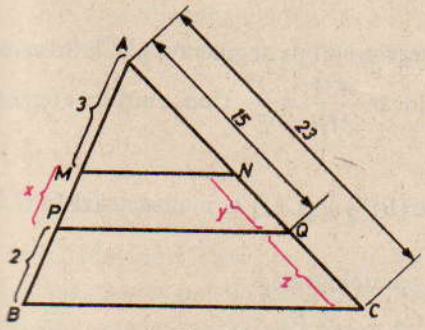


Fig. 60

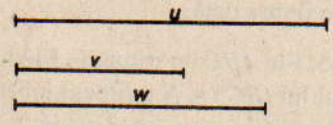


Fig. 61

28. Fiind date segmentele din figura 61 să se construiască un segment x astfel încât $x = \frac{uv}{w}$. Aceeaşi problemă pentru $u = 6$ cm, $v = 10$ cm şi $w = 15$ cm.

29. Se consideră trei semidrepte $[Ox$, $[Oy$ şi $[Oz$, punctele A, A' pe $[Ox$, B pe $[Oy$ şi C pe $[Oz$. Paralela prin A' la AB intersectează pe $[Oy$ în B' şi paralela din B' la BC intersectează pe $[Oz$ în C'. Să se demonstreze că $C'A' \parallel AC$.

30. În figura 62, dreapta MN care este paralelă la BC se intersectează cu prelungirile laturilor $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC în M şi N.

Să se demonstreze că şi în aceste cazuri $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

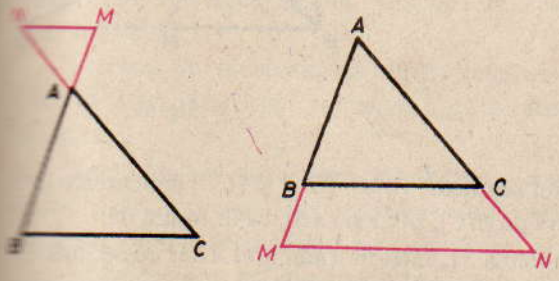


Fig. 62

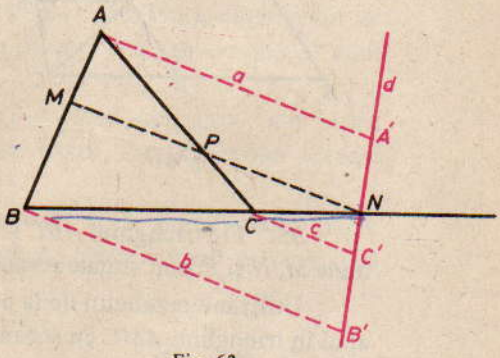


Fig. 63

31.[1] Fie triunghiul ABC. Dreptele AB, BC, CA sunt intersectate de o dreaptă (care nu „trece" prin vârfurile triunghiului) în punctele M, N, P (fig. 63). Ducând prin A, B, C, dreptele a, b, c, paralele cu dreapta MN, şi apoi o dreaptă d care „trece"

[1] Problema este cunoscută sub denumirea de „Teorema lui Menelaos". (Menelaos a fost un matematician şi astronom grec din Alexandria, care a trăit în sec. I î.e.n.)

prin N şi intersectează aceste drepte în A', B', C', să se demonstreze relaţia: $\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$. Demonstraţi şi reciproca.

32. Fie ABC un triunghi şi M un punct mobil pe segmentul $[BC]$. Se cere locul geometric al punctului $P\in(AM)$, astfel încât $\frac{AM}{MP}=\frac{2}{7}$. Construiţi locul geometric aflat, pe figura dată.

33. Fie ABC un triunghi. Medianele $[BB']$ şi $[CC']$ se intersectează în G. Fie M mijlocul lui (BG) şi N mijlocul lui (GC).

a) Demonstraţi că $C'MNB'$ este un paralelogram.

b) Exprimaţi valoarea rapoartelor $\frac{GC}{CC'}$ şi $\frac{GB}{BB'}$.

c) Dacă $[AA']$ este a treia mediană, arătaţi, prin acelaşi procedeu, că $\frac{GA}{AA'}=\frac{2}{3}$.

d) Demonstraţi concurenţa medianelor $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$.

34. În triunghiul ABC din figura 64 avem $MP \parallel AB$, iar în triunghiul ACD, $MQ \parallel CD$.

Să se arate că $\frac{BP}{BC}\cdot\frac{CD}{QD}=1$ şi $\frac{BP}{BC}+\frac{CQ}{CD}=1$.

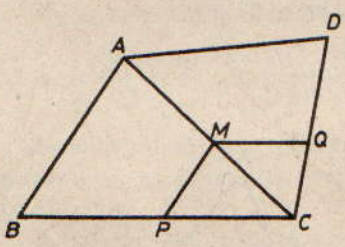


Fig. 64

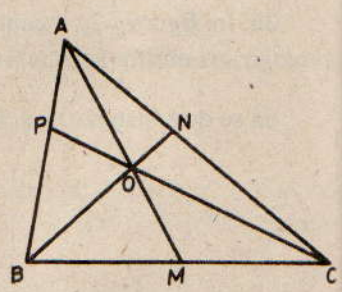


Fig. 65

35.[1] Fie triunghiul ABC şi trei segmente $[AM]$, $[BN]$ şi $[CP]$ concurente în O, unde M, N şi P sunt situate respectiv pe (BC), (AC) şi (AB), ca în figura 65.

Utilizând rezultatul de la problema 31, întâi în triunghiul ABM cu secanta PC, apoi în triunghiul AMC cu secanta BN, şi împărţind egalităţile obţinute, demonstraţi că: $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=1$.

36. Într-un triunghi ABC, bisectoarele unghiurilor formate de mediana $[AM]$, $(M\in(BC))$ cu latura $[BC]$ intersectează celelalte două laturi în punctele P şi Q. Demonstraţi că $PQ \parallel BC$.

---

[1] Problema este cunoscută sub denumirea de „Teorema lui Ceva". (Giovani Ceva (1647–1734), matematician italian.)

37. Într-un trapez isoscel, baza mare este egală cu 7 cm, laturile neparalele cu câte 5 cm, iar diagonalele cu 6 cm. Să se calculeze mărimea segmentelor determinate de bisectoarea unghiului alăturat bazei mari pe diagonala opusă.

§ 3. ASEMĂNAREA[1)]

Priviți desenele alăturate. Al doilea a fost obținut prin „mărirea" primului. Ele seamănă, dar nu pot fi făcute să coincidă prin copiere întocmai și suprapunere. Un segment care unește două puncte din primul desen și segmentul care unește punctele corespunzătoare lor din cel de-al doilea nu au aceeași lungime. Dar raportul acestor segmente este același cu raportul segmentelor care unesc oricare alte două puncte care își corespund (ca de pildă ochiul cu vârful urechii), iar unghiurile dintre aceste segmente corespunzătoare sunt congruente. Am putea

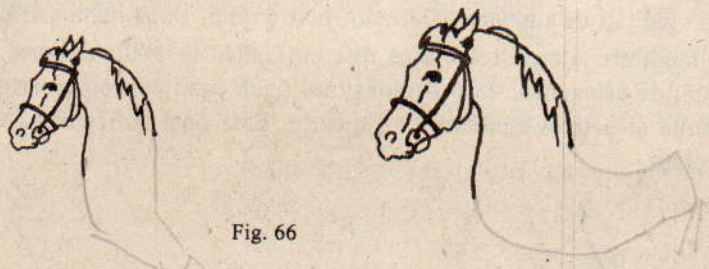


Fig. 66

deci afirma că, în cazul asemănării, raportul distanțelor și măsura unghiurilor se păstrează de la o figură la alta. Se spune că aceste desene care „se aseamănă" sunt *figuri asemenea.*

Plecând de la aceste constatări intuitive și vorbind neriguros, am putea spune că două figuri sunt asemenea dacă au aceeași formă, dar nu necesar aceeași mărime.

Referindu-ne la *figuri geometrice asemenea,* am putea face unele exemplificări: oricare două segmente sunt asemenea, oricare două cercuri sunt asemenea, oricare două pătrate sunt asemenea.

Să începem cu definirea asemănării triunghiurilor.

Definiție. **Două triunghiuri se numesc asemenea dacă au toate laturile respectiv proporționale și unghiurile opuse lor, respectiv congruente.**

Când dăm o definiție, trebuie să ne asigurăm însă că există obiecte care să îndeplinească toate condițiile cerute de ea. Cu alte cuvinte, trebuie să arătăm că există, în cazul nostru, două triunghiuri despre care să putem afirma că sunt asemenea. Într-adevăr, am putea afirma că două triunghiuri congruente sunt

[1)] Cuvântul *„asemănare"* vine din limba latină: *similis* = asemenea.

asemenea pentru că: evident, au laturile respectiv proporționale deoarece raportul măsurilor lor este 1 și au unghiurile respectiv congruente. Da, dar dacă numai triunghiurile congruente ar fi asemenea, nu ar mai fi nevoie să folosim noțiunea de asemănare. Trebuie deci să arătăm că există triunghiuri asemenea care nu sunt congruente. Și aceasta o face

Teorema fundamentală a asemănării. **O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi** (sau cu prelungirile lor) **un triunghi asemenea cu cel dat.**

O primă observație. Ipoteza teoremei fundamentale a asemănării este aceeași cu cea a teoremei lui Thales. Concluzia este însă mai cuprinzătoare.

Demonstrația. Fie triunghiul ABC și PQ o dreaptă paralelă la BC ($P \in (AB)$, $Q \in (AC)$), ca în figura 67.

Trebuie să arătăm că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle P_1 \equiv \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle Q_2 \equiv \sphericalangle C_2$, $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$.

La prima vedere ar trebui să demonstrăm 6 relații: trei congruențe de unghiuri și trei egalități de rapoarte. Dar sunt mai puține. Dacă demonstrăm două congruențe de unghiuri, a treia rezultă ca diferență până la 180° a sumei măsurilor primelor două; de asemenea, dacă demonstrăm două egalități de rapoarte, prin tranzitivitate rezultă și a treia egalitate de rapoarte. Este deci suficient să demonstrăm numai 4 relații.

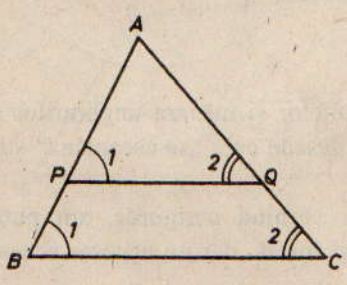


Fig. 67

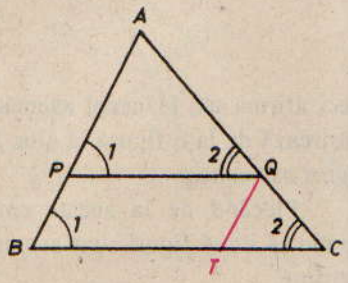


Fig. 68

Din aplicarea teoremei lui Thales rezultă $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$; pe de altă parte $\sphericalangle A = \sphericalangle A$ (reflexivitate), $\sphericalangle P_1 \equiv \sphericalangle B_1$ (corespondente).

Rămâne de arătat că $\frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AC}$. Pentru aceasta ducem $QT \parallel AB$ ($T \in (BC)$) (fig. 68). Se formează astfel, pe de o parte, paralelogramul $PBTQ$ și deci $[PQ] \equiv [BT]$, iar pe de altă parte se poate aplica teorema lui Thales ($QT \parallel AB$) și se obține $\frac{CQ}{QA} = \frac{CT}{TB}$ sau $\frac{CQ+QA}{QA} = \frac{CT+TB}{TB}$ sau încă $\frac{AQ}{AC} = \frac{BT}{BC}$. Înlocuind în ultima proporție pe BT cu BQ obținem și ultima relație căutată.

Observație. Putem să considerăm că paralela PQ întâlnește prelungirile laturilor triunghiului ABC, demonstrația rămâne în fond aceeași (fig. 69). Faptul că triunghiurile APQ și ABC sunt asemenea se notează simbolic: $\triangle APQ \sim \triangle ABC$. Notația de asemănare este semnul grafic (tilda) „~", care amintește inițiala S a cuvântului *similis*.

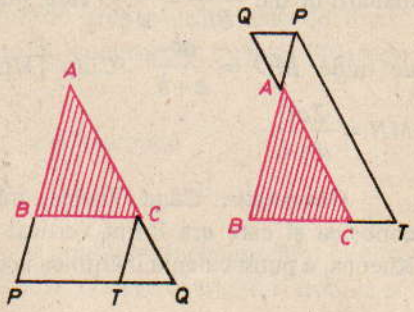


Fig. 69

Aplicație. **Dacă prin intersecția diagonalelor unui trapez se „duce" o paralelă la baze, atunci laturile neparalele ale trapezului determină pe această paralelă un segment al cărui mijloc este intersecția diagonalelor.**

Demonstrația. Fie $ABCD$ trapezul, $[AD]$ și $[BC]$ bazele sale, O intersecția diagonalelor. Dreapta MN este paralela la baze care „trece" prin O ($M \in (AB)$, $N \in (DC)$) (fig. 70).

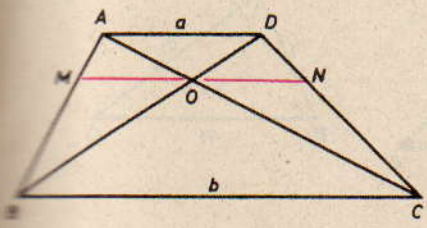


Fig. 70

Teorema fundamentală a asemănării ne spune că triunghiurile AMO și ABC sunt asemenea, la fel, $\triangle DON \sim \triangle DBC$. Rezultă că $\frac{MO}{BC} = \frac{AM}{AB}$ (1) și $\frac{DN}{DC} = \frac{ON}{BC}$ (2). Dar, prin faptul că mai multe drepte paralele determină pe orice secantă segmente proporționale, $\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC}$ (3). Pe baza proprietății de tranzitivitate a egalității, din (1) și (3) rezultă că: $\frac{MO}{BC} = \frac{DN}{DC}$ (4), iar din (4) și (2) că: $\frac{MO}{BC} = \frac{ON}{BC}$ și, fracțiile având același numitor, rezultă că și numărătorii sunt egali. Deci $MO = ON$.

Dacă vom nota $AD = a$, $BC = b$, vrem să arătăm, în plus, că lungimea segmentului $[MN]$ nu depinde decât de lungimile a și b ale bazelor și nu de cele ale laturilor neparalele, $[AB]$ și $[DC]$.

Tot din teorema fundamentală a asemănării, aplicată de data aceasta pe prelungirile laturilor $[BO]$ și $[CO]$ ale triunghiului BOC, rezultă că triunghiurile AOD și COB sunt asemenea, deci $\frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{a}{b}$ și, formând o proporție derivată, găsim: $\frac{AO}{AO+OC} = \frac{a}{a+b}$, adică $\frac{AO}{AC} = \frac{a}{a+b}$ (5).

În triunghiul ABC cu paralela MO la BC, teorema fundamentală a asemănării ne dă: $\frac{MO}{BC} = \frac{AO}{AC}$, care, ținând seama de (5), poate fi scrisă: $\frac{MO}{BC} = \frac{a}{a+b}$, de unde $MO = \frac{ab}{a+b}$. Cum $[MO] \equiv [ON]$, putem scrie $MN = 2 \cdot MO$, deci $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Observație. Când Thales, măsurând umbra unui băț a cărui lungime o cunoștea și care era înfipt vertical în nisip, și măsurând și umbra piramidei lui Kheops, a putut calcula înălțimea acestei piramide, a folosit asemănarea.

§ 4. CAZURILE DE ASEMĂNARE A TRIUNGHIURILOR

Am arătat că există triunghiuri asemenea, prin teorema fundamentală a asemănării. Vrem să găsim niște criterii (condiții necesare și suficiente) după care putem recunoaște două triunghiuri asemenea în care să nu fie nevoie să demonstrăm decât două egalități. Pentru aceasta dăm în prealabil următoarea:

Lemă[1] **Două triunghiuri care sunt fiecare din ele asemenea cu un al treilea sunt asemenea între ele.**

Fie $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ și $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. Trebuie să arătăm că $\triangle A'B'C' \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Cu notațiile din figura 71 știm că:

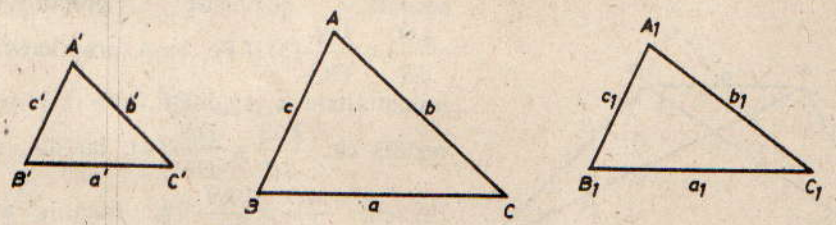


Fig. 71

1) $\sphericalangle A' \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle B' \equiv \sphericalangle B$, $\sphericalangle C' \equiv \sphericalangle C$;

2) $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$;

3) $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A$, $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B$, $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C$;

4) $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$.

Din 1) și 3) rezultă că $\sphericalangle A' \equiv A_1$, $\sphericalangle B' \equiv \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C' \equiv \sphericalangle C_1$.

Împărțind 2) cu 4) se obține: $\frac{a'}{a_1} = \frac{b'}{b_1} = \frac{c'}{c_1}$ și lema este demonstrată.

[1] Cuvântul „*lemă*" vine din limba greacă: *lemma* = propoziție luată ca argument. Lema este o propoziție ajutătoare care este folosită la demonstrarea unei teoreme.

Înainte de a prezenta cazurile de asemănare a triunghiurilor trebuie să atragem atenția asupra faptului că ordinea scrierii vârfurilor triunghiurilor este de foarte mare importanță. Literele din vârfurile unghiurilor congruente trebuie să ocupe același loc în scrierea triunghiului. De exemplu:

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N, \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle P \text{ implică}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \text{ (și nu } \triangle ABC \sim \triangle NMP \text{ sau } \triangle ABC \sim \triangle PNM \text{ etc.)}$$

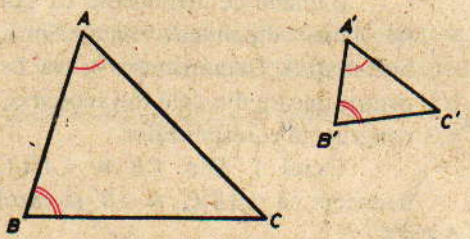
De asemenea, laturile omoloage (care se opun unghiurilor congruente) trebuie să fie termeni ai aceluiași raport, iar toate laturile unuia dintre triunghiuri trebuie să apară la numărătorii (sau numitorii) rapoartelor respective. De exemplu: dacă $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ înseamnă că:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} \text{ (și nu } \frac{AB}{NP} = \frac{BC}{MP} = \frac{AC}{MN}$$

sau altele asemănătoare și nici $\frac{AB}{MN} = \frac{NP}{BC} = \frac{AC}{MP}$ etc.).

Cazul 1 de asemănare. *Teoremă*. **Dacă două triunghiuri au două unghiuri respectiv congruente, atunci ele sunt asemenea** (fig. 72).

Ipoteza
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$,
$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$.

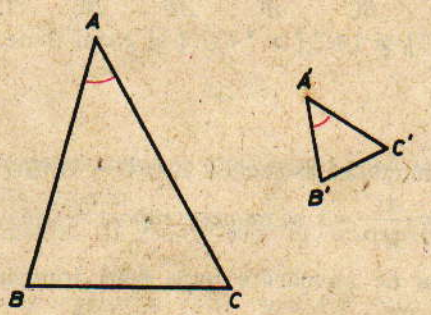


Concluzia
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Fig. 72

Cazul 2 de asemănare. *Teoremă*. **Dacă două triunghiuri au câte un unghi congruent și laturile ce-l formează respectiv proporționale, atunci ele sunt asemenea** (fig. 73).

Ipoteza
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$,
$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$.

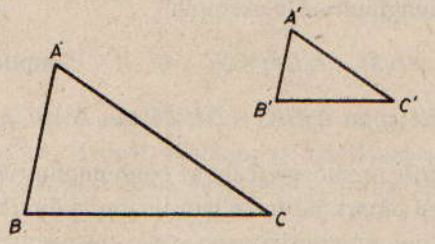


Concluzia
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Fig. 73

Cazul 3 de asemănare. *Teoremă*. **Dacă două triunghiuri au cele trei laturi respectiv proporționale, atunci ele sunt asemenea** (fig. 74).

Ipoteza $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.



Concluzia $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Fig. 74

Demonstrațiile celor trei teoreme au o parte comună. Anume:

Considerăm pe semidreapta (AB un punct B_1 astfel ca $[AB_1] \equiv [A'B']$. Ducem prin B_1 paralela la BC și notăm cu C_1 intersecția ei cu $[AC]$ – (fig. 75).

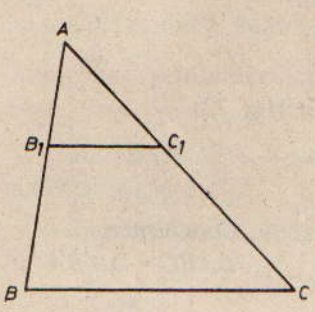


Fig. 75

Conform teoremei fundamentale a asemănării avem $\triangle ABC \sim AB_1C_1$. Deci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle AB_1C_1$.

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}.$$

Rămâne de demonstrat că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$ (și lema dinaintea enunțurilor va încheia demonstrația). Demonstrația se va face în mod diferit pentru fiecare din cele trei teoreme, folosind cazul de congruență corespunzător.

Cazul 1. Din $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle AB_1C_1$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ deducem că $\sphericalangle AB_1C_1 \equiv \sphericalangle B'$ și cazul 1 de congruență arată acum că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$.

Cazul 2. Din $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ și $[AB_1] \equiv [A'B']$ deducem $[AC_1] \equiv [A'C']$ și cazul 1 de congruență arată că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$.

Cazul 3. Din $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ și $[AB_1] \equiv [A'B']$ deducem $[B_1C_1] \equiv [B'C']$ și $[AC_1] \equiv [A'C']$ și cazul 3 de congruență arată că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$.

q.e.d.

Fiind date două triunghiuri asemenea $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, valoarea comună a rapoartelor $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP} = k$ se numește *raport de asemănare*.

Observație. Relația de asemănare între două triunghiuri are următoarele proprietăți:

a) Este reflexivă; adică orice triunghi este asemenea cu el însuși.

b) Este simetrică; adică dacă un triunghi este asemenea cu un al doilea triunghi, atunci şi al doilea triunghi este asemenea cu primul.

c) Este tranzitivă; adică două triunghiuri, fiecare dintre ele asemenea cu un al treilea, sunt asemenea.

Proprietăţile a, b, c sunt consecinţe ale definiţiei, sau, mai simplu, ale cazului I de asemănare.

Problemă rezolvată. Se dă un cerc de centru O şi rază R şi un punct P situat la distanţa d de centrul cercului ($d = PO$ şi $d \neq R$) şi se cere:

a) Să se demonstreze că oricare ar fi o secantă din P care intersectează cercul în A şi B, produsul lungimii segmentelor $[PA]$ şi $[PB]$ este constant ($PA \cdot PB = k$).

b) Să se arate că această constantă este $k = |d^2 - R^2|$ şi să se analizeze această relaţie în cazul când P este interior cercului sau exterior lui.

c) În cazul punctului exterior, fie PT tangenta la cerc. Să se demonstreze că $PT^2 = k$, unde k este constanta de la punctele a) şi b).

Demonstraţia. Ducem din P două secante PB şi PB' (fig. 76). Problema se pune în fond să demonstrăm că $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$. (E ca şi cum am considera PB fixă şi PB' mobilă, şi am arăta că produsul lungimilor segmentelor de pe secanta variabilă ar fi mereu egal cu cel al lungimilor segmentelor de pe secanta fixă.)

Altă remarcă. De multe ori când avem de demonstrat o egalitate de produse, este convenabil s-o transcriem ca pe o egalitate de rapoarte echivalentă cu ea. În cazul de faţă egalitatea de demonstrat s-ar putea scrie: $\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{BP}$.

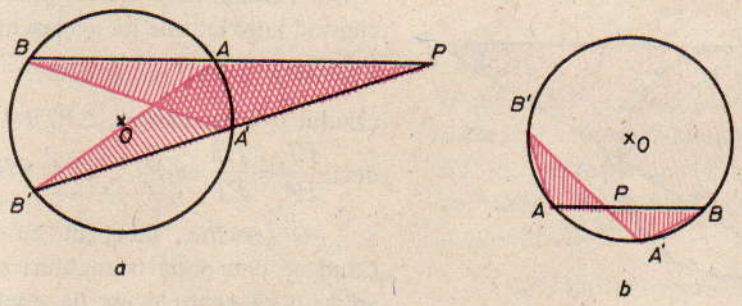


Fig. 76

În figura 76 sunt prezentate cele două cazuri posibile: al punctului P exterior şi al punctului P interior cercului.

Vom face demonstraţia în acelaşi timp pentru ambele cazuri, raţionamentul fiind aproape acelaşi.

Se constată că triunghiurile PAB' şi $PA'B$ sunt asemenea (cazul I de asemănare) pentru că: 1 $\sphericalangle APB' \equiv \sphericalangle A'PB$ (în primul caz unghiurile din P coincid)

și $\sphericalangle APB' \equiv \sphericalangle A'PB$ (în al doilea caz sunt opuse la vârf); 2) $\sphericalangle PAB' \equiv \sphericalangle PA'B$ (în primul caz) și $\sphericalangle BAB' \equiv \sphericalangle BA'B$ (în al doilea caz) – fiind unghiuri înscrise în cerc ce cuprind între laturi același arc de cerc $\overset{\frown}{BB'}$.

Din asemănarea triunghiurilor PAB' și $PA'B$ rezultă propoționalitatea laturilor, deci $\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}$ și demonstrația a fost făcută.

b) Dacă, în particular, ducem secanta prin O, centrul cercului, atunci $PE = d + R$ și $PA = d - R$ (în cazul punctului exterior) sau $PA = R - d$ (în cazul punctului interior) – figura 77. Făcând produsul $PA \cdot PB$ și observând

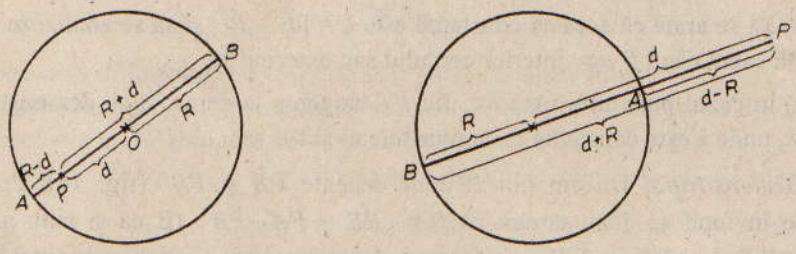


Fig. 77

că suntem în cazul unui produs de sumă prin diferență, obținem $k = d^2 - R^2$ (în cazul punctului exterior) și $k = R^2 - d^2$ (în cazul punctului interior). Putem scrie deci $k = |d^2 - R^2|$.

c) În cazul în care PT este tangentă și PB secantă (fig. 78), triunghiurile PTB și PAT sunt asemenea, având unghiul din P comun, iar $\sphericalangle TBP$ (înscris în cerc) și $\sphericalangle ATP$ (format de o coardă și o tangentă) cuprind între laturile lor același arc de cerc $\overset{\frown}{AT}$, deci sunt congruente. Conform cazului 1 de asemănare, $\triangle PTB \sim \triangle PAT$ și deci $\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow PT^2 = PA \cdot PB$[1].

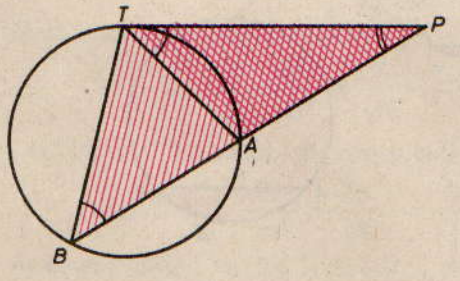


Fig. 78

Observație. Începem cu exemple. Când se dau două triunghiuri asemenea, spunem că centrele lor de greutate sunt puncte care își corespund prin asemănare. La fel și ortocentrele lor, și centrele cercurilor înscrise, și centrele cercurilor circumscrise, și picioarele medianelor și ale înălțimilor respective, toate sunt perechi de puncte care își corespund prin asemănare. Oricărui punct putem să-i găsim un alt punct care să-i corespundă prin asemănare în raport cu cele două triunghiuri asemenea date. Unul dintre criteriile după care putem preciza că două puncte își corespund prin asemănare

[1] Valoarea produsului $PA \cdot PB$ se numește „puterea punctului P față de cercul $\mathcal{C}(O, R)$".

ar fi, de pildă, că distanţele la vârfurile triunghiurilor asemenea sunt respectiv proporţionale; sau, alt criteriu, că formează cu două din vârfurile triunghiului, perechi de triunghiuri asemenea etc.

3. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

A. TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII

1. In triunghiul ABC, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ şi $MN \parallel BC$ (fig. 79). În tabelul următor figurează lungimile diferitelor segmente ale figurii, în mai multe variante. Copiaţi în caietele voastre tabelul de mai jos şi completaţi (pe orizontală), în căsuţele libere, numerele potrivite care să reprezinte lungimea segmentului respectiv.

	AB	BC	CA	AM	AN	MN	MB	NC
a	6		4			3		1
b	6	5			2			1
c			4		3	1	2	
d		5				3	2	1

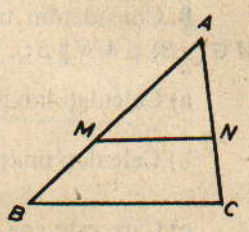


Fig. 79

2. Dându-se trapezul $ABCD$ (fig. 80) cu dimensiunile indicate pe desen, prelungirile laturilor neparalele se intersectează în O. Se cere perimetrul triunghiului OAB.

3. Un triunghi ABC are laturile $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm, $AC = 18$ cm. Se ia pe latura $[AB]$ un punct D astfel încât $AD = 6$ cm. Paralela prin D la BC intersectează pe AC în E. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ADE.

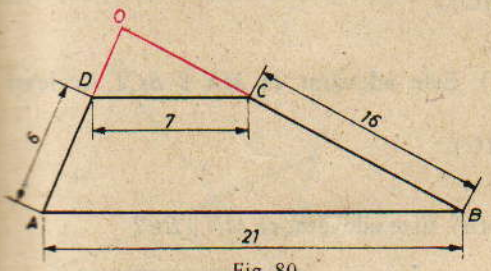


Fig. 80

4. Laturile neparalele $[BC]$ şi $[AD]$ ale trapezului $ABCD$ se intersectează în M. Să se calculeze lungimile segmentelor $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$, $[MD]$ în funcţie de lungimile laturilor trapezului în următoarele cazuri numerice: a) $AB = 20$ dm, $BC = 6$ dm, $CD = 15$ dm, $DA = 8$ dm; b) $AB = 20$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 15$ cm, $DA = 9$ cm.

5. Diagonalele unui trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se intersectează în N. a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[NA]$, $[NB]$, $[NC]$, $[ND]$, ştiind că $AB = 20$ m,

$CD = 10$ m, $AC = 21$ m, $BD = 12$ m. b)Aceeaşi problemă în cazul când $AB = 20$ cm, $CD = 10$ cm, $AC = 15$ cm, şi $BD = 9$ cm.

6. În triunghiul ABC, $DE \parallel BC$ şi: a) $D \in (AB)$; b) $D \in AB$ (cu A între B şi D); c) $D \in AB$ (cu B între A şi D).

Cercetaţi, pentru fiecare caz în parte, dacă:

$$1)\ \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}; \qquad 2)\ \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{EC}.$$

7. În triunghiul ABC se ştie că $AB = 6$ cm, $MN \parallel BC$ (unde $M \in AB$ şi $N \in AC$).

Dacă $\frac{MN}{BC}$ este: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{5}$; e) $\frac{1}{6}$; f) $\frac{1}{k}$, calculaţi lungimile segmentelor $[AM]$ şi $[MB]$.

8. Considerăm triunghiul oarecare ABC în care $AB = 4$ dm, $BC = 8$ dm, $M \in (AB)$ şi $MN \parallel BC$. Notăm $MN = x$.

a) Calculaţi lungimea segmentului $[AM]$ în funcţie de x.

b) Calculaţi mulţimea valorilor funcţiei f: $[0,1] \to \mathbf{R}$, unde $f(x) = \frac{x}{2}$.

c) Care este cea mai mică şi care este cea mai mare lungime a segmentului $[AM]$?

9. În triunghiul ABC, punctele M şi N aparţin dreptelor AB şi respectiv AC. Cercetaţi dacă triunghiurile ABC şi AMN sunt asemenea, ştiind că:

a) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$ şi $M \in (AB)$. Este adevărat că $MN \parallel BC$? Aceleaşi întrebări dacă $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ şi $N \in (AC)$.

b) $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$ şi $M \in (AB)$. Este adevărat că $MN \parallel BC$? Aceleaşi întrebări dacă $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{3}{5}$ şi $N \in (AC)$.

c) $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$, $N \in (AC)$ şi $M \in (AB)$. Este adevărat că $MN \parallel BC$?

d) $N \in (AC)$, $M \in (AB)$ şi $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ABC$. Este adevărat că $MN \parallel BC$? Aceleaşi întrebări dacă $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$.

10. Să se demonstreze că segmentul cu extremităţile pe două laturi ale unui triunghi, paralel cu a treia latură, este înjumătăţit de mediana acestuia. (Această propoziţie, odată demonstrată, este utilă şi în rezolvarea altor probleme.)

11. Două cercuri au același centru O. Pe cercul „mare" considerăm două puncte A și B. Razele $[OA]$ și $[OB]$ intersectează cercul „mic" în A' și B'. Să se demonstreze că AB și $A'B'$ sunt proporționale cu razele cercurilor. (Fiți atenți să nu uitați să analizați și cazul când $[BA]$ este diametru!)

12. În figura 81, patrulaterul $OABM$ este un trapez în care $OM \parallel AB$, $OA = a$, $OM = b$ și $BC = c$, iar P este un punct oarecare pe dreapta OA și $OP = x$. Dacă $PQ \parallel AB$, $(Q \in MB)$ și dacă notăm $PQ = y$, să se determine y în funcție de a, b, c și x.

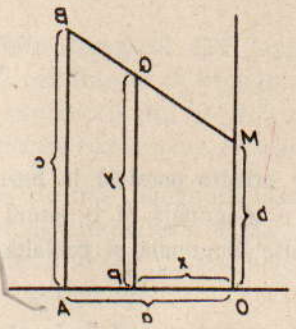


Fig. 81

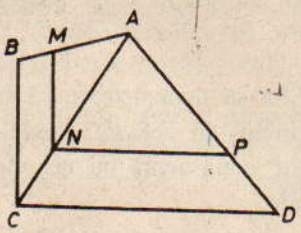


Fig. 82

13. În figura 82, avem: $MN \parallel BC$, $NP \parallel CD$. Să se arate că $\frac{MN}{BC} + \frac{DP}{AD} = 1$.

14. În figura 83, $[AD]$ și $[BC]$ sunt două segmente paralele $(AD = a$ și $BC = b)$. Dreptele BD și AC se intersectează în P, iar segmentul $[QP]$ este paralel cu $[AD]$, $(Q \in (AB))$. Să se calculeze PQ în funcție de a și b.

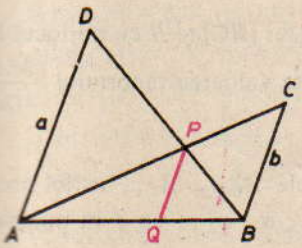


Fig. 83

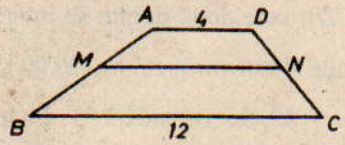


Fig. 84

15. Trapezul din figura 84 are bazele 4 și 12, segmentul $[MN]$ este paralel cu bazele, $(M \in (AB)$ și $N \in (DC))$ și $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{5}$. Să se calculeze MN.

16. Două cercuri tangente exterioare au razele de 5, respectiv 3. Tangenta lor comună exterioară TT' întâlneşte linia centrelor în S (fig. 85). Să se calculeze OS, unde O este centrul cercului „mare". Aceeaşi întrebare dacă, în general, se cunosc R şi r, razele cercului „mare" şi a celui „mic".

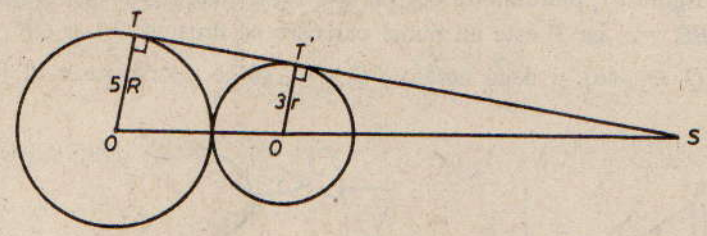


Fig. 85

17. Să se demonstreze că într-un trapez, pe oricare paralelă la baze, segmentul inclus în această paralelă cuprins între o diagonală şi o latură neparalelă este congruentă cu cel cuprins între cealaltă diagonală şi cealaltă latură neparalelă.

18. Să se construiască o paralelă la bazele unui trapez care să fie împărţită de diagonale în trei segmente congruente.

19. Tangenta comună exterioară a două cercuri exterioare intersectează linia centrelor OO' în M. Să se calculeze lungimile segmentelor $[MO]$, $[MO']$, când raza mare este 5, cea mică este 2 şi $OO' = 9$. Generalizare, dacă notăm raza mare R, raza mică r şi $OO' = d$).

20. Aceeaşi problemă ca la **19,** dar pentru tangenta comună interioară. (În cazul că se cunosc R, r şi d.)

21. Aceeaşi problemă ca la **20,** dar pentru cercuri secante.

22. În paralelogramul $ABCD$ unim A cu mijlocul lui $[BC]$ şi B cu mijlocul lui $[CD]$; cele două drepte se intersectează în M. Care este valoarea raportului $\frac{MA}{MN}$, unde N este mijlocul lui $[BC]$?

23. Se consideră o dreaptă d şi pe ea punctele $A_0, A_1, A_2 \ldots$, astfel încât $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = 1$ cm. Se duc perpendicularele a_0, a_1, a_2 ... pe d în punctele $A_0, A_1, A_2, \ldots$.

a) Se consideră punctele B_1 şi C_1 pe a_1 şi punctele B_2, C_2 pe a_2, toate în acelaşi semiplan determinat de d, astfel ca $A_1B_1 = 2$ cm, $A_1C_1 = 7$ cm, $A_2B_2 = 6$ cm, $A_2C_2 = 3$ cm. Să se precizeze poziţia punctului M de intersecţie a dreptelor B_1B_2, C_1C_2, calculând A_0N şi NM, unde N este piciorul perpendicularei din M pe d.

b) Aceeaşi problemă pentru punctul de intersecţie a dreptelor D_1D_2, D_4D_5, în care D_1 este situat pe a_1, D_2 pe a_2, D_4 pe a_4, D_5 pe a_5 toate în acelaşi semiplan determinat de d, iar $A_1D_1 = 1$ cm, $A_2D_2 = 5$ cm, $A_4D_4 = 10$ cm, $A_5D_5 = 3$ cm.

B. TRIUNGHIURI ASEMENEA

24. În triunghiul MNP se ştie că $MN = 12$ cm, $NP = 15$ cm, $MP = 21$ cm. Determinaţi laturile unui triunghi asemenea cu triunghiul MNP, raportul de asemănare al celor două triunghiuri fiind: a) 2 : 3; b) $\frac{1}{2}$; c) 0,1; d) $m:n\left(\frac{m}{n}\right)$; e) $\frac{1}{1}$.

25. În triunghiul ABC lungimile laturilor sunt: $AB = 24$ cm; $BC = 36$ cm, $CA = 42$ cm. Într-un alt triunghi asemenea cu triunghiul ABC, latura omoloagă cu: a) $[AB]$ este de 10 cm; b) $[BC]$ este de 12 cm; c) $[CA]$ este de 84 cm. Calculaţi, pentru fiecare caz în parte, laturile triunghiului asemenea cu triunghiul ABC.

26. Fie trei triunghiuri asemenea între ele. Ştiind că raportul de asemănare între primul şi al doilea triunghi este de 1 : 2 şi raportul de asemănare între al doilea şi al treilea este de 1 : 3, calculaţi raportul de asemănare între primul triunghi şi cel de-al treilea triunghi.

27. Aceeaşi întrebare ca la **26,** dacă rapoartele de asemănare între primul şi al doilea triunghi este 2 : 3 şi între al doilea şi al treilea triunghi este 5 : 7. Generalizare.

28. Cercetaţi dacă triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea, ştiind că:

a) $m(\sphericalangle A) = 20°$, $m(\sphericalangle B) = 15°$, $m(\sphericalangle A_1) = 15°$, $m(\sphericalangle B_1) = 20°$;

b) $m(\sphericalangle A) = 26°15'$, $m(\sphericalangle B) = 37°$, $m(\sphericalangle B_1) = 37°$, $m(\sphericalangle C_1) = 116°45'$;

c) $m(\sphericalangle B) = 35°$, $m(\sphericalangle C) = 90°$, $m(\sphericalangle B_1) = 54°$, $m(\sphericalangle A_1) = 35°$;

d) $m(\sphericalangle A) = 100°$, $m(\sphericalangle B) = 40°$, $m(\sphericalangle B_1) = m(\sphericalangle C_1) = 40°$;

e) $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 60°$, $[A_1B_1] \equiv [B_1C_1] \equiv [C_1A_1]$;

f) $m(\sphericalangle A) = 34°$, $m(\sphericalangle B) = 72°$, $m(\sphericalangle A_1) = 72°$, $m(\sphericalangle B_1) = 74°$;

g) $m(\sphericalangle A) = 70°$, $m(\sphericalangle B) = 33°25'$, $m(\sphericalangle B_1) = 176°45'$, $m(\sphericalangle A_1) = 70°$;

h) $m(\sphericalangle B) = 70°$, $m(\sphericalangle C) = 90°$, $m(\sphericalangle A_1) = 20°$, $m(\sphericalangle B_1) = 70°$;

i) $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle A_1) = m(\sphericalangle B_1) = 45°$;

j) $m(\sphericalangle A) = 45°$, $m(\sphericalangle B) = 80°$, $m(\sphericalangle A_1) = 35°$, $m(\sphericalangle B_1) = 60°$.

29. Cercetaţi dacă triunghiurile ABC şi MNP sunt asemenea, în următoarele cazuri:

a) $m(\sphericalangle A) = 40°$, $AB = 6$ dm, $AC = 8$ dm, $m(\sphericalangle M) = 40°$, $MP = 12$ dm, $MN = 16$ dm;

b) $m(\sphericalangle A) = 30°$, $AB = 5$ m, $AC = 7$ m, $m(\sphericalangle M) = 30°$, $MP = 15$ m, $MN = 21$ m;

c) $m(\sphericalangle A) = 50°$, $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm, $m(\sphericalangle M) = 50°$, $MP = 16$ cm, $MN = 17$ cm;

d) $m(\sphericalangle A) = 60°$, $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm, $m(\sphericalangle M) = 60°$, $MP = 9$ cm, $MN = 8$ cm;

e) $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle M)$, $[AB] \equiv [AC]$, şi $[MN] \equiv [MP]$.

Scrieţi, acolo unde este cazul, raportul de asemănare dintre triunghiul ABC şi triunghiul MNP.

30. Triunghiul ABC are laturile cu lungimile de 6 cm, 8 cm, 9 cm. Triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, au laturile respectiv de 3 cm, 4 cm, 4,5 cm; 12 dm, 16 dm, 18 dm; 2 m, 2,(6) m, 3 m; 18 cm, 24 cm, 25 cm. Cercetaţi dacă, în aceste condiţii, există triunghiuri asemenea.

31. Triunghiul MNP are laturile cu lungimile de 3 cm, 4 cm, 5 cm. Triunghiurile $M'N'P'$, $M''N''P''$, $M'''N'''P'''$ au laturile respectiv de 6 cm, 8 cm, 10 cm; 9 cm, 12 cm, 15 cm; 1 cm, 1,(3) cm, 1,(6) cm. Cercetaţi dacă: a) $\triangle MNP \sim \triangle M'N'P'$; b) $\triangle M'N'P' \sim \triangle M''N''P''$; c) $\triangle M''N''P'' \sim \triangle M'''N'''P'''$; d) $\triangle M'''N'''P''' \sim \triangle MNP$.

32. Demonstraţi că oricare două triunghiuri echilaterale sunt asemenea.

33. Demonstraţi că oricare două triunghiuri dreptunghice isoscele sunt asemenea.

34. Enunţaţi câte un caz de asemănare pentru: a) triunghiurile isoscele; b) triunghiurile dreptunghice.

35. Să se demonstreze că în două triunghiuri asemenea înălţimile, medianele, bisectoarele corespunzătoare laturilor omoloage se găsesc în acelaşi raport cu raportul de asemănare a triunghiurilor.

36. Să se demonstreze că raportul razelor cercurilor înscrise în două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare a triunghiurilor.

37. Aceeaşi problemă ca la **36** pentru razele cercurilor circumscrise.

38. Triunghiurile ABC şi MNP au: $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle M) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = 37°$, $m(\sphericalangle P) = 53°$. Să se demonstreze că aceste triunghiuri sunt asemenea.

39. Se ştie că $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ şi că $AB = 9$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 10$ cm, $DE = 99$ cm. Să se calculeze EF şi DF.

40. Să se demonstreze că două triunghiuri care au laturile respectiv paralele sunt asemenea. (În fond să se demonstreze că triunghiurile nu pot avea două unghiuri respectiv suplementare).

41. În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii $[AB]$ şi $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB$, unde $N \in (AC)$. Dacă $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 9$ cm, calculaţi lungimile laturilor triunghiului AMN.

42. Aceleași cerințe ca la 41, pentru triunghiul CMN, dacă M este mijlocul laturii $[BC]$ și $\sphericalangle CMN \equiv \sphericalangle CAB$, unde $N \in (AC)$.

43. Un cerc are drept coardă pe $[BC]$ și intersectează laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale triunghiului ABC (sau prelungirile lor) în E și F. Să se demonstreze că triunghiurile AEF și ABC sunt asemenea. Dacă $BC = 9$ dm, $EF = 3$ dm, $AB = 5$ dm, și $AC = 7$ dm, care sunt lungimile segmentelor $[AE]$ și $[AF]$?

44. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), $m(\sphericalangle BAC) = 36°$. Fie $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$, unde $D \in (AC)$. Cercetați dacă $AB \cdot CD = BC^2$.

45. În triunghiul MNP mediana $[MA]$ ($A \in (NP)$) intersectează o paralelă EF la dreapta NP în punctul G, ($E \in (MN)$, $F \in (MP)$). Este adevărat că $[EG] \equiv [GF]$?

46. Se consideră un segment $[AB]$ și un punct M în interiorul său. Se construiesc, de aceeași parte a dreptei AB, pătratele $AMNP$ și $BMDC$. Să se demonstreze că raportul $\frac{PC}{NB}$ este același, oricare ar fi poziția lui M în interiorul segmentului $[AB]$.

47. Triunghiul ABC are latura $BC = 5$ și înălțimea $AD = 4$. Să se calculeze latura unui pătrat care are două vârfuri alăturate pe BC, unul pe AB și unul pe AC. Dați și o metodă de construcție a pătratului, fără calcul.

48. Pe semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$ sunt situate punctele A, B și respectiv C. Fie A', B', C', pe respectiv aceleași semidrepte, astfel încât $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$. Să se demonstreze că triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sunt respectiv asemenea.

49. În figura 86, punctele A, B, D sunt coliniare și triunghiurile ABC și BDE echilaterale. Segmentele $[BF]$ și $[BG]$ sunt înălțimi. Să se demonstreze că triunghiurile BFG și BCD sunt asemenea.

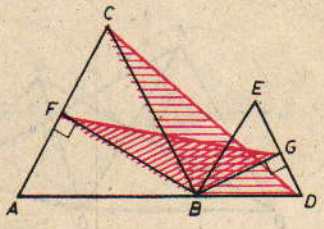


Fig. 86

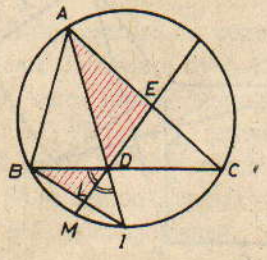


Fig. 87

50. În figura 87, triunghiul ABC este înscris în cercul O, punctul I este mijlocul arcului BC și $(AI) \cap (BC) = \{D\}$. Fie $[DM$ bisectoarea unghiului BDI care intersectează (AC) în E. Segmentul $[BI]$ se intersectează cu MD în L. Să se arate că triunghiurile DAE și DBL sunt asemenea.

51. În figura 88, triunghiurile ABC şi CDE sunt triunghiuri echilaterale, iar AI şi EG înălţimile lor. Dacă, $EG \cap BC = \{U\}$, $AI \cap CD = \{V\}$, să se arate că $AV \cdot DE = EU \cdot BC$.

52. În figura 89, patrulaterul $ABCD$ este un trapez isoscel ($[AD]$ şi $[BC]$ baze) şi $AD \cdot BC = AB^2$. Patrulaterul $ADEF$ şi $BCGH$ sunt pătrate. Să se demonstreze că $\frac{BF}{DG} = \frac{AD}{HG}$.

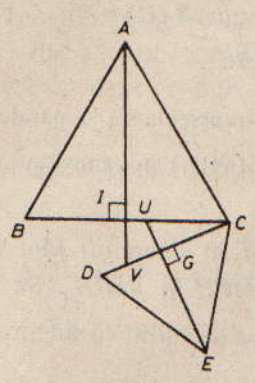


Fig. 88

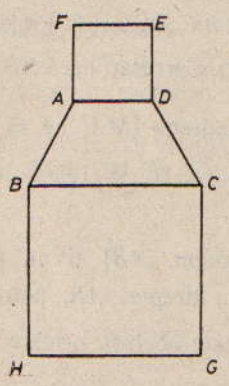


Fig. 89

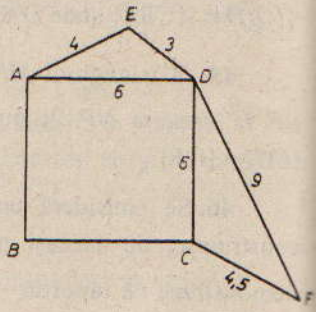


Fig. 90

53. În figura 90, patrulaterul $ABCD$ este pătrat de latură 6 şi triunghiurile ADE şi DFC au laturile $AE = 4$, $DE = 3$, $DF = 9$, $CF = 4{,}5$. Să se demonstreze că unghiurile DCF şi AED sunt congruente.

54. În figura 91, patrulaterele $ABCD$ şi $AMNP$ sunt pătrate, iar dreapta MB intersectează pe AP în S şi pe DP în T. Să se arate că: a) $[MB] \equiv [PD]$; b) triunghiurile PTS şi MAS sunt asemenea. c) Dacă E este mijlocul lui $[CD]$ şi Q mijlocul lui $[NP]$, să se arate că $\frac{AE}{MQ} = \frac{AB}{MN}$.

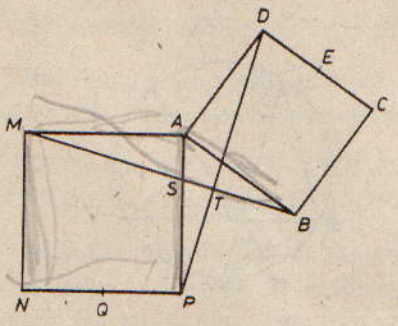


Fig. 91

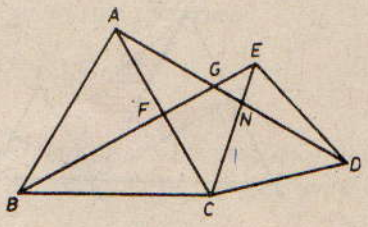


Fig. 92

55. În figura 92, triunghiurile ABC şi CDE sunt triunghiuri echilaterale. Să se demonstreze că:

a) $[BE] \equiv [AD]$; b) Triunghiurile AGF şi BCF sunt asemenea; c) La fel, triunghiurile EGN şi DCN sunt asemenea.

56. Din mijlocul D al laturii $[BC]$ a unui triunghi ABC, ducem perpediculare pe AB şi AC; fie P respectiv Q picioarele acestor perpendiculare. Să se demonstreze că $\frac{DP}{DQ} = \frac{AC}{AB}$.

57. În trapezul $ABCD$ diagonala $[AC]$ este medie proporţională între $[AB]$ şi $[AD]$ şi este bisectoarea unghiului BAD. (Unghiul BAD este ascuţit.) Să se demonstreze că unghiurile DCA şi ABC sunt congruente.

58. Patrulaterul $ABCD$ este înscris în cercul de centru O din figura 93. Fie $M \in (BD)$ astfel încât $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle CAD$.

a) Demonstraţi asemănarea triunghiurilor ABM cu ACD şi exprimaţi de aici pe BM în funcţie de AB, AC şi CD.

b) Demonstraţi asemănarea triunghiurilor AMD cu ABC şi exprimaţi de aici MD în funcţie de AD, AC şi AD.

c) Adunând BM cu MD, demonstraţi că într-un patrulater inscriptibil produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.[1)]

d) Formulaţi reciproca şi încercaţi s-o demonstraţi.

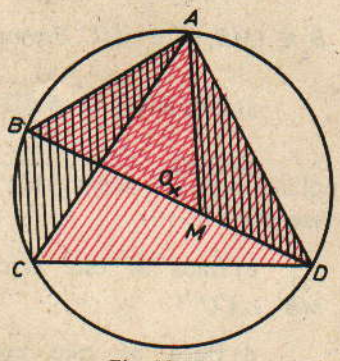


Fig. 93

59. Fie două triunghiuri asemenea, din care unul se află în interiorul celuilalt. Să se demonstreze că există un punct, care îşi corespunde lui însuşi prin asemănare.

60. Din punctul I de intersecţie a bisectoarelor triunghiului ABC, ducem o paralelă la BC, care intersectează (AC) şi (AB) respectiv în N şi M. Ducem din M şi N perpendicularele pe bisectoarele $[BI]$ şi $[CI]$, care intersectează latura (BC) în P, respectiv Q. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi IPQ sunt asemenea.

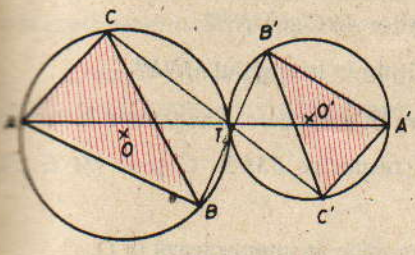


Fig. 94

61. Două cercuri de centre O şi O' sunt tangente exterioare în T. În cercul de centru O este înscris triunghiul ABC. Dreptele AT, BT, CT intersectează a doua oară cercul O' în punctele A', B', C' (fig. 94). Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea.

62. Se dau trei cercuri: $\mathcal{C}(O, R)$, $\mathcal{C}'(O', R')$, $\mathcal{C}''(O'', R'')$, de raze diferite şi cu

[1)] Această propoziţie este cunoscută sub numele de teorema lui *Ptolemeu*. (Claudiu Ptolomeu – Caludios Ptolemaios – (sec. 2 e.n.) astronom, matematician şi geograf grec, a trăit în Alexandria.)

centrele necoliniare. Tangentele comune ale cercurilor $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ se intersectează în A, cele ale cercurilor $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}''$ în B şi cele ale cercurilor $\mathcal{C}'$ şi $\mathcal{C}''$ în C. Să se demonstreze că A, B, C sunt puncte coliniare.

63. În triunghiul ABC, $AD \perp BC$ ($B \in BC$), $BE \perp AC$ ($E \in AC$). Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi DEC sunt asemenea. (Dreapta DE se numeşte *antiparalelă* faţă de dreapta AB).

64. În triunghiul ABC, o paralelă la mediana $[AM]$ ($M \in (BC)$) intersectează dreptele AB şi AC în punctele D şi respectiv E. Cercetaţi dacă $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$.

65. Notăm cu M un punct oarecare interior triunghiului ABC. Fie $A' \in (MA$, $B' \in (MB$, $C' \in (MC$. Presupunem că $\frac{MB}{MB'} = \frac{MC}{MC'} = \frac{2}{3}$.

a) Este adevărat că $BC \parallel B'C'$?

b) Dacă $\frac{MB}{MB'} = \frac{MA}{MA'} = \frac{2}{3}$, atunci triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt asemenea?

c) Dacă M este ortocentrul triunghiului ABC, atunci $MA' \perp B'C'$ şi $MB' \perp A'C'$?

d) Dacă M este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, atunci $\sphericalangle MA'B' \equiv \sphericalangle MA'C'$ şi $\sphericalangle MB'A' \equiv \sphericalangle MB'C'$?

e) Dacă M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci M este şi centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$?

66. Fie MNP un triunghi. Prin fiecare vârf se duce paralela la latura opusă; se formează astfel un alt triunghi. Ce relaţii există între laturile triunghiului astfel format şi laturile triunghiului MNP?

67. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi M, N, P picioarele perpendicularelor coborâte din O, pe laturile triunghiului ABC.

a) Ce relaţii există între laturile triunghiurilor ABC şi MNP?

b) Este adevărat că OM, ON, OP sunt înălţimi în triunghiul MNP?

68. Fie cercul $\mathcal{C}(O, R)$ şi $[AB]$ un diametru în acest cerc. Tangentele la cerc în punctele A şi B intersectează dreptele AM şi respectiv BM în C şi D ($M \in \mathcal{C}$). Cercetaţi dacă $AD \cdot BC = 4R^2$.

69. Se dă patrulaterul $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în O.

a) Să se demonstreze că dacă $ABCD$ este un trapez ($AB \parallel CD$), triunghiurile OAB şi OCD sunt asemenea.

b) Cercetaţi dacă reciproca acestei propoziţii este adevărată.

70. Patrulaterul $ABCD$ este un trapez oarecare ($AB \parallel CD$ şi $[AC]$ diagonală), M şi N mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[BC]$ şi $[MN] \cap [AC] = \{P\}$, $[MN] \cap [BD] = \{Q\}$. Cercetaţi dacă: a) $MN = \frac{AB+CD}{2}$; b) $[AP] \equiv [PC]$ şi $[BQ] \equiv [QD]$; c) $MP = NQ = \frac{DC}{2}$; d) $PQ = \frac{AB-CD}{2}$.

71. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) punctul O este intersecţia diagonalelor. Dreapta OM ($M \in AB$) intersectează dreapta CD în punctul N. Cum trebuie desenată această dreaptă astfel ca raportul $\frac{OM}{ON}$ să fie maxim?

§ 5. PROIECŢII ORTOGONALE

Definiţie. **Proiecţia ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe acea dreaptă.**

Exemple: Dacă A este un punct exterior dreptei d ($A \notin d$), A' este proiecţia lui A pe d dacă AA' este perpendiculară pe d (fig. 95, *a*). Dacă A aparţine dreptei d, punctul A este propria sa proiecţie pe dreapta d (fig. 95, *b*).

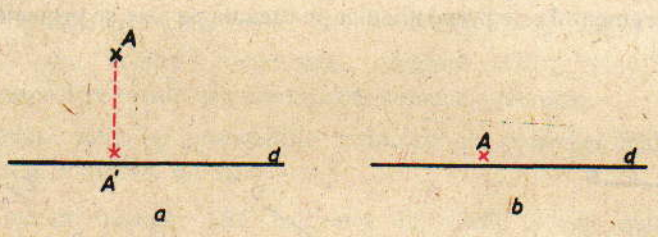


Fig. 95

Definiţie. **Mulţimea tuturor proiecţiilor punctelor unei figuri geometrice pe o dreaptă se numeşte proiecţia acelei figuri pe acea dreaptă.**

Altfel spus: locul geometric al proiecţiilor punctelor unei figuri geometrice pe o dreaptă este proiecţia acelei figuri pe acea dreaptă.

Exemple: În figura 96 sunt reprezentate pe dreapta d proiecţiile a două figuri. După cum se constată, proiecţiile sunt nişte segmente. (Este posibil ca două

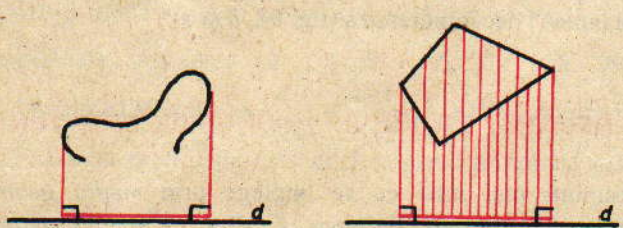


Fig. 96

sau mai multe puncte distincte ale unei figuri să aibă aceeaşi proiecţie pe o dreaptă dată).

Teoremă. **Proiecţia unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.**

În figura 97 sunt prezentate diferite situaţii în care se poate realiza proiecţia unui segment pe o dreaptă.

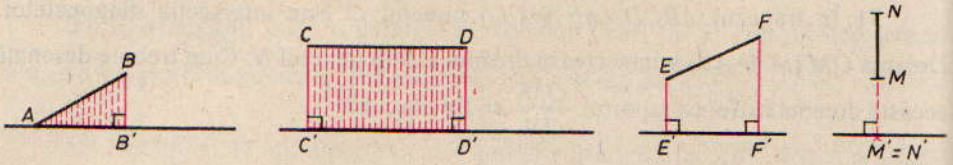


Fig. 97

Lăsăm pe seama cititorului demonstrarea acestei teoreme.

Propunem cititorului să formuleze şi să demonstreze o teoremă similară în legătură cu proiecţia unei drepte pe o altă dreaptă.

Teoremă. **Proiecţia unui segment pe o dreaptă are o lungime cel mult egală cu a segmentului respectiv.**

Pentru demonstrarea teoremei folosim figura 98.

Dacă segmentul este perpendicular pe dreapta pe care se proiectează, proiecţia este un punct.

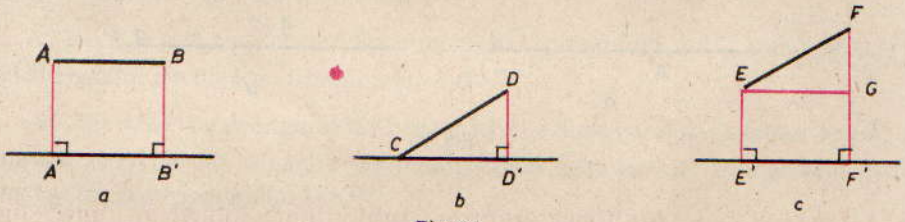


Fig. 98

Dacă segmentul este paralel cu dreapta pe care se proiectează, proiecţia lui este un segment congruent cu segmentul dat (ca laturi opuse ale unui dreptunghi – figura 98, *a*).

Dacă segmentul nu este nici perpendicular, nici paralel cu dreapta pe care se proiectează, se foloseşte în demonstraţie faptul că într-un triunghi dreptunghic o catetă este mai „mică" decât ipotenuza (fig. 98, *b* şi *c*).

§ 6. RELAŢII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

Vom reaminti mai întâi ce se înţelege prin *media geometrică* a două numere pozitive. S-a învăţat în clasa a VI-a că media geometrică a două numere pozitive este rădăcina pătrată a produsului lor. Un exemplu: media

geometrică a numerelor 4 și 9 este 6, pentru că $6^2 = 4 \times 9$ sau $\sqrt{4 \times 9} = 6$. În general, m este media geometrică a numerelor pozitive a și b dacă $m^2 = a \cdot b$ sau $m = \sqrt{a \cdot b}$. Relația $m^2 = a \cdot b$ mai poate fi scrisă și sub formă de proporție $\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$. De aici provine și o altă denumire a mediei geometrice, anume aceea de *medie proporțională*.

Teorema înălțimii. **Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii din vârful unghiului drept este medie proporțională între lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.**

Fie $\triangle ABC$ un triunghi dreptunghic în A (fig. 99) în care $[AD]$ este înălțimea din vârful unghiului drept. Concluzia teoremei este $AD^2 = BD \cdot DC$, care poate fi scrisă sub formă de proporție:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD}.$$

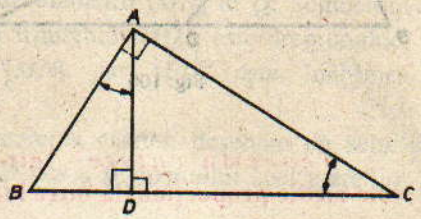


Fig. 99

Demonstrația. Triunghiurile ABD și CAD sunt asemenea pentru că au două unghiuri respectiv congruente: $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDA$ (unghiuri drepte) și $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$ (au același complement, unghiul ABC). Din asemănarea triunghiurilor respective rezultă și proporția din concluzia teoremei.

Să formulăm acum și propozițiile reciproce ale teoremei înălțimii și să cercetăm dacă sunt adevărate sau false.

a) Dacă într-un triunghi ABC înălțimea din vârful A este medie proporțională între proiecțiile laturilor $[AB]$ și $[AC]$ pe $[BC]$, atunci triunghiul este dreptunghic în A.

b) Dacă într-un triunghi dreptunghic ABC, există un punct D pe ipotenuza $[BC]$ astfel încât $AD^2 = BD \cdot DC$, atunci punctul D este piciorul înălțimii din A.

c) Dacă într-un triunghi ABC, D este un punct de pe latura $[BC]$ astfel ca $AD^2 = BD \cdot DC$, atunci triunghiul este dreptunghic în A și D este piciorul înălțimii din A.

Prima propoziție reciprocă este adevărată, demonstrarea ei se face pe baza cazului 2 de asemănare. Afirmăm că $\triangle ADB \sim \triangle CDA$ (fig. 99) pentru că $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$ (unghiuri drepte) și $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD}$ (AD fiind medie proporțională între BD și DC). Această propoziție este deci teoremă reciprocă pentru teorema înălțimii.

Celelalte două propoziții reciproce sunt false. Falsitatea lor se demonstrează prin metoda contraexemplului.

Pentru propoziția a doua este suficient să considerăm un triunghi ABC dreptunghic în A și neisoscel, cu D mijlocul ipotenuzei (fig. 100). Se știe că mediana relativă la ipotenuză are lungimea cât jumătate din lungimea ipotenuzei $\left(AD = BD = DC = \frac{1}{2} \cdot BD\right)$.

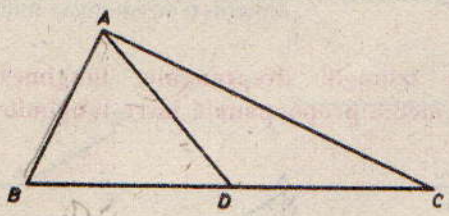


Fig. 100

Relația $AD^2 = BD \cdot DC$ din ipoteză se verifică, fără ca D să fie piciorul înălțimii din A. Deci aceasta nu este o teoremă reciprocă.

Falsitatea propoziției a treia este evidentă, demonstrarea acestui lucru fiind la îndemâna fiecărui cititor.

Teorema catetei. **Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este medie proporțională între lungimea ipotenuzei și a proiecției acestei catete pe ipotenuză.**

Fie $\triangle ABC$ un triunghi dreptunghic în A (fig. 101) în care D este piciorul înălțimii din vârful unghiului drept. Pentru cateta $[AB]$, concluzia teoremei este $AB^2 = BC \cdot BD$ sau $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$.

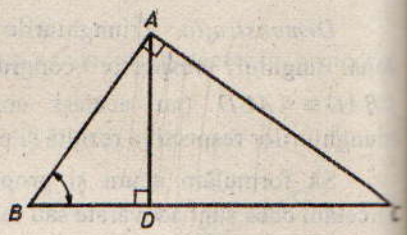


Fig. 101

Demonstrația. Triunghiurile ABD și CBA sunt asemenea pentru că au două unghiuri respectiv congruente: $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CAB$ (unghiuri drepte) și unghiul B – unghi comun. Din asemănarea triunghiurilor respective rezultă și proporția din concluzia teoremei.

Pentru cateta $[AC]$, relația din concluzie va fi $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$.

Aplicație. Dându-se două segmente, să se găsească un al treilea segment a cărui lungime să fie media proporțională a lungimilor primelor două segmente.

În fond, problema subînțelege următorul fapt: Fără să măsurăm efectiv cele două segmente „date" să găsim un al treilea segment, despre care, deși nu-l măsurăm nici pe el, să știm că lungimea lui este medie proporțională a lungimilor primelor două.

Deci, fie cele două segmente din figura 102. Notăm cu a și b lungimile lor, deși nu știm exact numeric cât reprezintă.

Pe o dreaptă ajutătoare d luăm, unul în prelungirea celuilalt, două segmente congruente cu segmentele date: $MP = a$, $PN = b$ (fig. 103). Segmentul $[MN]$ reprezintă suma lor. Din punctul P, capătul comun al celor două segmente, ducem o

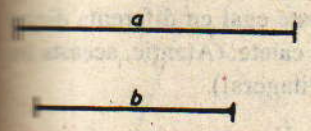


Fig. 102

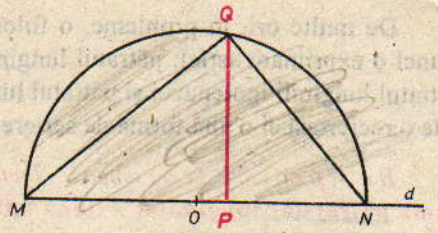


Fig. 103

perpendiculară care se intersectează cu cercul de diametru $[MN]$ în Q. Segmentul $[PQ]$ este segmentul căutat. Este aşa pentru că triunghiul MQN este dreptunghic, fiind înscris în semicercul de diametru $[MN]$, iar $[PQ]$ este înălţimea corespunzătoare ipotenuzei.

Problema se poate rezolva şi aplicând teorema catetei: desenăm un semicerc cu diametrul $[AB]$, a cărui lungime este cât cea a segmentului „cel mare" a, şi pe acest diametru $[AB]$ suprapunem un segment $AC = b$ (fig. 104). Din C ducem o perpendiculară pe $[AB]$ care ne intersectează cu semicercul în E. Segmentul $[AE]$ este cel căutat. Şi este aşa pentru că triunghiul AEB este dreptunghic înscris în semicercul de diametru $[AB]$, iar $[AE]$ este cateta care are ca proiecţie segmentul „mic".

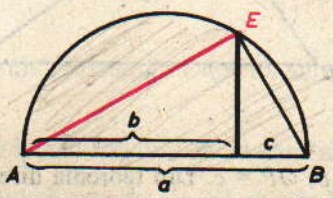


Fig. 104

Teorema lui Pitagora[1]. **Într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.**

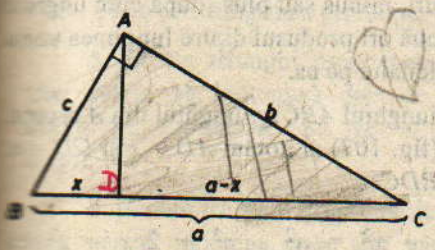


Fig. 105

Demonstraţia se poate face în mai multe moduri. Am ales folosirea de două ori a teoremei catetei. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A şi D piciorul perpendicularei din A pe BD (fig. 105). Notăm, pentru simplificarea scrisorii, $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $BD = x$ şi deci $DC = a - x$.

Teorema catetei, scrisă pentru fiecare din catete, ne dă:

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= a \cdot x \\ b^2 &= a \cdot (a - x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow c^2 + b^2 = ax + a(a - x) \Leftrightarrow c^2 + b^2 = ax + a^2 - ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 = a^2 \text{ şi teorema este astfel demonstrată.}$$

[1] Pitagora (Pythagoras) – sec. 6 î.e.n. – filozof şi matematician grec născut în Insula Samos, întemeietorul şcolii pitagoreice. Tradiţia îi atribuie descoperirea tablei de înmulţire şi a teoremei ce-i poartă numele.

De multe ori, în probleme, o folosim pentru a găsi lungimea unei catete, și atunci o exprimăm astfel: pătratul lungimii unei catete este egal cu diferența dintre pătratul lungimii ipotenuzei și pătratul lungimii celeilalte catete. (Atenție, aceasta nu este o reciprocă ci o altă formă de scriere a teoremei lui Pitagora!).

Reciproca teoremei lui Pitagora. **Dacă într-un triunghi suma pătratelor lungimilor a două laturi este egală cu pătratul lungimii laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.** (Bineînțeles cu unghiul drept în vârful care se opune laturii „celei mai mari").

Demonstrația. Fie ABC triunghiul dat și $b^2 + c^2 = a^2$ (cu notațiile din figura 106). Desenăm alături un unghi drept xOy pe care purtăm cu compasul segmentele

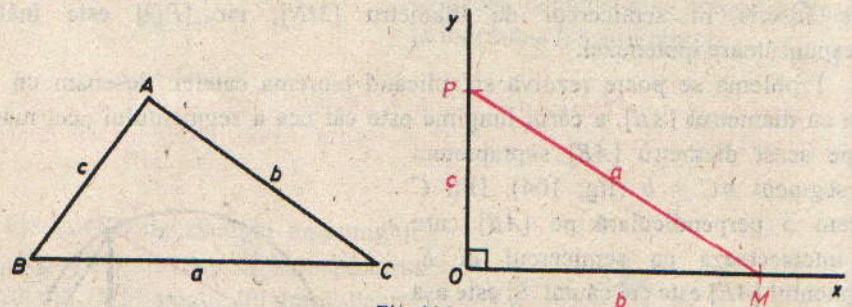


Fig. 106

$OM = b$, $OP = c$. Din teorema directă a lui Pitagora, avem: $b^2 + c^2 = MP^2$; adică $MP^2 = a^2 \Leftrightarrow MP = a$. Triunghiurile ABC și OPM sunt deci congruente, având toate laturile respectiv congruente. Laturilor omoloage $[BC]$ și $[MP]$ opunându-li-se unghiuri congruente, rezultă că și unghiul din A este drept.

Aplicație. Într-un triunghi oarecare, pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, minus sau plus (după cum unghiul opus primei laturi este ascuțit sau obtuz) de două ori produsul dintre lungimea uneia dintre celelalte laturi și lungimea proiecției celeilalte pe ea.

Demonstrația. Ne vom ocupa întâi de triunghiul ABC cu unghiul din A ascuțit. Ducem din C înălțimea $[CD]$ pe latura $[AB]$ (fig. 107) și notăm $AD = x$ și $CD = h$. Folosim teorema catetei în triunghiul ADC și BDC.

$$\left.\begin{array}{l}\text{În triunghiul } ADC: h^2 = b^2 - x^2 \\ \text{În triunghiul } BDC: h^2 = a^2 - (c-x)^2\end{array}\right\} \Rightarrow b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

În cazul triunghiului cu unghiul din A obtuz, cu notațiile din figura 108, avem:

$$\left.\begin{array}{l}\text{În triunghiul } ADC: h^2 = b^2 - x^2 \\ \text{În triunghiul } BDC: h^2 = a^2 - (c+x)^2\end{array}\right\} \Rightarrow b^2 - x^2 = a^2 - c^2 - 2cx - x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

Această propoziție este cunoscută sub denumirea de *teorema lui Pitagora generalizată.*

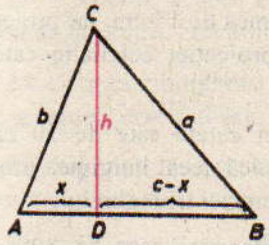


Fig. 107

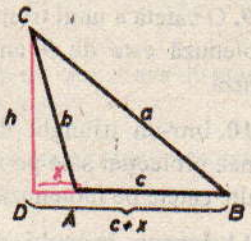


Fig. 108

4. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

A. TEOREMA ÎNĂLŢIMII

1. Într-un triunghi dreptunghic lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză sunt de 7 cm şi 63 cm. Să se afle lungimea înălţimii din vârful unghiului drept.

2. Aceeaşi problemă de la **1,** dacă lungimile proiecţiilor catetelor sunt de 2 dm şi 45 cm.

3. Într-un triunghi dreptunghic lungimea ipotenuzei este de 13 cm, iar raportul dintre lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză este de $\frac{4}{9}$. Să se afle lungimea înălţimii din vârful unghiului drept.

4. Înălţimea din vârful unghiului drept al unui triunghi dreptunghic are lungimea de 24 cm, iar proiecţia uneia dintre catete pe ipotenuză are lungimea de 1 dm. Să se afle lungimea proiecţiei pe ipotenuză a celeilalte catete.

5. Într-un triunghi dreptunghic cu lungimea ipotenuzei de 1 dm, proiecţia unei catete pe ipotenuză este de 4 ori mai „mare" decât proiecţia celeilalte catete pe ipotenuză. Să se afle lungimea înălţimii din vârful unghiului drept.

6. Într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 2 dm, măsura unghiului dintre înălţimea şi mediana duse din vârful unghiului drept este de 30°. Să se afle lungimea înălţimii din vârful unghiului drept.

B. TEOREMA CATETEI

7. Într-un triunghi dreptunghic lungimea ipotenuzei este de 5 dm, iar cea a unei catete de 14 cm. Să se afle lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză.

8. Aceeaşi problemă ca la **7,** dacă lungimea ipotenuzei este 13 cm, iar cea a unei catete de 5 cm.

9. O catetă a unui triunghi dreptunghic are lungimea de 15 cm, iar proiecţia sa pe ipotenuză este de 9 cm. Să se afle lungimea proiecţiei celeilalte catete pe ipotenuză.

10. Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este de 10 cm, iar lungimea proiecţiei sale pe ipotenuză de trei ori mai mică decât lungimea proiecţiei celeilalte catete pe ipotenuză. Să se afle lungimea ipotenuzei triunghiului.

11. Într-un triunghi dreptunghic lungimea ipotenuzei este de 300 cm şi cea a proiecţiei unei catete pe ipotenuză de 108 cm. Să se afle lungimile celor două catete.

12. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic are lungimea de 5 dm, iar proiecţia uneia dintre catete pe ea are lungimea de 5 cm. Să se afle lungimile celor două catete şi a înălţimii din vârful unghiului drept.

13. Să se formuleze propoziţiile reciproce ale teoremei catetei şi să se cerceteze dacă ele sunt adevărate sau false.

C. TEOREMA LUI PITAGORA

14. O catetă a unui triunghi dreptunghic are lungimea de 10 cm iar înălţimea din vârful unghiului drept de 8 cm. Să se afle lungimile: celeilalte catete şi ipotenuzei.

15. Care este lungimea diagonalei unui pătrat de latură a? (Acest rezultat este util să fie reţinut pentru folosirea lui şi la rezolvarea altor probleme.)

16. Care este lungimea înălţimii unui triunghi echilateral de latură a? (Rezultat util.)

17. Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel este 4 cm. Să se calculeze lungimile catetelor triunghiului.

18. Un triunghi dreptunghic are o catetă cu lungimea de 3 cm şi unghiul care se opune ei cu măsura de 30°. Calculaţi lungimile ipotenuzei, a celeilalte catete şi a înălţimii din vârful unghiului drept.

19. Într-un trapez dreptunghic bazele au lungimile de 10 cm şi 7 cm, iar înălţimea de 4 cm. Calculaţi lungimile celeilalte laturi şi ale digonalelor.

20. Un trapez dreptunghic are lungimile bazelor de 11 cm şi 7 cm, iar lungimea uneia din diagonale de 15 cm. Să se calculeze lungimile laturilor neparalele şi a celeilalte diagonale.

21. Un triunghi isoscel are laturile congruente de 10 cm, iar baza de 12 cm. Calculaţi lungimea înălţimii corespunzătoare bazei şi cea a razei cercului circumscris.

22. Cu datele din problema precedentă, calculaţi şi lungimile celorlalte înălţimi ale triunghiului.

23. O coardă a unui cerc de rază 15 cm are lungimea de 8 cm. Calculați distanța de la centrul cercului la această coardă.

24. Care este lungimea tangentei dintr-un punct la un cerc, dacă distanța de la punct la centrul cercului este de 8 cm și raza cercului de 3 cm?

25. Calculați lungimea tangentelor comune a două cercuri tangente exterioare de raze R și r.

26. Calculați lungimile tangentelor comune exterioare și interioare a două cercuri de raze 8 cm și 5 cm, dacă distanța dintre centrele lor este de 20 cm.

27. Latura unui romb are lungimea de 11 cm, iar lungimea unei diagonale a lui este de 15 cm. Este această diagonală „mai mare" sau „mai mică" decât cealaltă diagonală?

28. Diagonala unui dreptunghi are lungimea de 10 cm, iar una din laturi este de 7 cm. Este această latură „latura cea mare" sau „latura cea mică" a dreptunghiului?

29. Un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc de rază 25 cm are diagonalele perpendiculare și sunt depărtate de centru la 7, respectiv 15 cm. Să se calculeze lungimile laturilor patrulaterului și ale diagonalelor lui.

30. Triunghiul ABC, din figura 109, este isoscel, cu $AB = AC = 20$ cm și înălțimea $AD = 16$ cm. Calculați lungimea bazei $[BC]$ și a diametrului cercului circumscris triunghiului ABC.

Dacă dreapta AD intersectează a doua oară cercul în E, calculați lungimea coardei $[EC]$.

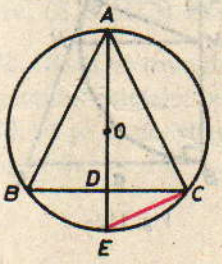


Fig. 109

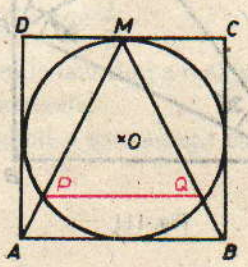


Fig. 110

31. În pătratul $ABCD$ cu latura a este înscris un cerc, M fiind unul dintre punctele de tangență (fig. 110). Cercul intersectează a doua oară laturile $[MA]$ și $[MB]$ ale triunghiului MAB în P, respectiv în Q. Se cere lungimea segmentului $[PQ]$ în funcția de a.

32. În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), înălțimea din B intersectează latura $[AC]$ în M. Arătați că: $\frac{AM}{MC} = 2 \cdot \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 - 1$.

33. Arătaţi că un triunghi de laturi a, b, c, în care are lor una din relaţiile următoare, este dreptunghic:

a) $\frac{c}{a}=2\cdot\frac{\frac{bc}{a+b}}{\sqrt{b^2+\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}}}$;

b) $\frac{c}{\frac{cb}{a+c}}=\sqrt{\frac{1+\frac{c}{a}}{1-\frac{c}{a}}}$; c) $\frac{c}{a}=\frac{\frac{2c}{a+b}}{1+\frac{c^2}{(a+b)^2}}$.

34. Triunghiul ABC are laturile de: $a = 15$ cm, $b = 14$ cm, $c = 13$ cm. Să se calculeze lungimea înălţimii $[AA']$.

35. În pătratul $ABCD$ de latură a, se înscrie triunghiul dreptunghic APQ, cu unghiul drept în P ($P \in [BC]$ şi $Q \in [DC]$), având unghiul din A cu măsura de 30° (fig. 111).

a) Arătaţi că unghiul PDC are măsura de 30°.

b) Calculaţi, în funcţie de a, laturile triunghiului APQ.

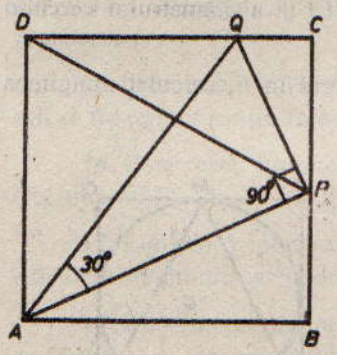


Fig. 111

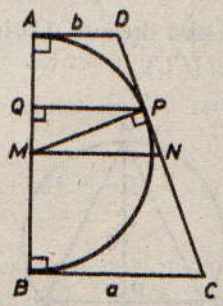


Fig. 112

36. În figura 112, patrulaterul $ABCD$ este un trapez dreptunghic cu baza mare $BC = a$, baza mică $AD = b$ şi semicercul de diametru $[AB]$ este tangent laturii oblice $[CD]$ în punctul P. Centrul semicercului este M, iar $MN \parallel QP \parallel BC$ ($N, P \in (CD)$, $Q \in (AB)$). Din inegalităţile care se stabilesc între $[MN]$, $[MP]$ şi $[QP]$, demonstraţi că: $\frac{2\cdot ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$. (Numărul $\frac{2\cdot ab}{a+b}$ se numeşte *media armonică* a numerelor a şi b.)

Această dublă inegalitate se mai exprimă astfel: media geometrică a două numere pozitive este cuprinsă între media armonică şi media aritmetică a celor două numere.

37. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC, de laturi a, b, c, mediana din A poate fi exprimată de $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

38. Aplicând rezultatul din problema precedentă, arătaţi că într-un paralelogram, suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor.

39. Se dă pătratul $ABCD$ de latură a, şi se cere să se determine un segment de lungime x astfel încât $MNPQRSTU$ (fig. 113) să fie un octogon regulat. (Să aibă toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente.)

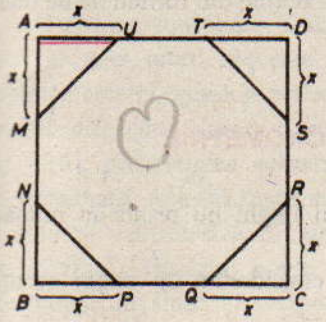


Fig. 113

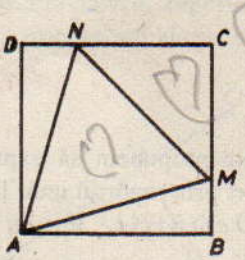


Fig. 114

40. În pătratul $ABCD$ se înscrie triunghiul echilateral AMN cu M situat pe (BC) şi N pe (CD), ca în figura 114. Să se afle lungimea laturii triunghiului echilateral în funcţie de a, latura pătratului dat.

41. În dreptunghiul $ABCD$, avem: $AD = BC = a$ şi $DC = AB = a\sqrt{2}$. Dacă $DE \perp AC$, $(E \in (AC))$, să se arate că raportul dintre AE şi CE este $\frac{1}{2}$.

42. Găsiţi un triunghi dreptunghic astfel încât lungimile laturilor, a înălţimii şi ale proiecţiilor catetelor pe ipotenuză să fie toate numere naturale.

43. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC, unghiul A este ascuţit dacă şi numai dacă $BC^2 < AB^2 + AC^2$.

*
* *

Observaţie. Desigur că aţi rezolvat cu uşurinţă problema în care se cerea diagonala pătratului de latură 1 şi aţi constatat că ea este de $\sqrt{2}$. Deci, construcţii simple aplicate unor segmente cu lungimi raţionale (chiar naturale) pot conduce la segmente de lungimi iraţionale. Descoperirea acestui fapt a produs o mare surpriză în lumea matematicienilor greci, înaintea erei noastre.

Există totuşi triunghiuri dreptunghice care au lungimile tuturor celor trei laturi exprimate prin numere naturale. Unul dintre triunghiuri este cel de catete 3 şi 4 şi ipotenuză 5. Rezolvând probleme aţi întâlnit probabil şi alte numere naturale care pot exprima lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. Se cunoaşte forma generală a tripletelor de numere naturale diferite de zero, (x, y, z) pentru care

$x^2 + y^2 = z^2$, anume : $x = k(p^2 - q^2)$, $y = 2kpq$, $z = k(p^2 + q^2)$, presupunând că p și q sunt naturale, prime între ele ($p > q$) și, ca să evităm repetițiile, unul par și celălalt impar. Prezența factorului k este ușor de înțeles dacă avem în vedere noțiunea de triunghiuri asemenea. Să dăm câteva exemple, toate cu $k = 1$: a) $p = 2$, $q = 1$ dă (3, 4, 5); b) $p = 3$, $q = 2$ dă (5, 12, 13); c) $p = 4$, $q = 1$ dă (15, 8, 17); d) $p = 4$, $q = 3$ dă (7, 24, 25); e) $p = 5$, $q = 2$ dă (21, 20, 29); f) $p = 5$, $q = 4$ dă (9, 40, 41) etc.

Puteți folosi aceste triplete de numere pentru a compune voi înșivă probleme la care să nu apară numere iraționale în cursul rezolvării lor. Puteți verifica ușor că x, y, z, definite prin formulele de mai sus, verifică relația $x^2 + y^2 = z^2$. Mai greu, dar nu dincolo de posibilitățile voastre de înțelegere, este de a dovedi că orice triplet de numere naturale (x, y, z), pentru care, $x^2 + y^2 = z^2$, se obține din formulele de mai sus cu k, p, q numere naturale.

§ 7. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE[1)]

Ne propunem să exprimăm „mărimea" unui unghi nu printr-un număr de grade, ci prin raportul unor lungimi.

Definiții. Într-un triunghi dreptunghic considerăm un unghi ascuțit și numim:

– *sinusul*[2)] lui, raportul dintre lungimea *catetei opuse* unghiului și lungimea *ipotenuzei;*

– *cosinusul*[3)] lui, raportul dintre lungimea *catetei alăturate* unghiului și lungimea *ipotenuzei:*

– *tangenta* lui, raportul dintre lungimea *catetei opuse* unghiului și lungimea *catetei alăturate* lui:

– *cotangenta* lui, raportul dintre lungimea *catetei alăturate* unghiului și lungimea *catetei opuse* lui.

Sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta se numesc *funcții trigonometrice*, iar scrierea lor prescurtată este: *sin, cos, tg, ctg.*

Deci, în triunghiul dreptunghic în A, din figura 115, scriem:

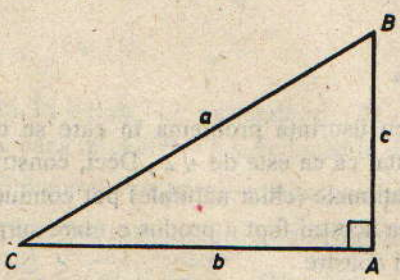


Fig. 115

$$\sin C = \frac{c}{a}$$

$$\cos C = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}C = \frac{c}{b}$$

$$\text{ctg } C = \frac{b}{c}$$

[1)] Cuvântul *„trigonometrie"* este compus din două cuvinte provenite din limba greacă: *trigonos* = triunghi și *metron* = măsură. Trigonometria este o ramură a matematicii care studiază relațiile dintre elementele unui triunghi.

[2)] Cuvântul *„sinus"* în limba latină avea semnificația de: *cută, arc.*

[3)] Cuvântul *„cosinus"* înseamnă *complementarul sinusului.*

Observăm următorul fapt: cateta opusă unghiului C este alăturată unghiului B și $m(\sphericalangle B) = 90° - m(\sphericalangle C)$. Rezultă că $\sin(90° - C) = \cos C$, $\cos(90° - C) = \sin C$, $\operatorname{tg}(90° - C) = \operatorname{ctg} C$, $\operatorname{ctg}(90° - C) = \operatorname{tg} C$.

Vom putea spune deci că **sinusul unui unghi este egal cu cosinusul complementului său, cosinusul unui unghi este egal cu sinusul complementului său, tangenta unui unghi este egală cu cotangenta complementului său, cotangenta unui unghi este egală cu tangenta complementului său.**

Constatăm că sinusul și cosinusul unui unghi ascuțit sunt numere pozitive subunitare pentru că numărătorul (lungimea catetei) este mai mic decât numitorul (lungimea ipotenuzei). În schimb, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit pot lua orice valoare pozitivă.

O a doua constatare: Dacă unghiul ascuțit XOY fiind dat, ducem, din oricare punct al unei laturi ale sale, perpendiculara pe cealaltă latură, raportul dintre lungimea catetei opusă și cea a ipotenuzei este același, oricum am alege A_1, A_2, A_3 punctul din care ducem perpendiculara (fig. 116), proprietatea aceasta rezultând din asemănare. Aceasta înseamnă, în fond, că *sinusul caracterizează unghiul.* Cu alte cuvinte, fiecărui unghi ascuțit îi corespunde un sinus și reciproc, fiecărui sinus îi corespunde măsura unui unghi ascuțit.

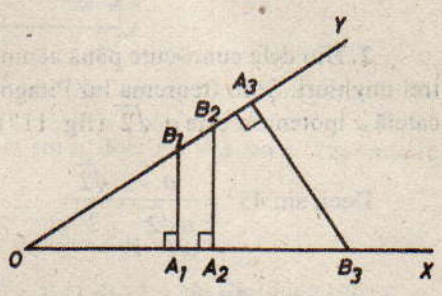


Fig. 116

Se poate alcătui un tabel cu valorile aproximative ale sinusului. Veți vedea mai târziu, în ultimele clase de liceu, că sinusurile nu se măsoară, ci se pot calcula cu ajutorul unei formule în care apare o „sumă infinită", formulă care „începe" astfel:

$$\sin x = \frac{\pi x}{180} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi x}{180}\right)^5 - \dots$$

Dăm mai jos un tabel (calculat, de exemplu, pe baza formulei de mai sus) în care figurează valorile lui sin x, cu trei zecimale exacte, pentru toate unghiurile x exprimate printr-un număr întreg de grade, cuprins între 0° și 90°.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,139	0,156
10	0,174	0.191	0,208	0,225	0,242	0,259	0,276	0,292	0,309	0,326
20	0,342	0,358	0,375	0,391	0,407	0,423	0,438	0,454	0,469	0,485
30	0,500	0,515	0,530	0,545	0,559	0,574	0,588	0,602	0,616	0,629
40	0,643	0,656	0,669	0,682	0,695	0,707	0,719	0,731	0,743	0,755
50	0,766	0,777	0,788	0,799	0,809	0,819	0,829	0,839	0,848	0,857
60	0,866	0,875	0,883	0,891	0,899	0,906	0,914	0,921	0,927	0,934
70	0,940	0,946	0,951	0,956	0,961	0,966	0,970	0,974	0,978	0,982
80	0,985	0,988	0,990	0,993	0,995	0,996	0,998	0,999	0,999	1,000

(ultima valoare este 1,000, cu „rotunjire prin adaos").

Cu ajutorul acestui tabel putem răspunde la două tipuri de probleme:

1) Să se afle, de exemplu, sin 23°. Găsim din tabel sin 23° ≃ 0,391; mai precis, deoarece tabelul conține valori aproximative, numai: 0,3905 < sin 23° < < 0,3915.

2) Sinusul unui unghi este aproximativ 0,32. Care este măsura x a acelui unghi? Din tabel găsim că sin 18° ≃ 0,309 < 0,32 < 0,326 ≃ sin 19°, deci x este cuprins între 18° și 19°, dar mai apropiat de 19°.

Există și tabele mai precise, cu mai multe zecimale, și din „minut în minut" etc.

Observații

1. Putem determina măsura x a unui unghi și dacă știm, de exemplu că $\sin \frac{x}{2} \simeq 0{,}16$. Din tabel obținem $9° < \frac{x}{2} < 10°$, deci $18° < x < 20°$.

2. Din cele cunoscute până acum putem deduce valoarea exactă a sinusurilor a trei unghiuri. Știm (teorema lui Pitagora) că într-un triunghi dreptunghic isoscel de catetă a ipotenuza este $a\sqrt{2}$ (fig. 117).

Deci, $\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

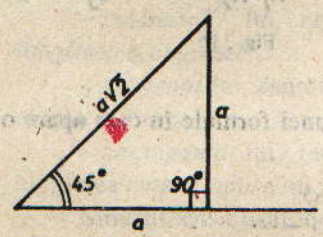
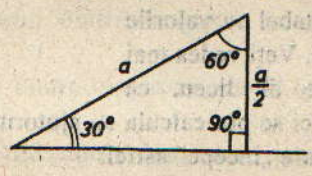


Fig. 117



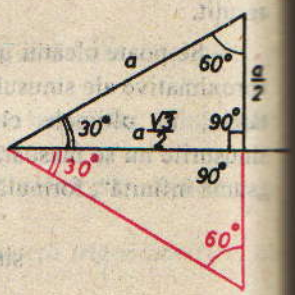


Fig. 118

Știm, din clasa a VI-a, că într-un triunghi dreptunghic de ipotenuză a, ce are un unghi ascuțit de 30°, cateta opusă acelui unghi este $\frac{a}{2}$ (deoarece într-un triunghi echilateral, bisectoarea este și mediatoare – figura 118).

Deci, $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

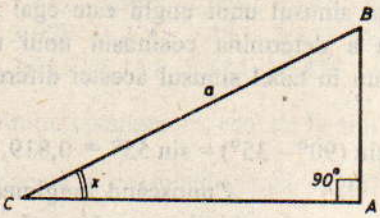
În același triunghi, lungimea celeilalte catete este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (teorema lui Pitagora), deci $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Știind că sinusul unui unghi este egal cu cosinusul complementului său putem deduce și valorile cosinusurilor unghiurilor de 30°, 45°, 60°.

Astfel: $\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

Problemă rezolvată 1. Cunoscând lungimea ipotenuzei și măsura unui unghi ascuțit ale unui triunghi dreptunghic, să se afle lungimile catetelor (fig. 119).

Ipoteza
$m(\sphericalangle A) = 90°$; $BC = a$,
$m(\sphericalangle C) = x$.



Concluzia
$AB = ...$, $AC = ...$

Fig. 119

Rezolvarea. Avem, prin definiție, $\frac{AB}{a} = \sin x$, deci $AB = a \sin x$. Teorema lui Pitagora dă:

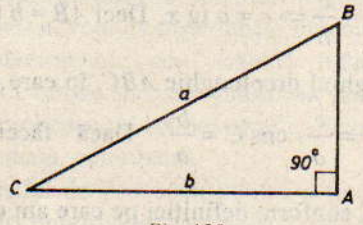
$$AC = \sqrt{a^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 x} = a\sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Mai putem scrie, deoarece $m(\sphericalangle B) = 90° - x$, și $AC = a \sin B = a \sin (90° - x)$.

Observație. Să remarcăm că am scris $\sin^2 x$ în loc de $(\sin x)^2$; aceasta este o convenție de scriere.

Problemă rezolvată 2. Cunoscând lungimea unei catete și pe cea a ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, să se afle măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului (fig. 120).

Ipoteza
$m(\sphericalangle A) = 90°$, $BC = a$,
$AC = b$.



Concluzia
$m(\sphericalangle B) = ...$,
$m(\sphericalangle C) = ...$,

Fig. 120

Rezolvarea. Conform definiției, avem $\sin B = \frac{b}{a}$ și această relație constituie un răspuns la întrebarea „care este măsura unghiului B?"

Măsura unghiului C se determină fie din: $m(\sphericalangle C) = 90° - m(\sphericalangle B)$ fie din: $\sin C = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ $\left(\text{teorema lui Pitagora, } \sin C = \frac{AB}{a}\right)$.

Observații

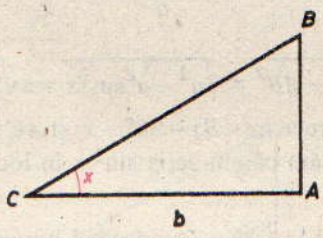
1. Deși problema cerea să se afle măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului, noi ne-am mulțumit să găsim valoarea uneia dintre funcțiile trigonometrice ale unghiurilor. Pentru niște valori particulare ale lui a și b ($a > b$) se poate calcula, cu aproximație, raportul $\frac{b}{a}$ și cu ajutorul tabelului se deduce măsura aproximativă a unghiului respectiv.

2. Pentru aflarea cosinusului unui unghi ascuțit nu este nevoie de un alt tabel. Ținând seama de faptul că sinusul unui unghi este egal cu cosinusul unghiului complementar lui, pentru a determina cosinusul unui unghi, scădem măsura unghiului din 90° și căutăm în tabel sinusul acestei diferențe. El va fi cosinusul unghiului căutat.

Exemplu: $\cos 35° = \sin (90° - 35°) = \sin 55° \approx 0{,}819$.

Problemă rezolvată 3. Cunoscând lungimea unei catete și măsura unghiului alăturat ei dintr-un triunghi dreptunghic, să se determine lungimea celeilalte catete (fig. 121).

Ipoteza
$m(\sphericalangle A) = 90°$, $AC = b$,
$m(\sphericalangle C) = x$.



Concluzia
$AB = \ldots$.

Fig. 121

Rezolvarea. Din definiția tangentei unui unghi ascuțit știm că

$$\operatorname{tg} x = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \operatorname{tg} x. \text{ Deci } AB = b \operatorname{tg} x.$$

Observație. În triunghiul dreptunghic ABC, în care am notat $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, avem: $\sin C = \frac{c}{a}$, $\cos C = \frac{b}{a}$. Dacă facem câtul $\frac{\sin C}{\cos C}$, găsim $\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{c}{a} : \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$. Dar, conform definiției pe care am dat-o tangentei unui unghi ascuțit, $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} C$. Deci $\operatorname{tg} C = \frac{\sin C}{\cos C}$.

Vom putea spune că tangenta unui unghi ascuțit este exprimată de câtul dintre sinusul și cosinusul acelui unghi.

În rezolvarea numerică a problemei rezolvate 3, suntem în situația de a face o împărțire a două numere ($\sin x$ și $\cos x$) pe care le luăm din tabelul de la pagina 83.

Tabelul de valori ale tangentei ușurează calculul de mai sus.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,123	0,141	0,158
10	0,176	0,194	0,213	0,231	0,249	0,268	0,287	0,306	0,325	0,344
20	0,364	0,384	0,404	0,424	0,445	0,466	0,488	0,510	0,532	0,554
30	0,577	0,601	0,625	0,649	0,675	0,700	0,727	0,754	0,781	0,810
40	0,839	0,869	0,900	0,933	0,966	1,000	1,036	1,072	1,111	1,150
50	1,192	1,235	1,280	1,327	1,376	1,428	1,483	1,540	1,600	1,664
60	1,732	1,804	1,881	1,963	2,050	2,145	2,246	2,356	2,475	2,605
70	2,747	2,904	3,078	3,271	3,487	3,732	4,011	4,331	4,705	5,145
80	5,671	6,314	7,115	8,144	9,514	11,430	14,301	19,081	28,636	57,290

Plecând de la definiția cotangentei, este de la sine înțeles că: $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Constatăm astfel că tangenta și cotangenta unui unghi sunt două numere inverse: $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ și $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

Vom putea acum să deducem valorile tangentelor și cotangentelor unghiurilor de 30°, 45°, 60°.

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1;$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

* * *

Pentru a reține cu ușurință valorile funcțiilor trigonometrice ale unor unghiuri importante, în cele ce urmează vom da niște tabele mnemotehnice.

Prin procedeu mnemotehnic sau schemă mnemotehnică înțelegem un procedeu sau ansamblu de procedee care înlesnesc memorarea cunoștințelor. La baza acestor metode sau procedee nu stă neapărat logica (mai bine zis deducția) cât analogia (o asemănare formală, exterioară).

Vă propunem un astfel de procedeu pentru a ține minte sinusurile (deci și cosinusurile) unor unghiuri importante: cele de 30°, 45° și 60°. Le scriem unele sub altele în ordinea crescătoare a argumentelor (adică a măsurii unghiului):

$\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{1}}{2}$
$\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Observăm că toate sunt fracții cu numitorul 2. Dacă scriem și pe 1 sub formă de $\sqrt{1}$, se observă că numărătorii sunt și ei, tot ca și argumentele, în ordine crescătoare, și anume sub radicali figurează 1, 2, 3.

Bineînțeles tabelul poate fi completat la dreapta cu cosinusurile unghiurilor complementare:

$\sin 30° = \frac{\sqrt{1}}{2} = \cos 60°$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$

sau mai poate fi completat în sus și în jos, știind că $\sin 0° = 0$ și $\sin 90° = 1$.

$\sin 0° = \frac{\sqrt{0}}{2} = \cos 90°$
$\sin 30° = \frac{\sqrt{1}}{2} = \cos 60°$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$
$\sin 90° = \frac{\sqrt{4}}{2} = \cos 0°$

S-a dovedit că sunt mai greu de reținut valorile tangentelor. Să vedem: $\operatorname{tg} 45°$, având de-a face cu raportul lungimilor a două catete congruente, $\operatorname{tg} 45° = 1$. Pentru $30°$ și $60°$, unde se nasc cele mai multe confuzii, știm că o valoare este $\frac{\sqrt{3}}{3}$ și alta $\sqrt{3}$. Pe de altă parte, cu cât un unghi ascuțit este mai mare, cu atât tangenta este mai mare. Am reprezentat în figura 122 mai multe triunghiuri dreptunghice cu aceeași catetă. Deci dacă $30° < 60° \Rightarrow \operatorname{tg} 30° < \operatorname{tg} 60°$, deci $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

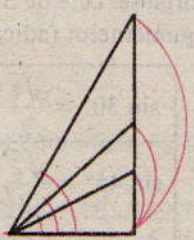


Fig. 122

5. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1.[1] Demonstrați, pe figura 123, că:

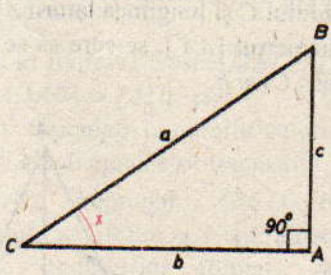


Fig. 123

a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

b) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$;

c) $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

2. Știind că în triunghiul dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, $\sin B = \dfrac{3}{5}$ și că lungimea ipotenuzei este de 15 cm, calculați lungimile catetelor și $\operatorname{tg} C$.

3. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A, se cunosc: $m(\sphericalangle B) = 53°$ și $a = 2$ cm. Calculați $m(\sphericalangle C)$, precum și b și c, utilizând tabelele.

4. Într-un triunghi ABC se dă: $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = 37°$ și $b = 5$ cm. Să se calculeze a, c și $m(\sphericalangle C)$.

5. În triunghiul dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, se cunosc:

a) $a = 226$ cm, $\cos B = \dfrac{112}{113}$. Calculați lungimile catetelor.

b) $a = 34$ cm, $\operatorname{tg} B = \dfrac{9}{40}$. Calculați lungimile catetelor.

c) $b = 92$ cm, $\sin B = \dfrac{46}{65}$. Calculați lungimea ipotenuzei și a catetei c.

d) $a = 850$ cm; $\operatorname{tg} B = \dfrac{77}{36}$. Calculați lungimile catetelor.

e) $a = 58$ cm, $\operatorname{ctg} C = \dfrac{21}{20}$. Calculați lungimile catetelor.

f) $a = 74$ cm, $\operatorname{tg} B = \dfrac{12}{37}$. Calculați lungimile catetelor.

6. În triunghiul dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, se cunosc lungimile catetelor $AB = 5$ cm și $AC = 3$ cm. Să se calculeze, cu ajutorul tabelelor, măsurile unghiurilor B și C.

[1] Egalitățile de la exercițiul 1, o dată demonstrate, se pot reține ca formule.

7. În triunghiul oarecare ABC se știe că $m(\sphericalangle A) = 60°$ și $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Să se calculeze lungimea laturii $[BC]$.

8. Triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) este înscris în cercul de centru O (fig. 124). Presupunând cunoscută măsura unghiului C și lungimea laturii $AC = b$, să se determine lungimea laturii $[BC]$. Ducând diametrul $[AA']$, se cere să se exprime lungimea segmentului $[A'C]$ tot în funcție de $m(\sphericalangle C)$ și b.

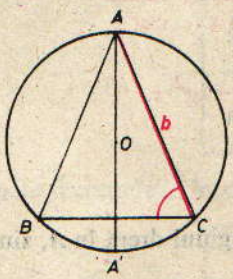


Fig. 124

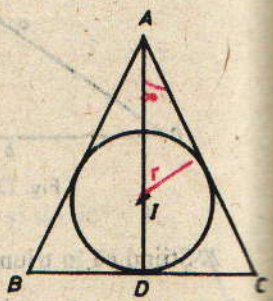


Fig. 125

9. Cercul de centru I este înscris în triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $[AD]$ este înălțime (fig. 125). Cunoscând că $m(\sphericalangle DAC) = \alpha°$ și raza cercului înscris este r, să se exprime lungimile laturilor $[AB]$ și $[BC]$ în funcție de α și r.

10. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle A) = 60°$, $AC = x$, $AB = 3x$. Se cere să se exprime raza cercului circumscris triunghiului (R) în funcție de x.

11. Triunghiul ABC, din figura 126, are $m(\sphericalangle A) = 105°$, $m(\sphericalangle B) = 45°$ și $AB = 3\sqrt{2}$ cm. Aflați măsura unghiului C și lungimile celorlalte laturi, precum și cea a înălțimii $[AD]$.

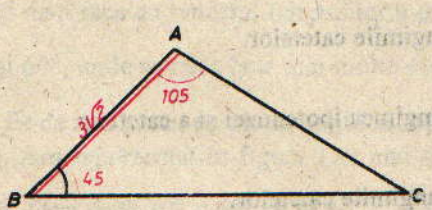


Fig. 126

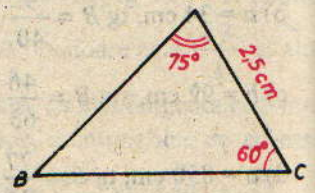


Fig. 127

12. În triunghiul ABC, din figura 127, se cunosc $AC = 2{,}5$ cm, $m(\sphericalangle A) = 75°$, $m(\sphericalangle C) = 60°$. Să se afle lungimile laturilor $[AB]$, $[BC]$, precum și cea a înălțimii $[AA']$.

13. În triunghiul ascuțitunghic ABC, înălțimea $[AD]$ are lungimea de 60 cm, iar $\sin C = 0{,}8$ și $\cos B = \frac{5}{13}$. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

14. În triunghiul ABC, în care $m(\sphericalangle A) = 135°$ și $m(\sphericalangle B) = 30°$, latura $[BC]$ are lungimea de 6 cm. Să se afle lungimile celorlalte două laturi, precum și cea a înălțimii din vârful C.

15. În trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ se știe că $[AB] \equiv [AD]$, cos $C = 0{,}6$ și $DC = 66$ cm. Calculați lungimile celorlalte laturi ale sale și ale diagonalelor trapezului.

16. Un dreptunghi $ABCD$ are laturile cu lungimile de 10 cm și 7 cm. Să se găsească sinusurile unghiurilor formate de diagonale cu laturile și cel al unghiului format de diagonale.

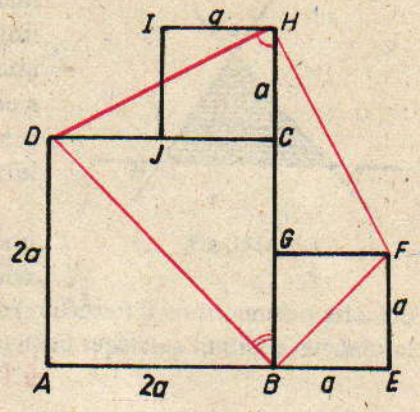


Fig. 128

17. În figura 128, patrulaterul $ABCD$ este un pătrat de latură $2a$, iar pătratele $BEFG$ și $CHIJ$ au laturile a.

a) Să se arate că patrulaterul $BFHD$ este inscriptibil.

b) Să se calculeze cosinusurile unghiurilor DBH și BHD.

18. În figura 129, patrulaterul $ABEF$ și $CDFE$ sunt pătrate. Se cere câte o funcție trigonometrică a unghiurilor triunghiului BDF.

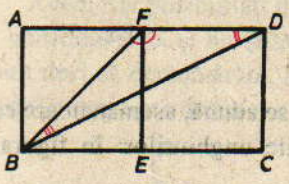


Fig. 129

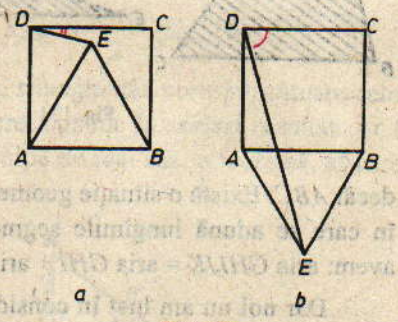


Fig. 130

19. În figura 130, *a* și *b*, patrulaterul $ABCD$ este un pătrat și triunghiul ABE un triunghi echilateral. Să se calculeze, în fiecare caz în parte, tg $(\sphericalangle CDE)$.

III. ARII

§ 1. INTRODUCERE

Noţiunea de arie vă era bine cunoscută încă înainte de a fi început, în clas a VI-a, studiul geometriei. Astfel, în figura 131 intuiţia ne îndeamnă să spunem că aria ABC este mai mare decât aria DEF, în ciuda faptului că DEF este mai „lungă"

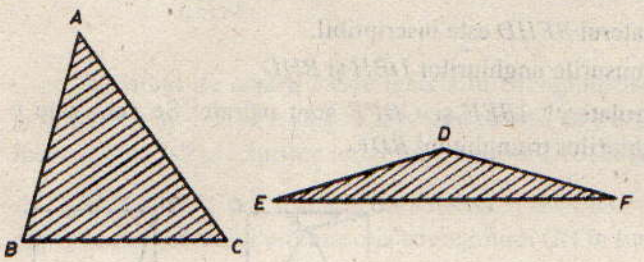


Fig. 131

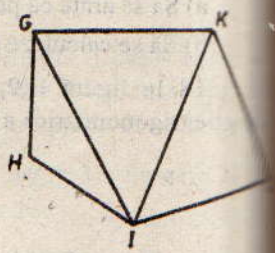


Fig. 132

decât ABC. Există o situaţie geometrică, în care ariile se adună, asemănătoare cu cea în care se adună lungimile segmentelor sau măsurile unghiurilor: în figura 132 avem: aria $GHIJK$ = aria GHI + aria GIK + aria IJK.

Dar noi nu am luat în considerare noţiunea de arie când am descris, în prima parte a manualului pentru clasa a VI-a, noţiunile de bază ale geometriei plane. Este cazul să privim aceasta ca o lipsă? Nu, deoarece, astfel de noţiuni, sugerate de experienţa noastră şi nu de logica dezvoltării geometriei, mai pot apărea şi chiar vor apărea în capitolul acesta.

Ne aflăm deci în faţa unei situaţii noi. Intuiţia noastră pune în evidenţă o noţiune nouă şi unele proprietăţi ale ei. Noi „simţim" că aceasta este o noţiune de geometrie. Se pune problema să exprimăm toate acestea în limbajul geometriei, cu alte cuvinte să definim această noţiune şi să demonstrăm proprietăţile descoperite de noi înainte.

Cum în clasele precedente aţi mai învăţat cum se calculează ariile, noi vom merge aci „drept la ţintă", fără a ignora cunoştinţele dobândite până acum asupra ariilor (evident însă, fără a ne baza pe ele în demonstraţii).

Observație. Când vorbim despre aria unui triunghi, ne gândim de fapt nu la aria figurii formată de vârfurile triunghiului, ci la aria „interiorului triunghiului", înțeles drept mulțime a tuturor punctelor care se află de aceeași parte a oricăreia dintre laturile triunghiului, ca și vârful opus (fig. 133).

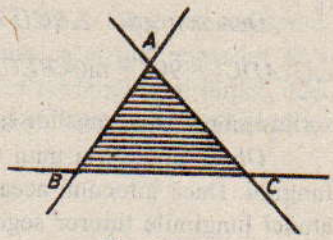


Fig. 133

Dacă privim schema triunghi → interiorul său → aria, observăm că fiecărui triunghi, chiar gândit ca o figură formată numai din trei puncte (vârfurile) îi corespunde o arie. Un astfel de mod de a gândi scurtează expunerea, evitând repetarea inutilă a cuvântului „interior".

§ 2. ARIA UNUI TRIUNGHI

Definiție. **Prin *aria unui triunghi* înțelegem jumătate din produsul dintre lungimea unei laturi a triunghiului și lungimea înălțimii corespunzătoare acelei laturi.** Cu alte cuvinte, **aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul dintre „bază" și „înălțime".**

Aria triunghiului ABC o vom nota S_{ABC} și putem scrie: $S_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2}$, sau, notând așa cum suntem obișnuiți, cu litere mici, $S_{ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ (fig. 134).

Avem trei posibilități de a calcula aria unui triunghi dat, corespunzătoare celor trei laturi ale sale, și nu știm dinainte că toate trei conduc la același rezultat. Ar fi trebuit deci să demonstrăm, înainte de a da definiția de mai sus, o teoremă, al cărei enunț îl puteți ușor deduce.

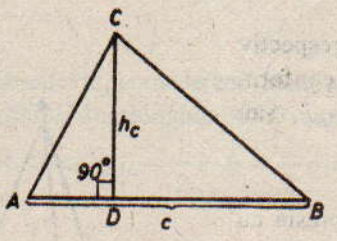


Fig. 134

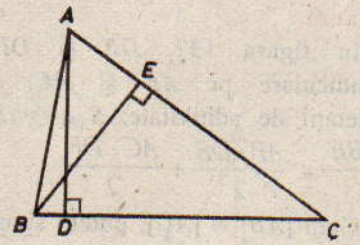


Fig. 135

Lemă. **Într-un triunghi, produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare ei este același pentru toate cele trei laturi** (altfel spus, definiția precedentă este corectă).

În figura 135 știm că: $AD \perp BC$, $BE \perp AC$.

Vrem să arătăm că: $AD \cdot BC = BE \cdot AC$.

Demonstrația. $\triangle ACD \sim \triangle BCE$, conform cazului 1 de asemănare, deoarece $m(\sphericalangle ADC) = 90° = m(\sphericalangle BEC)$ și $\sphericalangle C = \sphericalangle C$. Rezultă $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE}$, de unde obținem, scriind că produsul mezilor este egal cu cel al extremilor, relația din concluzie.

Observație. Aria unui triunghi depinde de unitatea de măsură aleasă pentru lungimi. Dacă înlocuim această unitate cu alta, de k ori mai „lungă" decât prima, atunci lungimile tuturor segmentelor se împart cu k, iar toate ariile triunghiurilor devin de k^2 ori mai mici.

În introducere am vorbit de o situație în care ariile se adună. Un prim fapt de acest fel este stabilit în teoria următoare.

Teoremă (proprietatea de aditivitate pentru arii). **Dacă D este un punct din interiorul laturii $[BC]$ a unui triunghi ABC, atunci $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$** (fig. 136).

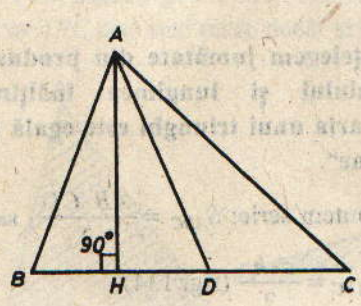


Fig. 136

Demonstrația. Să considerăm înălțimea $[AH]$. Avem $S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{(BD+DC)AH}{2} = \frac{BD \cdot AH}{2} + \frac{DC \cdot AH}{2} = S_{ABD} + S_{ADC}$. q.e.d.

Observație. Enunțul „proprietății generale de aditivitate" este complicat și nu îl vom da. În unele probleme care vor urma, vom indica alte expresii ale acestei proprietăți; în paragraful următor vor apărea, de asemenea, alte probleme cărora li se potrivește acest titlu.

Dăm exemple de astfel de probleme:

Problemă rezolvată 1. Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct din interiorul bazei unui triunghi isoscel la cele două laturi congruente este constantă.

În figura 137, DE și DF sunt respectiv perpendiculare pe AB și AC. Scriem, conform proprietății de aditivitate: $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$, sau $\frac{AC \cdot BB'}{2} = \frac{AB \cdot DE}{2} + \frac{AC \cdot DF}{2}$.

Cum $[AB] \equiv [AC]$, putem simplifica expresia cu $\frac{AC}{2}$ și obținem:

$$BB' = DE + DF = \text{constantă}.$$

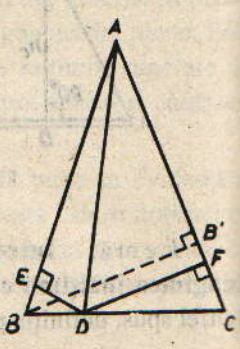


Fig. 137

Problemă rezolvată 2*). Dându-se triunghiul ABC, determinați mulțimea punctelor M din plan, astfel încât $S_{ABC} = S_{MBC}$. (Deci, punctele B și C rămân fixe!).

*) Rezultatul acestei probleme trebuie reținut pentru a fi folosit la rezolvarea altor probleme.

Punctele B şi C rămânând fixe, segmentul $[BC]$ are o lungime constantă. Pentru ca şi aria triunghiului să rămână aceeaşi, trebuie ca şi înălţimea din M a triunghiului să fie constantă şi anume egală cu cea din A a triunghiului iniţial, deci trebuie ca M să descrie o paralelă la dreapta BC (fig. 138). Suntem tentaţi, după ce

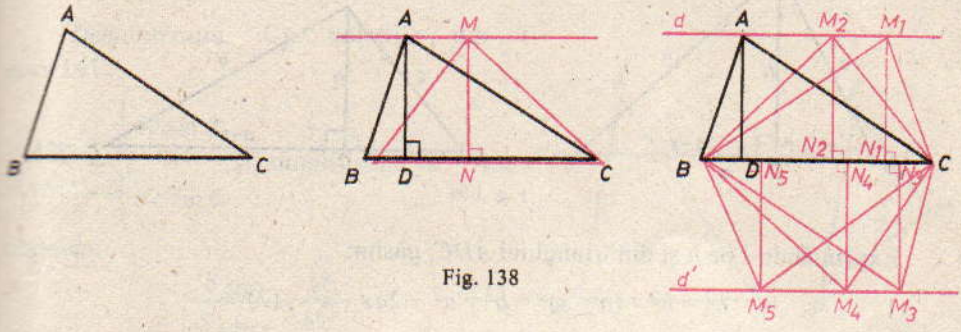


Fig. 138

am trasat această paralelă, să ne oprim aici. Dar nouă ni se cer *toate* punctele M care au proprietatea din enunţ. Or, şi în celălalt semiplan determinat de dreapta BC, mai sunt astfel de puncte, şi ele alcătuiesc încă o dreaptă paralelă cu BC. Deci răspunsul complet la problema propusă este că: mulţimea punctelor căutate este alcătuită din *două* drepte (d şi d') paralele cu BC situate de o parte şi de alta a dreptei BC, la distanţe egale de aceasta.

Două triunghiuri ABC şi MNP ale căror arii sunt egale ($S_{ABC} = S_{MNP}$) se numesc *triunghiuri echivalente.*

Observaţii. **1.** Dacă într-un triunghi ABC se cunosc lungimile a două laturi, de pildă $AB = c$ şi $AC = b$, şi se cunoaşte şi măsura unghiului cuprins între ele ($m(\sphericalangle BAC) = A$), expresia ariei triunghiului în funcţie de aceste trei elemente este:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

Într-adevăr, considerând înălţimea h_c, (fig. 139), în triunghiul dreptunghic ACD avem: $h_c = CD = b \sin A$. Deci $S_{ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \sin A$.

2. Dacă se cunosc lungimile tuturor laturilor unui triunghi ABC ($AB = c$, $AC = b$, $BC = a$), atunci aria triunghiului se poate exprima prin formula:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ^{1)},$$

unde am notat cu $p = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c)$.

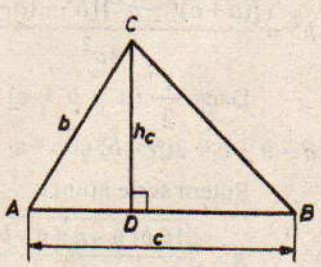


Fig. 139

[1] Această formulă este cunoscută sub numele de „formula lui Heron". (Heron – matematician grec din sec. I î.e.n.)

Demonstrația. Fie $\triangle ABC$ în care $AD \perp BC$, unde $D \in (BC)$ (fig. 140). În triunghiul dreptunghic ABD avem:

$h^2 = c^2 - x^2$ (1) (unde am notat cu h lungimea înălțimii din A a triunghiului dat, cu x lungimea proiecției laturii $[AB]$ pe $[BC]$).

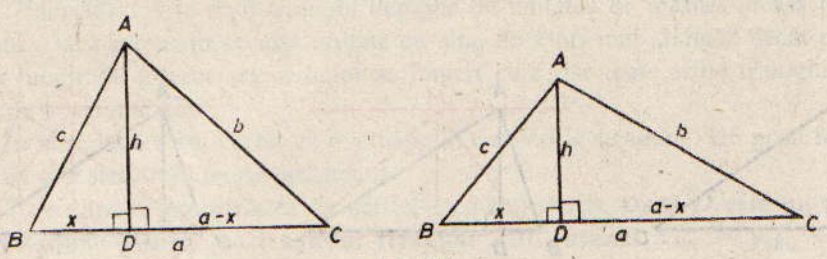


Fig. 140

Exprimându-l pe h și din triunghiul ADC, găsim:

$$h^2 = b^2 - (a-x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2 \quad (2)$$

Egalând cele două expresii ale lui h^2 din (1) și (2), avem:

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2 \Leftrightarrow 2ax = a^2 - b^2 + c^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \quad (3)$$

Ducând valoarea găsită pentru x în (1) obținem:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2.$$

Folosind formula produsului de sumă prin diferență:

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) =$$

$$= \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}.$$

Restrângem pătratele:

$$h^2 = \frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{4a^2} = \frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{4a^2}$$

Dacă $\frac{1}{2}(a + b + c) = p$, atunci: $a + b + c = 2p$, $-a + b + c = 2(p - a)$, $a - b + c = 2(p - b)$ și $a + b - c = 2(p - c)$.

Putem scrie atunci:

$$h = \sqrt{\frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Deci, aria se scrie:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

și simplificând, formula este demonstrată.

§ 3. RAPORTUL ARIILOR A DOUĂ TRIUNGHIURI ASEMENEA

Lemă. Dacă un unghi al unui triunghi ABC este congruent cu un unghi al altui triunghi $A'B'C'$ (de exemplu $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$), atunci raportul ariilor celor două triunghiuri este egal cu raportul produselor lungimilor laturilor ce formează unghiurile respective $\left(\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{bc}{b'c'}\right)$.

Demonstrația. Cu notațiile din figura 141:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin x}{\frac{1}{2}b'c'\sin x}$$ și, simplificând cu $\frac{1}{2}\sin x$, obținem:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{bc}{b'c'}.$$

q.e.d.

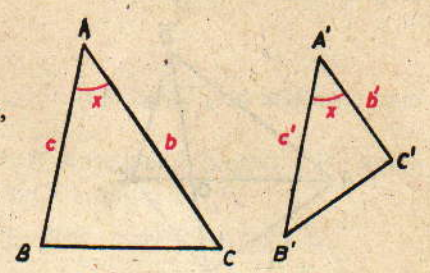


Fig. 141

Teoremă. **Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.**

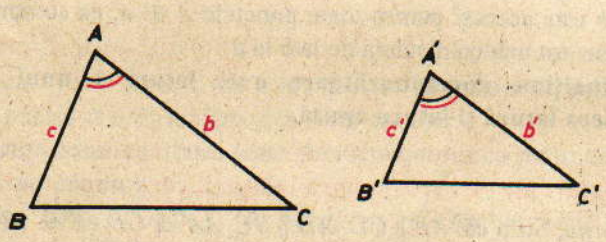


Fig. 142

Demonstrația se face aplicând lema precedentă, pentru că unghiurile din A și A' sunt congruente din asemănare și $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = k$, tot din asemănare (fig. 142).

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{bc}{b'c'} = k^2$$

q.e.d

§ 4. ARIA UNUI PATRULATER

Înainte de a defini aria unui patrulater, avem nevoie de o lemă, la fel ca în paragraful precedent.

Lemă. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Atunci $S_{ABC} + S_{ADC} = S_{ABD} + S_{BCD}$ (fig. 143).

Demonstrația. Să notăm cu O intersecția diagonalelor patrulaterului. Conform proprietății de aditivitate avem: $S_{ABC} + S_{ADC} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{ADO} + S_{ODC} = (S_{ABO} + S_{ADO}) + (S_{BOC} + S_{ODC}) = S_{ABD} + S_{BCD}$.

q.e.d.

Definiție. **Prin aria unui patrulater convex $ABCD$ înțelegem numărul $S_{ABC} + S_{ADC}$ (vezi figura 143) notat cu S_{ABCD}.**

Observație. Problema corectitudinii acestei definiții, rezolvată prin lema precedentă, apare datorită faptului că am convenit să considerăm patrulaterul $ABCD$ drept tot una cu $BCDA$ etc.

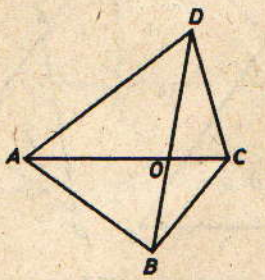


Fig. 143

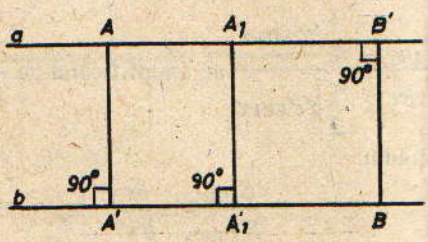


Fig. 144

Înainte de a enunța teorema privind aria unui paralelogram, să reamintim că dacă avem două drepte paralele a și b (fig. 144), atunci distanța de la un punct A de pe a la dreapta b este aceeași pentru toate punctele $A \in a$; ea se numește „distanța de la a la b" și este tot una cu distanța de la b la a.

Numim înălțime corespunzătoare unei laturi a unui paralelogram distanța între acea latură și latura opusă.

Teoremă. **Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi ale sale și lungimea înălțimii corespunzătoare ei.**

Demonstrația. Știm că: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AA' \perp CD$ $(A' \in (BC))$, $CC' \perp AB$ $(C' \in (AD))$ – figura 145; și vrem să arătăm că: $S_{ABCD} = BC \cdot AA'$.

Avem $AA' = CC'$, conform proprietății distanței între dreptele paralele AD și BC, menționate mai sus, și $[AD] \equiv [BC]$ (laturi opuse în paralelogram). Obținem

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{BC \cdot AA'}{2} + \frac{AD \cdot CC'}{2} = BC \cdot AA'.$$

Consecința 1. **Aria unui dreptunghi este egală cu produsul dintre lungimea și lățimea sa**[1] (fig. 146).

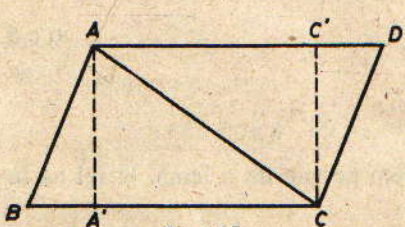


Fig. 145

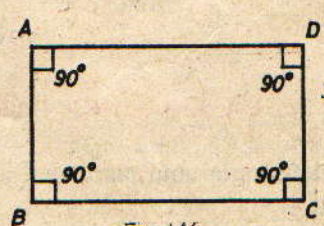


Fig. 146

$S_{ABCD} = AD \cdot AB.$

[1] Laturile unui dreptunghi se mai numesc una „lungime" și cealaltă „lățime".

Consecința 2. Aria unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii sale.

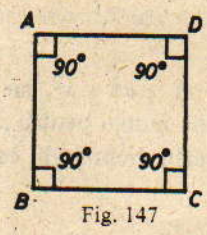


Fig. 147

$S_{ABCD} = AB^2$.

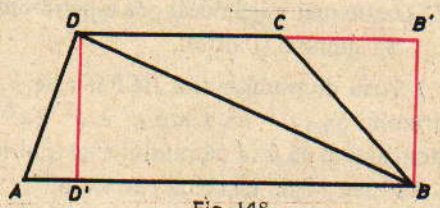


Fig. 148

Teoremă. Aria unui trapez este egală cu produsul dintre semisuma lungimilor bazelor sale și lungimea înălțimii sale (înțelegând prin înălțimea unui trapez distanța dintre baze) (fig. 148).

Demonstrația. Să ducem și $BB' \perp CD$, B' aparținând dreptei CD. Avem $BB' = DD'$ (distanța dintre dreptele paralele AB și CD). obținem:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{AB \cdot DD'}{2} + \frac{CD \cdot BB'}{2} = \frac{(AB+CD)DD'}{2}.$$

Observație. În general, aria unui patrulater se definește ca suma ariilor unor triunghiuri în care acesta „se descompune". Spre exemplu, fiind dat patrulaterul $ABCD$ (fig. 149) avem: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$.

Problemă rezolvată 1. Să se arate că dacă două numere pozitive au suma constantă, produsul lor este maxim când ele sunt egale.

Rezolvarea. Vom încerca să dăm acestei probleme o soluție geometrică. Pentru aceasta putem să o formulăm și în felul următor:

Să se demonstreze că dintre toate dreptunghiurile cu perimetru constant, aria cea mai mare o are pătratul.

Comparăm pătratul $ABCD$ de latură a cu dreptunghiul $BEFG$ care are lungimea $GF = a + x$ și lățimea $EF = a - x$ (fig. 150).

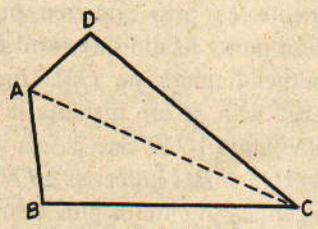


Fig. 149

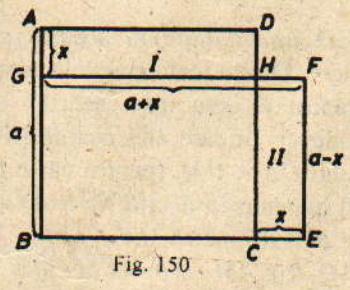


Fig. 150

Evident, ambele au același perimetru ($4a$). Cu notațiile din figură, a compara aria pătratului $ABCD$ cu cea a dreptunghiului $BEFG$ revine la a preciza care dintre ariile dreptunghiurilor $AGHD$ și $CEFH$ este mai mare. Ambele dreptunghiuri au câte o latură x. Dreptunghiul II are cealaltă latură cu x mai mică decât o are dreptunghiul I. Deci dreptunghiul II are aria mai mică decât dreptunghiul I.

Cum aria dreptunghiului $BEFG$ provine scăzând din aria pătratului $ABCD$ aria dreptunghiului I și adunând aria dreptunghiului II, rezultă că aria dreptunghiului $BEFG$ este mai mică decât cea a pătratului $ABCD$.

Să spunem și altfel:

Aria dreptunghiului $BEFG$ este $S_{BEFG} = (a + x)(a - x) = a^2 - x^2$, iar cea a pătratului $S_{ABCD} = a^2$. Cum $a^2 \geq a^2 - x^2$ (egalitatea având loc numai pentru $x = 0$), putem spune că aria pătratului este mai mare decât aria oricărui dreptunghi care are un perimetru egal cu cel al pătratului.

Această problemă, rezolvată, ne poate duce și la o a doua:

Problemă rezolvată 2. Să se arate că dacă două numere pozitive au produsul constant, atunci suma lor este minimă când ele sunt egale.

Rezolvarea. Vom porni de la problema precedentă: în figura pe care am făcut-o pentru a o rezolva, pătratul $ABCD$ și dreptunghiul $BEFG$ au același perimetru dar ariile diferă, pentru că dreptunghiul II este „mai mic" decât dreptunghiul I. Deci, dacă „adăugăm" la dreptunghiul II dreptunghiul III (cu interior haşurat), $EMNF$, atunci dreptunghiul I și dreptunghiul $CMNH$ sunt echivalente[1] (fig. 151). Deci pătratul $ABCD$ și dreptunghiul $BMNG$ sunt patrulatere echivalente (produsele $AB \cdot AD$ și $BM \cdot MN$ sunt egale), dar perimetrele lor diferă, cel al pătratului este mai mic, deci: $2(AB + AD) < 2(BM + MN)$.

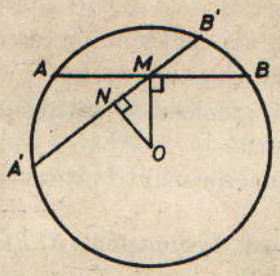


Fig. 152

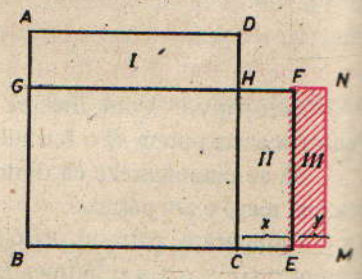


Fig. 152

O altă soluție la această problemă se poate da prin „puterea punctului interior". Dintre toate coardele care „trec" printr-un punct M din interiorul cercului de centru O, cea mai „scurtă" este coarda perpendiculară pe OM (fig. 152). Într-adevăr, oricare altă coardă $[A'B']$, care „trece" prin M are distanța la centrul cercului $ON < OM$, (pentru că în triunghiul OMN latura $[ON]$ este catetă și latura $[OM]$ ipotenuză), deci $B'N^2 = R^2 - ON^2 > R^2 - OM^2 = BM^2$, deci și $2B'N > 2BM$ sau $A'B' > AB$, adică $MA' + MB' > MA + MB$. Dar, aplicând puterea punctului M față de $\mathcal{C}(O, R)$: $AM \cdot MB = A'M \cdot MB' =$ constant și problema este demonstrată!

Problemă rezolvată 3. Dându-se un patrulater convex, se cere să se găsească o metodă de a construi (a desena) un triunghi cu aceeași arie ca patrulaterul (un triunghi echivalent patrulaterului).

[1] Am văzut, la pagina 95, ce înțelegem prin triunghiuri echivalente. Vom extinde acum noțiunea și la patrulatere (dreptunghiuri). În general, spunem că două figuri geometrice sunt echivalente dacă au ariile egale.

Rezolvarea. Fie $ABCD$ patrulaterul convex (fig. 153). Ducem diagonala $[AC]$ și prin punctul B o paralelă la ea, care intersectează dreapta DC în E. Triunghiul AEC are aceeași arie cu triunghiul ABC, deci $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{AEC} + S_{ACD} = S_{AED}$.

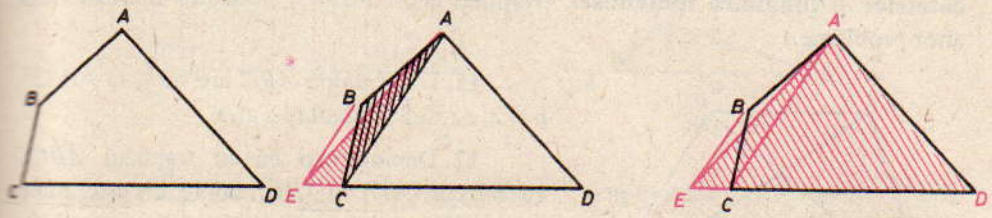


Fig. 153

În cazul că patrulaterul $ABCD$ este concav (fig. 154), procedeul este același. Faceți demonstrația singuri, desenul fiind destul de explicit.

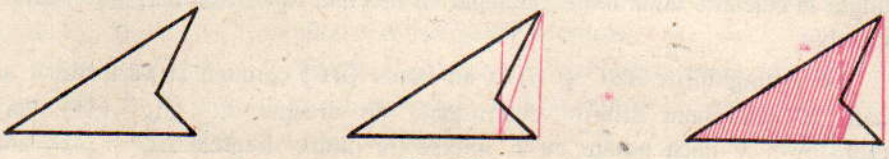


Fig. 154

6. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

A. ARIA TRIUNGHIULUI

1. În triunghiul ABC se cunosc: înălțimea $AA' = 3$ cm și latura $BC = 4$ cm, calculați aria triunghiului.

2. Într-un triunghi, o înălțime este de 4 cm și aria de 12 cm^2, aflați lungimea laturii pe care înălțimea cunoscută este perpendiculară.

3. Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este de 24 cm și cea a ipotenuzei de 26 cm. Calculați aria triunghiului.

4. Care este aria unui triunghi dreptunghic isoscel de catetă a?

5. Care este aria unui triunghi echilateral de latură a?

6. Calculați aria unui triunghi ale cărui laturi au lungimile de 13, 20 și 21 cm.

7. Să se demonstreze că într-un paralelogram $ABCD$, avem $S_{ABC} = S_{DBC}$.

8. În triunghiul ABC se cunosc: $m(\sphericalangle B) = 45°$, $c = 3\sqrt{2}$, $a = 4$. Calculați aria triunghiului.

9. În triunghiul ABC se cunosc: $m(\sphericalangle B) = 30°$, $c = 6$ cm și $a = 8$ cm. Aflați aria triunghiului.

10. Demonstrați că **într-un triunghi dreptunghic lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egală cu câtul dintre produsul lungimilor catetelor și lungimea ipotenuzei.** (Rețineți acest rezultat, folositor în rezolvarea altor probleme.)

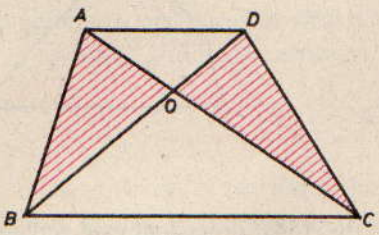


Fig. 155

11. Un triunghi ABC are $m(\sphericalangle A) = 135°$, $b = 2$, $c = 3{,}2$. Calculați-i aria.

12. Demonstrați că în trapezul $ABCD$ cu bazele $[AD]$ și $[BC]$, unde O este intersecția diagonalelor (fig. 155), $S_{AOB} = S_{DOC}$. Formulați o reciprocă și verificați dacă este adevărată.

13. Să se demonstreze că raportul distanțelor de la mijlocul unei laturi a unui triunghi la celelalte două laturi este egal cu inversul raportului lungimilor laturilor respective.

14. Triunghiurile ABC și BDC au latura $[BC]$ comună și vârfurile A și D situate în semiplane diferite determinate de dreapta BC (fig. 156). Să se demonstreze că dacă notăm cu E intersecția dintre dreptele BC și AD, atunci $\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}} = \frac{AE}{ED}$.

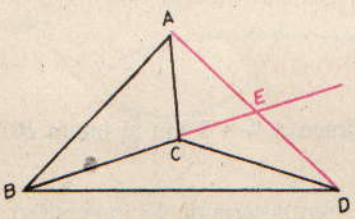


Fig. 156

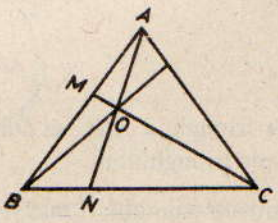


Fig. 157

Folosind acest rezultat, demonstrați că dacă în triunghiul ABC dreptele AN, BP, CM ($M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$) sunt concurente în O (fig. 157), atunci $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$.

15. Folosind faptul că în triunghiul ABC mediana $[AA']$ determină două triunghiuri de arii egale ($\triangle ABA'$ și $\triangle AA'C$), să se demonstreze că distanțele de la B și C la dreapta AA' sunt egale.

16. Într-un semicerc de diametru $[BC]$ este înscris triunghiul ABC. Pe tangenta în A proiectăm vârfurile B și C respectiv în D și E (fig. 158). Să se demonstreze că $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACE}$.

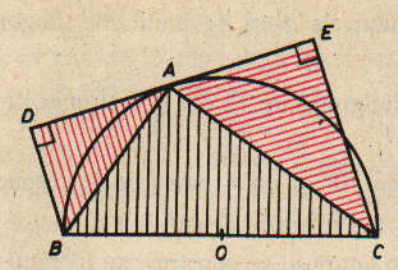


Fig. 158

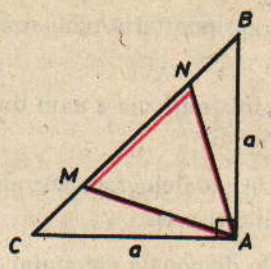


Fig. 159

17. Triunghiul ABC este un triunghi dreptunghic isoscel de catete $AB = AC = a$. Triunghiul AMN este un triunghi echilateral având vârfurile M, N pe ipotenuza triunghiului ABC (fig. 159). Calculaţi aria acestui triunghi echilateral, în funcţie de a.

18. Să se demonstreze că suma distanţelor unui punct din interiorul unui triunghi echilateral la laturile triunghiului echilateral este constantă.

19. Să se demonstreze că raza cercului înscris într-un triunghi este egală cu câtul dintre dublul ariei triunghiului şi perimetrul acestuia.

20. O paralelă la latura $[BC]$ a unui triunghi ABC intersectează laturile $[AB]$ şi $[AC]$ în M şi N. Să se arate că aria triunghiului ABN este medie proporţională între ariile triunghiurilor ABC şi AMN.

21. Pe latura $[OX$ a unghiului XOY fixăm punctul A şi pe latura $[OY$ fixăm punctul B. Fie semidreapta $[OZ$ în interiorul unghiului XOY (nu neapărat bisectoarea acestuia). Să se demonstreze că oricare ar fi punctul C situat pe această semidreaptă, $\frac{S_{COA}}{S_{COB}}$ = constant (fig. 160).

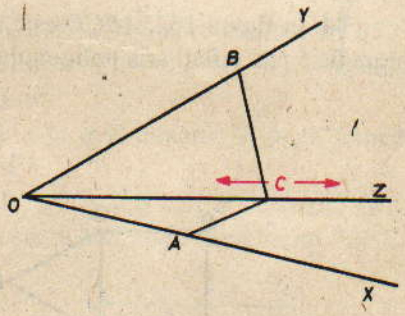


Fig. 160

22. În triunghiul ABC ducem înălţimile $[BB']$ şi $[CC']$. Să se arate că $B'C' = BC \cdot \cos A$ şi că raportul ariilor triunghiurilor $AB'C'$ şi ABC este egal cu pătratul cosinusului lui A.

23. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, demonstraţi că triunghiurile ABG, ACG şi BCG au aceeaşi arie.

B. ARIA PATRULATERULUI

24. Un pătrat are latura cu lungimea de 3 cm. Cât are aria?

25. Un pătrat are aria de 5 cm^2. Care este lungimea laturii lui?

26. Un dreptunghi are o latură cu lungimea de 8 cm şi aria de 24 cm^2. Care sunt lungimile celorlalte laturi ale sale?

27. Exprimați aria unui romb în funcție de d_1 și d_2, lungimile diagonalelor sale.

28. Linia mijlocie a unui trapez are lungimea de 12 cm și înălțimea de 6 cm. Cât este aria lui?

29. Un paralelogram are un unghi de 30° și două laturi de 4, respectiv de 3 cm. Cât îi este aria?

30. Pe diagonala pătratului $ABCD$ de latură a, se construiește pătratul $ACEF$ (fig. 161). Cât este aria acestuia din urmă?

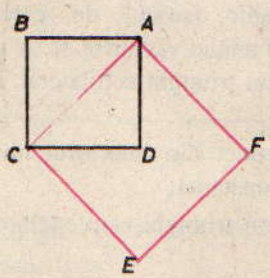


Fig. 161

31. Mijloacele laturilor unui pătrat sunt vârfurile unui nou pătrat. Calculați raportul ariilor celor două pătrate.

32. Demonstrați că paralelogramul care are vârfurile în mijloacele laturilor unui patrulater convex are ca arie jumătate din aria acestuia.

33. Dacă diagonalele unui patrulater convex au lungimile de d_1 și respectiv d_2 și unghiul dintre ele are măsura de $x°$, calculați în funcție de d_1, d_2 și x aria patrulaterului. (Reținеți această formulă utilă.)

34. În figura 162, $ABCD$ este un pătrat și ADE este un triunghi echilateral cu latura de 5 cm. Aflați aria poligonului $ABCDE$.

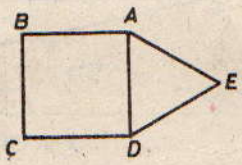


Fig. 162

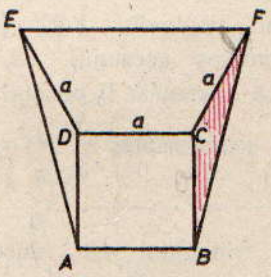


Fig. 163

35. În figura 163, patrulaterul $ABCD$ este un pătrat și trapezul $CFED$ are $FC = CD = DE = a$. Dacă unghiul CFE are măsura de 60°, aflați ariile trapezului $ABFE$ și triunghiului FBC.

36. Raportul dintre lungimea bazei mari și cea a bazei mici ale unui trapez este k. Se dau diagonalele și se prelungesc cele două laturi neparalele până se intersectează. Să se afle raportul dintre ariile fiecărui triunghi format și aria trapezului. Puneți în evidență cele două triunghiuri de aceeași arie.

37. Aflați unghiurile unui romb a cărui latură este medie proporțională între diagonalele sale.

38. Dacă segmentul care unește mijloacele a două laturi opuse ale unui patrulater convex îl împarte în două patrulatere de aceeași arie, atunci patrulaterul inițial este trapez sau paralelogram.

39. Patrulaterul $ABCD$ din figura 164 este un trapez cu laturile $[AB] \equiv [DC] \equiv [AD]$. Latura $[AD]$ este baza mică, iar $[AB]$ și $[DC]$ laturile neparalele și măsura unghiului ABC de 45°. Aflați aria poligonului $BCGHFE$ (adică aria întreagă haşurată în desen), știind că patrulaterele $AFEB$ și $CGHD$ sunt pătrate.

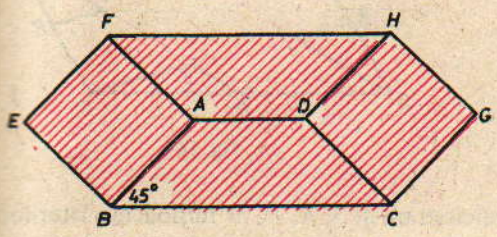


Fig. 164

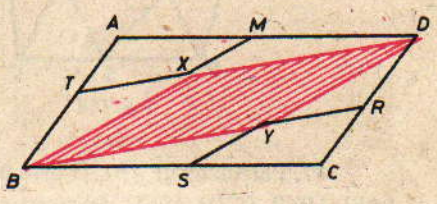


Fig. 165

40. Patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram și T, S, R, M sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$. Dreapta DT intersectează pe BM în X și BR pe DS în Y (fig. 165).

a) Este $DXBY$ un paralelogram?

b) Care este raportul ariilor paralelogramului $ABCD$ și patrulaterului $DXBY$?

41. Într-un patrulater $ABCD$, $AB = 10$ cm, $BC = CD = 13$ cm, $AD = 12$ cm și diagonala $BD = 10$ cm. Calculați aria patrulaterului.

42. Linia mijlocie a unui trapez de baze a și b îl împarte în două trapeze. Aflați raportul ariilor acestora cu ajutorul lui a și b.

43. Fie M mijlocul laturii neparalele $[AD]$ în trapezul $ABCD$ de baze $[AB]$ și $[CD]$ (fig. 166). Demonstrați că aria trapezului este dublul ariei triunghiului BMC.

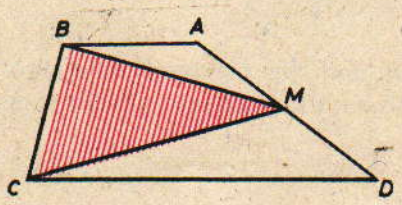


Fig. 166

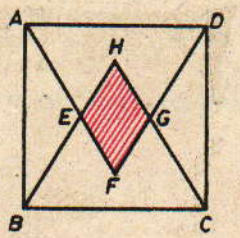


Fig. 167

44. În figura 167, patrulaterul $ABCD$ este un pătrat de latură a și BCH și AFD sunt două triunghiuri echilaterale cu H și F în interiorul pătratului. Aflați aria rombului $EFGH$.

45. Patrulaterul $ABCD$ este un trapez și O intersecția diagonalelor sale. Demonstrați că raportul ariilor triunghiurilor OAB și ODC, unde $[AB]$ și $[CD]$ sunt baze, este egal cu pătratul raportului bazelor.

46. Patrulaterul $ABCD$ este un patrulater oarecare, R şi S mijloacele laturilor $[AD]$ şi respectiv $[BC]$. Dacă notăm $[AS] \cap [BR] = \{X\}$ şi $[CR] \cap [DS] = \{Y\}$ (fig. 168), să se demonstreze că aria patrulaterului $RXSY$ este egală cu suma ariilor triunghiurilor AXB şi CYD.

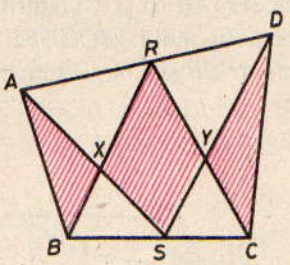


Fig. 168

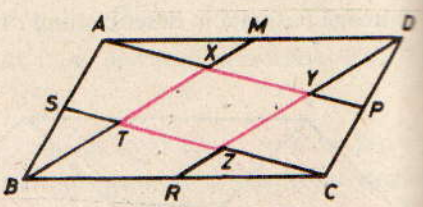


Fig. 169

47. Patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram şi S, R, P, M mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Segmentele $[AP]$, $[BM]$, $[CS]$, $[DR]$ se intersectează, ca în figura 169, în punctele X, Y, Z, T.

a) Este $XYZT$ un paralelogram?

b) Care este raportul dintre aria acestuia şi aria paralelogramului $ABCD$?

IV. POLIGOANE[1] REGULATE

§ 1. LINIE POLIGONALĂ, POLIGON

Definiţie. Fiind date n puncte distincte $M_1, M_2, M_3, ..., M_n (n \in \mathbf{N}, n \geq 3)$ se numeşte linie poligonală[2] o reuniune de segmente de forma $[M_1M_2] \cup [M_2M_3] \cup ... \cup [M_{n-1}M_n]$ care nu sunt unul în prelungirea celuilalt.

Punctele M_1, M_2, M_3,..., M_n se numesc *vârfurile liniei poligonale*, iar segmentele $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$, ..., $[M_{n-1}M_n]$ se numesc *laturile liniei poligonale*. Laturile $[M_1M_2]$ şi $[M_2M_3]$ sau $[M_2M_3]$ şi $[M_3M_4]$ (sau în general, $[M_{k-1}M_k]$ şi $[M_kM_{k+1}]$) se zice că sunt „laturi vecine", iar punctele M_1 şi M_n, se numesc „capetele liniei poligonale".

În figura 170 sunt prezentate trei linii poligonale cu „capetele" M şi S; A şi E; M_1 şi M_n.

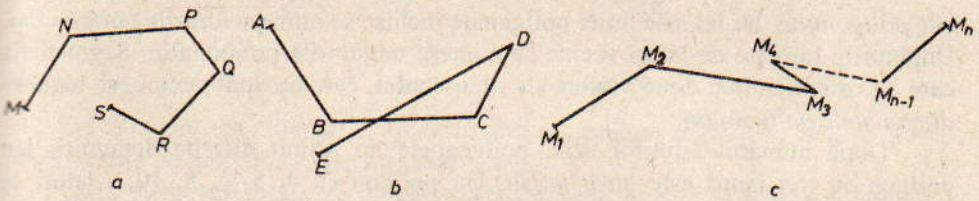


Fig. 170

Dacă cele două capete ale unei linii poligonale coincid, linia poligonală se numeşte *închisă*, ca – de exemplu – cele din figura 171.

Definiţie. Dacă într-o linie poligonală închisă numai laturile vecine au câte un punct comun şi oricare două laturi vecine nu sunt una în prelungirea celeilalte, atunci linia poligonală închisă se numeşte poligon.

În figura 171 sunt prezentate trei poligoane (desenele *a*, *c*, *e*). Linia poligonală *MNOPQRS*, din figura 171, *b*, nu este un poligon, deoarece laturile vecine $[NO]$ şi $[OP]$ sunt una în prelungirea celeilalte. (Putem vorbi însă de poligonul *MNPQRS*, în care punctul O nu este vârf, ci aparţine laturii $[NP]$. De asemenea, linia poligonală *ABCDEGF*, din figura 171, *d*, nu este un poligon, deoarece laturile $[AF]$ şi $[EG]$,

[1] Cuvântul *„poligon"* este format din două cuvinte provenite din limba greacă: *polys* = numeros şi *gonia* = unghi.

[2] Linia poligonală mai este cunoscută şi sub denumirea de „linie frântă".

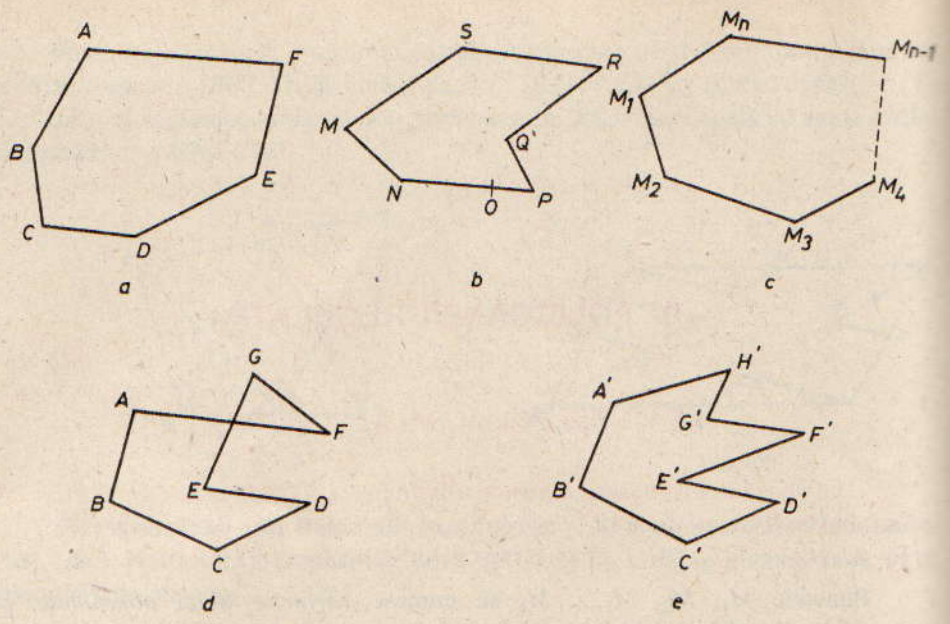


Fig. 171

care nu sunt laturi vecine, au totuși un punct comun. (Un poligon nu se autointersectează.) Cele 7 puncte din figura 171, *d* luate (considerate) în ordinea *ABCDEFG* constituie un poligon.

Vârfurile liniei poligonale închise care determină poligonul se numesc *vârfurile poligonului,* iar laturile liniei poligonale închise se numesc *laturile poligonului.* Unghiurile formate de laturi vecine se numesc unghiurile poligonului. Segmentele care au ca extremități două vârfuri ale poligonului, care nu sunt vecine, se numesc *diagonalele poligonului.*

După numărul laturilor sale, poligoanele au primit diferite denumiri. Un poligon cu trei laturi este un *triunghi.* Un poligon cu 4, 5, 6, 8, 10,... laturi se numește *patrulater, pentagon, exagon, octogon, decagon*[1] etc.

Suma lungimilor tuturor laturilor poligonului este *perimetrul poligonului.*

Definiție. **Un poligon se numește *poligon convex* dacă oricare ar fi o latură a sa, toate vârfurile nesituate pe latura considerată se află de aceeași parte a dreptei în care este inclusă latura respectivă** (în același semiplan determinat de dreapta în care este inclusă latura respectivă). Segmentul care „unește" două puncte ale unui poligon convex n-are nici un punct situat în exteriorul poligonului.

În figura 171, *a* și *c*, poligoanele *ABCDEF* și $M_1M_2M_3...M_n$ sunt poligoane convexe. Poligoanele *MNPQRS* și *A'B'C'D'E'F'G'H'* din figura 171, *b* și *e* sunt *poligoane neconvexe* sau *poligoane concave.*

Teoremă. **Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu *n* laturi este $(n-2)\cdot 180°$.**

[1] Denumirile poligoanelor: *pentagon, exagon, octogon, decagon* sunt cuvinte compuse, provenite din limba greacă, formate dintr-un numeral: *pente* = cinci, *hexa* = șase, *okto* = opt, *deka* = zece și substantivul *gonia* = unghi.

Demonstrația. Fie poligonul $A_1A_2A_3...A_n$, în care figurăm toate diagonalele ce „pornesc" – de exemplu – din vârful A_1 (fig. 172). Prin „ducerea" acestor diagonale, poligonul a fost „descompus" în $n-2$ triunghiuri, toate având un vârf în punctul A_1 (triunghiurile $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$,..., $A_1A_{n-1}A_n$).

Vom scrie că, în fiecare din cele $n-2$ triunghiuri, suma măsurilor unghiurilor lui este de câte 180°:

$$m(\sphericalangle A_2A_1A_3) + m(\sphericalangle A_1A_2A_3) + m(\sphericalangle A_2A_3A_1) = 180°;$$

$$m(\sphericalangle A_3A_1A_4) + m(\sphericalangle A_1A_3A_4) + m(\sphericalangle A_3A_4A_1) = 180°;$$

$$m(\sphericalangle A_4A_1A_5) + m(\sphericalangle A_1A_4A_5) + m(\sphericalangle A_4A_5A_1) = 180°;$$

.....

$$m(\sphericalangle A_{n-1}A_1A_n) + m(\sphericalangle A_1A_{n-1}A_n) + m(\sphericalangle A_{n-1}A_nA_1) = 180°$$

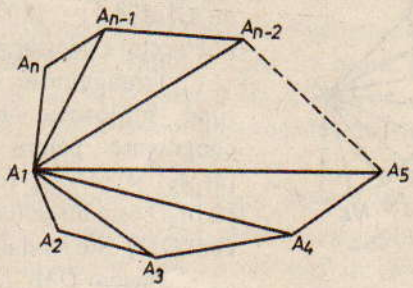


Fig. 172

Adunând, membru cu membru, aceste $n-2$ egalități, obținem:

$$m(\sphericalangle A_2A_1A_n) + m(\sphericalangle A_1A_2A_3) + m(A_2A_3A_4) + m(\sphericalangle A_3A_4A_5) + ... + m(\sphericalangle A_{n-2}A_{n-1}A_n) + m(\sphericalangle A_{n-1}A_nA_1) = (n-2)\cdot 180°,$$

și teorema a fost demonstrată!

§ 2. POLIGOANE REGULATE

Definiție. Se numește poligon regulat un poligon convex cu toate laturile sale congruente și toate unghiurile sale congruente.

De exemplu, un triunghi echilateral este un poligon regulat cu trei laturi, iar un pătrat este un poligon regulat cu patru laturi.

Dacă, printr-un procedeu oarecare, am împărțit un cerc în n arce congruente ($n \geq 3$) și ducem coardele care le subîntind pe fiecare din ele, atunci, unind punctele de diviziune succesive, obținem un poligon regulat.

Laturile acestui poligon sunt congruente deoarece subîntind arce de cerc de aceeași măsură: $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, iar unghiurile poligonului sunt, de asemenea, congruente deoarece sunt unghiuri înscrise în cerc și cuprind între laturile lor arce de măsuri egale cu $\left[\frac{360}{n}\cdot(n-2)\right]^\circ$. În figura 173 este prezentat un poligon regulat cu 9 laturi (nonagon).

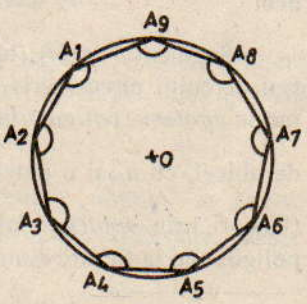


Fig. 173

Am pornit, în studiul poligoanelor regulate, prin a constata că astfel de poligoane există.

Să demonstrăm acum următoarea:

Teoremă. **Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc.**

Demonstrația. Din ipoteza că poligonul este regulat, știm că:

$[A_1A_2] \equiv [A_2A_3] \equiv [A_3A_4] \equiv ... \equiv [A_nA_1]$ și $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle A_3 \equiv ... \equiv \sphericalangle A_n$.

Ducem mediatoarele laturilor $[A_1A_2]$ și $[A_2A_3]$ (vezi figurile 173 și 174 și notațiile de acolo). Mediatoarele laturilor $[A_1A_2]$ și $[A_2A_3]$ sunt concurente. (Căci dacă nu s-ar intersecta, ar însemna că sunt paralele și deci că $m(\sphericalangle A_1A_2A_3) = 180°$, ceea ce este absurd.) Fie O punctul de intersecție a acestor mediatoare.

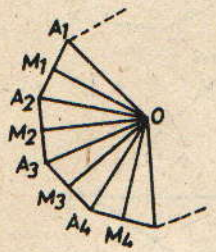


Fig. 174

Triunghiurile dreptunghice OM_1A_2 și OM_2A_2 (M_1 și M_2 fiind mijloacele laturilor $[A_1A_2]$, respectiv $[A_2A_3]$) sunt congruente pentru că $[OA_2]$ este ipotenuză comună și $[M_1A_2] \equiv [M_2A_2]$ (ca jumătăți de laturi congruente). Rezultă că $[A_2O$ este bisectoarea unghiului $A_1A_2A_3$ ($\sphericalangle A_1A_2O \equiv \sphericalangle A_1A_2O$) și cum OM_2 este mediatoarea segmentului $[A_2A_3]$, $[OA_2] \equiv [OA_3]$.

Ducem $OM_3 \perp A_3A_4$. Triunghiurile dreptunghice OM_2A_3 și OM_3A_3 sunt congruente pentru că $[OA_3]$ este ipotenuză comună și unghiul M_2A_3O este jumătate din unghiul poligonului, deci congruent cu unghiul M_3A_3O. Rezultă că și $[M_2A_3] \equiv [A_3M_3]$, deci M_3 este mijlocul laturii $[A_3A_4]$ și OM_3 mediatoarea lui, deci $[OA_3] \equiv [OA_4]$.

La fel se arată că $[OA_4] \equiv [OA_5]$ etc. Deci, toate punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_n sunt egal depărtate de O. Teorema este demonstrată. Acest punct O se numește *centrul poligonului regulat.*

§ 3. LATURA ȘI APOTEMA[1] UNUI POLIGON REGULAT ÎNSCRIS ÎN CERC

Pentru a exprima lungimea laturii unui poligon regulat cu n laturi în funcție de raza cercului circumscris lui, procedăm astfel:

Notăm latura poligonului regulat cu n laturi cu l_n. Știind că un unghi la centru care corespunde unei laturi a poligonului regulat cu n laturi are măsura de $\frac{360°}{n}$ și cunoscând raza R a cercului circumscris poligonului, putem calcula lungimea segmentului $[AM]$, unde M este mijlocul laturii $[AA']$ (fig. 175): $AM = R \sin \frac{180°}{n}$ și deci $l_n = 2R \sin \frac{180°}{n}$.

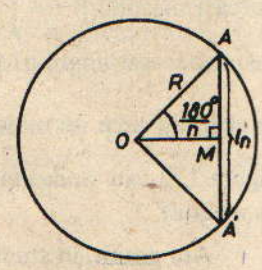


Fig. 175

Segmentul $[OM]$ (luat pe perpendiculara din centrul cercului circumscris pe latura poligonului) se numește *apotema poligonului regulat.* Apotema se notează de obicei, cu a_n și o putem exprima: $a_n = R \cos \frac{180°}{n}$.

(Uneori prin *apotemă* înțelegem distanța de la centrul poligonului la fiecare dintre laturile lui.)

[1] Cuvântul „*apotemă*" vine din limba greacă: *apotithenai* = a coborî.

Un segment ale cărui extremităţi sunt două vârfuri neconsecutive ale poligonului se numeşte o *diagonală a poligonului regulat.*

Dacă lucrurile par simple presupunând deja făcută împărţirea unui cerc în arce congruente, există totuşi anumite dificultăţi de construcţie. De pildă s-a demonstrat că împărţirea unui cerc în 7 arce congruente nu se poate face cu rigla şi compasul (această demonstraţie ţine de fapt de algebră, şi nu de geometrie). Fiţi atenţi! Nu am afirmat că nu s-a făcut până în prezent. Am afirmat că este dovedită imposibilitatea acestei operaţii. Construcţiile pe care le găsiţi prin anumite cărţi de desen sunt aproximative, ţinând seama şi de gradul de imperfecţiune a obiectelor cu care desenăm (grosimea minei creionului de pildă). Ele nu constituie procedee exacte, ci numai utile.

Constatăm că unghiul la centru corespunzător laturii unui exagon regulat înscris în cerc este de 60° (fig. 176). De aici rezultă un procedeu simplu de construcţie a exagonului regulat. Toate triunghiurile care au un vârf în centrul exagonului şi ca latură opusă acestuia, laturile exagonului, sunt triunghiuri echilaterale. Deci latura exagonului regulat înscris în cerc măsoară cât raza cercului: $l_6 = R$.

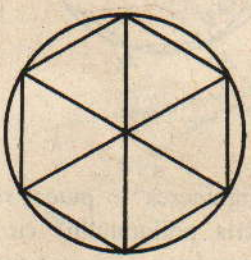


Fig. 176

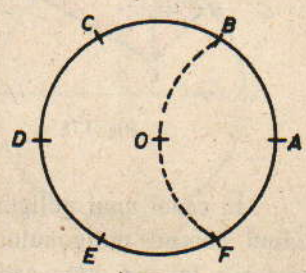


Fig. 177

Deci, pentru a înscrie un exagon regulat într-un cerc, procedăm astfel: împărţim cercul în 6 arce congruente, luând un punct A pe cerc drept centru şi, cu o „deschidere" a compasului cât R, trasăm un arc de cerc care intersectează cercul dat în B şi F (fig. 177). Mutăm apoi succesiv centrul cercului şi obţinem şi celelalte puncte de diviziune, vârfurile exagonului căutat. Observăm că este suficient să găsim cu compasul numai trei puncte consecutive A, B, C, şi pe celelalte le aflăm ducând diametrele cu aceste extremităţi. Apotema exagonului este: $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Dacă unim din două în două vârfurile unui exagon, de pildă A, C, E, obţinem un triunghi echilateral. Calculând lungimile laturii şi apotemei, cu ajutorul formulelor stabilite, găsim: $l_3 = R\sqrt{3}$ şi $a_3 = \frac{R}{2}$.

În cazul pătratului (poligon regulat cu patru laturi), unghiul la centru corespunzător unei laturi are măsura de 90°. Aplicând formulele cunoscute, găsim: $l_4 = R\sqrt{2}$ şi $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

§ 4. ARIA UNUI POLIGON

În general, aria unui poligon se defineşte ca suma ariilor unor triunghiuri în care poligonul „se descompune". Este vorba de nişte triunghiuri cu interioare disjuncte şi a căror reuniune este tocmai poligonul respectiv.

În figura 178, poligonul $ABCDEF$ a fost „descompus" în patru triunghiuri (ABC, ACD, ADE şi AEF) prin ducerea diagonalelor din vârful A, în vederea punerii în evidenţă (exprimării) ariei sale. Avem:

$$S_{ABCDEF} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE} + S_{AEF}.$$

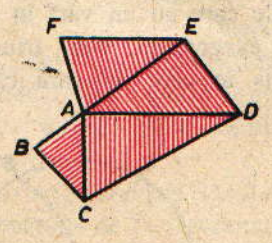


Fig. 178

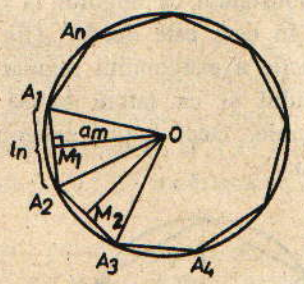


Fig. 179

În cazul unui poligon regulat cu n laturi „descompunerea" o putem realiza unind centrul poligonului (centrul cercului circumscris poligonului) cu toate vârfurile lui. Se obţin astfel n triunghiuri isoscele congruente a căror bază este latura poligonului, iar înălţimea este apotema poligonului (fig. 179). Aria poligonului este suma ariilor celor n triunghiuri: $S_n = \frac{l_n \cdot a_n}{2} \cdot n$. Dacă notăm cu P perimetrul poligonului ($P = nl_n$), atunci aria poligonului poate fi scrisă $S_n = \frac{P \cdot a_n}{2}$ (semiprodusul dintre perimetru şi apotema poligonului) sau $S_n = nR^2 \sin\frac{180^\circ}{n} \cos\frac{180^\circ}{n}$ (unde R este raza cercului circumscris poligonului şi n numărul de laturi).

Pentru ariile unui triunghi echilateral, pătrat şi exagon regulat găsim:

$$S_3 = 3R^2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 3R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4};$$

$$S_4 = 4R^2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 4R^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2R^2;$$

$$S_6 = 6R^2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 6R^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

O problemă cu enunț deosebit. Să punem mai întâi problema construirii cu rigla și compasul a unui segment de lungime $\sqrt{n}$, unde n poate fi orice număr natural.

Știm să construim pe $\sqrt{2}$ cunoscând segmentul unitate (fig. 180).

„Spirala"[1] lui Arhimede[2]. Pe segmentul $AB = 1$ ducem perpendiculara $BB_1 = 1$, rezultă că $AB_1 = \sqrt{2}$. Pe segmentul $[AB_1]$ ducem perpendiculara $B_1B_2 = 1$ și continuăm cu același procedeu: $B_2B_3 \perp AB_2$ ($B_2B_3 = 1$) etc. Din teorema lui Pitagora rezultă: $AB_2 = \sqrt{3}$, $AB_3 = \sqrt{4} = 2$, $AB_4 = \sqrt{5}$ etc. Presupunând construit segmentul $AB_{n-2} = \sqrt{n-1}$, construim $AB_{n-1} = \sqrt{n}$. Procedeul duce la construirea lui $\sqrt{n}$ prin „recurență", adică folosindu-ne de construcția prealabilă a segmentelor $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-1}$.

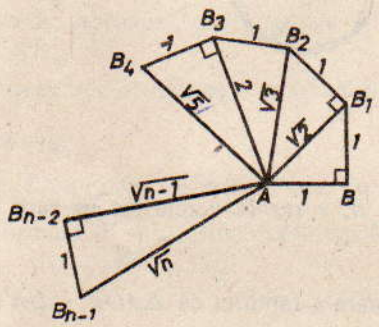


Fig. 180

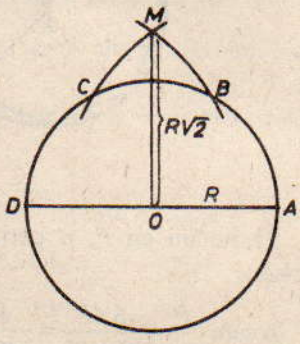


Fig. 181

Problemă rezolvată*). **Dându-se un cerc de centru O cunoscut, să se găsească numai cu compasul vârfurile unui pătrat înscris în el.**

Dacă reușim (raza R fiind dată) să putem „cuprinde" în compas un segment de $R\sqrt{2}$, am reușit construcția (fig. 181). Ca în orice problemă de construcție, să considerăm problema rezolvată: pornind dintr-un punct arbitrar A, considerăm vârfurile consecutive ale exagonului regulat înscris în cerc B, C, D. Deci segmentul $AC = R\sqrt{3}$. Cu o deschidere de compas cât AC și cu centrul în A și apoi în D, trasăm două arce de cerc care se intersectează în M. Considerând triunghiul dreptunghic AMO, segmentul $OM = R\sqrt{2}$. Deci, construim mai întâi vârfurile trapezului isoscel $ABCD$, apoi cu „deschiderea" AC și cu centrele în A și D trasăm arcele de cerc care se intersectează în M; „prindem" apoi în compas distanța OM și o „purtăm" pe cerc de trei ori. Obținem astfel vârfurile pătratului căutat.

---

[1] Cuvântul *„spirală"* vine din limba greacă: *spira* = încolăcire, înfășurare.

[2] Arhimede (sec. 3 î.e.n.) matematician și fizician grec, unul dintre cei mai mari savanți ai antichității.

*) Problemă propusă la etapa pe municipiul București a Olimpiadei din 1978.

§ 5. LUNGIMEA ŞI ARIA CERCULUI

Calcularea şi chiar definirea lungimii unei curbe şi a ariei „mărginite" de o curbă închisă sunt probleme care, în unele detalii ale lor, necesită cunoştinţe pe care elevii din clasa a VII-a nu le au încă. De aceea, noi nu vom demonstra aici formulele pentru aflarea lungimii şi a ariei cercului, ci doar vom arăta un mod intuitiv de a ajunge la ele.

Să considerăm două poligoane regulate convexe cu acelaşi număr de laturi, de exemplu două octogoane, înscrise fiecare în câte un cerc (fig. 182).

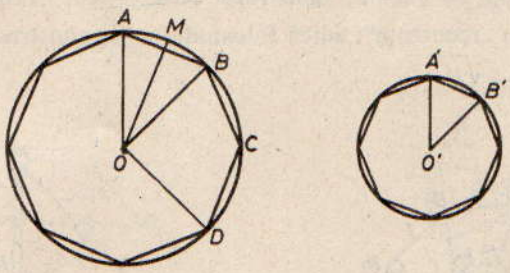


Fig. 182

Să notăm cu P, p perimetrele lor, cu R, r razele cercurilor în care sunt înscrise.

Avem $\frac{P}{p} = \frac{8AB}{8A'B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{R}{r}$, ca urmare a faptului că $\triangle AOB \sim \triangle A'O'B'$ (cazul 2), de exemplu: $\frac{OA}{O'A'} = \frac{OB}{O'B'}$ $\text{m}(\sphericalangle AOB) = \frac{360^\circ}{8} = \text{m}(\sphericalangle A'O'B')$.

Dacă am considera, în loc de octogoane, poligoane cu un număr foarte mare de laturi înscrise în aceleaşi cercuri, relaţia $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$ ar rămâne adevărată, iar P ar fi „aproape" de lungimea L a cercului de rază R şi p ar fi „aproape" de lungimea l a cercului de rază r.

Obţinem, schimbând şi mezii între ei, $\frac{L}{R} = \frac{l}{r}$, adică: raportul dintre lungimea unui cerc şi raza sa este acelaşi pentru toate cercurile.

Acest raport constant se notează cu 2π; valoarea aproximativă a lui π[1] este 3,14159... (π este un număr iraţional); nici el nu se „măsoară" ci se determină, de exemplu, prin formula, ce conţine o sumă infinită, şi pe care o veţi învăţa în clasa a XII-a:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\right).$$

[1] Aceasta este litera grecească π (se citeşte „pi").

Deci:

Lungimea L a unui cerc de rază R este egală cu 2π înmulțit cu R, adică $L = 2\pi R$.

Să revenim la figura 182 și să notăm cu Q lungimea liniei ABD formată din trei laturi ale octogonului. Avem $\frac{Q}{P} = \frac{3AB}{8AB} = \frac{3}{8} = \frac{m(\sphericalangle AOD)}{360^\circ} = \frac{m(\overset{\frown}{ABD})}{360^\circ}$, relație ce rămâne adevărată chiar dacă arcul ABD ar fi mare (prin $m(\overset{\frown}{ABD})$ înțelegem măsura, în grade, a arcului ABD).

Să păstrăm punctele A și D fixe și să considerăm, în loc de un octogon, un poligon regulat cu un număr mare de laturi, înscris în același cerc, având A și D printre vârfurile sale (pentru aceasta numărul laturilor sale poate fi ales ca un multiplu de 8). Relația $\frac{Q}{P} = \frac{m(\overset{\frown}{ABD})}{360^\circ}$ va rămâne adevărată și pentru acest poligon; Q va fi „aproape" de lungimea M a arcului ABD, iar P va fi, ca mai înainte, „aproape" de lungimea L a cercului de rază R. Obținem $\frac{M}{L} = \frac{m(\overset{\frown}{ABC})}{360^\circ}$, de unde deducem:

Lungimea unui arc de cerc cu măsura de u° dintr-un cerc de rază R este dată de formula $\frac{u\pi R}{180}$ (u fiind exprimată în grade) – figura 183.

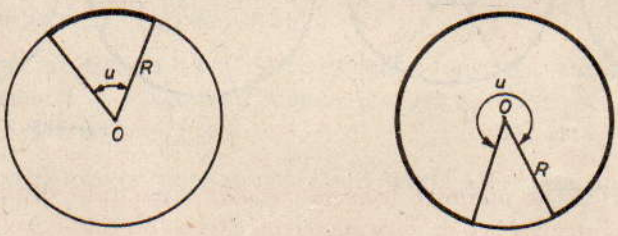


Fig. 183

Observație. Atragem atenția asupra deosebirii care există între *măsura* unui arc de cerc, care este exprimată în grade de arc și *lungimea* unui arc de cerc, care este exprimată în acea unitate de lungime în care a fost exprimată și raza cercului.

Am văzut la pagina 112 că aria unui poligon regulat cu n laturi este dată de formula $S_n = \frac{P \cdot a_n}{2}$.

Dacă vom considera un poligon regulat cu număr foarte mare de laturi, înscris în cercul de rază R, atunci perimetrul său va fi „aproape" de lungimea cercului, iar apotema sa „aproape" de raza cercului. Ajungem astfel la concluzia că aria unui

cerc este egală cu jumătate din produsul dintre lungimea și raza sa, adică $\frac{2\pi R \cdot R}{2}$.

Deci:

Aria unui cerc, de rază R, este egală cu πR^2.

Definiție. **Se numește** sector[1] circular **o porțiune din interiorul unui cerc cuprinsă între două raze ale sale.**

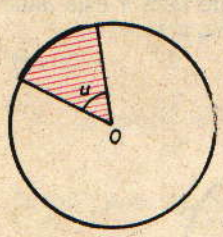
Să considerăm, în figura 182, aria poligonului $ABCDO$. Ea este egală cu de trei ori aria triunghiului AOB, deci cu $\frac{3}{8}$ din aria octogonului regulat; raportul $\frac{3}{8}$ este tot una cu raportul dintre măsura arcului ABD și 360°. Ținând punctele A și D fixe și mărind mult numărul laturilor poligonului regulat (acest număr rămânând un multiplu de 8), aria poligonului considerat $AB...DO$ va fi „aproape" de aria mărginită de razele $[OA]$, $[OD]$ și arcul ABD.

Ajungem astfel la a spune că:

Aria unui sector circular al unui cerc este egală cu jumătate din produsul razei lui cu lungimea arcului ce-i corespunde, sau:

Aria unui sector circular al unui cerc de rază R ce corespunde unui arc cu măsura de $u°$ este dată de formula $S = \frac{\pi u° R^2}{360°}$ (u fiind exprimată în grade).

În figura 184 sunt marcate ariile unor sectoare circulare.



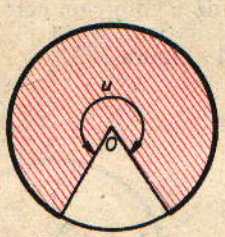
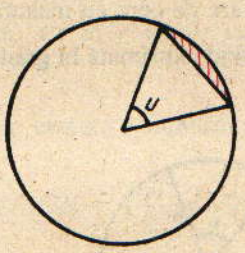


Fig. 184



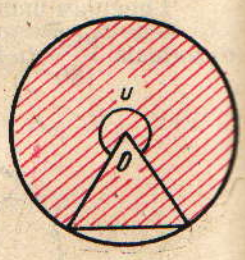


Fig. 185

Definiție. **Se numește** *segment circular* **o porțiune din interiorul unui cerc cuprinsă între un arc de cerc și coarda care subîntinde acel arc de cerc.** În figura 185 este prezentat un segment circular.

Aria unui segment circular se deduce scăzând din aria sectorului circular căruia îi aparține, aria triunghiului isoscel cu vârful în centrul cercului și care are ca bază coarda care delimitează segmentul circular. Forma la care se ajunge este:

$$S = R^2 \cdot \left(\frac{\pi u°}{360°} - \frac{\sin u°}{2} \right).$$

Observație. Cuvintele „multe", „aproape", nu au sens matematic. Ele sugerează numai un raționament, mai rafinat, pe care nu l-am precizat aici.

[1] Cuvântul „*sector*" vine din limba latină: *sector-oris* = care separă.

7. EXERCIȚII ȘI PROBLEME

A. POLIGOANE REGULATE

1. Să se afle măsura unui unghi al unui: a) pentagon regulat; b) exagon regulat; c) octogon regulat; d) nonagon regulat; e) decagon regulat.

2. Să se afle măsura unui unghi al unui poligon regulat cu: a) 12 laturi; b) 15 laturi; c) 16 laturi; d) 18 laturi; e) 20 de laturi.

3. Există un poligon regulat ale cărui unghiuri să aibă măsura de: a) 165°; b) 168°; c) 165°36′; d) 166°40′; e) 168°45′? Câte laturi are un astfel de poligon regulat?

4. Să se afle măsura aproximativă a unui unghi al unui poligon regulat cu: a) 7 laturi; b) 11 laturi; c) 13 laturi; d) 14 laturi; e) 17 laturi.

5. Să se afle lungimile laturilor unor poligoane regulate cu 5, 15 și 20 de laturi, înscrise în cercul cu raza de 125 cm.

6. Să se afle lungimile laturilor unor poligoane regulate cu 9 și 18 laturi, înscrise în cercul cu raza de 250 cm.

7. Să se afle lungimile laturilor unor poligoane regulate cu 10, 12 și 30 de laturi, înscrise în cercul cu raza de 500 cm.

8. Să se afle lungimile apotemelor unor poligoane regulate cu 12, 15 și 20 de laturi, înscrise în cercul cu raza de 500 cm.

9. Să se afle lungimile apotemelor unor poligoane regulate cu 9, 18 și 30 de laturi, înscrise în cercul cu raza de 200 cm.

10. Un cerc are raza de 4 cm. Să se calculeze lungimea laturilor triunghiului echilateral, pătratului și exagonului regulat înscrise în acest cerc. Calculați, de asemenea, și ariile acestor poligoane.

11. Aria unui exagon regulat este $15\sqrt{3}$ cm^2. Aflați lungimea laturii și a apotemei lui.

12. Aria unui triunghi echilateral este $8\sqrt{3}$ cm^2. Aflați raza cercului circumscris lui, precum și lungimea laturii și apotemei lui.

13. Latura unui pătrat este 8 cm. Aflați apotema pătratului și raza cercului circumscris lui.

14. Un exagon regulat $ABCDEF$ este înscris într-un cerc cu raza R. Să se calculeze, în funcție de R, aria patrulaterului $ABDE$.

15. În exagonul regulat $ABCDEF$, punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor $[FA]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[EF]$. Să se calculeze, în funcție de raza R a cercului circumscris, aria patrulaterului $MNPQ$.

16. Cunoscând lungimea laturii unui poligon regulat cu n laturi (l_n) și raza cercului circumscris lui (R), calculați lungimea apotemei acestui poligon.

17. Poligonul $ABCDEF$ este un exagon regulat de latură 1. În interiorul său se construiesc pătratele $ABGH$ și $AIJF$ (fig. 186). Notăm cu K intersecția segmentelor $[GH]$ și $[IJ]$. Să se calculeze aria patrulaterului $AIKH$.

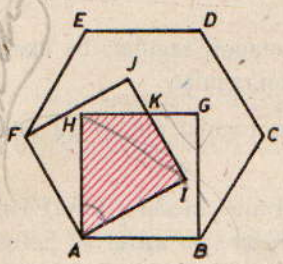


Fig. 186

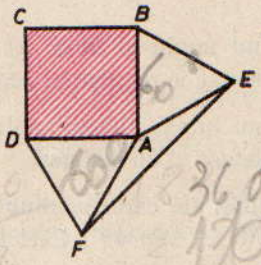


Fig. 187

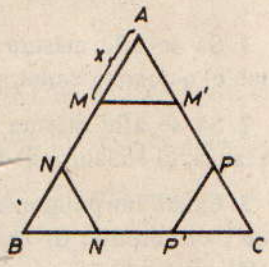


Fig. 188

18. Pe laturile $[AB]$ și $[AD]$ ale pătratului $ABCD$ „construim" în afară triunghiurile ABE și ADF (fig. 187). Să se calculeze aria pentagonului $CDFEB$ în funcție de R, raza cercului circumscris pătratului $ABCD$.

19. În triunghiul echilateral ABC de latură a (fig. 188) se iau punctele M și N' pe $[AB]$, N și P' pe $[BC]$, P și M' pe $[CA]$. Determinați x, lungimea segmentului $[AM]$, în funcție de a, astfel încât exagonul $MN'NP'PM'$ să fie regulat.

20. Folosind pătratul înscris în cercul de rază R, calculați lungimea laturii octogonului convex înscris în cerc în funcție de R.

21. Pătratului din figura 189 i se „taie" colțurile în așa fel încât să „rămână" un octogon regulat. Să se calculeze lungimea laturii x a octogonului în funcție de lungimea laturii a a pătratului.

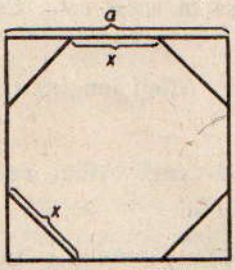


Fig. 189

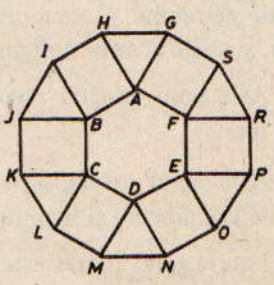


Fig. 190

22. Pe laturile exagonului regulat $ABCDEF$ se construiesc în afară pătrate, iar vârfurile exagonului, cu două laturi ale acestor pătrate ca laturi, triunghiurile echilaterale de tipul AGH (fig. 190). Să se precizeze ce fel de poligon este $GHIJKLMNOPRS$.

23. Găsiți numărul de diagonale ale unui octogon regulat convex. Era necesar să precizăm că poligonul este regulat?

24. Într-un cerc de centru O înscriem un poligon regulat cu 10 laturi (decagon regulat). Fie $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ trei laturi ale sale consecutive. Diagonala $[AD]$ se intersectează cu $[OB]$ în M. Notăm $AB = BC = CD = l$ și $OA = OB = R$; demonstrați că: a) $MB = R - l$; *b)* $OM = AM = l$; c) $l^2 + Rl - R^2 = 0$; d) verificați relația $l^2 + Rl - R^2 = \left(l + \frac{R+R\sqrt{5}}{2}\right)\left(l + \frac{R-R\sqrt{5}}{2}\right)$ și găsiți de aici lungimea laturii decagonului regulat, în funcție de raza cercului circumscris lui.

25. Să se găsească lungimile laturilor triunghiului echilateral, pătratului și exagonului regulat (L_3, L_4, L_6,), circumscrise cercului de rază R.

26. În funcție de R (raza cercului circumscris) și de l_n, (latura poligonului regulat convex cu n laturi), să se calculeze l_{2n} (latura poligonului regulat convex cu $2n$ laturi).

B. LUNGIMEA ȘI ARIA CERCULUI

27. Un cerc are raza de 3 cm. Să i se afle lungimea și aria.

28. Aria unui cerc este de 144π cm^2. Să i se afle raza.

29. Raportul dintre aria unui cerc și lungimea sa este 6. Să i se afle raza.

30. Să se afle lungimea unui arc de cerc de 60° dintr-un cerc cu raza de 3 cm.

31. Aria unui cerc este de 18 cm^2. Să se afle aria unui sector din acest cerc ce corespunde unui arc cu măsura de 36°.

32. Să se afle aria unui sector circular ce corespunde unui arc cu măsura de 45°, dintr-un cerc cu raza de 36 mm.

33. Aflați aria cuprinsă între un arc de cerc cu măsura de 60° și coarda care subîntinde acel arc în funcție de raza R.

34. Aflați, de asemenea, ca la **33**, aria segmentului circular delimitat de un arc de cerc de 240°.

35. Calculați aria cercului înscris în triunghiul echilateral de latură $3\sqrt{3}$.

36. Într-un exagon regulat, cu lungimea laturii de 6 cm, se înscrie un cerc și în cerc un triunghi echilateral. Aflați aria acestui triunghi.

37. Două cercuri tangente exterioare au razele de 9 cm și 3 cm. Aflați aria cuprinsă între cele două cercuri și una din tangentele lor exterioare.

38. În pătratul $ABCD$ cu lungimea de 2,2 cm, considerăm sectorul circular cu centrul A și raza AB (fig. 191). Să se afle cât este aria din porțiunea haşurată. (Adică diferența dintre aria interiorului pătratului și a sectorului circular.)

39. În sectorul circular OAB delimitat de un arc de cerc cu măsura de 90° și raza $OA = 2{,}8$ cm, se înscrie un pătrat (fig. 192). Să se găsească aria porțiunii haşurate, adică diferența dintre aria sectorului circular și aria pătratului.

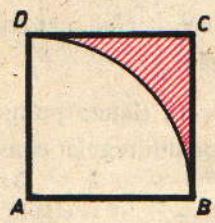


Fig. 191

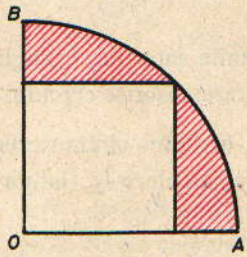


Fig. 192

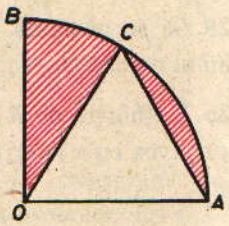


Fig. 193

40. Unghiul la centru AOB are măsura de 90° și raza $OA = 4$. Se îndepărtează din sectorul corespunzător un triunghi echilateral de latură OA (fig. 193). Să se calculeze aria porțiunii rămase din sector (cea haşurată).

41. Dându-se un pătrat $ABCD$ cu latura de 5, calculați aria intersecției sectoarelor circulare cu vârfurile în B și D care au raza cât latura pătratului (fig. 194).

42. În pătratul $ABCD$ cu latura de 30 mm, ducem arcele de cerc cu centrele în vârfurile pătratului și raza cât latura pătratului (fig. 195). Ele se intersectează două câte două în M, N, P, Q. Calculați aria pătratului $MNPQ$.

43. Priviți figura 196. (Triunghiul ABC este echilateral de latură 1.) Precizați cum s-a desenat spirala. Calculați aria haşurată.

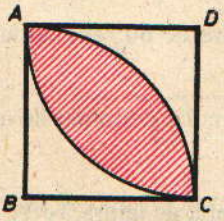


Fig. 194

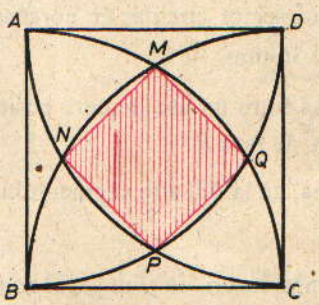


Fig. 195

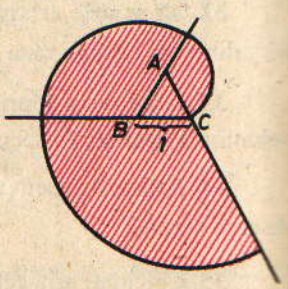


Fig. 196

44. Pe cele trei laturi ale unui triunghi dreptunghic ca diametre se descriu cercuri, ca în figura 197. Arătați că aria haşurată este egală cu aria triunghiului. (Problema este cunoscută sub denumirea de „Lunulele lui Hipocrate".)

45. Aflaţi perimetrul figurii 198, dacă raza cercului este 6 şi distanţa de la centru la vârf este de 12.

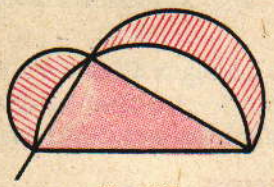


Fig. 197

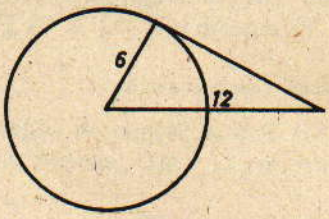


Fig. 198

46. Care este lungimea curelei de transmisie din figura 199 (cu dimensiunile precizate acolo).

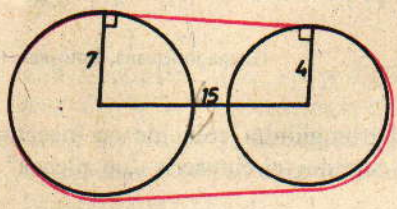


Fig. 199

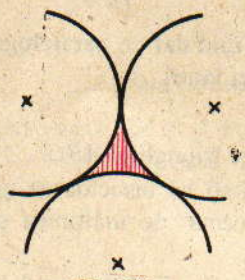


Fig. 200

47. Calculaţi aria porţiunii haşurate din figura 200 precum şi perimetrul ei, razele celor trei cercuri fiind toate egale cu 2.

48. Calculaţi aria porţiunii haşurate din figura 201, ştiind că $ABCD$ este un pătrat de latură 6 şi că cele patru cercuri cu vârfurile în A, B, C, D au razele egale.

49. În figura 202 triunghiul ABC este echilateral şi se construiesc, în afara lui, pe laturi luate ca diametre, semicercuri. Un cerc este tangent la toate aceste semicercuri. Să se afle aria porţiunii haşurate în funcţie de a, latura triunghiului echilateral.

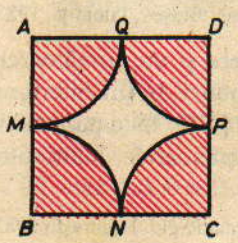


Fig. 201

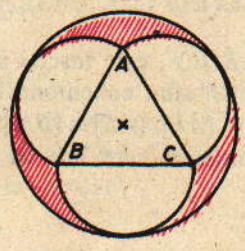


Fig. 202

Fig. 203

50. Pe laturile unui triunghi echilateral luate drept coarde şi tangente la respectiv celelalte două laturi, se construiesc arce de cerc, ca în figura 203. Să se calculeze aria porţiunii haşurate în funcţie de a, latura triunghiului.

51. Dintr-un triunghi dreptunghic cu catetele b, c, se „decupează" cercul înscris. Se cere aria porţiunii rămase din triunghi.

PROBLEME PROPUSE LA CONCURSURILE DE MATEMATICĂ ALE ELEVILOR

C.1. Fiind dat un paralelogram, construiţi, numai cu ajutorul riglei negradate, mijlocul unei laturi.

(Etapa judeţeană, Botoşani, 1987)

C.2 Fie triunghiul ABC.

a) Arătaţi că bisectoarea unui unghi al triunghiului coincide cu bisectoarea unghiului format de înălţimea şi diametrul cercului circumscris „ce pleacă" din acelaşi vârf.

b) Arătaţi că ortocentrul, mijlocul unei laturi şi extremitatea diametrului „ce pleacă" din vârful opus laturii respective, sunt trei puncte coliniare.

c) Fie H ortocentrul, şi O centrul cercului circumscris triunghiului. Arătaţi că: $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 12AO^2 - (AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

(Etapa judeţeană, Botoşani, 1987)

C.3. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, avem $AC = b$, $BC = 2b$. Se „duce" un cerc cu centrul în A şi raza $[AC]$, care intersectează ipotenuza $[BC]$ în D. Calculaţi:

a) lungimile segmentelor $[CD]$ şi $[DB]$;

b) raportul razelor cercurilor înscrise în triunghiurile ACD şi ADB.

(Etapa judeţeană, Braşov, Ialomiţa, 1987)

C.4. Exagonul convex $AEBDCF$, este înscris într-un cerc şi are următoarele proprietăţi: dreptele AD, CE şi BF sunt concurente într-un punct M (în interiorul triunghiului ABC), $[AE] \equiv [AM] \equiv [AF]$; $[BE] \equiv [BM]$; $[CM] \equiv [CF]$. Este punctul M centrul cercului înscris în triunghiul care are ca vârfuri picioarele înălţimilor triunghiului ABC?

(Etapa pe municipiu, Bucureşti, 1987)

C.5. Patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi de centru O, iar M aparţine laturii $[CD]$ astfel încât $AC^2 = 2 \cdot MC \cdot AB$. Analizaţi care din afirmaţiile următoare sunt adevărate:

a) $2 \cdot MC > CD$;

b) mijlocul segmentului $[MC]$ este centrul cercului circumscris triunghiului OMC.

(Etapa pe municipiu, Bucureşti, 1987)

C.6. Pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC se iau punctele E şi F astfel încât $[BE] \equiv [EF] \equiv [FC]$. Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC ştiind că dreapta AE „trece" prin mijlocul bisectoarei $[BB']$, $(B' \in [AC])$ şi dreapta AF „trece" prin mijlocul înălţimii $[CC']$, $(C' \in [AB])$.

(Etapa judeţeană, Buzău, 1987)

C.7. Pe laturile unghiului XOY se iau perechile de puncte $A, B \in (OX$ şi $C, D \in (OY$ astfel încât $OA = 4$ cm, $OB = 15$ cm, $OC = 5$ cm, $OD = 12$ cm. Arătaţi că patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil.

(Etapa judeţeană, Cluj, 1987)

C.8. În trapezul $ABCD$, baza mică $[CD]$ are aceeaşi lungime cu latura $[BC]$, iar diagonala $[BD]$ este perpendiculară pe latura $[AD]$. Fie O intersecţia diagonalelor şi P mijlocul lui $[BD]$. Arătaţi că:

a) $AB = 2 \cdot CD$;

b) $6 \cdot OP = BD$.

(Etapa judeţeană, Cluj, 1987)

C.9. Cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ se intersectează în A şi P, iar secanta BP, $(B \in \mathcal{C}_1(O_1, r_1))$ intersectează $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$ în C. Fie B', respectiv C' diametral opuse lui A în $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$, respectiv $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$. Arătaţi că:

a) punctele B', P, C' sunt coliniare;

b) $\sphericalangle O_1BA \equiv \sphericalangle O_2CA$;

c) $[AP$ este bisectoarea unghiului A în triunghiul ABC dacă şi numai dacă lungimile segmentelor $[BP]$, $[PC]$ sunt proporţionale cu O_1A şi O_2A.

(Etapa judeţeană, Constanţa, 1987)

C.10. Fie pătratul $ABCD$ şi O punctul de intersecţie a diagonalelor; M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB]$, $[OB]$, $[DC]$ şi $[DM]$; E intersecţia dreptelor NP şi AC.

a) Arătaţi că $[NE] \equiv [EP]$;

b) Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului NPQ;

c) Dacă PQ şi BD se intersectează în F, determinaţi raportul $\frac{QF}{FP}$.

d) Dacă QE şi BD se intersectează în L, arătaţi că $[LE] \equiv [LQ]$.

e) Arătaţi că triunghiurile AEP şi ANB sunt asemenea.

(Etapa judeţeană, Constanţa, 1987)

C.11. Fie $[AB]$ diametrul cercului $\mathcal{C}$. Punctele M şi N aparţin fiecare unuia dintre semicercurile determinate de diametrul AB astfel încât $AM \cap NB = \{C\}$ şi $BM \cap AN = \{D\}$. Demonstraţi că: a) $AB \perp CD$; b) Dacă P este mijlocul segmentului $[CD]$, atunci MP este tangentă la cercul $\mathcal{C}$.

(Etapa judeţeană, Dâmboviţa, 1987)

C.12. Prin punctul M situat în interiorul triunghiului ABC ducem paralele la laturile triunghiului: $A_1A_2 \parallel BC$, $B_1B_2 \parallel AC$ şi $C_1C_2 \parallel AB$, punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ fiind situate pe laturile triunghiului.

Să se arate că suma: $\frac{A_1A_2}{BC} + \frac{B_1B_2}{AC} + \frac{C_1C_2}{AB}$ nu depinde de alegerea punctului M.

(Etapa judeţeană, Dâmboviţa, 1987)

C.13. Într-un triunghi ABC, punctele A', B', C' sunt picioarele înălțimilor din A, B, C, iar D și E proiecțiile lui A' pe laturile $[AB]$, respectiv $[AC]$. Demonstrați că punctele C', B', E, D sunt conciclice dacă și numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

(Etapa județeană, Galați, 1987)

C.14. Într-un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, diagonalele sunt perpendiculare. Știind că lungimea razei cercului circumscris trapezului este de 5 cm, iar distanța de la centrul O al acestui cerc la punctul M de intersecție a diagonalelor este de $3\sqrt{2}$ cm, calculați perimetrul trapezului.

(Etapa județeană, Giurgiu, 1987)

C.15. Fie ABC un triunghi isoscel având $AB = AC = a$. Pe baza $[BC]$ se construiește un pătrat de latură BC care trece prin A, iar pe înălțimea $[AD]$ ca diametru se construiește un cerc care intersectează pe AB în M și AC în N. Calculați MN în funcție de a.

(Etapa județeană, Harghita, 1987)

C.16. În triunghiul ascuțitunghic ABC, punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$ respectiv $[BC]$, iar $[AA']$, $[BB']$ sunt înălțimi în triunghiul ABC. Demonstrați că triunghiurile $A'MN$, $B'MP$ și MNP sunt congruente.

(Etapa județeană, Hunedoara, 1987)

C.17. Un patrulater convex are trei laturi de lungime a. Două din laturile congruente sunt perpendiculare, iar celălalt unghi format de laturi congruente are măsura de 60°.

a) Aflați măsurile celorlalte unghiuri ale patrulaterului.

b) Aflați lungimile diagonalelor și a celei de a patra laturi a patrulaterului.

(Etapa județeană, Hunedoara, 1987)

C.18. Fie triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A. Fie M un punct oarecare pe (BC), iar P și Q proiecțiile ortogonale ale lui M pe (AB), respectiv pe (AC).

a) Arătați că suma $MP + MQ$ nu depinde de poziția lui M.

b) Punctul D fiind mijlocul lui $[BC]$ arătați că $[DP] \equiv [DQ]$ și că patrulaterul $APDQ$ este inscriptibil.

c) Precizați poziția lui M pentru care suma $DP + DQ$ este minimă, iar produsul $MP \cdot MQ$ este maxim.

(Etapa județeană, Ialomița, Suceava, 1987)

C.19. Fie A',B',C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC și fie D simetricul lui B' față de C'. Calculați lungimile laturilor și medianelor triunghiului $AA'D$ în funcție de lungimile laturilor și medianelor triunghiului ABC.

(Etapa județeană, Iași, 1987)

C.20. Fie ABC un triunghi, iar D și E două puncte pe latura $[BC]$ astfel ca $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$. Arătați că dacă $[BD] \equiv [EC]$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

(Etapa județeană, Iași, 1987)

C.21. Arătați că într-un patrulater inscriptibil două laturi consecutive sunt congruente dacă și numai dacă unul din unghiurile patrulaterului este congruent cu unghiul format de diagonale.

(Etapa județeană, Maramureș, 1987)

C.22. Fie AOB un sfert de cerc al cercului de centru O și rază R și semicercul descris pe $[OA]$ ca diametru. Calculați raza cercului tangent interior la sfertul de cerc, tangent exterior la semicerc și tangent la segmentul $[OB]$.

(Etapa județeană, Maramureș, 1987)

C.23. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, cu bazele $AD = 4$ și $BC = 9$ și cu $DC = 13$.

a) Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$, atunci triunghiul DMC este dreptunghic.

b) Fie O intersecția diagonalelor trapezului. Paralela prin O la baze intersectează segmentul $[AB]$ în E. Demonstrați că $[EO$ este bisectoarea unghiului DEC.

(Etapa județeană, Neamț, 1987)

C.24. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$, bisectoarea unghiului DCA intersectează diagonala $[BD]$ în P, iar bisectoarea unghiului ABD intersectează diagonala $[AC]$ în Q. Arătați că:

a) patrulaterul $PQBC$ este inscriptibil;

b) $PQ \parallel AD$.

(Etapa județeană, Olt, 1987)

C.25. Se consideră cercul O tangent la dreapta d în punctul T. O dreaptă paralelă la OT intersectează cercul și dreapta d în punctele A, B, respectiv C (B între C și A). Fie M punctul diametral opus lui B. Dreapta MT intersectează pe AB în N.

a) Să se arate că triunghiul MBN este isoscel și $TC = \frac{1}{2} \cdot AM$;

b) Notăm cu E mijlocul segmentului $[BN]$; să se arate că patrulaterul $AOTE$ este trapez isoscel.

(Etapa județeană, Prahova, 1987)

C.26. Se dă un patrulater inscriptibil $ABCD$ și se notează cu E punctul comun dreptelor AD și BC. Perpendicularele în C și D respectiv pe BC și DA se intersectează în I. Să se arate că dreapta EI este perpendiculară pe AB.

(Etapa județeană, Prahova, 1987)

C.27. Fie $ABCD$ un patrulater convex și fie M un punct al segmentului (AB). Construim $MN \parallel BD$, $(N \in (AD))$, $NP \parallel AC$, $(P \in (CD))$, $PQ \parallel BD$, $(Q \in (BC))$, $QM' \parallel AC$, $(M' \in (AB))$.

a) Demonstrați că M și M' coincid.

b) Dacă $AC = 3$, $BD = 4$ și $MNPQ$ este romb, calculați lungimile laturilor acestui romb.

(Etapa județeană, Sălaj, 1987)

C.28. În pătratul $ABCD$, fie O intersecția diagonalelor, iar E și F mijloacele segmentelor $[BO]$ și $[CD]$. Știind că $AB = a$, calculați lungimea segmentului $[EF]$.

(Etapa județeană, Sălaj, 1987)

C.29. Bazele trapezului $ABCD$ au lungimile $AB = 21$ cm și $CD = 7$ cm, iar laturile neparalele $AD = 15$ cm, $BC = 13$ cm.

a) Calculați lungimile diagonalelor.

b) Arătați că bisectoarea unghiului DAC este perpendiculară pe diagonala $[BD]$ a trapezului.

(Etapa județeană, Sibiu, 1987)

C.30. Fie a, b, c direct proporționale cu $t-1, t, t+1$, unde $t \geq 2$.

a) Demonstrați că a, b, c pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

b) Determinați pe t astfel încât triunghiul să fie dreptunghic.

(Etapa județeană, Teleorman, 1987)

C.31. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Arătați că, dacă există $M \in AD$ și $N \in BC$ cu proprietatea că $MN \parallel AB$ și dreapta MN intersectează diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ în P, respectiv Q, astfel încât $[MN] \equiv [NQ]$, atunci $ABCD$ este trapez.

Dacă $AB = 8$ cm, $NP = 6$ cm și $AP = 1{,}5$ cm, calculați AC.

(Etapa județeană, Timiș, 1987)

C.32. Arătați că dacă într-un triunghi cu laturile a, b, c există relația:

$$\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(1-\frac{c}{a}\right)=\frac{a^2b^2-b^4}{a^2+2ac+c^2}\cdot\left(1+\frac{c}{a}\right),$$

atunci triunghiul este isoscel sau dreptunghic.

(Etapa județeană, Timiș, 1987)

C.33. Fie pătratul $ABCD$ exterior pătratului $AEFG$, cu D și E de aceeași parte a dreptei determinate de centrele lor O și O' (O pe segmentul $[BD]$). Fie H intersecția segmentelor $[BE]$ și $[DG]$. Arătați că:

a) punctele C, H, F sunt coliniare;

b) dreptele AH și OO' sunt perpendiculare.

(Etapa județeană, Tulcea, 1987)

C.34. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $AB = 4$ cm și $AC = 5$ cm. Bisectoarea unghiului ACB intersectează segmentul $[AB]$ în D; înălțimea din D a triunghiului BCD intersectează pe BC în M, iar paralela prin M la AB intersectează pe AC în P. Calculați lungimile segmentelor $[AP]$ și $[PC]$.

(Etapa județeană, Tulcea, 1987)

C.35. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $[AD] \equiv [BC]$, diagonala $[AC]$ perpendiculară pe BC și unghiurile de la bază de 60°. Pe baza mare $[AB]$ se ia un punct M astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{4-\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-4}$.

Fie d_1 perpendiculara în M pe AB şi d_2 perpendiculara în A pe AC, iar $d_1 \cap d_2 = \{N\}$.

Să se arate că distanţa de la punctul N la baza mică a trapezului $ABCD$ este egală cu AB.

(Etapa judeţeană, Tulcea, 1987)

C.36. Perpendicularele pe diagonala $[BD]$ a dreptunghiului $ABCD$ duse în B şi D intersectează laturile $[DC]$ şi respectiv $[BD]$ în M, respectiv N. Să se arate că:

$$\text{a) } \frac{AB}{BC} = \frac{BN}{DM}; \quad \text{b) } \frac{BM}{BN} = \frac{AD}{DN}; \quad \text{c) } \frac{BM}{DM} = \frac{AB}{DN};$$

$$\text{d) } AB^2 + BC^2 = BM \cdot DN.$$

(Etapa judeţeană, Vaslui, 1987)

C.37. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi care satisfac relaţia:

$$\frac{3b^2(a-c)^2 + 12ab^2c}{a^4 + 2a^3c - c^4 - 2ac^3} = 3.$$

Stabiliţi natura triunghiului.

(Etapa judeţeană, Vaslui, 1987)

C.38. În triunghiul ABC fie înălţimea $[AA']$ şi fie M şi N mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[AC]$. Arătaţi că punctele A, M, A', N sunt conciclice dacă şi numai dacă $m(\sphericalangle A) = 90°$.

(Etapa judeţeană, Vrancea, 1987)

C.39. Pe laturile $[CA]$ şi $[CB]$ ale triunghiului dreptunghic isoscel ABC se aleg punctele D şi E astfel încât $[CD] \equiv [CE]$. Perpendicularele coborâte din D şi C pe dreapta AE intersectează ipotenuza $[AB]$ respectiv în punctele K şi L. Demonstraţi că $[LK] \equiv [LB]$.

(Etapa judeţeană, Vrancea, 1987)

C.40. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi O intersecţia diagonalelor lui. O dreaptă d împarte unghiurile AOD şi BOC în unghiuri congruente. Fie A_1, B_1, C_1, D_1 proiecţiile punctelor A, respectiv B, C, D, pe dreapta d. Demonstraţi că $AA_1 \cdot CC_1 = BB_1 \cdot DD_1$.

(Etapa judeţeană, Alba, 1988)

C.41. În triunghiul ABC obtuzunghic în C, notăm cu H_A, H_B, H_C, intersecţiile dreptelor BC, AC şi respectiv AB cu perpendicularele din A, B şi respectiv C pe dreptele BC, AC şi respectiv AB.

a) Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului $H_AH_BH_C$, cunoscând măsurile unghiurilor triunghiului ABC;

b) Punctul C aparţine interiorului triunghiului $H_AH_BH_C$?

(Etapa pe municipiu Bucureşti, 1988)

C.42. Triunghiul ABC este dreptunghi în A. Bisectoarea unghiului ABC intersectează cateta $[AC]$ în D.

a) Dacă M este un punct pe perpendiculara în C pe dreapta AC, astfel încât B și M sunt de aceeași parte a lui AC și $[BC] \equiv [CM]$, atunci $BD \cdot DC = AD \cdot DM$?

b) Fie N pe ipotenuza $[BC]$ în așa fel încât $[AB] \equiv [NC]$ și P intersecția lui BD cu dreapta AF (F este mijlocul lui $[BN]$). Este dreapta NP perpendiculară pe dreapta AB?

(Etapa pe municipiu, București, 1988)

C.43. Se dă triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle B) = 60°$ și $AB = \frac{1}{2} \cdot BC$. Fie D simetricul lui B față de mediana $[AM]$. Să se arate că punctele A, B, C, D sunt conciclice și $CD \parallel AM$.

(Etapa județeană, Constanța, 1988)

C.44. Fie un triunghi MAN ($m(\sphericalangle MAN) > 90°$). Pe latura (MN) luăm un punct oarecare B, între M și N. Cercul circumscris triunghiului MBA intersectează prelungirea lui $[NA]$ în Q și cercul circumscris triunghiului ABN intersectează prelungirea lui $[MA]$ în P. Să se demonstreze că patrulaterul $MQPN$ este inscriptibil dacă și numai dacă D, A, B sunt coliniare ($\{D\} = MQ \cap PN$).

(Etapa județeană, Constanța, 1988)

C.45. Fie triunghiul ABC și punctul M pe latura $[BC]$. Să se arate că $[AM]$ este bisectoarea unghiului A dacă și numai dacă $\frac{BM}{MC} = \frac{R_1}{R_2}$, unde R_1 și R_2 sunt respectiv razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM și ACM.

(Etapa județeană, Dâmbovița, 1988)

C.46. Două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ se intersectează în M și N. Prin M și N ducem două drepte care intersectează $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ în A, respectiv B și C, respectiv D.

Să se arate că: a) $\sphericalangle ANB \equiv \sphericalangle CMD$; b) $AC \parallel BD$; c) Dacă $[AN]$ și $[CM]$ sunt diametre în $\mathcal{C}_1$, atunci $[BN]$ și $[DM]$ sunt diametre în $\mathcal{C}_2$.

(Etapa județeană, Dâmbovița, 1988)

C.47. Fie triunghiul ABC cu $AB = 20$ cm, $[AD]$ înălțime, $AC = 16$ cm și $[AM]$ mediană. Știind că $\frac{MD}{BC} = \frac{1}{2}$, calculați lungimea înălțimii din C a triunghiului ABC. Calculați $BC \cdot MD$ în cazul când $\frac{MD}{BC} > \frac{1}{2}$.

(Etapa județeană, Prahova, 1988)

C.48. Fie O centrul cercului circumscris unui patrulater $ABCD$ cu diagonalele perpendiculare, punctul P intersecția diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$ și M mijlocul laturii $[AB]$. Să se demonstreze că:

a) $MP \perp CD$; b) $OM = \frac{1}{2} \cdot CD$.

(Etapa județeană, Prahova, 1988)

C.49. a) Patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram. O paralelă la dreapta AB intersectează segmentele $[AD]$, $[AC]$, $[BD]$ şi $[BC]$ în M, N, P şi respectiv Q. Sunt segmentele $[MN]$ şi $[PQ]$ congruente?

b) În triunghiul ABC, notăm cu I intersecţia bisectoarelor unghiurilor lui. Bisectoarea $[AI$ intersectează latura $[BC]$ în D. Stabiliţi dacă $\frac{AI}{ID} = \frac{AC+AB}{BC}$.

(Etapa pe municipiu, Bucureşti, 1989)

C.50. a) Patrulaterul $ABCD$ este un trapez isoscel. Proiecţia lui C pe baza mare $[AB]$ este E. Centrul de greutate al triunghiului ABC aparţine segmentului $[ED]$?

b) În triunghiul ascuţitunghic ABC, punctul D este proiecţia lui B pe (AC), iar E este proiecţia lui C pe (AB), H este ortocentrul triunghiului ABC, P este centrul cercului circumscris triunghiului ADE, M este mijlocul laturii (BC), iar T este intersecţia dreptelor MP şi DE. Stabiliţi dacă DP este tangentă la cercul circumscris triunghiului BDE şi dacă avem că: $DE^2 = 4PT \cdot TM$.

(Etapa pe municipiu, Bucureşti, 1989)

C.51. În triunghiul ABC, bisectoarea interioară $[BB']$, $(B' \in (AC))$ este paralelă cu tangenta la cercul circumscris triunghiului ABC dusă în punctul T, diametral opus lui A. Această tangentă intersectează dreptele AB şi AC în D şi E.

Să se arate că: a) Patrulaterul $BCED$ este inscriptibil; b) $BB' = \frac{AB \cdot BC}{AC}$;

c) Punctele B', O (centrul cercului circumscris triunghiului ABC) şi M mijlocul lui $[BC]$ sunt coliniare.

(Etapa judeţeană, Dâmboviţa, 1989)

C.52. Pe dreapta d se iau punctele A şi B astfel încât $AB = 8$ cm. În A şi B se duc perpendiculare, în acelaşi semiplan, pe care se iau punctele M şi respectiv N, astfel încât $AM = 12$ cm şi $BN = 6$ cm. Să se găsească lungimea segmentului $[BP]$, P fiind pe semidreapta $(BN$ astfel încât triunghiul MNP să fie dreptunghic.

(Etapa judeţeană, Dâmboviţa, 1989)

C.53. Fie $[AA']$ înălţime în triunghiul ABC $(A' \in BC)$, iar A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$. Demonstraţi că patrulaterul $A'A_1B_1C_1$ este inscriptibil.

(Etapa judeţeană, Prahova, 1989)

C.54. Într-un triunghi oarecare ABC se „coboară" din vârful A înălţimea $[AD]$ şi mediana $[AM]$, $(D, M \in BC)$. Ştiind că $AB = 6$ şi $AC = 2$ se cere:

a) Să se calculeze produsul $BC \cdot MD$.

b) Dacă $\frac{DM}{BC} = \frac{1}{2}$, iar segmentul $[CO]$ se prelungeşte cu $[OP] \equiv [CO]$, O fiind mijlocul lui $[AB]$, atunci patrulaterul $APBC$ este inscriptibil.

(Etapa judeţeană, Prahova, 1989)

C.55. ABC este un triunghi cu $m(\sphericalangle BAC) = 90°$ şi $m(\sphericalangle ABC) = 30°$, iar I şi O sunt centrul cercului înscris, respectiv centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Stabiliţi dacă: 1) Punctele A, B, O, I sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil; 2) $[AI] \equiv [IO]$

(Etapa pe sector, municipiul Bucureşti, 1990)

C.56. Se dă un cerc de centru O. Coardele $[AB]$ şi $[CD]$ se intersectează în P, $(P \neq O)$. Perpendiculara în P pe dreapta PO intersectează segmentele $[AC]$ în Q şi $[BD]$ în R, iar perpendiculara din B pe dreapta OP intersectează, a doua oară, cercul dat în T. Stabiliţi dacă: 1) Triunghiul BPT este isoscel; 2) Punctele P, Q, C, T sunt conciclice; 3) $[PQ] \equiv [PR]$.

(Etapa pe sector, municipiul Bucureşti, 1990)

C.57. Se dă paralelogramul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle ABC) = 60°$. R este un punct pe perpendiculara în A pe dreapta AB (R şi D sunt semiplane opuse determinate de dreapta AB), astfel încât $AR = AB = a$. a) Dreapta AD este perpendiculară pe dreapta RB? b) În cazul când punctele R, B, C, D sunt conciclice, calculaţi RB şi DB.

(Etapa pe municipiu Bucureşti, 1990)

C.58. Se dă triunghiul ABC unde $m(\sphericalangle ABC) < m(\sphericalangle BCA)$. Punctul D aparţine segmentului $[BC]$ astfel încât $m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle ABC)$. a) Stabiliţi dacă $AC^2 = DC \cdot BC$; b) Dacă, în plus, $AD \perp BC$, iar E şi F sunt proiecţiile lui D pe dreptele AB şi respectiv AC, atunci avem relaţia: $AC \cdot AE + AB \cdot AF = AB \cdot AC$?

(Etapa pe municipiu, Bucureşti, 1990)

C.59. În triunghiul ABC se duc $AE \perp AB$ şi $AF \perp AC$ astfel ca $[AE] \equiv [AB]$ şi $[AF] \equiv [AC]$. Să se arate că mediana şi înălţimea din A ale triunghiului ABC sunt respectiv înălţime şi mediană în triunghiul AEF.

(Concursul interjudeţean „Gheorghe Ţiţeica", Slatina, 1982)

C.60. Pe laturile $[AD]$ şi $[CD]$ ale unui paralelogram oarecare $ABCD$ se construiesc spre exterior triunghiurile echilaterale ADE şi DCF. Să se demonstreze că triunghiul BEF este echilateral.

(Concursul interjudeţean „Gheorghe Ţiţeica", Slatina, 1982)

C.61. Fie $ABCD$ un patrulater convex care are două laturi opuse congruente. Să se arate că pentru orice punct M din interiorul patrulaterului, se poate forma cu segmentele $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$, $[MD]$ un patrulater. Este acest patrulater convex?

(Proba pe echipe – Concursul interjudeţean „Gheorghe Ţiţeica", Slatina, 1982)

C.62. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, cateta $AC = b$ şi ipotenuza $BC = 2b$. Se duce un cerc cu centrul în A şi raza $R = AC$, care intersectează ipotenuza $[BC]$ în D. Se cere:

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[CD]$ şi $[BD]$;

b) Să se calculeze raportul razelor cercurilor înscrise în triunghiurile ACD şi ABD.

(Testul din tabăra naţională de matematică, Câmpulung Moldovenesc, 1984)

C.63. Pe un cerc dat $\mathcal{C}$ se consideră un punct fix A. Pe o dreaptă fixă d se consideră un punct fix B. Un cerc mobil care trece prin A și B intersectează cercul $\mathcal{C}$ în P și dreapta d în Q. Dreapta PQ intersectează cercul $\mathcal{C}$ în R. Arătați că $[AR]$ are lungime constantă.

(Concursul interjudețean „Spiru Haret", Sinaia, 1985)

C.64. Se dă cercul circumscris triunghiului ABC și se duce diametrul din A. Dintr-un punct oarecare M, situat pe BC, se duce perpendiculara pe acest diametru, care intersectează dreapta AB în N. Dreapta AM intersectează cercul în P. Să se arate că punctele B, M, N, P sunt conciclice.

(Concursul interjudețean „Spiru Haret", Sinaia, 1985)

C.65. În triunghiul ABC, bisectoarea unghiului BAC intersectează pe (BC) în D. Cercul circumscris triunghiului ABD intersectează AC în N, iar cercul circumscris triunghiului ACD intersectează AB în M. Să se arate că $DM + DN = BC$.

(Concursul interjudețean „Spiru Haret", Brașov, 1986)

C.66. Fie $ABCD$ un patrulater convex înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, iar M proiecția lui O pe AB. Să se arate că $OM = \frac{1}{2} \cdot CD$ dacă $AC \perp BD$.

(Concursul interjudețean „Spiru Haret", Brașov, 1986)

C.67. O dreaptă variabilă intersectează laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[DA]$ ale unui dreptunghi respectiv în M, N, P și Q. Să se arate că $\frac{AB^2}{NQ^2} + \frac{BC^2}{MP^2} = \text{constant}$.

(Concursul interjudețean „Gheorghe Țițeica", Slatina, 1987)

C.68. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AC > BD$. Să se determine un punct M, $(M \in (AC))$ astfel încât patrulaterul $BCDM$ să fie inscriptibil. Să se arate că BD este tangenta comună exterioară a cercurilor AMB și AMD.

(Concursul interjudețean „Gheorghe Țițeica", Slatina, 1989)

C.69. Printr-un punct O situat în interiorul unui triunghi ABC se duc paralelele la cele trei laturi ale triunghiului, obținându-se următoarele puncte de intersecție: $M \in AB$, $N \in AC$, $(MN \parallel BC)$; $P \in AC$, $Q \in BC$ $(PQ \parallel AB)$; $R \in BC$, $S \in AB$, $(RS \parallel AC)$.

Știind că $\frac{AM}{AB} = \frac{BR}{BC} = \frac{CP}{AC} = k$, să se calculeze valoarea lui k, și să se precizeze poziția punctului O.

(Concursul interjudețean „Traian Lalescu", Ineu, 1987)

C.70. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N, P, Q respectiv mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ și $[AD]$. Fie R și S punctele de intersecție ale dreptelor BQ și MD, respectiv BP și DN, iar T punctul de intersecție a dreptelor AR și CS. Demonstrați că punctele D, T și B sunt coliniare.

(Concursul interjudețean „Traian Lalescu", Ineu, 1987)

C.71. Bisectoarele triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului în punctele A', B', C'. Demonstrați că punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$.

(Concursul interjudețean „Spiru Haret", Târgoviște, 1987)

C.72. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a și M, N mijloacele laturilor $[BC]$ respectiv $[CD]$. Dreptele AM și BN se intersectează în P. Arătați că $DP = a$.

(Concursul interjudețean „Spiru Haret", Târgoviște, 1987)

C.73. Se consideră în plan cercurile $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_n$ $(n \geq 5)$, de raze egale și centre diferite două câte două așa încât oricare patru dintre ele să aibă un punct comun. Să se arate că cele n cercuri au punct comun.

(Proba pe echipe – Concursul interjudețean „Gheorghe Țițeica", Slatina, 1987)

C.74. În capetele A, B ale unui diametru al unui cerc se duc tangentele AA' și BB' la acel cerc.

Fie M un punct pe cerc, diferit de A și B. Dreapta AM intersectează pe BB' în C, iar dreapta BM intersectează pe AA' în D. Demonstrați că $AB^2 = AD \cdot BC$.

(Etapa pe țară, București, 1980)

C.75. Într-un triunghi ABC se duc mediana $[AD]$ și bisectoarea interioară $[AE]$. Simetricul lui $[AD]$ față de $[AE]$ intersectează pe (BC) în F. Determinați raportul distanțelor de la F la laturile $[AB]$ și $[AC]$ în funcție de lungimile laturilor $[AB]$ și $[AC]$.

(Etapa pe țară, București, 1980)

C.76. Fie $ABCD$ un paralelogram și fie M un punct oarecare pe latura (BC). Dreptele AM și DM intersectează prelungirile laturilor $[DC]$ și $[AB]$, respectiv în P și Q. Arătați că produsul segmentelor $[BQ]$ și $[CP]$ este constant când M descrie latura $[BC]$.

(Etapa pe țară, Pitești, 1983)

C.77. Într-un cerc $\mathcal{C}$ cu centrul O și raza R, fie o coardă fixă $[AB]$. Arătați că:

a) Oricare ar fi coarda $[CD]$ perpendiculară pe $[AB]$ într-un punct interior segmentului (AB) este îndeplinită relația: $AB + CD \geq 2R$;

b) Mijloacele coardelor de lungime $2R - AB$ se află pe un cerc, având centrul în O. În cazul în care $AB > R$, deduceți că există puncte A', B' pe coarda $[AB]$ astfel încât orice coardă $[FG]$ a cercului $\mathcal{C}$ care intersectează segmentul $[A'B']$ satisface relația: $AB + FG \geq 2R$.

(Etapa pe țară, Pitești, 1983)

C.78. În triunghiul echilateral ABC, fie D mijlocul segmentului $[BC]$. Se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale BDE și CDF. Fie G intersecția dintre AE și BC, iar H intersecția dintre AF și BC. Demonstrați că $[BG] \equiv [GH] \equiv [HC]$.

(Etapa pe țară, Deva, 1984)

C.79. Fie pătratul $ABCD$. Din A pornesc simultan, pe laturi, două mobile M_1 şi M_2, unul spre B şi celălalt spre D. Viteza lui M_1 este v, iar viteza lui M_2 este $2v$.

a) După cât timp are loc prima întâlnire şi în ce punct?

b) Desenaţi linia frântă parcursă de mijlocul segmentului $[M_1M_2]$ până la prima întâlnire.

(Etapa pe ţară, Deva, 1984)

C.80. a) Fie un triunghi ABC şi un punct D pe latura (BC). Arătaţi că dreapta AD este axă de simetrie a triunghiului dacă şi numai dacă segmentele $[AB]$ şi $[AC]$ sunt congruente şi dreptele AD, BC sunt perpendiculare.

b) Arătaţi că un triunghi este echilateral dacă şi numai dacă el admite două axe de simetrie.

(Etapa pe ţară, Tulcea, 1985)

C.81. Fie $ABCD$ un trapez oarecare cu bazele $[AB]$, $[CD]$ şi O intersecţia diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$. Paralela prin O la baze intersectează laturile neparalele în M şi N. Arătaţi că $[OM] \equiv [ON]$ şi că $\frac{MN}{AB} + \frac{MN}{CD} = 2$.

(Etapa pe ţară, Rm. Vâlcea, 1986)

C.82. Fie ABC un triunghi având lungimile laturilor $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a\sqrt{3}$. Fie P piciorul înălţimii din A pe $[BC]$, M şi N proiecţiile lui P pe laturile $[AB]$, respectiv $[AC]$. Calculaţi lungimea segmentului $[MN]$ în funcţie de a.

(Etapa pe ţară, Rm. Vâlcea, 1986)

C.83. Fie două cercuri de centre O_1, O_2, care se intersectează în punctele A şi B. Fie C şi D punctele diametral opuse lui A în cele două cercuri. Tangentele duse prin A la cercurile O_1 respectiv O_2 intersectează cercurile O_2 respectiv O_1 în M, respectiv N. Prelungim segmentul $[AB]$ cu un segment $[BP]$ astfel încât B să fie mijlocul segmentului $[AP]$. Arătaţi că:

a) Punctele C, B, D sunt coliniare;

b) Patrulaterul $AMPN$ este inscriptibil.

(Etapa pe ţară, Rm. Vâlcea, 1986)

C.84. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi fie E intersecţia dreptelor AB, CD, iar F intersecţia dreptelor BC, AD. Bisectoarea interioară a unghiului AFB intersectează laturile (AB), (CD) în P, respectiv M, iar bisectoarea interioară a unghiului AED intersectează laturile (AD), (BC) în Q respectiv N. Arătaţi că $MNPQ$ este romb.

(Etapa pe ţară, Rm. Vâlcea, 1986)

C.85. Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile ascuţite, O centrul cercului circumscris şi H ortocentrul triunghiului ABC. Bisectoarea unghiului A este perpendiculară pe OH. Arătaţi că $m(\sphericalangle BAC) = 60°$.

(Etapa pe ţară, Bacău, 1987)

C.86. Fie triunghiul ABC neisoscel și M mijlocul segmentului $[BC]$ ie P un punct oarecare pe (AM). Fie E și F proiecțiile punctului P pe laturile (AB), respectiv (AC). Arătați că $EF \parallel BC$ dacă și numai dacă $m(\sphericalangle BAC) \equiv 90°$.

(Etapa pe țară, Bacău, 1987)

C.87. Fie ABC un triunghi echilateral și fie M un punct oarecare pe baza (BC), diferit de mijlocul (BC). Perpendiculara în M pe BC intersectează paralela din A la BC în punctul O. Cercul de centru O și rază OM intersectează segmentele (AB) și (AC) în punctele P și Q. Arătați că punctele A, O, Q, P sunt conciclice.

(Etapa pe țară, Bacău, 1987)

C.88. Într-un dreptunghi $ABCD$ în care $AB = a$, $BC = b$, $a < b$ se înscrie un alt dreptunghi $A'B'C'D'$ cu A',B',C', D' respectiv pe segmentele (AD), (AB), (BC), (CD), cunoscându-se raportul $\frac{A'B'}{B'C'} = k > 0$. Calculați lungimile laturilor dreptunghiului $A'B'C'D'$ în funcție de a, b, k și precizați condițiile satisfăcute de k pentru care există dreptunghiul $A'B'C'D'$.

(Etapa pe țară, Bacău, 1987)

C.89. Fie ABC un triunghi oarecare cu $AB > AC$. Dacă $[CF]$ și $[BE]$ sunt respectiv medianele corespunzătoare laturilor $[AB]$ și $[AC]$, (E și F pe segmentele (AC), respectiv (AB)), demonstrați că $BE > BF$.

(Etapa pe țară, Brașov, 1988)

C.90. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A cu $\sphericalangle B > \sphericalangle C$. Fie D mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Perpendiculara în D pe BC intersectează cateta $[AC]$ în E.

a) Demonstrați că $m(\sphericalangle ADE) = m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle C)$.

b) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC știind că $[AE] \equiv [ED]$.

(Etapa pe țară, Brașov, 1988)

C.91. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare, înscris într-un cerc de centru O și rază R.

a) Calculați suma pătratelor lungimilor a două laturi opuse ale patrulaterului în funcție de raza cercului.

b) Arătați că distanța de la O la CD este $\frac{AB}{2}$.

(Etapa pe țară, Brașov, 1988)

C.92. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle C) > 90°$ se duc înălțimile $[BA']$ și $[AB']$ unde A' aparține dreptei AC și B' aparține dreptei BC. Demonstrați că:

a) Dreptele AB' și BA' sunt concurente într-un punct H;

b) Triunghiul ABH este ascuțitunghic;

c) Găsiți un punct D pe segmentul (AB) astfel încât patrulaterul $BDB'H$ să fie inscriptibil.

(Etapa pe țară, Brașov, 1988)

C.93. Fie un pentagon convex $ABCDE$ în care $AB \perp BC$, $AD \perp DE$ şi $m(\sphericalangle AEC) = m(\sphericalangle ADB)$. Arătaţi că $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle DAE)$.

(Etapa pe ţară, Baia Mare, 1989)

C.94. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, iar S este aria patrulaterului. Arătaţi că:

$$S \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$$

(Etapa pe ţară, Baia Mare, 1989)

C.95. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului echilateral ABC se iau punctele E, respectiv F, astfel încât $BE = 2 \cdot AE$, şi $AF = 2 \cdot CF$. Fie D intersecţia segmentelor $[BF]$ şi $[CE]$. Arătaţi că $AD \perp BF$.

(Etapa pe ţară, Baia Mare, 1989)

C.96. Se consideră un triunghi isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) obtuzunghic. Pe înălţimea $[AD]$ se fixează un punct E, ($D \in (BC)$, E între A şi D). Fie M un punct mobil pe segmentul $[BC]$ astfel încât perpendiculara din E pe AM să intersecteze segmentul $[BC]$ într-un punct N.

a) Arătaţi că $ME \perp AN$ şi precizaţi poziţiile posibile ale punctelor M şi N.

b) Arătaţi că simetricul E' al ortocentrului E al triunghiului AMN faţă de BC se află pe cercul circumscris triunghiului AMN.

c) Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului AMN se află pe mediatoarea segmentului $[AE']$.

(Etapa pe ţară, Baia Mare, 1989)

C.97. Cercul $\mathcal{C}(I, r)$ înscris în triunghiul ascuţitunghic ABC este tangent laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ respectiv în punctele M, N şi P. Prin A se duce dreapta d paralelă cu BC. Notăm $\{E\} = MP \cap d$ şi $\{F\} = MN \cap d$. De asemenea, notăm cu D mijlocul lui $[ME]$ şi cu Q mijlocul lui $[MF]$. Să se demonstreze că patrulaterul $ADIQ$ este inscriptibil. Unde este situat centrul cercului circumscris lui $ADIQ$? (I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.)

(Etapa pe ţară, Ploieşti, 1990)

C.98. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care notăm cu O intersecţia diagonalelor. Să se arate că dacă $[DA] \equiv [DO]$ şi $[CB] \equiv [CO]$, atunci patrulaterul $ABCD$ şi triunghiul DOC se pot înscrie în cercuri congruente.

(Etapa pe ţară, Ploieşti, 1990)

RĂSPUNSURI, INDICAȚII ȘI SOLUȚII

EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE DIN MATERIA CLASEI A VI-A

A. Triunghiul (pag. 3)

5. 1 a) a, d; b) c, e; c) b; **2.** 11 cm, 1,12 dm, 12 cm, 14 cm, 15 cm. **6.** a) 4 cm, da, da; b) 14 cm; da; c) 4,5 cm, da; d) 90°, da, da. **7.** da, da, da. **8.** a) $AC = 6$ cm, $m(\sphericalangle BAD) = 17°30'$, da, dreapta AD; b) 12 cm, da, da; c) 8 cm, 90°, da, da, cel mult o axă. **9.** a) Se demonstrează că triunghiul ABC este echilateral, $2p = 18$ cm, $m(\sphericalangle BEC) = 90°$; b) da, da, cel puțin o axă de simetrie; c) da, da; d) în același punct; e) cu mediatoarele și cu bisectoarele triunghiului ABC; f) da; g) $[AB]$ este simetricul lui $[AC]$ față de mediatoarea lui $[BC]$ și simetricul lui $[BC]$ față de mediatoarea lui $[AC]$.

B. Paralelism (pag. 5)

11. a) da, alterne interne; b) da, alterne externe; c) da, opuse la vârf; d) da; e) da; f) 24°, 24°,24°. **12.** a) da; b) da; c) da; d) da. **13.** a) da; b) da; c) da, d) 153°; e) da; f) da. **14.** b) da, [CP este bisectoarea interioară și [CE bisectoarea exterioară unghiului C al triunghiului ABC. **15.** a) da; b) da; c) da. **16.** a) nu; b) da; c) da; d) da; e) da; f) da; g) da.

C. Congruența triunghiurilor (pag. 7)

17. LUL. **18.** $180° - (24° + 56°) = 180° - 80° = 100 \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta P_1N_1M_1$ (ULU). **19.** nu. **20.** $180° - (34 + 68°) = 180° - 102° = 78°$, deci: da (ULU). **21.** LLL. **22.** nu. **23.** IC. **24.** CC. **25.** IC. **26.** CC. **27.** IC.

D. Patrulatere (pag. 7)

28. Se folosește teorema privind suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex. a) 110°; b) 177°; c) 90°, 90°; d) 120°, 60°, da, da; e) 50°, da; f) 90°, da, da; g) 90°, da.

E. Paralelogramul (pag. 8)

30. a) 36 cm; b) 2 cm; c) 140°, 40°; d) 4 cm, 6 cm. **31.** da, da, da, A_1 și C_1. **32.** E și F, G și H, da, da, dar trebuie să demonstrați!

F. Dreptunghiul (pag. 9)

35. a) da, da; b) 10 cm, da; c) 20°, da. **36.** a) 90°; b) 90°, da. **37.** a) E şi F; G şi H; b) $[AB]$ şi $[CD]$; c) $[AD]$ şi $[CB]$.

G. Rombul (pag. 9)

40. a) 28 cm; b) 10°, 20°, 160°, da, nu; c) 60°, 120°, 60°; d) $[OM] \equiv [ON]$ din două triunghiuri congruente [ULU]. **41.** a) da; b) da; c) $\sphericalangle NMP \equiv \sphericalangle QPM$ (alterne interne) $\Rightarrow \sphericalangle OPM \equiv \sphericalangle QPM \Rightarrow [MQ] \equiv [NM]$.

H. Pătratul (pag. 10)

44. a) 12 cm, da; b) 2 cm, da, da; c) 1,5 cm, da. **45.** a) 90°, da; b) 90°, da. **46.** a) M şi P, Q şi N; b) da, B; c) da; d) $[BO]$ şi $[CO]$, punctul O.

I. Trapezul (pag. 11)

49. a) 18 cm; b) 8 cm; b) 120°, 45°. **50.** a) 4 cm; b) 8 cm; c) da, 30°, 60°.

J. Linia mijlocie în triunghi şi trapez (pag. 11)

51. a) da; b) da; c) da; d) da; e) da; f) da; g) da; h) da; i) da. **52.** a) da; b) da; c) da; d) da. **53.** a) da; b) da; c) da; d) da; e) da. **54.** a) da; b) da; c) da; d) da; e) da. **55.** $SP = MR = NS = 6$ cm, $NP = 12$ cm, $EF = 9$ cm.

K. Probleme (pag. 12)

56. Cu notaţiile din figura 204, rezultă congruenţa triunghiurilor dreptunghice ABM şi ADN, deci a ipotenuzelor $[AB]$ şi $[AD]$. **57.** Se foloseşte cazul al doilea de congruenţă a triunghiurilor. Este romb. **58.** Rezultă imediat din inegalităţi de laturi în triunghiurile formate cu laturile iniţiale. **59.** 5°, 50°, 125°. **60.** Ducem perpendicularele MS pe DC şi NT pe AD (fig. 205). Demonstrăm congruenţa segmentelor $[MP]$ şi $[NQ]$ din congruenţa triunghiurilor MPS şi NQT. **61.** Se foloseşte metoda reducerii la absurd. Ar însemna că atât triunghiul OAD cât şi triunghiul OBC

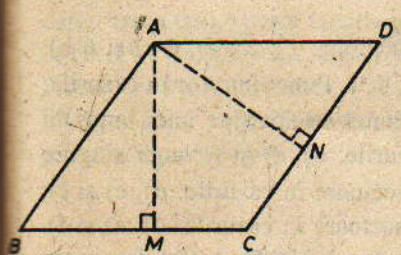


Fig. 204

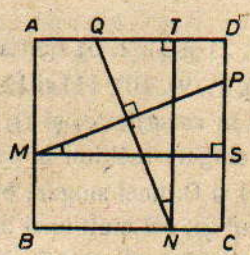


Fig. 205

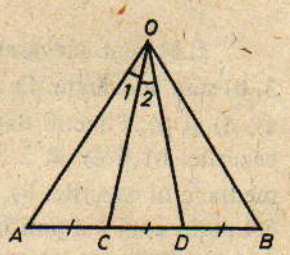


Fig. 206

(fig. 206) ar fi isoscele şi de aici că dintr-un punct exterior unei drepte se pot „duce" două perpendiculare distincte pe aceeaşi dreaptă, ceea ce este imposibil. **62.** Se foloseşte ceea ce am demonstrat la problema **60:** ducem din Q perpendiculara pe MP pe care purtăm segmentul $[QR] \equiv [MP]$ (fig. 207). Unim pe R cu N şi obţinem dreapta suport a uneia din laturile pătratului. Ducând din M şi P perpendiculare pe

NR, ele vor intersecta această dreaptă în B și C etc. **63.** Două drepte paralele cu BC simetrice față de aceasta. **64.** a) Cu notațiile din figura 208, unghiurile A_1, A_2, M și ANM sunt congruente și deci triunghiul AMN este isoscel; b) Ducem AE perpendiculară pe $MN \Rightarrow [EM] \equiv [EN]$, de aici $MP + NP = 2 \cdot PE = 2 \cdot AH$; c) Locul geometric al lui E este un segment paralel și congruent cu $[BC]$ și căruia îi

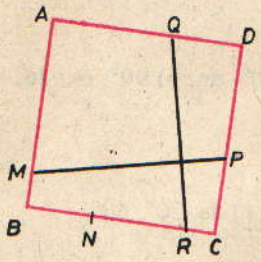


Fig. 207

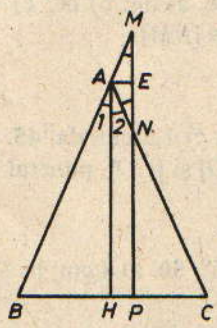


Fig. 208

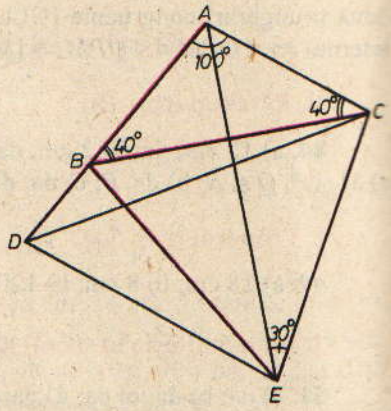


Fig. 209

aparține punctul A. **65.** În figura 209, am completat trapezul isoscel $ACED$, unde $[AD] \equiv [BC] \equiv [CE]$. Din $[BC] \equiv [CE]$ și $m(\sphericalangle BCE) = 100° - 40° = 60°$, rezultă că triunghiul BEC este echilateral. În patrulaterul $ABEC$ vârfurile A și E sunt pe mediatoarea lui $[BC]$, deci unghiul AEC are măsura de 30° și este congruent cu unghiul ADC (trapezul isoscel este inscriptibil). **66.** a) Se folosește congruența triunghiurilor AED și BEC; b) 75°, 15°.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME (1)

A. Determinarea cercului (pag. 30)

1. b) sunt adevărate: 1), 2) și 3). **2.** b) sunt adevărate: 1), 2), 4), 6 a) și 6 b). **3.** b) sunt adevărate: 1), 2), 4), 8), 9), 10), 11) și 12). **4.** 1. Punct interior în cazurile: a), d) și g); Punctul exterior în cazurile: c) și f); Punct ce aparține unei laturi în cazurile: b) și e). **4.** 2. unei singure înălțimi în cazurile: d), e) și f); unei singure mediane în cazurile: b), d), e) și f); unei singure bisectoare în cazurile: d), e) și f); cel puțin unei înălțimi în cazul g); cel mult unei bisectoare în cazurile: d), e) și f). **5.** 4 cm. **6.** Punctele căutate aparțin mediatoarei segmentului $[AB]$. Astfel de puncte se găsesc la distanța $d \geq \frac{AB}{2}$, adică $d \geq \frac{6\text{cm}}{2} = 3$ cm. În cazul a) nu există astfel de puncte, întrucât $2 < d$; în cazul b) există un singur punct (mijlocul segmentului $[AB]$); în cazul c) sunt două puncte M și M' simetrice față de dreapta AB, aflate la intersecția cercurilor cu centrele în A și B și de rază 4 cm. **9.** Se folosește teorema privind diametrul perpendicular pe o coardă.

B. Cercuri congruente, arce și coarde în cerc (pag. 32)

10. a) Se demonstrează că $\triangle O_1AB \equiv \triangle O_2AB$, de unde rezultă că $\sphericalangle AO_1B \equiv \sphericalangle AO_2B$ și cele două arce AB, din cercurile congruente, sunt congruente; b) Având toate laturile congruente, patrulaterul este romb. **11.** 1 cm. **12.** 8 cm și 4 cm. **13.** a) 6 cm, 3 cm; b) 5 cm, $OMNP$ este romb. **14.** a) 4 cm; b) Romb și trapez isoscel; c) Unghiurile ADC și DCE (care sunt interne și de aceeași parte a secantei) au măsurile de 120° și 60°, deci sunt suplementare; d) Distanțele respective sunt înălțimi în triunghiuri echilaterale congruente. **15.** Se demonstrează congruența $\triangle OMD \equiv \triangle ONC$ (catetă, catetă), apoi din congruența a două unghiuri ascuțite omoloage, care au poziția de alterne interne rezultă $MD \parallel NC$. **16.** a) Dacă ducem $OC \perp PQ$ și $OD \perp RS$, ($C \in (PQ)$ și $D \in (RS)$) avem $\triangle OCA \equiv \triangle ODB$ (IU), de unde $[OC] \equiv [OD]$. Cum coardele egal depărtate de centru sunt congruente, rezultă $[PQ] \equiv [RS]$; b) coardele congruente subîntind arce congruente $m(\overset{\frown}{PQ}) = m(\overset{\frown}{RS})$; c) Se demonstrează congruența $\triangle OCP \equiv \triangle ODS$ (IC), de unde $\sphericalangle COP \equiv \sphericalangle DOS$ și, ținând seama de faptul că $\sphericalangle COA \equiv \sphericalangle DOB$ – cum am văzut la pct. a) –, rezultă că unghiurile POM și SON sunt opuse la vârf, deci P și S sunt diametral opuse; la fel se demonstrează că Q și R sunt diametral opuse; d) Patrulaterul $PQSR$ cu laturile $[PQ]$ și $[RS]$ paralele – din ipoteză – și congruente (vezi pct. a) este un paralelogram în care diagonalele $[PS]$ și $[QR]$ sunt congruente (ca diametre în cerc) este chiar un dreptunghi.

C. Dreapta tangentă la cerc într-un punct al cercului (pag. 33)

17. a) În $\triangle BOC$, $[OA]$ este înălțime (pentru că a este tangentă la cerc) și mediană (pentru că $[AB] \equiv [AC]$), deci $\triangle BOC$ este isoscel; b) $2r$; c) $2r$. **18.** $2(x + y + z)$. **19.** $AN = 2$ cm. **20.** Se folosește faptul că tangentele (luate ca segmente) duse dintr-un punct exterior unui cerc la acel cerc sunt congruente. Cu notațiile din figura 210, avem: $AB = x + y$, $BC = y + z$, $CD = z + t$, $DA = t + x$. Deci, $AB + CD = x + y + z + t$ și $BC + DA = y + z + t + x \Rightarrow AB + CD = BC + DA$. **21.** a) Se folosește congruența tangentelor (segmente) duse din D și E la cerc; b) Se folosește faptul că $[OD$ și $[OE$ sunt bisectoare ale unghiurilor AOC, respectiv BOC; c) $[OM$ și $[ON$ sunt bisectoarele a două unghiuri adiacente și suplementare.

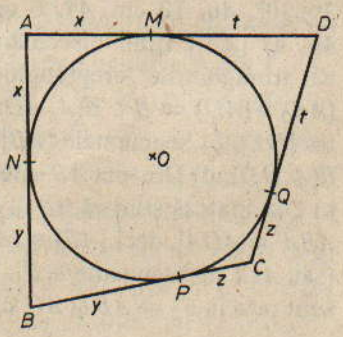


Fig. 210

D. Măsura unghiului înscris într-un cerc (pag. 34)

22. a) 20° sau 160°; b) 45° sau 135°; c) 60° sau 120°; d) 90°. **23.** a) 40°. b) 90°; c) 180°; d) 90°. M, O, P coliniare în cazul c); $MO \perp OP$ în cazul d). **24.** a), b) Rezultă din faptul că triunghiul ABC este dreptunghic în C. **25.** a) 15° și 165°; b) 20° și 160°; c) 45° și 135°; d) 90° și 90°. **26.** Se arată că $[MN]$ este un diametru; de unde rezultă a), b), c). **27.** Problema admite două „rânduri" de soluții după cum: 1) $\overset{\frown}{AB} \subset \overset{\frown}{AC}$ sau 2) $\overset{\frown}{AB} \subset \overset{\frown}{BC}$. În cazul 1): a) 80°; b) 280°; c) 10°, 30°, 140° și

2): a) 40°; b) 320°; c) 10°, 20°, 150°. **28.** a) 95°, 100°, 85°, 80°; b) 25°, 70°, 30°, 55°. **29.** Bisectoarea oricăruia dintre unghiurile AMB intersectează arcul AB pe care nu se găseşte M în mijlocul acestuia. **30.** Într-unul dintre triunghiurile dreptunghice formate, de exemplu în $\triangle AMC$, avem: $m(\sphericalangle ACM) + m(\sphericalangle CAM) = 90°$. Dar cum unghiurile ACM şi CAM sunt înscrise în cerc, rezultă că $m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{BC}) = 90° \cdot 2 = 180°$. **31.** Se arată că unghiurile AOM şi DON sunt complementare. De aici rezultă că fiecare dintre ele este congruent cu celălalt unghi ascuţit din celălalt triunghi dreptunghic. Se aplică apoi cazul 1 de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice (IU). **32.** a) 70°, 50°, 60°, 120°, 110°, 130°; b) 80°, 60°, 40°, 120°, 80°, 160°. **34.** Se arată că $\sphericalangle HAB \equiv \sphericalangle C'AB$ (au complemente unghiurile congruente ABC şi $AC'C$). Deci, în triunghiul $AC'H$, înălţimea din vârful A este şi bisectoare, deci este şi mediatoare. **35.** Se demonstrează că atât bisectoarea unghiului ABC cât şi mediatoarea laturii $[AC]$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în mijlocul arcului AC'. **36.** Fie D punctul diametral opus lui A. Unghiurile CAA' şi BAD sunt congruente, pentru că au complemente congruente (ACB şi ADB, care sunt înscrise în acelaşi arc de cerc). Din $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle A'AC$ şi $\sphericalangle BAA'' \equiv \sphericalangle A''AC$ ($[AA'']$ fiind bisectoare), rezultă că şi $\sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle DAC$ şi deci că $\sphericalangle A'AA'' \equiv \sphericalangle A''AO$. **37.** Există două situaţii: 1) când B este între C şi D şi atunci: a) da, $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCA$ pentru că ambele au ca măsură jumătate din măsura arcului AB, b) $m(\sphericalangle ACD) = m(\sphericalangle ACB)$, $m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle CAB) + m(\sphericalangle ACB)$, $m(\sphericalangle ADC) = m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle ACB)$ şi 2) când C este între B şi D şi atunci: a) nu, unghiurile DAB şi BCA sunt suplementare; b) $m(\sphericalangle ABD = m(\sphericalangle ABC)$, $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle ABC)$, $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ACB) - m(\sphericalangle ABC)$.

E. Dreapta tangentă la cerc dusă dintr-un punct exterior cercului (pag. 35)

39. 30°. **40.** 10 cm. **41.** 6 cm. **42.** 45°. **43.** a) 30°; b) 60°; c) 5 cm. **44.** Pătrat. **46.** a) $[AA']$ fiind bisectoarea unghiului $BAC \Rightarrow \sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle DAA'$ şi de aici că triunghiurile dreptunghice ABA' şi ADA' sunt congruente (IU) şi deci $[AB] \equiv [AD] \Rightarrow B \in \mathcal{C}(A, AD)$; b) Unghiul EBD este înscris în semicercul de diametru $[DE]$; c) Segmentele $[FB]$ şi $[FE]$ sunt incluse în tangentele duse din F la cercul $\mathcal{C}(A, AD)$; d) Dreapta AB este tangentă în B la $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, iar B se găseşte între F şi A'; e) Din ipoteză ştim că $AB \perp BC$, iar la pct. a) am dovedit congruenţa triunghiurilor ABA' şi ADA'; deci $[AB] \equiv [A'D]$, dar $A'D$ este tocmai raza cercului $\mathcal{C}_1 \Rightarrow AB$ şi AD (sau AC) sunt tangente la $\mathcal{C}_1$. De asemenea, cum $AB \perp CF$ şi $AC \perp EF$, iar $FB = FC$ sunt raze în $\mathcal{C}_2 \Rightarrow AB$ şi AC sunt tangente la $\mathcal{C}_2$.

F. Patrulaterul inscriptibil (pag. 36)

47. Folosim teorema relativă la unghiurile opuse ale unui patrulater inscriptibil: $m(\sphericalangle B) = 180° - m(\sphericalangle D)$ şi $m(\sphericalangle C) = 180° - m(\sphericalangle A)$. Se găseşte; a) 94° şi 95°; b) 176°26'8" şi 109°24'; c) 49°44'15" şi 69°35'34"; d) 90° şi 90°, $[AB] \equiv [DC]$, $[AD] \equiv [BC]$ şi $[AC] \equiv [BD]$ (patrulaterul este dreptunghi); e) $m(\sphericalangle D) = 180° - m(\sphericalangle A)$ şi deci: $m(\sphericalangle B) = 180° - [180° - m(\sphericalangle A)] \Rightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle A$ şi $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$. Rezultă că $AB \parallel DC$, $[AD] \equiv [BC]$ şi $[AC] \equiv [BD]$ (patrulaterul este trapez isoscel sau dreptunghi). **48.** În triunghiul NPQ: $m(\sphericalangle NPQ) = 180° - [m(\sphericalangle QNP) + m(\sphericalangle NQP)]$.

În patrulaterul $MNPQ$: $m(\sphericalangle NMQ) = 180° - m(\sphericalangle NPQ) \Rightarrow m(\sphericalangle NMQ) = m(\sphericalangle QNP) + m(\sphericalangle NQP)$ (1); $m(\sphericalangle MQP) = 180° - m(\sphericalangle MNQ) - m(\sphericalangle QNP)$ (2); $m(\sphericalangle QPN) = 180° - m(\sphericalangle QNP) - m(\sphericalangle NQP)$ (3); $m(\sphericalangle MQN) = m(\sphericalangle MPN) = 180° - m(\sphericalangle MNQ) - m(\sphericalangle QNP) - m(\sphericalangle NQP)$ (4); $m(\sphericalangle QMP) = m(\sphericalangle QNP)$ (5). În cazurile numerice particulare, avem în ordine: a) 125°, 70°, 55°, 15°, 70°, 15°; b) 120°, 110°, 60°, 10°, 20°, 10°; c) 80°, 100°, 100°, 60°, 40°, 60°, în acest caz $MN \parallel QP$, $[MQ] \equiv [NP]$ și $[MP] \equiv [NQ]$ (patrulaterul este trapez isoscel): d) 90°, 90°, 90°, 40°, 40°, 40°, în acest caz $MN \parallel QP$, $MQ \parallel NP$ și $[MP] \equiv [NQ]$ (patrulaterul este dreptunghi); e) 90°, 90°, 90°, 45°, 45°, 45°, în acest caz $MN \parallel QP$, $MQ \parallel NP$, $[MN] \equiv [MQ]$ și $[MP] \equiv [NQ]$ (patrulaterul este pătrat).

51. Se exprimă măsura unghiului din M în funcție de măsurile unghiurilor din A și B ale patrulaterului și apoi măsura unghiului din P în funcție de cele ale unghiurilor din C și D (fig. 211). Se ține seama de faptul că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este de 360°. **52.** Fie M între B și N, N între M și C. Se scrie măsura unghiului MNN' ca unghi exterior triunghiului ABN: $m(\sphericalangle MNN') = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BAN) = \frac{1}{2} \cdot m(\overset{\frown}{AC}) + \frac{1}{2} \cdot m(\overset{\frown}{BM'N'})$, sau, pentru că $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{AB}$: $m(\sphericalangle MNN') = \frac{1}{2} \cdot m(\overset{\frown}{AB}) + \frac{1}{2} \cdot m(\overset{\frown}{BM'N'}) \Rightarrow m(\sphericalangle MNN') = \frac{1}{2} \cdot m(\overset{\frown}{ABN'}) = \frac{1}{2} [360° - m(\overset{\frown}{ACN'})] = 180° - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{ACN'}) \Rightarrow m(\sphericalangle MNN') = 180° - m(\sphericalangle MM'N')$. Unghiurile opuse ale patrulaterului fiind suplementare, rezultă că el este inscriptibil. **53.** Patrulaterul EE_1BE_2, EE_2CE_3, EE_3DE_4 și EE_4AE_1 sunt inscriptibile (având unghiurile din E_1, E_2, E_3, E_4 unghiuri drepte). Rezultă, de exemplu, că $\sphericalangle EE_1E_2 \equiv \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle EE_1E_4 \equiv \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle EE_3E_2 \equiv \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle EE_3E_4 \equiv \sphericalangle ADB$. Datorită faptului că $AC \perp BD$ avem, de exemplu, $m(\sphericalangle ACB) = 90° - m(\sphericalangle CBD)$, $m(\sphericalangle ADB) = 90° - m(\sphericalangle CAD)$. Două dintre unghiurile opuse ale patrulaterului $E_1E_2E_3E_4$ pot fi scrise: $m(\sphericalangle E_2E_1E_4) = m(\sphericalangle EE_1E_2) + m(\sphericalangle EE_1E_4) \Rightarrow m(\sphericalangle E_2E_1E_4) = m(\sphericalangle DBC) + m(\sphericalangle CAD)$ (1) și $m(\sphericalangle E_2E_3E_4) = m(\sphericalangle EE_3E_2) + m(\sphericalangle EE_3E_4) \Rightarrow m(\sphericalangle E_2E_3E_4) = m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle ADB)$ (2). Adunând membru cu membru, relațiile (1) și (2) se găsește: $m(\sphericalangle E_2E_1E_4) + m(\sphericalangle E_2E_3E_4) = m(\sphericalangle CBD) + m(\sphericalangle CAD) + m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle ADB) \Rightarrow m(\sphericalangle E_2E_1E_4) + m(\sphericalangle E_2E_3E_4) = [m(\sphericalangle CBD) + m(\sphericalangle ACB)] + [m(\sphericalangle CAD) + m(\sphericalangle ADB)] \Rightarrow m(E_2E_1E_4) + m(\sphericalangle E_2E_3E_4) = [m(\sphericalangle CBD) + 90° - m(\sphericalangle CBD)] + [m(\sphericalangle CAD) + 90° - m(\sphericalangle CAD)] = 180°$. Deci, patrulaterul $E_1E_2E_3E_4$ este inscriptibil. **54.** a) în $\triangle ABC$, segmentul $[B'C']$ este linie mijlocie $\Rightarrow B'C' \parallel A'A_1$, deci patrulaterul $A'B'C'A_1$ este trapez; de asemenea, $[A'B']$ este linie mijlocie $\Rightarrow A'B' = \frac{1}{2} \cdot AB$ (1). În triunghiul dreptunghic AA_1B, segmentul $[A_1C']$ este mediana relativă la ipotenuză

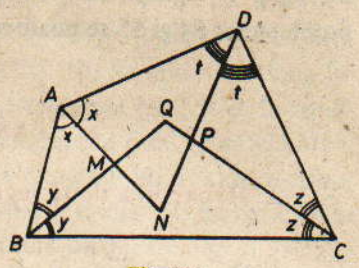


Fig. 211

$\Rightarrow A_1C' = \frac{1}{2} \cdot AB$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow [A'B'] \equiv [A_1C']$, deci trapezul $A'B'C'A_1$ este isoscel; b) Se ştie că trapezul isoscel este inscriptibil, deci punctul A_1 aparţine cercului determinat de punctele A', B', C'. În acelaşi mod se arată că şi picioarele înălţimilor din B şi C aparţin cercului determinat de mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ şi $[CA]$. **55.** a) În $\triangle AHB$, segmentul $[C'A_2]$ este linie mijlocie $\Rightarrow C'A_2 \parallel BH$. Şi cum $BH \perp AC$ şi $C'A' \parallel AC \Rightarrow C'A_2 \perp C'A'$ (3); b) La fel se arată că $B'A_2 \perp B'A'$ (4). Din (3) şi (4) rezultă că patrulaterul $A'B'A_2C'$ este inscriptibil; c) În mod asemănător se demonstrează că patrulaterele $A'B'C'B_2$ şi $A'A_2B'C'$ sunt inscriptibile, deci punctele A_2, B_2 şi C_2 aparţin cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$. **56.** Din rezolvările problemelor **54** şi **55** se poate redacta şi rezolvarea problemei **56.**

EXERCIŢII ŞI PROBLEME (2)

A. Raportul a două segmente (pag. 47)

1. a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{3}{4}$; c) 1; d) $\frac{3}{11}$; e) $\frac{2}{7}$; f) $\frac{5}{7}$; g) $\frac{11}{3}$; h) $\frac{3}{14}$; i) $\frac{1}{2}$. **2.** a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{6}{11}$; c) $\frac{m}{m+n}$; d) $\frac{2}{11}$ şi $\frac{11}{13}$; e) $\frac{7}{11}$ şi $\frac{4}{7}$; f) $\frac{b-a}{a}$ şi $\frac{b-a}{b}$. **3.** a) 18 cm; b) 8 cm; c) 12 cm. **4.** a), b), c) Două puncte $M \neq N$, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NA}$; d) Un singur punct, care este mijlocul O al segmentului $[AB]$. Punctele M şi N sunt simetrice faţă de O. **5.** Se împarte segmentul $[AB]$ în: a) 3, b) 5, c) 7 părţi congruente şi apoi se fixează – în fiecare caz în parte – punctele C şi D. Punctele C şi D sunt simetrice faţă de mijlocul segmentului $[AB]$. **6.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{n-1}$. **7.** a) $\frac{x}{a-x} = 0 \Rightarrow x = 0$, $\frac{x}{a-x} = \frac{1}{100} \Rightarrow x = \frac{a}{101}$ etc; b) $\frac{a}{n+1}$; c) Raportul $\frac{AM}{MB}$ primeşte valori cuprinse între 0 (când $M = A$) şi ∞ (când $M = B$). **8.** a) 28 mm, 32 mm şi 60 mm; b) $\frac{am}{a+b+c+d}$, $\frac{bm}{a+b+c+d}$, $\frac{cm}{a+b+c+d}$, $\frac{dm}{a+b+c+d}$.

B. Teorema lui Thales (pag. 48)

10. Se foloseşte teorema paralelelor echidistante. **11.** Se foloseşte teorema lui Thales şi se găseşte: a) 1,5 şi 3,5; b) 7,5 şi 10,5; c) 6; 4 şi 8; d) 6, $\frac{20}{3}$ şi $\frac{35}{3}$; e) 4; 3 şi 5; f) 5, $\frac{25}{3}$ şi $\frac{40}{3}$. **13.** Se aplică reciproca teoremei lui Thales. În cazurile a) şi b)

$MN \parallel BC$, iar în cazul c) $MN \nparallel BC$. **14.** Se foloseşte reciproca teoremei lui Thales. **15.** Se foloseşte reciproca teoremei lui Thales. **16.** Se foloseşte consecinţa teoremei lui Thales şi se găseşte: a) $B_1B_2 = 6$, $B_2B_3 = 15$, $B_3B_4 = 21$, $B_4C = 18$; b) $B_1B_2 = 20$, $B_2B_3 = 28$, $B_3B_4 = 36$, $B_4C = 32$. **17.** Se foloseşte consecinţa teoremei lui Thales. a) Se calculează B_1B_2, B_2B_3,... din proporţiile: $\frac{4}{B_1B_2} = \frac{20}{48}$, $\frac{4}{B_1B_2} = \frac{6}{B_2B_3}$, ... b) Se scrie proporţia $\frac{4}{7} = \frac{B_1B_2}{B_3B_4}$ şi se formează o proporţie derivată, de exemplu $\frac{4}{4+7} = \frac{B_1B_2}{B_1B_2+B_3B_4}$ etc, ... c) Se scrie proporţia $\frac{7}{6} = \frac{B_3B_4}{B_2B_3}$ şi apoi $\frac{7-6}{6} = \frac{B_3B_4 - B_2B_3}{B_2B_3}$ etc. ... **18.** Se aplică teorema lui Thales în triunghiurile: $OA'B'$ (paralela fiind AB), $OB'C'$ (paralela fiind BC) şi $OC'D'$ (paralela fiind CD). **19.** Se aplică teorema lui Thales în triunghiurile ABC şi ACD şi apoi reciproca teoremei lui Thales în triunghiul ABD. **20.** a) Se aplică teorema lui Thales în triunghiurile DAC (paralela MN), CDB (paralela NP şi BCA (paralela PQ) şi reciproca teoremei lui Thales în triunghiul ABD; b) Se procedează analog, concluzia rămâne adevărată. **21.** Se aplică teorema lui Thales în triunghiul ABC. Considerând succesiv paralelele MN şi MP. Se însumează apoi rapoartele $\frac{NC}{AC}$ şi $\frac{PB}{AB}$. **22.** Fie M între A_1 şi C. În triunghiul CAA_1, din teorema lui Thales ($EM \parallel AA_1$), rezultă $\frac{CE}{AE} = \frac{CM}{A_1M}$, de unde $\frac{AE}{AC} = \frac{A_1M}{A_1C}$ (1). În triunghiul BFM, ($AA_1 \parallel FM$) avem $\frac{AB}{AF} = \frac{BA_1}{A_1M}$, de unde $\frac{AF}{AB} = \frac{A_1M}{BA_1}$ (2). Comparând (1) cu (2) şi ţinând seama de faptul că $[BA_1] \equiv [A_1C]$, rezultă $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$. **23.** Fie $G \in (AC)$ astfel încât $DG \parallel BF$. Se aplică teorema lui Thales în triunghiurile CBF, ($DG \parallel BF$) şi ADG, ($EF \parallel DG$) şi se obţine $\frac{FG}{CF} = \frac{p}{p+q}$ şi $\frac{AF}{PG} = \frac{q}{p}$, de unde $\frac{AF}{FC} = \frac{q}{p+q}$. **24.** a) Se aplică teorema lui Thales: $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = k$ (1), $MP \parallel AC \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BP}{PC} = \frac{1}{k}$; $QP \parallel AB \Rightarrow \frac{CQ}{QA} = \frac{CP}{PB} = k$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că $\frac{AN}{NC} = \frac{CQ}{QA} \Rightarrow [AN] \equiv [CQ]$ şi deci N şi Q sunt simetrice faţă de mijlocul laturii $[AC]$; b) $\frac{AN}{NC} = k \Rightarrow \frac{AN}{AN+NC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow AN = \frac{bk}{k+1}$; $NQ = AC - 2AN \Rightarrow NQ = b - \frac{2bk}{k+1} \Rightarrow NQ = \frac{1-k}{1+k} \cdot b$; c) N şi Q se confundă când $NQ = 0$, deci când $k = 1$, adică atunci când M este mijlocul lui $[AB]$. **25.** Se foloseşte reciproca teoremei lui Thales arătând că $AE' \parallel DE$ şi $AD' \parallel DE$. Prin punctul A există o singură paralelă la DE (axioma lui Euclid). **26.** Se duc, pe liniatura caietului, paralele la latura $[BC]$, la 7 şi respectiv 6 pătrăţele de la vârful A.

27. $z = 23 - 15 = 8$; $\frac{3+x}{2} = \frac{15}{8} \Rightarrow x = 0,75$; $\frac{3}{0,75} = \frac{15-y}{y} \Rightarrow \frac{3,75}{0,75} = \frac{15}{y} \Rightarrow y = 3$.

28. Purtăm pe semidreapta $[Oa$ segmentele $OA = w$ şi $AB = v$, iar pe semidreapta $[Ob$ segmentul $OC = u$ (fig. 212, *a*). Ducem $BD \parallel AC$, $(D \in [Ob)$ şi rezultă că $CD = x$. Figura mai poate fi realizată şi astfel: Desenăm pe semidreapta $[Oa$ segmentele $OM = w$ şi $ON = v$, iar pe semidreapta $[Ob$ segmentul $OP = u$ (fig. 212, *b*). Ducem $NQ \parallel MP$, $(Q \in [Ob)$ şi rezultă că $OQ = x$. Acest al doilea desen

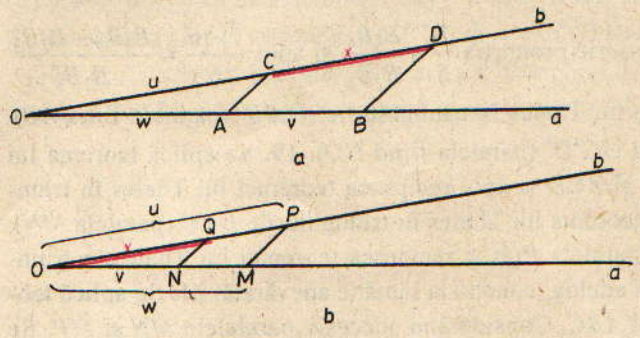


Fig. 212

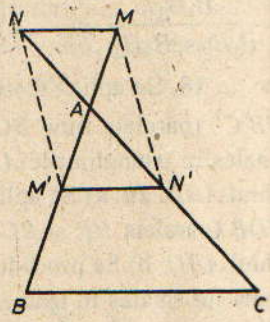


Fig. 213

are avantajul că ocupă mai puţin loc. **29.** Se aplică de două ori teorema lui Thales şi o dată reciproca ei. **30.** În primul caz (fig. 213) luăm $M' \in (AB)$ şi $N' \in (AC)$ astfel încât $[AM'] \equiv [AM]$ şi $[AN'] \equiv [AN]$. Patrulaterul $MNM'N'$ este paralelogram (proprietatea diagonalelor), deci $M'N' \parallel MN$ şi deci $M'N' \parallel BC$. Rezultă că $\frac{AM'}{AB} = \frac{AN'}{AC}$ (teorema lui Thales) şi înlocuind numărătorii cu AM, respectiv AN obţinem relaţia cerută. În cazul al doilea se aplică direct teorema lui Thales. **31.** Folosim consecinţa teoremei lui Thales. $\frac{AM}{NA'} = \frac{MB}{NB'} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{NA'}{NB'}$ (1); $\frac{BC}{B'C'} = \frac{NC}{NC'} \Rightarrow \frac{BC}{NC} = \frac{B'C'}{NC'} = \frac{BC+NC}{NC} = \frac{B'C'+NC'}{NC'} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{NB'}{NC'}$ (2); $\frac{CP}{NC'} = \frac{PA}{NA'} \Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{NC'}{NA'}$ (3). Înmulţind, membru cu membru, relaţiile (1), (2) şi (3) obţinem: $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{NA'}{NB'} \cdot \frac{NB'}{NC'} \cdot \frac{NC'}{NA'} = 1$. Pentru demonstrarea reciprocei se foloseşte metoda reducerii la absurd, bazându-se pe faptul că există un singur punct interior (sau exterior) care se împarte segmentul într-un raport dat. **32.** Un segment paralel cu $[BC]$ care are capetele pe $[AB]$ respectiv (AC) în puncte ce împart respectivele laturi în raportul $\frac{2}{7}$. Daţi şi soluţia grafică. **33.** a). În triunghiurile ABC şi GBC segmentele $[C'B']$ şi $[MN]$ sunt linii mijlocii (fig. 214), ambele paralele cu $[BC]$ şi având ca lungime $\frac{1}{2} \cdot BC$, deci congruente; rezultă că

$C'MNB'$ este paralelogram; b) Din a) rezultă că $[MG] \equiv [GB']$ și $[NG] \equiv [GC']$. Cum M și N sunt mijloacele segmentelor $[BG]$ și $[CG]$, rezultă că $BM = MG = GB' = \frac{1}{3} \cdot BB'$ și $CN = NG = GC' = \frac{1}{3} \cdot CC'$. De unde: $\frac{GB}{BB'} = \frac{GC}{CC'} = \frac{2}{3}$; c) Analog se demonstrează că $\frac{GA}{AA'} = \frac{2}{3}$. d) Pentru demonstrație se ține seama de faptul că există un singur punct, interior unui segment, care împarte segmentul într-un raport dat. **34.** Se folosește teorema lui Thales în triunghiurile ABC și ACD: $\frac{CP}{PB} = \frac{CM}{MA} = \frac{CQ}{QD} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow \frac{BP}{BP+PC} = \frac{MA}{MA+MC} \Rightarrow \frac{BP}{BC} = \frac{MA}{AC}$ (1); $\frac{CQ}{QD} = \frac{CM}{MA} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{CQ+QD}{QD} = \frac{CM+MA}{MA} \Rightarrow \frac{CD}{QD} = \frac{AC}{MA}$ (2); $\frac{CQ}{QD} = \frac{CM}{MA} \Rightarrow \frac{CQ}{CQ+QD} =$ $= \frac{CM}{CM+MA} \Rightarrow \frac{CQ}{CD} = \frac{CM}{AC}$ (3). Din (1) și (2) rezultă $\frac{BP}{BC} \cdot \frac{CD}{QD} = \frac{MA}{AC} \cdot \frac{AC}{MA} = 1$, iar din (1) și (3): $\frac{BP}{BC} + \frac{CQ}{CD} = \frac{MA}{AC} + \frac{CM}{AC} = 1$. **35.** Aplicăm teorema lui Menelaos (problema 31) în triunghiul ABM: $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MO}{OA} = 1$ (1) și în triunghiul AMC: $\frac{AO}{OM} \cdot \frac{MB}{BC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$ (2) Înmulțind, membru cu membru, relațiile (1) și (2), găsim tocmai relația cerută.

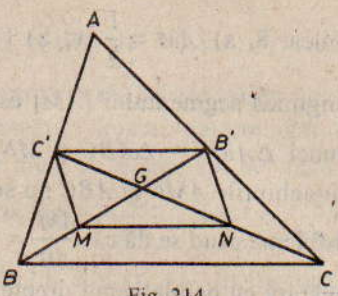


Fig. 214

EXERCIȚII ȘI PROBLEME (3)

A. Teorema fundamentală a asemănării (pag. 61)

2. Se demonstrează că $\triangle ODC \sim \triangle OAB$ și din teorema fundamentală a asemănării rezultă că $OA = 9$ și $OB = 24$, iar perimetrul este 54. **3.** $DE = 10$ cm, $AE = 12$ cm. **4.** a) 32 dm, 24 dm, 18 dm, 24 dm; b) 36 dm, 12 dm, 9 dm, 27 dm. **5.** Din $\triangle NAB \sim \triangle NCD$ rezultă $\frac{NA}{AC} = \frac{NB}{BD} = \frac{AB}{AB+CD}$. În cazurile numerice se găsește: a) 14 m, 8 m, 7 m și 4 m; b) 10 cm, 6 cm, 5 cm, 3 cm, **6.** 1) adevărat; 2) fals. **7.** Se disting două situații posibile: 1) M între A și B; 2) A între M și B. Se folosește teorema fundamentală asemănării ($\triangle AMN \sim \triangle ABC$): $\frac{AM}{6} = \frac{1}{k} \Rightarrow$ $\Rightarrow AM = \frac{6}{k}$. Pentru MB se găsește $\frac{6(k-1)}{k}$ în primul caz și $\frac{6(k+1)}{k}$ în cazul al

doilea. **8.** a) $AM = \frac{1}{2} \cdot x$; b) Funcția $f(x)$ primește valori în intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; c) lungimea segmentului $[AM]$ este cuprinsă între 0 și 4 dm. **9.** a) Dacă $N \in (AC)$, atunci $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ și $MN \parallel BC$. Dacă $N \in AC$ și A este între N și C, atunci triunghiurile AMN și ABC nu sunt asemenea și $MN \nparallel BC$. În același mod se tratează problema când se dă că $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ și $N \in (AC)$; b) Nu putem afirma nimic în legătură cu paralelismul dreptelor MN și BC în această situație, deoarece problema nu se încadrează în nici un caz de asemănare cunoscut. Pe dreapta AC există două puncte a căror depărtare la punctul M să fie cât $\frac{1}{3}$ din BC. Pentru cazul când $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{3}{5}$ și $N \in (AC)$ se face un raționament asemănător; c) Triunghiurile sunt asemenea ($\triangle AMB \sim \triangle ACB$), dar $MN \nparallel BC$ (dreptele MN și BC se zice că sunt antiparalele); d) Același răspuns ca la punctul precedent ($MN \nparallel BC$). **10.** Se aplică de două ori teorema fundamentală a asemănării. **11.** Se aplică reciproca teoremei lui Thales, apoi teorema fundamentală a asemănării. **12.** $y = \frac{ab + cx - bx}{a}$. **13.** Se aplică teorema fundamentală a asemănării în $\triangle ABC$ (cu paralela MN) și apoi în $\triangle ACD$ (cu paralela NP). **14.** Fie x lungimea segmentului $[PQ]$. Din $\triangle AQP \sim \triangle ABC$ avem: $\frac{AQ}{AB} = \frac{x}{b} \Rightarrow \frac{AB - AQ}{AB} = \frac{b - x}{b} \Rightarrow \frac{BQ}{AB} = \frac{b - x}{b}$ (1). Din $\triangle BQP \sim \triangle BAD$ avem: $\frac{BQ}{AB} = \frac{x}{a}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow x = \frac{ab}{a + b}$. **15.** Fie E intersecția laturilor neparalele ale trapezului (fig. 215). Fie $4a$ și $5a$ lungimile segmentelor $[AM]$ și $[MB]$. Notăm, de asemenea: $EA = b$ și $MN = x$. Vom considera triunghiurile asemenea ($\triangle EAD \sim \triangle EMN$ și $\triangle EAD \sim \triangle EBC$) în care vom folosi teorema fundamentală a asemănării: $\frac{EA}{EM} = \frac{4}{x}$ sau $\frac{b}{4a + b} = \frac{4}{x}$ (1); $\frac{EA}{EB} = \frac{4}{12}$ sau $\frac{b}{9a + b} = \frac{1}{3}$ (2). Din (2) se deduce că $b = 4{,}5\,a$. Înlocuind pe b cu această valoare în (1) găsim: $\frac{4{,}5a}{8{,}5a} = \frac{4}{x}$ sau $\frac{9}{17} = \frac{4}{x}$, de unde: $x = \frac{68}{9}$. **16.** Se aplică teorema fundamentală a asemănării în triunghiul SOT (cu

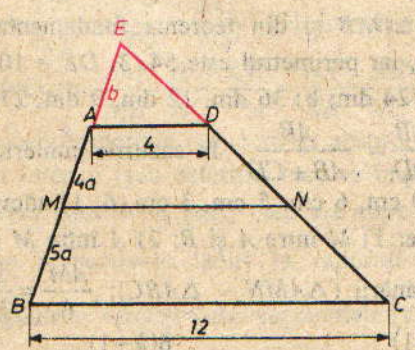


Fig. 215

paralela $O'T'$), se găsește $SO=\frac{R(R+r)}{R-r}$. **17.** Se aplică de două ori teorema fundamentală a asemănării în două triunghiuri cu aceeași bază (o bază a trapezului) și consecința teoremei lui Thales. **18.** Prin intersecția dreptei determinată de mijlocul bazei mari și unul dintre capetele bazei mici cu diagonala se duce o paralelă la bază. **19.** $MO=\frac{dR}{R-r}$, $MO'=\frac{dr}{R-r}$. **20.** $MO=\frac{dR}{R+r}$, $MO'=\frac{dr}{R+r}$. **21.** $MO=\frac{dR}{R-r}$, $MO'=\frac{dr}{R-r}$. **22.** Fie P intersecția lui BM cu AD. În triunghiul MAP, D este mijlocul lui $[AP]$, iar paralela BN la AP determină triunghiurile asemenea MAP și MNB. Aplicăm teorema fundamentală a asemănării $\frac{MA}{MN}=\frac{AP}{BN}$. Cum $AP = 2 \cdot AD$ și $AD = BC = 2 \cdot BN$, rezultă că $AP = 4 \cdot BN$, deci $\frac{MA}{MN}=$

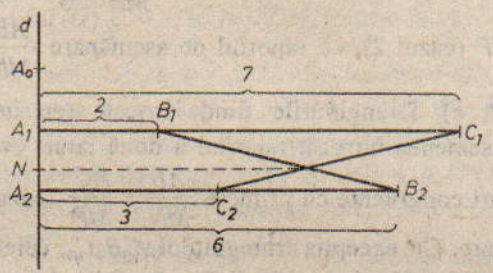


Fig. 216

$=\frac{4 \cdot BN}{BN}=4$. **23.** a) Folosim notațiile din figura 216: $B_1C_1 = 5$ cm, $B_2C_2 = 3$ cm. Problema revine la a împărți segmentul $A_1A_2 = 1$ cm în raportul $\frac{5}{3}$. Din $A_0N = 1 + \frac{5}{8}=\frac{13}{8}$ (cm) și $NM=3+\frac{3}{8}\cdot 4=4{,}5$ (cm); b) Procedeu asemănător cu cel de la a) $A_0Q=\frac{41}{11}$ cm, $PQ=\frac{131}{11}$ cm.

B. Triunghiuri asemenea (pag. 65)

24. a) 8 cm; 10 cm; 14 cm sau 18 cm; 22,5 cm; 31,5 cm; b) 6 cm; 7,5 cm; 10,5 cm sau 24 cm; 30 cm; 42 cm; c) 1,2 cm; 1,5 cm; 2,1 cm sau 120 cm; 150 cm; 210 cm; d) $\frac{12m}{n}$, $\frac{15m}{n}$, $\frac{21m}{n}$ sau $\frac{12n}{m}$, $\frac{15n}{m}$, $\frac{21n}{m}$; e) $12\cdot\frac{1}{1}=12$ (cm); $15\cdot\frac{1}{1}=$ $= 15$ (cm); $21\cdot\frac{1}{1}=21$ (cm) și deci triunghiurile sunt congruente. **25.** Rapoartele de

asemănare sunt: a) 24 : 10 = 2,4; b) 36 : 12 = 3; c) 42 : 84 = 0,5. Laturile triunghiului asemenea sunt: a) $B'C'$ = 36 cm : 2,4 = 15 cm; $C'A'$ = 42 cm : 2,4 = = 17, 5 cm; b) $A'B'$ = 24cm : 3 = 8 cm; $C'A'$ = 42 cm : 3 = 14 cm; c) $A'B'$ = 24 cm : : 0,5 = 48 cm; $B'C'$ = 36 cm : 0,5 = 72 cm. **26.** $k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. **27.** $k = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$. În general, rapoartele de asemănare se înmulţesc. **28.** a) $\triangle ABC \sim \triangle B_1A_1C_1$; b) $\triangle ABC \sim$ $\sim \triangle A_1B_1C_1$; c) Nu sunt asemenea; d) $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ sau $\triangle ABC \sim \triangle A_1C_1B_1$; e) Sunt asemenea în şase moduri ($\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ABC \sim \triangle A_1C_1B_1$, $\triangle ABC \sim$ $\sim \triangle B_1A_1C_1$ etc.); f) $\triangle ABC \sim \triangle C_1A_1B_1$; g) Nu sunt asemenea; h) $\triangle ABC \sim$ $\sim \triangle A_1B_1C_1$; i) $\triangle ABC \sim \triangle C_1A_1B_1$ sau $\triangle ABC \sim \triangle C_1B_1A_1$; j) Nu sunt asemenea. **29.** a) $\triangle ABC \sim \triangle MPN$ (cazul 2), raportul de asemănare $\frac{AB}{MP} = \frac{1}{2}$; b) $\triangle ABC \sim$ $\sim \triangle MPN$ (cazul 2), raportul de asemănare $\frac{AB}{MP} = \frac{1}{3}$; c) Nu sunt asemenea; d) $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ (cazul 2), cu raportul de asemănare $\frac{AB}{MN} = 1$, din care cauză $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$; e) Triunghiurile fiind isoscele (cu unghiurile de la vârf congruente) sunt asemenea întrucât raportul a două laturi este acelaşi cu raportul celorlalte două laturi congruente cu primele $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP}$ (cazul 2). **30.** Se foloseşte cazul 3 de asemănare. Cu excepţia triunghiului $A_4B_4C_4$, celelalte patru triunghiuri sunt asemenea între ele. **31.** a), b), c), d) Da. Se foloseşte cazul 3 de asemănare. **38.** În triunghiul dreptunghic MNP: m($\sphericalangle N$) = 90° – m($\sphericalangle P$), adică m($\sphericalangle N$) = 37°. $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ (cazul 1). **39.** $\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB}$ sau, folosind datele numerice, $\frac{EF}{5} = \frac{DF}{10} = \frac{99}{9} = 11$, de unde EF = 55 cm şi DF = 110 cm. **41.** Se demonstrează că $\triangle ABC \sim \triangle ANM$ şi se găseşte că: AM = 3 cm, AN = 2 cm, $MN = \frac{8}{3}$ cm. **42.** Se demonstrează că $\triangle ABC \sim \triangle MNC$ şi se găseşte că: CM = 4 cm, $CN = 3\frac{5}{9}$ cm, $MN = 2\frac{2}{3}$ cm. **43.** Problema trebuie cercetată în două situaţii: a) Când A este exterior cercului (cercul intersectează laturile triunghiului) şi b) Când A este interior cercului (cercul intersectează prelungirile laturilor). Demonstrarea asemănării se face în ambele situaţii potrivit cazului 1 de asemănare. Se găseşte în ambele cazuri $AE = \frac{7}{3}$ cm şi $AF = \frac{5}{3}$ cm. **44.** În triunghiul isoscel cu unghiul de la vârf cu măsura de 36°, unghiurile de la baza lui au măsura de $\frac{180° - 36°}{2} = 72°$. Cum [$BD$] este bisectoarea unghiului B cu măsura de 72°, rezultă că m($\sphericalangle CBD$) = 36°. Triunghiurile ABC şi BCD, având unghiurile din A şi B congruente şi unghiul din C

comun, sunt asemenea (cazul 1 de asemănare) – $\triangle ABC \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow AB \cdot DC = BC^2$.

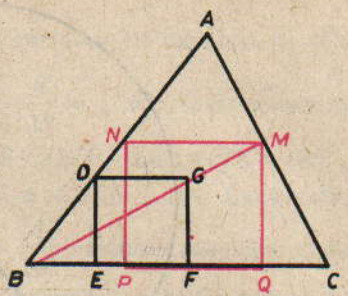


Fig. 217

45. Da. Rezultă din asemănările: $\triangle MGE \sim \triangle MAN$ şi $\triangle MGF \sim \triangle MAP$ care au acelaşi raport de asemănare. **46.** Se foloseşte faptul că diagonalele pătratelor sunt proporţionale cu laturile, unghiul dintre diagonalele celor două pătrate este de 90°şi asemănarea triunghiurilor PCM şi NBM. **47.** Se construieşte un pătrat $DEFG$ care are vârful D pe latura (AB) şi vârfurile E şi F pe latura (BC) – figura 217. Dreapta BF se intersectează cu AC în M. Ducând din M paralela MN la BC şi perpendiculara MQ pe BC se obţine pătratul căutat $MNPQ$, **48.** Se aplică de două ori teorema fundamentală a asemănării şi apoi cazul 3 de asemănare. **49.** Se foloseşte faptul că înălţimile în triunghiurile echilaterale sunt proporţionale cu laturile şi unghiurile FBG şi CBD au măsura de 120°. **50.** $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle DBL$ $\left(\text{au aceeaşi măsură: } \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{IC})\right)$, $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle IDL$ (opuse la vârf) şi $\sphericalangle IDL \equiv \sphericalangle BDL$. ($[DL$ fiind bisectoare), deci $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BDL$. Se foloseşte cazul 1 de asemănare. **51.** Rezultă din asemănarea triunghiurilor AVC şi EUC. **52.** Se demonstrează că $\triangle ABF \sim \triangle CGD$ (cazul 2). **53.** Rezultă din asemănarea triunghiurilor CDF şi EAD (cazul 3). **54.** a) Se demonstrează congruenţa $\triangle AMB \equiv \triangle APD$; b) Din a) rezultă: $\sphericalangle AMS \equiv \sphericalangle SPT$, apoi $\sphericalangle ASM \equiv \sphericalangle TSM$ (opuse la vârf). Se foloseşte cazul 1; c) Dacă notăm cu k raportul $\frac{AB}{AM}$, rezultă că şi $\frac{DE}{NQ} = k$. Se demonstrează că $\triangle ADE \sim$ $\sim \triangle MNQ$ (cazul 2), de unde $\frac{AE}{MQ} = \frac{AD}{MN}$ sau $\frac{AE}{MQ} = \frac{AB}{MN}$. **55.** a) Rezultă din congruenţa $\triangle BCE \equiv \triangle ACD$; b) Din a) rezultă că patrulaterul $ABCG$ este inscriptibil şi de aici $\sphericalangle GAF \equiv \sphericalangle CBF$ şi demonstraţia este imediată; c) Din a) rezultă că patrulaterul $CDEG$ este inscriptibil etc. **56.** Se duce înălţimea AM, $(M \in (BC))$. Se demonstrează apoi asemănările $\triangle DPB \sim \triangle AMB$ şi $\triangle DQC \sim \triangle AMC$. De unde rezultă relaţia cerută. **57.** Se arată că triunghiurile BAC şi CAD sunt asemenea (cazul 2). **58.** a), b) Triunghiurile respective au câte două unghiuri respectiv congruente. Se găseşte $BM = \frac{AB \cdot CD}{AC}$ şi $MD = \frac{AD \cdot BC}{AC}$; d) Pentru demonstrarea reciprocei se folosesc cunoştinţele referitoare la inegalităţile între laturile unui triunghi şi primul caz de asemănare şi, prin reducere la absurd, se obţine o contradicţie. **59.** Considerăm problema rezolvată. Fie $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (fig. 218). Fie M punctul care îşi corespunde lui însuşi prin asemănare. Rezultă că $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle EDM$, deci, prelungind latura $[DE]$ până se intersectează latura $[AB]$ în G, punctele A, G, M, D sunt conciclice. Deci construim cercul circuscris triunghiului AGD, pe care se găseşte punctul M. De asemenea, $\sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle DFM$ şi prelungind latura $[FD]$ ea va intersecta latura $[AC]$ în H, deducem că punctele C, H, M, F sunt conciclice. Prin urmare cercurile circumscrise triunghiurilor AGD şi CHF au pe M ca unul dintre punctele lor de

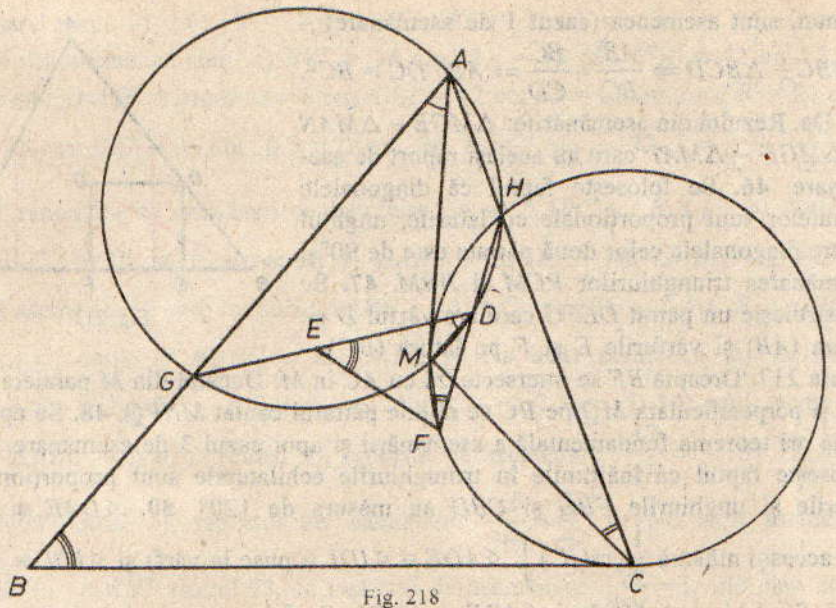


Fig. 218

intersecție. **60.** Demonstrați că patrulaterele $BPIM$ și $CNIQ$ sunt romburi. Triunghiurile ABC și IPQ, având două laturi respectiv paralele $AB \parallel IP$ și $AC \parallel IQ$ și cea de-a treia pe aceeași dreaptă suport, sunt asemenea. **61.** Considerăm cele două unghiuri ale triunghiului ABC față de care punctul T este punct din exteriorul lor – de exemplu unghiurile ABC și BAC –. Vom avea: $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ATC \equiv \sphericalangle A'TC' \equiv \sphericalangle A'B'C'$ și $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BTC \equiv \sphericalangle B'T'C' \equiv \sphericalangle B'A'C'$. Deci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (cazul 1). **62.** Se folosește reciproca problemei 31 de la pagina 51 (teoremei lui Menelaos) pentru triunghiul $OO'O''$. Tangenta comună cercurilor $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ determină, împreună cu dreapta OO' și razele celor două cercuri, triunghiuri asemenea (fig. 219). Putem deci scrie $\frac{OA}{AO'} = \frac{R}{R'}$ și, analog, pentru celelalte perechi

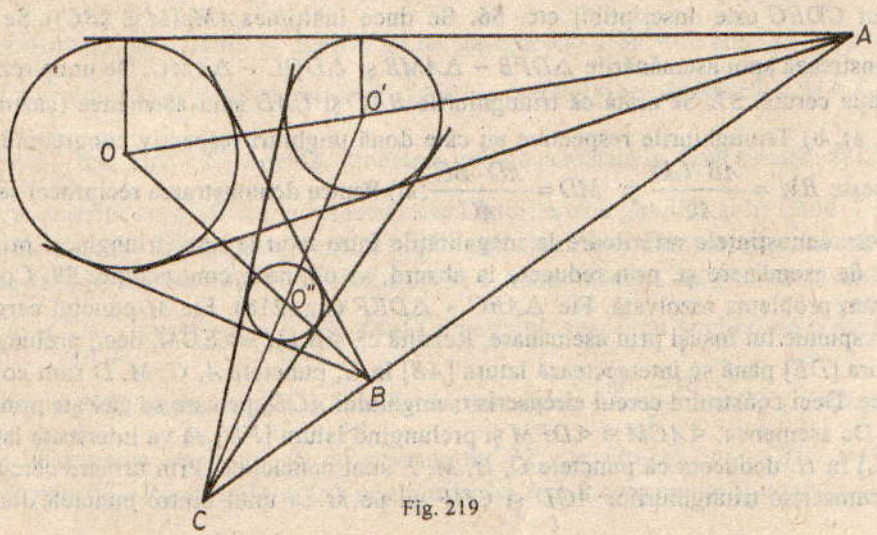


Fig. 219

de triunghiuri: $\frac{O'C}{CO''}=\frac{R'}{R''}$, $\frac{O''B}{BO}=\frac{R''}{R}$. Produsul, membru cu membru, al celor trei relații obținute ne dă $\frac{OA}{AO'}\cdot\frac{O'C}{CO''}\cdot\frac{O''B}{BO}=\frac{R}{R'}\cdot\frac{R'}{R''}\cdot\frac{R''}{R}=1$. **63.** Se demonstrează că patrulaterul $ABDE$ este inscriptibil. Atunci, din $m(\sphericalangle AED)+m(\sphericalangle ABD)=180°$ și $m(\sphericalangle AED)+m(\sphericalangle DEC)=180°$, rezultă că $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle DEG$ ... **64.** Dacă notăm $DE\cap BC=\{N\}$, atunci avem: $\frac{AD}{AB}=\frac{MN}{BM}=\frac{MN}{MC}=\frac{AE}{AC}$, de unde rezultă și relația cerută. **65.** a) Da. Reciproca teoremei fundamentale a asemănării; b) Se deduce mai întâi că $AB\parallel A'B'$ și apoi, împreună cu a), rezultă că $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$; c) Din $AM\parallel BC$, $A'\in(MA$ și $BC\parallel B'C'$, rezultă $MA'\perp B'C'$. Analog $MB'\perp A'C'$; d) Din $\sphericalangle MAB\equiv\sphericalangle MAC$, $AB\parallel A'B'$ și $AC\parallel A'C'$, rezultă $\sphericalangle MA'B'\equiv\sphericalangle MA'C'$ (unghiurile corespondente sunt congruente). Analog $\sphericalangle MB'A'\equiv\sphericalangle MB'C'$; e) Da. Mediatoarele laturilor triunghiului ABC sunt și mediatoare ale triunghiului asemenea $A'B'C'$. **66.** Demonstrați că cele două triunghiuri sunt asemenea. **67.** Se demonstrează că laturile triunghiului MNP sunt linii mijlocii în triunghiul ABC. De aici rezultă răspunsurile la cele două întrebări. **68.** Se demonstrează că triunghiurile ABC și DAB sunt asemenea. Din asemănare rezultă că $AD\cdot BC=AB^2$. **69.** a) Da. Cazul 1 de asemănare; b) Da. **70.** a) $[MN]$ este linie mijlocie în trapez; b) și c) Rezultă din faptul că segmentele $[MP]$ și $[QN]$ sunt incluse în linia mijlocie a trapezului; d) Din c) rezultă că $MP+QN=DC\Rightarrow PQ=MN-CD$... . **71.** Din asemănarea triunghiurilor OAM și OCN rezultă că $\frac{OM}{ON}=\frac{OA}{OC}=$ constant.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME (4)

A. Teorema înălțimii (pag. 77)

1. $\sqrt{7\cdot63}=21$ (cm). **2.** $\sqrt{2\cdot4{,}5}=3$ (dm). **3.** 6 cm. **4.** $24^2:10=57,6$ (cm). **5.** 4 cm. **6.** $5\sqrt{3}$ cm.

B. Teorema catetei (pag. 77)

7. $14^2:50=3,92$ (cm); $50-3,92=46,08$ (cm). **8.** $\frac{25}{13}$ cm, $\frac{144}{13}$ cm. **9.** $15^2:9-9=16$ (cm). **10.** Lungimea proiecției pe ipotenuză a catetei de 10 cm este $\sqrt{10^2:4}=5$ (cm), iar lungimea ipotenuzei de $5\cdot4=20$ (cm). **11.** $\sqrt{300\cdot108}=180$ (cm), și $\sqrt{300\cdot(300-108)}=240$ (cm). **12.** $\sqrt{50\cdot5}=5\sqrt{10}$ (cm), $\sqrt{50\cdot(50-5)}=15\sqrt{10}$ (cm), $\sqrt{5\cdot(50-5)}=15$ (cm).

C. Teorema lui Pitagora (pag. 78)

14. Lungimea proiecției catetei cunoscute este de $\sqrt{10^2-8^2}=6$ (cm), iar cea a ipotenuzei de $10^2:6=\frac{50}{3}$ (cm). **15.** $\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$. **16.** $\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$. **17.** $\sqrt{16:2}=2\sqrt{2}$ (cm). **18.** Lungimea ipotenuzei este de $3\cdot 2=6$ (cm), a celeilalte catete de $\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ (cm), lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză de $3^2:6=1{,}5$ (cm) și $6-1{,}5=4{,}5$ (cm), iar a înălțimii de $\sqrt{1{,}5\cdot 4{,}5}=1{,}5\sqrt{3}$ (cm). **19.** Latura „oblică" are lungimea de $\sqrt{(10-7)^2+4^2}=5$ (cm), iar diagonalele de $\sqrt{10^2+4^2}=2\sqrt{29}$ (cm) și $\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$ (cm). **20.** Problema admite două soluții, după cum lungimea de 15 cm este a diagonalei „mici" sau a diagonalei „mari". În primul caz înălțimea este de $\sqrt{15^2-7^2}=4\sqrt{11}$ (cm), latura „oblică" de $\sqrt{(11-7)^2+\left(4\sqrt{11}\right)^2}=8\sqrt{3}$ (cm) și diagonala „mare" de $\sqrt{11^2+\left(4\sqrt{11}\right)^2}=$ $=3\sqrt{33}$ (cm). În al doilea caz: înălțimea este de: $\sqrt{15^2-11^2}=2\sqrt{26}$ (cm), latura „oblică" de $\sqrt{(11-7)^2+\left(2\sqrt{26}\right)^2}=2\sqrt{30}$ (cm) și diagonala „mică" de $\sqrt{7^2+\left(2\sqrt{26}\right)^2}=3\sqrt{17}$ (cm). **21.** 8 cm; 6,25 cm. **22.** 9,6 cm. **23.** $\sqrt{209}$ cm. **24.** $\sqrt{55}$ cm. **25.** $2\sqrt{Rr}$. **26.** $\sqrt{391}$ cm, $\sqrt{231}$ cm. **27.** Este „mai mică" cea dată (cealaltă are lungimea de $\sqrt{259}$ cm $\simeq$ 16,1 cm). **28.** Latura dată este latura cea „mică" a dreptunghiului, cealaltă fiind de $\sqrt{51}$ cm $\simeq$ 7,14 cm. **29.** Lungimile laturilor sunt $5\sqrt{10}$ cm, $9\sqrt{10}$ cm, $13\sqrt{10}$ cm, $15\sqrt{10}$ cm, iar cele ale diagonalelor 40 cm și 48 cm. **30.** 24 cm, 25 cm, 15 cm. **31.** $\frac{4a}{5}$. **32.** Se duce înălțimea $[AA']$ și se folosește asemănarea: $\triangle AA'B \sim \triangle BMC$. **33.** Punând expresiile sub forme din ce în ce mai simple, se ajunge la relații date de teorema lui Pitagora. **34.** Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $AA'B$ și $AA'C \Rightarrow AA'^2 = AB^2 - A'B^2 = AC^2 - A'C^2$ sau, cu datele numerice cunoscute: $169-(15-A'C)^2=196-A'C^2$. De aici rezultă că $A'C=\frac{42}{5}$ cm și apoi $AA'=\frac{56}{5}$ cm. **35.** a) Având două dintre unghiurile opuse drepte, patrulaterul $APQD$ este inscriptibil și deci $m(\sphericalangle PDC) = m(\sphericalangle PAC) = 30°$; b) Fie $CP = x$, atunci $DP = 2x$ și $CD = x\sqrt{3} = a \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{5}$, $BP = a-\frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BP = \frac{(3-\sqrt{3}a)}{3}$. În triunghiul ABP, avem $AP = \sqrt{a^2+\frac{(\sqrt{3}-1)^2a^2}{3}} \Rightarrow AP = a\sqrt{\frac{7-2\sqrt{3}}{3}}$. Din $\triangle QAP \sim \triangle PDC$: $\frac{QP}{CP}=\frac{AP}{CD}$, adică $\frac{QP\sqrt{3}}{a}=\sqrt{\frac{7-2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow QP=\frac{a}{3}\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ și $AQ=\frac{2a}{3}\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. **36.** Cu notațiile

din figura 112, segmentul $[MN]$ este linie mijlocie în trapez, $MN = \frac{a+b}{2}$, $CD = a + b$, $AB = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{ab}$, MP este rază în semicerc: $MP = \frac{1}{2} \cdot AB \Rightarrow MP = \sqrt{ab}$. Se demonstrează că $\triangle PQM \sim \triangle MPN$, de unde rezultă că $MP^2 = QP \cdot MN$ sau $QP = \frac{MP^2}{MN}$, adică $QP = \frac{2ab}{a+b}$. Se observă că $QP \leq MP \leq MN$, adică tocmai relaţia cerută. **37.** Ducând înălţimea $[AD]$ şi mediana $[AM]$ se obţin triunghiurile dreptunghice ADB, ADM şi ADC (fig. 220). Exprimăm lungimea catetei comune din triunghiurile ADB şi ADC: $AD^2 = AB^2 - BD^2 = AC^2 - DC^2$. Dacă notăm $BC = a$, $BM = MC = \frac{a}{2}$, $AC = b$, $AB = c$ şi $DM = x$, putem scrie: $c^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$ sau $\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = b^2 - c^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + x - \frac{a}{2} + x\right) = b^2 - c^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \cdot 2x = b^2 - c^2 \Rightarrow x = \frac{b^2 - c^2}{2a}$. Din triunghiul ADM: $AM^2 = AD^2 + DM^2$, rezultând tocmai relaţia cerută. **38.** Se porneşte de la proprietatea diagonalelor într-un paralelogram şi notându-se lungimile laturilor cu a, b şi ale diagonalelor cu d_1, d_2, se obţine $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{d_2^2}{4}$, care conduce la $2(a^2+b^2) = d_1^2 + d_2^2$.

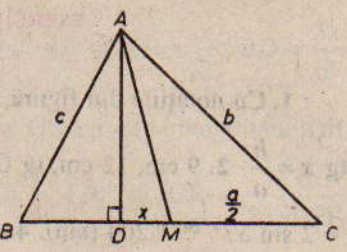


Fig. 220

39. $x = \frac{(2-\sqrt{2})a}{2}$. **40.** Avem $\triangle ABM \equiv \triangle ADN$ $(IC) \Rightarrow [BM] \equiv [DN] \Rightarrow [CM] \equiv$ $\equiv [CN]$. Deci triunghiul CMN este dreptunghic isoscel. Fie $AM = AN = MN = x$. Ducem diagonala $[AC]$ şi exprimăm lungimea ei în două moduri: a) ca sumă a lungimilor înălţimilor triunghiului echilateral AMN şi triunghiului dreptunghic isoscel CMN; b) în funcţie de latura pătratului. Se obţine ecuaţia: $\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2} = a\sqrt{2}$, a cărei soluţie este: $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\ x = a\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{2a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow x = a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. **41.** Se scriu relaţiile teoremei catetei în triunghiul ACD şi se împart membru cu membru. **42.** Fie ABC triunghiul dreptunghic în A cu $AD \perp BC$. Un triunghi de felul celor căutate este: $AB = 15$, $AC = 20$, $BC = 25$, $AD = 12$, $BD = 9$, $DC = 16$ sau oricare altul ale cărui laturi au lungimile multiplicate cu acelaşi factor (număr natural) – $AB = 15k$, $AC = 20k$, $BC = 25k$, $AD = 12k$, $BD = 9k$, $DC = 16k$, $(k \in N^*)$.

1. Cu notațiile din figură, se fac înlocuirile: $\sin x = \frac{c}{a}$, $\cos x = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} x = \frac{c}{b}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{b}{a}$. **2.** 9 cm, 12 cm, $\operatorname{tg} C = \frac{4}{3}$. **3.** $m(\sphericalangle C) = 37°$, $b = 2 \sin 53° \simeq 1{,}598$ (cm), $c = 2 \sin 37° \simeq 1{,}204$ (cm). **4.** $a = \frac{5}{\sin 37°} \simeq 8{,}306$ (cm), $c = \frac{5}{\operatorname{tg} 37°} \simeq 6{,}631$ (cm). **5.** a) $\cos B = \frac{c}{a}$, $\frac{c}{226} = \frac{112}{113} \Rightarrow c = \frac{226 \cdot 112}{113} = 224$ (cm), $b = \sqrt{226^2 - 224^2} = \sqrt{(226+224)\cdot(226-224)} = \sqrt{450 \cdot 2} = \sqrt{900} = 30$ (cm); b) $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$, $\frac{b}{c} = \frac{9}{40} \Rightarrow c = \frac{40 \cdot b}{9}$, $b^2 + c^2 = 34^2$, $b^2 + \frac{1600 \cdot b^2}{81} = 34^2 \Rightarrow b^2 = \frac{34^2 \cdot 9^2}{41^2} \Rightarrow$ $\Rightarrow b = \frac{34 \cdot 9}{41} = \frac{306}{41}$ (cm), $c = \frac{40}{9} \cdot \frac{34 \cdot 9}{41} = \frac{40 \cdot 34}{41} = \frac{1360}{41}$ (cm); c) $\sin B = \frac{b}{a}$, $\frac{92}{a} = \frac{46}{65} \Rightarrow a = \frac{92 \cdot 65}{46} = 130$ (cm), $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $c = \sqrt{130^2 - 92^2} = \sqrt{222 \cdot 38} = 2\sqrt{111 \cdot 19} = 2\sqrt{2109}$ (cm); d) $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$, $\frac{b}{c} = \frac{77}{36} \Rightarrow c = \frac{36 \cdot b}{77}$, $b^2 + c^2 = 850^2$, $b^2 + \frac{1296}{5929} \cdot b^2 = 850^2 \Rightarrow \frac{7225}{5929} \cdot b^2 = 850^2 \Rightarrow \frac{85^2}{77^2} \cdot b^2 = 850^2 \Rightarrow b^2 = \frac{850^2 \cdot 77^2}{85^2} \Rightarrow b = \frac{850 \cdot 77}{85} = 770$ (cm), $c = \frac{36}{77} \cdot 770 = 360$ (cm); e) $\operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}$, $\frac{b}{c} = \frac{21}{20} \Rightarrow c = \frac{20 \cdot b}{21}$, $b^2 + c^2 = 58^2$ etc. Se găsește $b = 42$ cm, $c = 40$ cm; f) $b = \frac{888\sqrt{1513}}{1513}$ cm $\simeq 22{,}8$ cm, $c = \frac{2738\sqrt{1513}}{1513}$ cm $\simeq 70{,}4$ cm. **6.** $\operatorname{tg} B = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $\operatorname{tg} 30° \simeq 0{,}577 < \operatorname{tg} B < \operatorname{tg} 31° \simeq 0{,}601 \Rightarrow m(\sphericalangle B) \simeq 31°$, $m(\sphericalangle C) \simeq 59°$. **7.** Folosim o construcție ajutătoare. Ducem, de exemplu, perpendiculara din B pe AC (fig. 221). În $\triangle BDA$: $AD = \frac{1}{2} \cdot AB$, $AD = 2$ cm și $BD = 2\sqrt{3}$ cm. În $\triangle BDC$: $DC = 5 - 2 = 3$ (cm), $BC = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{21}$ (cm). **8.** $BC = 2b \cos C$, $A'C = b \operatorname{ctg} C$. **9.** Dacă notăm cu E piciorul înălțimii din I pe AB, se demonstrează că $\triangle AIE \sim \triangle ABD$, de unde se deduce că $AI = \frac{2r \cdot AB}{BC}$. Apoi $AD = AI + r \Rightarrow$ $\Rightarrow AD = \frac{r(BC + 2AB)}{BC}$. Ținând seama de faptul că $BC = 2\,AB \sin \alpha$, se găsește: $AB = \frac{r(1 + \sin\alpha)}{\sin\alpha \cos\alpha}$ și

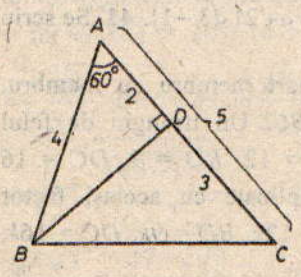


Fig. 221

$BC = \frac{2r(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$. **10.** Fie $D \in (AB)$ astfel ca $CD \perp AB \Rightarrow AD = \frac{x}{2}$; $BD = \frac{5x}{2}$, $CD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $BC = x\sqrt{7}$. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, $m(\sphericalangle BAC) = 60° \Rightarrow m(\overset{\frown}{BC}) = 120° \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 120°$ și $OB = \frac{BC}{2\sin 60°}$. Deci, $R = \frac{x\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{21}}{3}$. **11.** $m(\sphericalangle C) = 30°$; $\triangle ABD$ – isoscel: $AD = BD = 3$ cm; $AC = 6$ cm; $BC = 3(1+\sqrt{3})$ cm. **12.** Se duce înălțimea $[AA']$. Triunghiurile dreptunghice $AA'C$ și $AA'B$ au: primul un unghi de 60° și al doilea pe ambele de 45°. $A'C = 1{,}25$ cm; $AA' = 1{,}25\sqrt{3}$ cm; $BC = 1{,}25(1+\sqrt{3})$ cm; $AB = 1{,}25\sqrt{6}$ cm. **13.** $\sin C = \frac{AD}{AC}$; $AC = \frac{AD}{\sin C}$, $AC = \frac{60}{0{,}8} = 75$ (cm), $\cos B = \frac{BD}{AB}$, $BD = AB\cos B$; $AB^2 - BD^2 = 3600$; $AB^2 - AB^2\cos^2 B = 3600 \Rightarrow AB^2(1 - \cos^2 B) = 3600 \Rightarrow AB^2 = \frac{3600}{1-\cos^2 B}$, $AB^2 = \frac{3600}{1-\frac{2r}{169}} \Rightarrow AB^2 = \frac{169\cdot 3600}{144} \Rightarrow AB = 65$ cm; $BC = \sqrt{65^2 - 60^2} + \sqrt{75^2 - 60^2} \Rightarrow BC = 25 + 45 \Rightarrow BC = 70$ cm; **14.** Fie $[CC']$ înălțimea din vârful C. Se observă că $\triangle BCC'$ este dreptunghic cu $m(\sphericalangle B) = 30°$ și $\triangle ACC'$ este dreptunghic isoscel. Se găsește $AB = 3(\sqrt{3}-1)$ cm, $AC = 3\sqrt{2}$ cm și $CC' = 3$ cm. **15.** $AB = BC = AD = 30$ cm. $AC = BD = 24\sqrt{5}$ cm. **16.** $\frac{7}{\sqrt{149}}$, $\frac{10}{\sqrt{149}}$, $\frac{140}{149}$.

17. a) Demonstrați congruența $\triangle BCH \equiv \triangle HGF$ și deduceți de aici că $DH \perp HF$. Cum și $DB \perp BF$, rezultă că patrulaterul $BFHD$ este inscriptibil; b) $\cos(\sphericalangle DBH) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\sphericalangle BHD) = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **18.** Fie a lungimea laturii pătratelor din desen. Dacă notăm cu M piciorul perpendicularei din D pe BF, vom putea exprima funcțiile trigonometrice ale unghiului FBD din triunghiul MBD ($\sin(\sphericalangle DBF) = \frac{DM}{BD} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : a\sqrt{5} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos(\sphericalangle DBF) = \frac{BM}{BD} = \left(a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) : a\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}(\sphericalangle DBF) = \frac{DM}{BM} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{3a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}\right)$. Dacă notăm $BD \cap EF = \{N\}$, $[NE]$ va fi linie mijlocie în $\triangle BCD$ și deci $FN = \frac{1}{2}a$. Funcțiile trigonometrice ale unghiului BDF pot fi exprimate din triunghiul DNF ($\sin(\sphericalangle BDF) = \frac{FN}{ND} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos(\sphericalangle BDF) = \frac{FD}{ND} = a : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}(\sphericalangle BDF) = \frac{FN}{FD} = \frac{1}{2}$). Unghiul BFD are

ca măsură 135° (suplementul unghiului AFB). Încă nu am învățat să exprimăm valorile funcțiilor trigonometrice ale unor unghiuri obtuze. **19.** Fie M piciorul perpendicularei din E pe CD. Se demonstrează mai întâi că M este mijlocul lui $[CD]$. Apoi se calculează lungimea segmentului $[EM]$, în fiecare caz în parte, în funcție de lungimea a a laturii pătratului. Se găsește pentru tg $(\sphericalangle CDE)$ $2-\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME (6)

A. Aria triunghiului (pag. 101)

1. 6 cm². **2.** 6 cm. **3.** $\frac{1}{2}\cdot 24\sqrt{26^2-24^2}$ (cm²) = 120 cm². **4.** $\frac{a^2}{2}$. **5.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **6.** 126 cm². **7.** Ambele triunghiuri au aceeași bază $[BC]$ și înălțimi congruente. **8.** 6. **9.** 12 cm². **10.** Se exprimă aria triunghiului în două moduri. Demonstrația se poate face și folosind asemănarea dintre triunghiul dat și unul dintre triunghiurile determinate de înălțime. **11.** Înălțimea dusă dintr-unul din vârfurile unghiurilor ascuțite determină în exteriorul triunghiului un triunghi dreptunghic isoscel. Aria este $1{,}6\sqrt{2}$. **12.** Ariile triunghiurilor ABC și DBC sunt egale. Scăzând din fiecare din ele aria triunghiului OBC se obțin arii egale. Reciproca: Dacă într-un patrulater convex $ABCD$ în care O este punctul de intersecție a diagonalelor, ariile triunghiurilor AOB și DOC sunt egale, atunci patrulaterul este trapez. Reciproca este adevărată și se demonstrează asemănător (se adună aria fiecăruia din triunghiurile AOB și DOC pe cea a triunghiului OBC). **13.** Se demonstrează mai întâi că mediana unui triunghi îl împarte în două triunghiuri de arii egale. De aici demonstrația cerută este imediată. **14.** Dacă M, respectiv N sunt picioarele perpendicularelor din A, respectiv D pe BC, atunci putem scrie: $\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AM}{\frac{1}{2}BC\cdot DN}=\frac{AM}{DN}$. Din asemănarea $\triangle AME\sim\triangle DNE$, rezultă că $\frac{AM}{DN}=\frac{AE}{DE}$ și deci $\frac{S_{ABC}}{S_{BCD}}=\frac{AE}{ED}$. Trecând la partea a doua a problemei, în triunghiul din figura 157, conform celor de mai sus, putem scrie $\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}=\frac{AM}{MB}$, $\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}=\frac{BN}{NC}$, $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=\frac{CP}{PA}$. Înmulțind membru cu membru, aceste trei egalități, obținem: $1=\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}$ (o altă demonstrație a teoremei lui Ceva). **15.** Triunghiurile ABA' și ACA', având o latură comună $[AA']$ și ariile egale, vor avea și înălțimile corespunzătoare laturii comune, de lungimi egale (depărtările de la B și C la AA'). **16.** Se duce înălțimea $[AA']$ a triunghiului ABC și se demonstrează congruențele $\triangle ABD\equiv\triangle ABA'$ și $\triangle ACE\equiv\triangle ACA'$. **17.** Se determină lungimea înălțimii $[AA']$ a triunghiului dreptunghic, se demonstrează că $[AA']$ este și înălțimea triunghiului echilateral, apoi se deduce lungimea laturii triunghiului și mărimea ariei sale $\left(AA'=\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot l_3=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ S_3=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$. **18.** Există mai multe căi de

rezolvare. Pentru că problema este propusă la tema „aria triunghiului", se poate exprima aria triunghiului echilateral ca o sumă de arii a trei triunghiuri având ca baze laturile triunghiului echilateral și ca înălțimi distanțele de la punctul considerat la laturi. **19.** Se exprimă aria triunghiului ca sumă a ariilor celor trei triunghiuri care au un vârf în centrul cercului înscris în triunghi și ca laturi, laturile triunghiului dat. **20.** Din asemănarea triunghiurilor AMN și ABC rezultă $AB \cdot AN = AC \cdot AM$. Se exprimă apoi ariile celor trei triunghiuri ca semiprodusul lungimilor laturilor ce „pornesc" din punctul A cu sinusul unghiului A. **21.** Raportul distanțelor de la punctul mobil C la laturile unghiului este constant... **22.** În triunghiurile ABB' și ACC' avem: $AB' = AB \cos A$, $AC' = AC \cos A$. Rezultă că $\frac{AB'}{AB} = \frac{A'C}{AC} = \cos A$. Triunghiurile $AB'C'$ și ABC sunt deci asemenea (cazul 2) și deci $\frac{B'C'}{BC} = \cos A$, iar raportul ariilor lor este egal cu pătratul raportului de asemănare. **23.** Dacă M este un punct oarecare de pe mediana $[AA']$ a triunghiului ABC, atunci ariile triunghiurilor MAB și MAC sunt egale. Dacă, în particular, alegem chiar centrul de greutate, se formează trei triunghiuri de aceeași arie.

B. Aria patrulaterului (pag. 103)

24. 9 cm². **25.** $\sqrt{5}$ cm. **26.** 8 cm, 3 cm, 3 cm. **27.** $\frac{1}{2} \cdot d_1 d_2$. **28.** 72 cm². **29.** 6 cm². **30.** 2 a^2. **31.** $\frac{1}{2}$. **32.** Aria acestui paralelogram este un sfert din cea a paralelogramului cu laturile ce „trec" prin vârfurile patrulaterului, având laturile paralele cu diagonalele acestuia. Or, paralelogramul acesta are aria de două ori mai mare decât cea a patrulaterului. **33.** Se scrie aria patrulaterului ca sumă a ariilor celor patru triunghiuri determinate în patrulatrulater de cele două diagonale, ținând seama că două triunghiuri alăturate au aceeași înălțime. Se găsește $\frac{1}{2} \cdot d_1 d_2 \sin x$. **34.** $\frac{25(4+\sqrt{3})}{4}$ cm². **35.** $S_{ABFE} = \frac{3a^2(2+\sqrt{3})}{4}$, $S_{FBC} = \frac{a^2}{4}$. **36.** Dacă notăm cu $ABCD$ trapezul, cu $[AB]$ baza mare, cu $[CD]$ baza mică și cu M intersecția laturilor neparalele, atunci $\frac{S_{MDC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{k^2-1}$, $\frac{S_{MAC}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{MBD}}{S_{ABCD}} = \frac{k}{k^2-1}$, $\frac{S_{MAB}}{S_{ABCD}} = \frac{k^2}{k^2-1}$ și $\frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{k}{k+1}$. **37.** Se scrie în două moduri aria rombului (ca semiprodus al diagonalelor și ca produs al laturii și înălțimii corespunzătoare) $\frac{d_1 d_2}{2} = l \cdot l \sin x$ (unde x este măsura unghiului ascuțit al rombului). Se găsește 30° și 150°. **38.** Fie $ABCD$ patrulaterul dat, M și N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$. Triunghiurile MCN și MDN au arii egale având baze congruente $[CN] \equiv [DN]$ și aceeași înălțime. Dacă ariile patrulaterelor $MNCB$ și $MNDA$ sunt egale, rezultă că

și ariile triunghiurilor CMB și DMB trebuie să fie egale. Pentru că $[MB] \equiv [MA]$, rezultă că și distanțele de la C și D la dreapta AB sunt egale, deci AB și CD sunt paralele. **39.** Dacă se notează cu a lungimea bazei mici și a laturilor neparalele ale trapezului, se găsește $(3 + \sqrt{2})a^2$. **40.** a) Se demonstrează că patrulaterele $BMDS$ și $BTDR$ sunt paralelograme (au două laturi opuse congruente); b) Raportul cerut este dat – de exemplu– de raportul ariilor triunghiurilor ABD și XBD, deci de cel al distanțelor de la A la BD și de la X la BD, adică 3. **41.** Se calculează ca sumă a ariilor triunghiurilor isoscele BAD și CBD (108 cm^2). **42.** Dacă se notează cu a lungimea bazei mici și cu b cea a bazei mari, raportul căutat este $(3a + b) : (a + 3b)$. **43.** Ducând prin M o paralelă la BC, aceasta va intersecta pe BA în N și pe CD în Q. Se demonstrează că paralelogramul $BCQN$ are aceeași arie ca și trapezul și apoi că aria triunghiului BMC este cât jumătate din aria paralelogramului. **44.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot a^2$.

45. Se demonstrează că $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ și că raportul lor de asemănare este raportul bazelor; rezultă că și raportul înălțimilor lor va fi același. **46.** Ducând din A, R și D perpendiculare pe dreapta BC, ținând seama că lungimea liniei mijlocii a unui trapez este egală cu semisuma lungimilor bazelor și că triunghiurile ASB, RBC și DSC au, două câte două, triunghiurile XSB și YSC parte comună, problema se rezolvă. **47.** a) Se demonstrează că patrulaterele $BRDM$ și $CPAS$ sunt paralelograme (au două laturi opuse congruente); b) 1 : 5.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME (7)

A. Poligoane regulate (pag. 117)

1. a) 108°; b) 120°; c) 135°; d) 140°; e) 144°. **2.** a) 150°; b) 156°; c) 157°30′; d) 160°; e) 162°. **3.** Dacă, în general, $u°$ este măsura unghiului, răspunsul la întrebare este dat de faptul dacă ecuația $\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = u$ are ca soluție un număr natural. a) da, $n = 24$; b) da, $n = 30$; c) $180° - 165°36′ = 14°24′ = \left(14\frac{2}{5}\right)°$; $360 : 14\frac{2}{5} = 25$ – deci: da, $n = 25$; d) da, $n = 32$. **4.** a) $5 \cdot 180° : 7 \simeq 128°34′17″$; b) $9 \cdot 180° : 11 \simeq 147°16′22″$; c) $11 \cdot 180° : 13 \simeq 152°18′28″$; d) $12 \cdot 180° : 14 \simeq$ $\simeq 154°17′09″$; e) $15 \cdot 180° : 17 \simeq 158°49′25″$. **5.** 250 sin 36° ≃ 147 (cm); 250 sin 12° ≃ 52 (cm); 250 sin 9° ≃ 39 (cm). **6.** 500 sin 20° ≃ 171 (cm); 500 sin 10° ≃ 163 (cm). **7.** 1000 sin 18° ≃ 309 (cm); 1000 sin 15° ≃ 259 (cm); 1000 sin 6° ≃ 105 (cm). **8.** 500 cos 15° ≃ 483 (cm); 500 cos 12° ≃ 489 (cm); 500 cos 9° ≃ 494 (cm). **9.** 200 cos 20° ≃ 188 (cm); 200 cos 10° ≃ 197 (cm); 200 cos 6° ≃ 199 (cm); **10.** $4\sqrt{3}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm, 4 cm; $12\sqrt{3}$ cm^2, 32 cm^2, $24\sqrt{3}$ cm^2. **11.** $\sqrt{10}$ cm, $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{30}$ cm. **12.** $R = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm, $l_3 = 4\sqrt{2}$ cm, $a_3 = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm. **13.** $a_4 = 4$ cm, $R = 4\sqrt{2}$ cm. **14.** Se demonstrează mai întâi că patrulaterul este dreptunghi și apoi se află aria $\left(R^2\sqrt{3}\right)$. **15.** Se demonstrează că $MNPQ$ este dreptunghi; aria este $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **16.** $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}$. **17.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **18.** $\frac{5+2\sqrt{3}}{2}R^2$.

19. Latura octogonului regulat este $a - 2x$. Din asemănarea triunghiurilor AMM' și ABC rezultă $x = a : 3$. **20.** $l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **21.** $x = a\left(\sqrt{2}-1\right)$. **22.** Poligon regulat cu 12 laturi (duodecagon). Laturile sunt congruente ca laturi de triunghiuri echilaterale sau pătrate, iar măsurile unghiurilor sunt de câte $90° + 60° = 150°$. **23.** Din fiecare vârf „pornesc" câte $8 - 3 = 5$ diagonale, $\frac{8\cdot 5}{2} = 20$ de diagonale; nu era necesar. **24.** a) și b) Rezultă din faptul că triunghiurile ABM și MAO sunt isoscele ($[AB] \equiv [AM]$ și $[MA] \equiv [MO]$). c) Rezultă din asemănarea $\triangle ABM \sim \triangle OAB$. d) Din $l + \frac{R - R\sqrt{5}}{2} = 0$, rezultă $l = \frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}$. **25.** $L_3 = 2R\sqrt{3}$; $L_4 = 2R$; $L_6 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **26.** $l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$.

B. Lungimea și aria cercului (pag. 119)

27. 6π cm, 9π cm^2. **28.** 12 cm. **29.** $\pi R^2 : 2\pi R = R : 2$; $R = 12$. **30.** π cm. **31.** 1,8 cm^2. **32.** 162π mm^2. **33.** $\frac{R^2}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$. **34.** $\frac{R^2}{12}\left(8\pi + 3\sqrt{3}\right)$. **35.** $9\pi : 4$. **36.** $81\sqrt{3} : 4$ cm^2. **37.** Aria trapezului minus suma ariilor celor două sectoare circulare. $S = 3(24\sqrt{3} - 11\pi) : 2$ (cm^2). **38.** 1,21 $(4 - \pi)$ cm^2. **39.** 1,96 $(\pi - 2)$ cm^2. **40.** $4(\pi - \sqrt{3})$. **41.** 12,5 $(\pi - 2)$. **42.** Se demonstrează, mai întâi, că latura pătratului $MNPQ$ este latura poligonului regulat cu 12 laturi înscris în cercul cu raza AB. Lungimea laturii pătratului $MNPQ$ poate fi determinată scriind în două moduri aria triunghiului isoscel ANP; $S_{MNPQ} = 9(2 - \sqrt{3})$ cm^2. **43.** Aria haşurată este suma ariilor unui triunghi echilateral cu latura l și a trei sectoare circulare cu unghiul la centru de 120° din cercuri de raze 1,2 și 3. $S = (58\pi + 3\sqrt{3}) : 12$. **44.** Din aria întregii figuri se scade aria semicercului care are ca diametru ipotenuza triunghiului dreptunghic. **45.** $2(5\pi + 3 + 3\sqrt{3})$. **46.** Unghiul dintre dreapta centrelor și raza cercului mare dusă în punctul de contact cu tangenta are cosinusul egal cu $\frac{1}{5}$. Se caută în tabelă și se găsește o valoare aproximativă a acestui unghi. Se ține seama apoi de faptul că unghiul dintre dreapta centrelor și raza cercului mic dusă în punctul de contact cu tangenta este suplementul primului unghi (interne și de aceeași parte a secantei). Din însumarea lungimilor tangentelor comune cu cele ale arcelor de cerc se găsește aproximativ $12\sqrt{6} + 11{,}4\pi$. **47.** $S = 4(\sqrt{3} - \pi)$; $P = 2\pi$. **48.** 9π. **49.** $[(4\sqrt{3} - 1)\pi - 6\sqrt{3}]\, a^2 : 24$. **50.** $(2\pi - 3\sqrt{3})\, a^2 : 6$.

51. $r = \frac{bc}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2}}$; $S = \frac{bc}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2 + (b+c)\sqrt{b^2 + c^2}}$.

C.2. a) Fie E diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului ABC. Unghiurile BAA' şi CAE au complementele congruente. b) Cele trei puncte aparţin diagonalei unui paralelogram. c) Folosim b) şi aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice formate.

C.3. a) Avem m $\widehat{BAD} = 30°$ b) Folosim teorema lui Pitagora sau: fie r raza cercului înscris într-un triunghi, S aria, p semiperimetrul triunghiului, avem relaţia $r = \frac{S}{p}$.

C.4. Deoarece triunghiurile EAM şi EBM sunt isoscele, rezultă $CM \perp AB$. Analog avem $BM \perp AC$. Atunci, în $\triangle ABC$, M este ortocentrul triunghiului. Se cunoaşte că într-un triunghi ABC simetricele ortocentrului faţă de laturi sunt puncte care aparţin cercului circumscris triunghiului ABC. Fie A', B', C' picioarele perpendicularelor duse, respectiv, din A, B, C pe laturile BC, CA, AB. Se cunoaşte că înălţimile triunghiului ABC sunt bisectoarele triunghiului ortic $A'B'C'$. Acest rezultat confirmă concluzia problemei.

C.5. Construim C' simetricul lui C faţă de M. Punem în evidenţă segmentul de lungime $2 \cdot MC$ şi scriem relaţia dată sub o formă convenabilă, care să sugereze triunghiuri asemenea.

C.6. 1) În $\triangle BB'F$, ME linie mijlocie ($\{M\} = BB' \cap AE$). Rezultă $AE \parallel FB'$. În $\triangle AEC$, FB' linie mijlocie. Rezultă $[AB] \equiv [B'C]$. Atunci în $\triangle BAC$, BB' este bisectoare şi mediană, deci $\triangle ABC$ este isoscel, cu $\hat{A} \equiv \hat{C}$. 2) Analog, în $\triangle BFA$, EC' este linie mijlocie, $CE' \parallel AF$. Avem $[BC'] \equiv [AC']$ şi atunci $\triangle BAC$ isoscel, cu $[AC] \equiv [BC]$. Din 1) şi 2) rezultă că $\triangle ABC$ este echilateral, deci m $\hat{A}$ = m $\hat{B}$ = = m $\hat{C} = 60°$.

C.7. Cu lungimile segmentelor OA, OB, OC, OD se poate forma o proporţie. Rezultă triunghiuri asemenea şi apoi congruenţe de unghiuri ce duc la inscriptibilitate.

C.8. a) Triunghiurile CDP şi ABD sunt asemenea, cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$; b) Triunghiurile OCP şi OAD sunt asemenea, cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.

C.9. a) Folosim unghiuri înscrise în semicercuri. b) Observăm patrulatere inscriptibile şi unghiuri opuse la vârf. c) Folosim teorema bisectoarei şi reciproca ei; $\triangle ABO \sim \triangle ACO_2$.

C.10. a) Fie N' simetricul lui N faţă de O. Atunci $\triangle N'NP$ este dreptunghic, iar OE este linie mijlocie, deci $[NE] \equiv [EP]$. b) $\triangle QNP$ dreptunghic isoscel cu

m $\hat{Q} = 90°$, m $\hat{P}$ = m $\hat{N} = 45°$. c) Dacă notăm cu S punctul în care $OQ \cap AD$, atunci F este punctul de intersecţie a medianelor $\triangle OSP$. Deci $\frac{QF}{FP} = \frac{1}{2}$.

C.11. a) În $\triangle BCD$, $CA \perp BD$ şi $DA \perp NB$, deci $AB \perp CD$. b) În $\triangle CMD$, MP, mediana relativă ipotenuzei, este egală cu PC, deci m $\widehat{PMC}$ = m $\widehat{PCM}$. Fie O centrul lui $\mathcal{C}$. În $\triangle AMB$, dreptunghic, $[OM] \equiv [OA]$, deci m $\widehat{OMA}$ = m $\widehat{OAM}$. Cum $\widehat{OAM}$ şi $\widehat{CAS}$ ($\{S\} = AB \cap CD$) sunt opuse la vârf, rezultă m $\widehat{CAS}$ + m $\widehat{PCA} = 90°$ şi deci m $\widehat{PMC}$ + m $\widehat{OMA} = 90°$, adică $PM \perp OM$.

C.12. Construim prin A o paralelă la BC. Folosim teorema fundamentală a asemănării, înlocuim rapoartele date cu altele, egale, având acelaşi numitor.

C.13. Considerăm cazul în care $\triangle ABC$ este ascuţitunghic. Avem de arătat că $C'B'ED$ este inscriptibil $\Leftrightarrow AB = AC$, deci două teoreme. Pentru a o demonstra pe prima, folosim două patrulatere inscriptibile şi teorema lui Thales; pentru a doua, arătăm că $C'B'ED$ este trapez isoscel. Analog în cazul în care $\triangle ABC$ este obtuzunghic (sau dreptunghic).

C.14. Construim, din centrul cercului circumscris trapezului, perpendiculare pe diagonale; se formează un pătrat cu diagonala $3\sqrt{2}$ m.

C.15. Calculăm lungimea laturii pătratului în funcţie de a, aplicând teorema lui Pitagora într-un triunghi dreptunghic. Observaţi anumite triunghiuri asemenea. Cercul e tangent laturilor pătratului. Remarcă: se începe construind mai întâi pătratul, apoi triunghiul isoscel.

C.16. Observaţi linii mijlocii în $\triangle ABC$ şi mediane, în triunghiuri dreptunghice. Cele trei triunghiuri au laturile respectiv congruente.

C.17. De exemplu, $AB = AD = CD$ şi m $\widehat{BAD} = 90°$. Observaţi că $\triangle ADC$ este echilateral, iar $\triangle BAC$ este isoscel; m $\widehat{ABC} = 75°$, m $\widehat{BCD} = 135°$. b) $AC = a$; $BD = a\sqrt{2}$; $CB = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

C.18. a) Observaţi că $PMQA$ este un dreptunghi; $MP + MQ = AB$. b) $\triangle BPD \equiv$ $\equiv \triangle AQD$ ($AD = DB$), dar şi $PD \perp DQ$. De aici, $PDQA$ este inscriptibil. c) 1) $DP +$ $+ DQ$ este minimă când DP (sau DQ) este minimă. De aici, $DP \perp AB$. Atunci $DP + DQ = 2DP = AB$. 2) $(MP + MQ)^2 = a^2$. Rezultă $2MP \cdot MQ = a^2 - AM^2$. Produsul este maxim când AM minim. Atunci $AM \perp BC$ şi $AM = \frac{BC}{2}$, ($M = D$).

C.19. Folosim paralelogramele $ADBB'$ şi $A'DC'C$, dar şi faptul că linia mijlocie dintr-un triunghi înjumătăţeşte ceviana relativă la latura cu care este paralelă linia mijlocie.

C.20. Construiţi în D şi E perpendiculare, respectiv, pe AB şi AC şi exprimaţi în două moduri ariile triunghiurilor formate. Apoi observaţi triunghiuri asemenea şi scrieţi proporţionalitatea laturilor omoloage. Se ajunge în final la proporţia: $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$. Atunci $\triangle BAE \sim \triangle CAD$ şi cum $BE = CD \Rightarrow AB = AC$.

C.21. *Directa:* Fie $ABCD$ inscriptibil, cu $AB \neq BC$. Notăm $m\widehat{BAC} = m\widehat{BCA} = m\widehat{BDA} = m\widehat{BDC} = x^\circ$ şi $m\widehat{CBD} = m\widehat{CBD} = m\widehat{CAD} = y^\circ$. Fie $\{E\} = AC \cap BD$. În $\triangle AED$, $m\widehat{AED} = 180 - (x^\circ + y^\circ)$. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$, deoarece $m\widehat{BAD} = x^\circ + y^\circ$, rezultă $m\widehat{BCD} = 180^\circ - (x^\circ + y^\circ)$. *Reciproca:* Notăm $m\overset{\frown}{BC} = x^\circ$, $m\overset{\frown}{AD} = y^\circ$. Atunci $m\widehat{AED} = \frac{x^\circ + y^\circ}{2} = m\widehat{BCD} = \frac{m\widehat{BCA} + m\widehat{ACD}}{2} =$ $= \frac{m\widehat{BCA} + y^\circ}{2}$. Rezultă $m\overset{\frown}{AB} = x^\circ$. Atunci, deoarece $m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{AB} = x^\circ$, $AB = BC$.

C.22. Notăm O_1 şi O_2 centrele cercurilor tangente. Ţineţi cont că linia centrelor a două cercuri tangente între ele trece prin punctul de tangenţă. Proiectaţi centrul cercului mic pe OA. Aplicaţi teorema lui Pitagora în două triunghiuri dreptunghice, formaţi o ecuaţie în x, raza cercului căutat şi determinaţi astfel pe x. Ecuaţia este: $\left(x + \frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2} - x\right)^2 = (R - x)^2 - x^2$. Deducem $x = \frac{R}{4}$.

C.23. a) Se calculează laturile triunghiului DMC. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă că $\triangle DMC$ este dreptunghic. b) Se aplică reciproca teoremei bisectoarei, calculând în prealabil lungimile ED şi EC.

C.24. a) Din ipoteză rezultă $m\widehat{ABQ} = m\widehat{QBD} = m\widehat{PCD} = x^\circ$. Fie $AC \cap BD = \{T\}$. Triunghiurile QBT şi PTC au unghiurile respectiv congruente. Rezultă $m\widehat{BQT} = m\widehat{CPT}$, deci $BQPC$ este inscriptibil. b) Deoarece $BQPC$ este inscriptibil, rezultă $m\widehat{QPB} = m\widehat{ACB}$. $ABCD$ este inscriptibil, deci $m\widehat{ACB} = m\widehat{ADB}$ şi rezultă $\widehat{QPB} = \widehat{ADB}$. Atunci $QP \parallel AD$ (prin reciproca paralelelor tăiate de secanta BD).

C.25. a) Din $TO \parallel AB$, rezultă că secanta MN determină unghiurile congruente $\widehat{MTO} \equiv \widehat{MNA}$. Dar $\widehat{MTO} \equiv \widehat{TMO}$. Atunci $\triangle MBN$ este isoscel, cu $MB = NB$. În triunghiul MBN, OT este linie mijlocie, deci T este mijlocul lui MN. În $\triangle MAN$, TC este linie mijlocie. Atunci $TC = \frac{1}{2}AM$. b) În $\triangle MBN$, TE este linie mijlocie, deci $TE = OB$. Cum $OB = OA$, rezultă că $TE = OA$. Atunci patrulaterul $AOTE$ (trapez, din $TO \parallel AN$) este trapez isoscel, cu $TE = OA$.

C.26. Sunt mai multe posibilități de a așeza pe hârtie punctele figurii. Folosim unghiurile patrulaterului inscriptibil și evidențiem un alt patrulater inscriptibil.

C.27. a) Se aplică de patru ori teorema lui Thales, apoi se va ține cont că dacă un segment – în acest caz, AB – este despărțit de două puncte interioare, M și M', în același raport, atunci $M = M'$ și de aici $MNPQ$ este paralelogram. b) Din a) și ipoteză, $MNPQ$ este romb, vom observa două perechi de triunghiuri asemenea. Scriind șirul rapoartelor egale și aplicând proporții derivate se obține, notând $MN = NP = x$, $x = \frac{12}{7}$.

C.28. Construim un triunghi dreptunghic ce are EF ca ipotenuză $(EE'F)$ cu $EE' \perp DC$. Sau: aplicăm teorema medianei în $\triangle OFB$. $EF = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

C.29. Construim prin D și C paralele la laturile neparalele ale trapezului. Din triunghiurile formate determinăm cos $\hat{A}$ și cos $\hat{B}$, folosind teorema cosinusului $BD = 12\sqrt{2}$, $AC = 20$. b) Notăm $\{O\} = AC \cap BD$. Se arată că $\triangle AOD$ este isoscel.

C.30. a) Se scriu proporționalitățile respective: $\frac{a}{t-1} = \frac{c}{t+1} = \frac{b}{t} = k$, cu $t \geq 2$. Se determină a, b, c, funcție de k și t și se verifică inegalități de tipul $|b - c| < a < |b + c|$. b) Pentru $t \geq 2$, avem $t - 1 < t < t + 1$ și deci $a < b < c$. Pentru ca triunghiul să fie dreptunghic, trebuie ca $c^2 = a^2 + b^2$. Se obține $t = 4$.

C.31. Folosim teorema fundamentală a asemănării și reciproca teoremei lui Thales. Eventual, construim o paralelă la AB dusă prin O, punctul de intersecție a diagonalelor. Se obține că $ABCD$ este trapez și $AC = 6$ cm.

C.32. Se aduce relația la forma: $\frac{1}{a}(a^2 - b^2)(a - c) = \frac{b^2(a^2 - b^2)}{(a+c)^2} \cdot \frac{a+c}{a}$, se simplifică ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$) și se cercetează o egalitate de tipul $A \cdot B = 0$. Concluzia: $\triangle ABC$ este isoscel ($a = b$) sau dreptunghic, cu ipotenuza a.

C.33. a) Vom observa că $\triangle BAE \equiv \triangle DAG$. De aici: A, B, D, H conciclice. Dar și H, B, C, D sunt conciclice; G, A, H, E, de asemenea, sunt conciclice. Din toate acestea va rezulta că punctele C, H, F sunt coliniare. b) Din a) și teorema liniei mijlocii în $\triangle ACF$ și $HA \perp CF$, va rezulta că $HA \perp OO'$.

C.34. De observat: $\triangle ACD \equiv \triangle MCD$ și $\triangle CMP \sim \triangle CBA$. Din calcule, vor rezulta: $CM = 5$, $BC = \sqrt{41}$, $PC = \frac{25\sqrt{41}}{41}$, $AP = \frac{205 - 25\sqrt{41}}{41}$.

C.35. Construim proiecția lui C pe dreapta AB. Exprimăm lungimile laturilor triunghiului AMN, în funcție de AB. Din calcule rezultă $CC' = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$,

$MB = \frac{5\sqrt{3}-4}{4-\sqrt{3}}$, $AM = \frac{4-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$, $AN = 2\,AM$, $MN = AM\sqrt{3}$ şi în final $NP = MN +$ $+ CC' = AB$.

C.37. Se aduce relaţia la una mai simplă, ţinând cont că numitorul este nenul. După calcule şi simplificări obţinem: $\frac{b^2}{a^2-c^2} = 1$, $a^2 = b^2 + c^2$, deci triunghiul este dreptunghic, cu ipotenuza a.

C.38. Patrulaterul $AMA'N$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $\text{m}\,\widehat{MAN} +$ $+ \text{m}\,\widehat{MA'N} = 180°$. Mai observaţi că MN este mediatoarea înălţimii AA'.

C.39. *Metoda 1.* Prelungim AC cu un segment $CM = CE$. Veţi deduce că $\triangle ACE \equiv \triangle BCM$, apoi că LC este linie mijlocie în trapezul $DKBM$ şi astfel $LK = LB$. *Metoda 2.* Construim paralelograme având laturile de lungimi LK, LB. *Metoda 3.* Fie $\frac{CE}{EB} = k$ şi $\frac{C'L}{CC'} = t$, unde C' este proiecţia lui C pe AB. Determinăm o relaţie între k şi t, exprimăm pe k şi apoi explicităm LK şi LB în funcţie de k. În acest caz $LK = \frac{2k\,AC'}{1+k} = LB$.

C.40. Punctul O este interior cercului circumscris patrulaterului $ABCD$. Scrieţi puterea lui O faţă de acest cerc şi căutaţi triunghiuri asemenea. Din $\triangle BOB_1 \sim$ $\sim \triangle COC_1$, $\triangle AOA_1 \sim \triangle DOD_1$ şi $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$ (puterea punctului) $AA_1 \cdot CC_1 =$ $= BB_1 \cdot DD_1$.

C.41. Fie $\{D\} = AH_B \cap BH_A$. În $\triangle ABD$, AH_A, BH_B, DH_C sunt înălţimi (C interior triunghiului ABD). Atunci $H_AH_BH_C$ este triunghiul ortic al triunghiului ABD. Se cunoaşte că înălţimile triunghiului ABD sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic. Deci C (intersecţia bisectoarelor) este în interiorul triunghiului $H_AH_BH_C$. $\text{m}\,\hat{H}_C = 180° - 2\,\text{m}\hat{D}$, $\text{m}\,\hat{H}_A = 180° - 2\,\text{m}\hat{A}$, $\text{m}\,\hat{H}_B = 180° - 2\text{m}\hat{B}$.

C.42. Transformăm ipoteza: a) Din $BD \cdot DC = AD \cdot DM$, deducem $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DM}$. Dar $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (teorema bisectoarei). Deci avem de demonstrat $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{DM}$. Notăm $BD \cap MC = \{R\}$. Atunci din ipoteze rezultă: 1° $\triangle RBM$ dreptunghic în B. 2° $\triangle RDM$ isoscel ($\text{m}\,\widehat{DRM} = \text{m}\,\widehat{DMR} = x°$). Atunci $\text{m}\,\widehat{MDE} =$ $= 2x° = \text{m}\hat{B}$. Rezultă $\triangle ABC \sim \triangle BDM$. Scriind proporţiile cuvenite obţinem $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{DM}$. b) În $\triangle ABF$, conform teoremei bisectoarei, avem $\frac{AP}{PF} = \frac{AB}{FB}$. Din ipoteze rezultă $\frac{AP}{PF} = \frac{CN}{NF}$ şi conform reciprocei teoremei lui Thales în $\triangle AFC$, rezultă $NP \parallel AC$.

C.43. Din ipoteze rezultă $\triangle ABM$ echilateral, apoi $\triangle BAC$ dreptunghic în $\hat{A}$. Tot din ipoteze rezultă că în $\triangle BDC$, m $\widehat{DBC} = 30°$ și din $AM \parallel DC$ faptul că m $\widehat{BCD} = 60°$. Atunci $\triangle BDC$ dreptunghic în D. Deci $ABCD$ inscriptibil.

C. 44. *Directa QPNM* este inscriptibil (și *QABM*, *PABN* inscriptibile – ipoteză comună atât la directă cât și la reciprocă); atunci D, A, B coliniare. Se duc diagonalele QB și PB. Din cele trei inscriptibilități (proprietăți relative la unghiurile formate de diagonale și laturi) rezultă: a) $\widehat{MBQ} \equiv \widehat{NBP}$ ($\widehat{MAQ} \equiv \widehat{PAN}$ – opuse la vârf); b) $\widehat{QBA} \equiv \widehat{PBA}$. Atunci AB bisectoare în $\triangle QBP$ și în același timp $AB \perp MN$. Rezultă $\triangle ABN$ și $\triangle ABM$ dreptunghice (diametrii MA, respectiv AN). Atunci $MA \perp PN$ și $NA \perp MQ$. Deci A este ortocentrul triunghiului cu laturile formate de dreptele MN, MQ, și NP. Rezultă D aparține înălțimii conținute de dreapta AB, adică D, A, B coliniare. *Observație. QPB* este triunghi ortic pentru $\triangle MDN$. *Reciproca.* Numai dacă *QABM*, *QPNB* sunt inscriptibile și B, A, D coliniare, atunci *QPNM* este inscriptibil.

C.45. $\frac{BM}{MC} = \frac{R_1}{R_2}$ sau $\frac{BM}{R_1} = \frac{MC}{R_2}$. Fie $\mathcal{C}_1$ cercul circumscris $\triangle ABM$ și BB' diametru; rezultă $\hat{A} \equiv \hat{B}'$. În $\triangle BMB'$, dreptunghic, avem $\frac{BM}{2R_1} = \sin \hat{B}'$. Dar $\hat{A} \equiv \hat{B}$ și deci $\frac{BM}{2R_1} = \sin \hat{A}$ ($\widehat{BAM}$). Tot așa $\frac{MC}{2R_2} = \sin \widehat{CAM}$. În ipoteză $\frac{BM}{MC} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin(\widehat{BAM}) = \sin(\widehat{CAM})$ și deci [AM este bisectoarea unghiului BAC.

C.46. a) Notăm m $\widehat{MAN} = y°$ = m $\widehat{NCM}$. Notăm m $\widehat{MBN} = x°$ = m $\widehat{NDM}$. În $\triangle CMD$, m $\widehat{CMD} = 180° - y° - x°$. În $\triangle ANB$, m $\widehat{ANB} = 180° - y° - x°$. b) m $\widehat{MBD}$ + + m $\widehat{MND} = 180°$. Dar m $\widehat{MND}$ = m $\widehat{CAM}$. Deci m $\widehat{ABD}$ + m $\widehat{BAC} = 180°$ și $BD \parallel AC$. c) Dacă CM diametru, rezultă m $\widehat{CAM} = 90°$ și deci m $\widehat{MBD} = 90°$. Atunci MD este diametru.

C.47. 1) Dacă m $\widehat{ACB} > 90°$, atunci $MD > \frac{BC}{2}$ și deci $\frac{MD}{BC} > \frac{1}{2}$. 2) Dacă m $\widehat{ACB} < 90°$, atunci $MD < \frac{BC}{2}$ și deci $\frac{MD}{BC} < \frac{1}{2}$. 3) Dacă m $\widehat{ACB} = 90°$, atunci $D = C$ și $\frac{MD}{BC} = \frac{1}{2}$. În acest caz $h_c = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9{,}6$. Pentru cazul $\frac{MD}{BC} > \frac{1}{2}$, triunghiul ABC este dreptunghic în C. În $\triangle ADB$, avem $BD^2 = 20^2 - AD^2$. În $\triangle ADC$ avem $CD^2 = 16^2 - AD^2$. Atunci: $BD^2 - CD^2 = 20^2 - 16^2 = 36 \cdot 4$ sau $(BD + CD)$ $(BD - CD) = 36 \cdot 4$. Dar $BD = BC + CD$. Atunci $(BC + CD + CD) \cdot BC = 36 \cdot 4$ sau $\left(\frac{BC}{2} + CD + \frac{BC}{2} + CD\right) \cdot BC = 36 \cdot 4$. Deci $2 \cdot MD \cdot BC = 36 \cdot 4$ și $BC \cdot MD =$ $= 36 \cdot 2 = 72$.

C.48. a) $\widehat{MPA} \equiv \widehat{MAP}$ ($\triangle MPA$ isoscel), dar $\widehat{MAP} \equiv \widehat{PDR}$ (au aceeaşi măsură) Cum $\widehat{MPB} \equiv \widehat{RPD}$ (opuse la vârf) şi $m\,\widehat{MPB} + m\,\widehat{MPA} = 90°$, rezultă că şi $m\,\widehat{PDR} + m\,\widehat{RPD} = 90°$, şi deci $PR \perp CD$. b) Fie S mijlocul lui CD. În mod analog cu punctul precedent rezultă $SP \perp AB$. Cum $OM \perp AB$, rezultă $OM \parallel SP$. Tot aşa, $OS \perp DC$ şi $MP \perp CD$, conduce la $OS \parallel PM$. Atunci $MOSP$ paralelogram şi deci $OM = SP$. Dar $SP = \frac{CD}{2}$ ($\triangle CPD$ dreptunghic în P şi PS mediană). Atunci $OM = \frac{CD}{2}$.

C. 49. a) Deoarece $\frac{DM}{DA} = \frac{QP}{CB}$ şi $\triangle DMN \sim \triangle DAB$, iar $\triangle CPQ \sim \triangle CAB \Rightarrow$ $\Rightarrow MN = RQ$. b) Se aplică teorema bisectoarei în triunghiurile ABC şi CDA. Deci: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ şi $\frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD}$. Dar $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Leftrightarrow \frac{AB+AC}{AC} = \frac{BC}{CD}$ sau $\frac{AB+AC}{BC} = \frac{AC}{CD} = \frac{AI}{ID}$.

C. 50. a) Fie P mijlocul lui AB, E şi F proiecţiile lui C şi D pe AB. Atunci $PE = \frac{DC}{2}$. Cum $\triangle PGE \sim \triangle CGD$, raportul de asemănare fiind $\frac{PE}{DC} = \frac{1}{2}$, rezultă $\frac{PG}{GC} = \frac{1}{2}$ şi deci G este centrul de greutate al triunghiului ACB. Evident el aparţine lui DE. b) Rezultă imediat $AH \perp BC$ (H ortocentrul $\triangle ABC$). Cercul circumscris triunghiului ADE conţine şi punctul H, iar diametrul lui este AH. Deci $P \in (AH)$. Cercul circumscris triunghiului BDE conţine şi punctul C, iar diametrul lui este CB. Deci centrul acestui cerc este punctul M. Evaluăm unghiul MDP: $\widehat{MDP} = \widehat{MDB} +$ $+ \widehat{MDP}$. Dar $\widehat{MDB} \equiv \widehat{MBD}$ ($\triangle MDB$ isoscel) şi $\widehat{BDP} \equiv \widehat{DHP}$ ($\triangle HDP$ isoscel). Cum $\widehat{MBD} \equiv \widehat{HAC}$ (unghiuri cu laturi perpendiculare) şi în $\triangle HDA$, $m\,\widehat{DHA} + m\,\widehat{HAD} =$ $= 90°$, rezultă că $m\,\widehat{MDP} = 90°$ şi deci BD este tangentă în D cercului circumscris triunghiului BDE. Observăm că MP este dreapta care uneşte centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor DEA şi BED, iar DE coarda lor comună. Atunci T este mijlocul coardei DE. Cum $\triangle MDP$ este dreptunghic, rezultă că DT este înălţimea relativă ipotenuzei. Deci: $DT^2 = PT \cdot TM$. Cum $DT = \frac{DE}{2}$, rezultă că $\left(\frac{DE}{2}\right)^2 =$ $= PT \cdot TM$, adică $DE^2 = 4 \cdot PT \cdot TM$.

C.51. a) În $\triangle TCE$, $\widehat{CET} \equiv \widehat{ABC}$, atunci în $\triangle BCE$ $m\,\hat{E} + m\,\widehat{DBC} = 180°$. b) $\triangle ABB' \sim \triangle ADE \sim \triangle ACB$, de unde rezultă $\frac{BB'}{BC} = \frac{AB}{AC}$. c) Deoarece $\triangle BB'C$ este isoscel ($\widehat{B'BC} \equiv \widehat{B'CB}$) rezultă că $BM' \perp BC$. Cum şi $OM \perp BC$, rezultă că punctele B', O, M sunt coliniare.

C.52. Triunghiul MNP poate fi dreptunghic în P sau M. 1) Dacă $m\,\widehat{NPM} = 90°$, atunci $BP = 12$. 2) Dacă $m\,\widehat{NMP} = 90°$, atunci, deoarece $MN = 10$, rezultă $NP = \frac{100}{6}$ și $BP = \frac{100}{6} + 6 = \frac{68}{3}$.

C.53. $m\,\widehat{C_1A'A_1} + m\,\widehat{A_1B_1C_1} = 180° - m\,\widehat{ABC} + m\,\widehat{ABC} = 180°$.

C.54. a) Se pot construi patru triunghiuri cu $AB = 6$ și $AC = 2$. *Cazul I* obtuzunghic în C. Se aplică puterea punctului $BC \cdot MD = BC \cdot \left(\frac{BC+CS}{2}\right) = \frac{BC \cdot BC}{2} = \frac{BT^2}{2} = \frac{16 \cdot 2}{2} = 16$, unde T este punctul de tangență dusă din B la cerc, S al doilea punct de intersecție a secantei BC cu cercul. *Cazul II* dreptunghic în $C = D$, în care caz $BT = BC = 4\sqrt{2}$ și $BM = MD = 2\sqrt{2}$, deci $BC \cdot MD = 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 16$. *Cazul III* ascuțitunghic și *caz IV* obtuzunghic în A. $BC \cdot MD = BC$, $BC \cdot MD = BC \cdot (MC - DC) = BC \cdot \left(\frac{BC}{2} - DC\right) = BC \cdot \left(\frac{BC - 2DC}{2}\right) = BC \cdot \frac{BS}{2} = \frac{BT^2}{2} = 16$.

C.55. În $\triangle CAO$, echilateral, bisectoarea CI este perpendiculară pe AO, deci mediatoarea lui AO. Atunci $AI = IO$. Cum $m\,\widehat{CAO} = 60°$ și $m\,\widehat{CAI} = 45°$, rezultă $m\,\widehat{IAO} = 15° = m\,\widehat{IOA}$. Atunci $m\,\widehat{IAB} + m\,\widehat{IOB} = 45° + 15° + m\,\widehat{AOB} = 60° + 120° = 180°$.

C.56. 1) Deoarece $TB \perp OP$, rezultă $PT = PB$, dar și $\widehat{PBT} \equiv \widehat{PTB}$ 2) Cum $\widehat{PBT} \equiv \widehat{TCO}$ (subîntind același arc) și $\widehat{PTB} \equiv \widehat{QPT}$ (alterne interne), rezultă că în patrulaterul $CTQP$ un unghi format de o latură și o diagonală este egal cu unghiul format de latura opusă și a doua diagonală, deci este inscriptibil. 3) În $TCPQ$, $\widehat{QTP} \equiv \widehat{QCP}$. Dar $\widehat{QCP} = \widehat{PBD}$. Atunci $\triangle QTP \equiv \triangle RBP$ (U.L.U.) și deci $[PQ] \equiv [PR]$.

C.57. a) $\triangle ARB$ este dreptunghic și isoscel ($AR = AB = a$). Dacă $DA \perp BR$, atunci DA este și bisectoarea unghiului BAR, deci $m\,\widehat{BAM} = 45°$. ($\{M\} = DA \cap \mathcal{C}$). Cum $m\,\widehat{BAM} = 60°$ (suplementul lui $\widehat{BAD}$), concluzionăm că DA nu este perpendiculară pe BR. b) În cazul în care R, B, C, D, sunt conciclice, rezultă că $M \in \mathcal{C}$. Atunci $\triangle BAM$ este echilateral, cu $MB = a$, iar trapezul $DMBC$ este isoscel, cu $BM = CD = a$ și unghiurile de 60°, respectiv 120°. Atunci cercul $\mathcal{C}$ are raza $R = a$ și DB subîntinde un unghi de 60°. Rezultă $BD = l_3 = R\sqrt{3} = a\sqrt{3}$, iar din $\triangle BAR$, dreptunghic și isoscel, avem $BR = a\sqrt{2}$.

C.58. a) Dacă $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DCA}$, cu $D \in (BC)$, atunci $m\,\widehat{BAC} > m\,\widehat{DCA}$. $\triangle DAC \sim \triangle ABC$. Scriind proporționalitatea laturilor omoloage, rezultă $AC^2 = BC \cdot DC$. b) Deoarece $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BAC}$ și $AD \perp BC$, rezultă $\triangle BAC$ dreptunghic și isoscel, cu AD mediană. Atunci $AC \cdot AE + AB \cdot AF = 2\,AC \cdot AE = AC \cdot (2AE) = AC \cdot AB$.

C.59. Fie I al patrulea vârf al paralelogramului $EAFI$. Cum unghiurile EAF şi BAC sunt suplementare, rezultă că $\widehat{AEI} \equiv \widehat{BAC}$. Atunci $\triangle AEI \equiv \triangle ABC$. Remarcaţi că $\triangle AEI$ se obţine din $\triangle BAC$ printr-o translaţie AE, urmată de o rotaţie de un unghi drept. Deci toate segmentele corespunzătoare celor două figuri sunt *congruente* şi perpendiculare. Punctului M îi corespunde mijlocul O al diagonalei EF deci mediana $EO = AM$ şi $EO = AM$. De asemenea, $AI = BC$ şi $AI \perp BC$. În cele două triunghiuri ABC şi EAI, obţinute unul din altul printr-o deplasare, se corespund punctele $A \to E$, $B \to A$, $C \to I$, $M \to O$. Problema se poate completa cu „Segmentul EF este perpendicular pe mediana AM şi egal cu dublul ei".

C.60. $\triangle EDF \equiv \triangle BCF \equiv \triangle EAB$ (L.U.L.), unde $m\,\widehat{EAB} = m\,\widehat{BCF} = m\,\widehat{EDF} = 60° + m\,\widehat{DAB}$.

C.61. Construim paralelogramele AMM_1B şi DMM_2C, în care $AD = MM_1 = MM_2 = DC$. Este suficient să *rotim* $\triangle MCM_2$ cu unghiul M_1MM_2, astfel încât MM_2 să coincidă cu MM_1. Atunci există patrulaterul MBM_1C care are drept laturi segmentele MB, MA, MD, MD. Evident, patrulaterul format este convex.

C.62. a) $BD = OD = b$. b) În $\triangle DAC$, echilateral, cu $AC = b$, $h_D = \frac{b\sqrt{3}}{2}$; atunci $R = \frac{b\sqrt{3}}{6}$. Fie $MD \perp AB$, I centrul cercului înscris în $\triangle BAD$ şi N piciorul bisectoarei unghiului ABC. Avem: $\frac{AN}{NC} = \frac{b\sqrt{3}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\frac{AN}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; $AN = \frac{b\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. Dar $IM = r = \frac{AN}{2}$; deci $r = \frac{b\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$. Atunci $\frac{R}{r} = \frac{b\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{4+2\sqrt{3}}{b\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$.

C.63. Patrulaterul $QPAB$ este inscriptibil. Deoarece A, B şi d sunt fixe, rezultă $m\,\widehat{ABQ} = \text{const}$. Atunci şi suplementul lui, $\widehat{APQ}$, are măsura constantă. Rezultă că şi suplementul acestuia, $\widehat{RPA}$, este un unghi constant. Cercul $\mathcal{C}$ fiind dat, măsura unghiului RPA, înscris în $\mathcal{C}$ fiind constantă, coarda întinsă de acest unghi va fi invariabilă, deci RA constantă.

C.64. Fie A' punctul diametral opus lui A. Observaţi că $m\,\widehat{BA'A} = m\,\widehat{BPA} = m\,\widehat{BCA}$ şi că patrulaterul $SNBA'$ este inscriptibil ($\{S\} = MN \cap AA'$) şi deci $m\,\widehat{MNB} + m\,\widehat{BA'A} = 180°$. Atunci $m\,\widehat{MNB} + m\,\widehat{BPM} = 180°$ şi deci $NBPM$ este inscriptibil.

C.65. În cercul circumscris triunghiului ABD avem că $BD = DN$, deoarece $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DAN}$. În cercul circumscris triunghiului ADC, avem $CD = DM$, deoarece $\widehat{DAM} \equiv \widehat{DAC}$. Atunci $DM + DN = DC + DB = BC$.

C.66. Fie $ON \perp CD$ ($N \in (CD)$) şi $\{P\} = AC \cap BD$. Atunci $MPND$ este paralelogram. Rezultă $OM = PN$, dar $PN = \frac{CD}{2}$ (mediană în $\triangle CPD$). Deci $OM = \frac{CD}{2}$.

C.67. Din $\triangle MAQ \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{AB^2}{NQ^2} = \frac{MB^2}{MN^2}$. Din $\triangle MBN \sim \triangle PCN \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{BC^2}{MP^2} = \frac{BN^2}{MN^2}$. Atunci $\frac{AB^2}{NQ^2} + \frac{BC^2}{MP^2} = \frac{MB^2 + BN^2}{MN^2}$. Dar în $\triangle MBN$, dreptunghic, avem $MB^2 + BN^2 = MN^2$, relaţie ce arată că $\frac{AB^2}{NQ^2} + \frac{BC^2}{MB^2} = 1$.

C.68. Din $BD < AC \Rightarrow DO < AO$ şi deci în $\triangle DAO$ avem că $\text{m}\,\widehat{DAO} < \text{m}\,\widehat{ADO}$. Cum $\triangle AOD \sim \triangle DOM$ (construcţie şi ipoteză) $\Rightarrow$ semidreapta DM este interioară unghiului ADO, iar punctul M se obţine construind $\widehat{ODM} \equiv \widehat{OAM}$, cu $M \in (OA)$. Scriind proporţionalitatea laturilor triunghiurilor asemenea AOD şi DOM obţinem că $OD^2 = OM \cdot OA$. Dar $OD = OB$, deci şi $OB^2 = OM \cdot OA$. Aceste două rezultate dovedesc că BD este tangenta comună exterioară cercurilor circumscrise triunghiurilor AMD şi AMB în punctele D, respectiv B. Scriind puterea punctului M faţă de cele două cercuri, găsim că $OB^2 = OD^2 = OM \cdot OA$, rezultat deja găsit şi care confirmă cele spuse.

C.69. Din $\frac{AM}{AB} = \frac{BR}{BC} = \frac{CP}{CA} = k$ şi $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, $\triangle BRS \sim \triangle BCA$ şi $\triangle CPQ \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, $\frac{BR}{BC} = \frac{RS}{CA}$ şi $\frac{CP}{CA} = \frac{PQ}{AB}$, deci $MN = BR$, $RS = CP$ şi $PQ = AM$. Mai rezultă $NR = OQ = MB$, $NR = SA = OP$ şi atunci $OQ = OP$, deci punctul O este mijlocul lui PQ. Totodată, mai rezultă şi $OP = MS = SA = MB$, deci punctele S şi M împart AB în trei părţi congruente. Analog pentru celelalte laturi. În concluzie $\frac{AM}{AB} = k = \frac{2}{3}$ şi punctul este intersecţia a două paralele duse, de exemplu, prin M şi Q.

C.70. În $\triangle DBC$, cu PN linie mijlocie, BP şi DN sunt mediane; atunci SC este a treia mediană şi T_2 este mijlocul lui BD. În $\triangle DAB$, AR este mediană şi T_1 este mijlocul lui BD. Urmează că $T_1 = T_2 = T$ şi atunci D, T, B sunt coliniare.

C.71. Fie $AA' \cap B'C' = \{D\}$. Arătăm că în $\triangle C'AD$ suma $\text{m}\,\widehat{DC'A} + \text{m}\,\widehat{C'AD} =$ $= 90°$. Este adevărat, deoarece $\text{m}\,\widehat{AC'D} = \text{m}\frac{\widehat{ABC}}{2}$, $\text{m}\,\widehat{C'AD} = \text{m}\,\widehat{C'AB} + \text{m}\,\widehat{BAD} =$ $= \text{m}\frac{\widehat{BCA}}{2} + \text{m}\frac{\widehat{BAC}}{2}$. Însumând, avem că, în $\triangle C'DA$, $\text{m}\,\widehat{C'DA} = 90°$.

C.72. Remarcaţi că $AM \perp BN$, apoi în patrulaterul inscriptibil $APND$ avem $\text{m}\,\widehat{DAN} = \text{m}\,\widehat{DPN} = x°$. Atunci în $\triangle ADP$ avem $\text{m}\,\widehat{DPA} = 180° - 90° - x° = 90° - x°$

şi $m\widehat{PAD} = 90° - m\widehat{PAB}$. Dar $m\widehat{PAB} = m\widehat{DAN} = x°$, deoarece $\triangle ABM \equiv \triangle ADN$. Deci $m\widehat{PAD} = 90° - x°$ şi rezultă $AD = PD = a$.

C.73. Fie $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ şi A punctul lor comun. „Oricare patru dintre ele" înseamnă, de exemplu, că $\mathcal{C}_5$ împreună cu $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, au un punct comun. Cum singurul punct comun al cercurilor $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ este A, urmează că $A \in \mathcal{C}_5$, ş.a.m.d.

C.74. Apar mai multe perechi de triunghiuri asemenea. Le alegem pe cele care conţin segmentele AB, AD, BC, ca laturi.

C.75. Se proiectează punctul F pe AB, respectiv AC, în M, respectiv N. Se remarcă patrulaterul inscriptibil $AMFN$. La fel, proiectăm punctul D pe AB, respectiv AC, în punctele P, respectiv Q. Remarcaţi că $APDQ$ este inscriptibil. Obţinem $\triangle MFN \sim \triangle QDP$, apoi teorema medianei relativă la arii în $\triangle ABC$. În final obţinem $\frac{AB}{AC} = \frac{MF}{FN}$.

C.76. Dintre grupele de triunghiuri asemenea alegem pe acelea care conţin BQ şi CP ca laturi. $\triangle BQM \sim \triangle CDM$ şi $\triangle CPM \sim \triangle BAM$. Se obţine în final $CP \cdot BQ = AB^2 = ct$.

C.77. a) Proiectăm O pe AB, respectiv CD. Comparaţi $MB + NC$ cu $MB + OM$ şi ambele cu R. Se obţine $AB + CD \geq 2R$. b) AB este fixă, deci $AB = ct$. Deci şi coardele de lungime $2R - AB$ sunt constante şi vor fi egal depărtate de centrul cercului $\mathcal{C}(O; R)$. Notăm $\mathcal{C}'(O', R')$ acest cerc. Avem $d(O; AB) = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}$ şi $R' = \sqrt{R^2 - \left(\frac{2R - AB}{2}\right)^2} = \sqrt{R \cdot AB - \frac{AB^2}{4}}$. Deci $d^2(O; AB) = R^2 - \frac{AB^2}{4} < R \cdot AB - \frac{AB^2}{4} = R'^2$, deoarece $AB > R$. Pentru că $OM = d(O, OM) < R'$, rezultă $AB \cap \mathcal{C}' \neq \emptyset$. Punctele A', B' cu proprietatea cerută sunt punctele de intersecţie dintre AB şi $\mathcal{C}'$.

C.78. AD este axă de simetrie şi de aici $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$, $\triangle BED \equiv \triangle CFD$, apoi se ajunge la $\triangle ABG \equiv \triangle ACH$. $\triangle DHF \sim \triangle CHA \Rightarrow BG = CH = GH$.

C.79. a) Distanţa parcursă de M_2 va fi de două ori mai mare decât cea parcursă de M_1. Împreună, ele parcurg de patru ori distanţa AB până când se întâlnesc. Atunci M_1 parcurge $\frac{4}{3} AB$, iar M_2 $2 \cdot \frac{4}{3} AB = \frac{8}{3} AB$. Deoarece M_1 are viteza v, se întâlneşte cu M_2 după un timp egal cu $\frac{4 \cdot AB}{3 \cdot v}$. b) Când M_2 parcurge AD, M_1 parcurge AE (mijlocul lui AB). Veţi remarca $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle M_1AM_2 \sim \triangle EAD$. Apoi triunghiurile APM_2 şi AQD sunt isoscele: deoarece punctele E, D, şi Q sunt fixe $\Rightarrow \widehat{DAQ} =$

= constant şi deci $\widehat{M_2AP}$ = constant şi deci când M_1 şi M_2 ajung în E, respectiv D, punctul P descrie segmentul AQ. În timp ce M_1 parcurge EB, M_2 parcurge DC. Atunci mijlocul lui M_1M_2 descrie segmentul QR, linia mijlocie a trapezului $BEDC$. Aşadar, pentru $T \in (BC)$, cu $\frac{BT}{TC} = \frac{1}{2}$, când M parcurge BT, M_2 parcurge CT, iar mijlocul lui M_1M_2 descrie $RT = \frac{AB}{6}$.

C.80. a) Avem de demonstrat că AD este axă de simetrie a $\triangle ABC \Leftrightarrow AB = AC$ şi $AD \perp BC$. b) Dacă $\triangle ABC$ este echilateral, el are chiar trei axe de simetrie.

C.81. Remarcaţi că $\triangle OMA \sim \triangle CDA$ şi $\triangle ONB \sim \triangle DCB$. Aplicând în continuare teorema lui Thales, deduceţi că $OM = ON$, apoi, deoarece avem $\triangle OMD \sim \triangle BAD$ şi $\triangle ONC \sim \triangle ABC$, mai deducem că $\frac{MN}{AB} = \frac{OD}{BD} + \frac{OC}{AC}$ şi $\frac{MN}{CD} = \frac{OB}{BD} + \frac{OA}{AC}$ şi adunând obţinem: $\frac{MN}{AB} + \frac{MN}{CD} = 1 + 1 = 2$.

C.82. Remarcaţi că $\triangle ABC$ este dreptunghic în A. Apoi că $ANPM$ este dreptunghi şi aplicând teorema catetei în $\triangle ABC$ obţinem $PC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Apoi, în $\triangle APC$, dreptunghic, obţinem $AP = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

C.83. a) Se evaluează m $\widehat{ABC}$, m $\widehat{ABD}$, şi de aici C, B, D sunt coliniare. b) De exemplu, arătaţi că punctul E este egal depărtat de A, N, P, M, şi deci punctele sunt conciclice (unde EF mediatoarea lui AN, $F \in AN$ şi $E \in CD$). Sau arătaţi că m $\widehat{ANP}$ + m $\widehat{AMP} = 180°$.

C.84. Se arată că $EN \perp FP$ şi apoi că sunt şi mediatoarele segmentelor PM, respectiv NQ.

C.85. Arătăm că $\triangle AOH$ este isoscel şi apoi că $\triangle AHC'$ are $AC' = \frac{1}{2}AC$, unde C' este proiecţia lui C pe AB.

C.86. Dacă m $\widehat{BAC} = 90°$, atunci $AEPF$ este dreptunghi. Folosim teorema medianei corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic. Dacă $EF \parallel BC$, conform teoremei fundamentale a asemănării, rezultă că AM trece prin mijlocul lui EF. Observăm că punctele A, E, P, F sunt conciclice cu diametrul AP, deci EF sau este o coardă perpendiculară pe acest diametru, sau este alt diametru al cercului.

C.87. Construim perpendiculara din P pe dreapta OA. Aceasta intersectează cercul in N. Se arată că A, N, Q sunt coliniare.

C.88. Notam $AA' = x$, $AB' = y$. Determinăm x şi y, observând triunghiuri asemenea. Dreptunghiul $A'B'C'D'$ există dacă $0 \le x \le b$ şi $0 \le y \le a$. Adică: $x = \frac{k(a-bk)}{1-k^2}$, $y = \frac{k(b-ak)}{1-k^2}$, $(k > 0$ şi $k \neq 1)$ apoi $A'B' = \frac{k}{1-k^2}$.

$\cdot\sqrt{(a^2+b^2)(1+k^2)-4abk}$ şi $A'D'=\frac{1}{1-k^2}\sqrt{(a^2+b^2)(1+k^2)-4abk}$. $A'B'C'D'$ există dacă $0\le\frac{k(a-bk)}{1-k^2}\le b\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a-bk}{1-k^2}\ge 0\\ \frac{k(a-bk)}{1-k^2}\le b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a-bk}{1-k^2}\ge 0\\ \frac{ak-b}{1-k^2}\lhd 0\end{cases}$. Dacă $0<k<1$ avem $\Leftrightarrow\begin{cases}a-bk\ge 0\\ ak-b\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\le\frac{a}{b}\\ k\le\frac{b}{a}\end{cases}$, dar $a<b$, deci $0<k<\frac{a}{b}$. Dacă $k>1$ rezultă $k>\frac{b}{a}$. Impunând condiţia $0\le y\le a$, se obţine acelaşi lucru.

C.89. Prelungim medianele BE şi CF astfel încât $BE=EB'$ şi $CF=FC'$, apoi arătaţi că în trapezul $BCB'C'$ avem $BB'>CC'$.

C.90. a) Folosim proprietatea medianei corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic şi teorema unghiului exterior. b) m $\hat{A}=90°$, m $\hat{B}=60°$, m $\hat{C}=30°$.

C.91. a) Proiectăm O pe diagonalele patrulaterului şi notăm $OP=y$, $OQ=x$, unde P şi Q sunt mijloacele segmentelor AC şi BD. $AB^2+CD^2=4R^2=AD^2+BC^2$. b) Fie E proiecţia lui O pe DC. De aici $OE^2=\frac{AB^2}{4}$, $OE=\frac{AB}{2}$.

C.92. a) Dacă o secantă face cu dreptele d şi d' unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei cu suma măsurilor mai mică decât 180°, atunci d şi a' sunt concurente. b) Dacă un triunghi are un unghi drept, celelalte unghiuri sunt ascutite. c) D este proiecţia lui H pe AB. Cum ABH este ascuţitunghic, D este interior segmentului AB.

C.93. Patrulaterul $AEDO$ este inscriptibil, unde $\{O\}=BD\cap CE$.

C.94. Exprimăm S ca sumă a ariilor celor două triunghiuri care se formează ducând una din diagonale. Aria unui triunghi este cel mult egală cu semiprodusul laturilor. $S=S_{ABC}+S_{BCD}\le\frac{1}{2}(ab+cd)$ şi $S=S_{ABD}+S_{ACD}\le\frac{1}{2}\cdot(ab+bc)$. Mai folosim inegalitatea $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$ pentru $\forall x, y\in\mathbf{R}$, unde $a+c=x$ şi $b+d=y$.

C.95. $\triangle AEC\equiv\triangle CFB$ şi de aici $AEDF$ inscriptibil, apoi $\triangle AFF'$ este echilateral, deci mediana EF este şi înălţime.

C.96. a) E este ortocentrul triunghiului AMN. b) Punctele A, M, E', N sunt conciclice (observaţi unghiuri congruente). c) Centrul cercului circumscris

triunghiului AMN este egal depărtat de A şi E' ($OA = OE'$, O fiind centrul cercului circumscris AMN).

C.97. Se va arăta că $EA = AF$. Apoi că $\triangle ADQ$ este triunghiul median în $\triangle EMF$. Se vor evalua unghiurile patrulaterului $ADIQ$, ştiind că AI este bisectoarea lui $\widehat{PAN}$.

C.98. Se va observa că patrulaterul convex este inscriptibil, deoarece triunghiurile ADO şi BCO fiind isoscele, rezultă $\widehat{DAC} \equiv \widehat{CBD}$. Apoi se ştie că laturile b, c ale unui triunghi, înălţimea h care pleacă din acelaşi vârf şi raza R a cercului circumscris sunt legate de relaţia $R = \frac{b \cdot c}{2h}$. Se calculează, de exemplu, razele cercurilor circumscrise triunghiurilor DOC şi ADC. În $\triangle DOC$ avem $R_1 = \frac{ab}{2DE}$; în $\triangle DAC$ avem $R_2 = \frac{ab}{2 \cdot DE}$, deci $R_1 = R_2 = \ldots$.

CUPRINS

Exerciții și probleme recapitulative din materia clasei a VI-a 3
A. Triunghiul 3
B. Paralelism 5
C. Congruența triunghiurilor 7
D. Patrulatere 7
E. Paralelogramul 8
F. Dreptunghiul 9
G. Rombul 9
H. Pătratul 10
I. Trapezul 11
J. Linia mijlocie în triunghi și trapez. 11
K. Probleme 12

1. Cercul 14

§ 1. Cercul. Definiții 14
§ 2. Coardă 15
§ 3. Unghi la centru 15
§ 4. Arc de cerc 16
§ 5. Măsura unui arc de cerc 16
§ 6. Arce congruente 17
§ 7. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc 19
§ 8. Unghi înscris în cerc 21
§ 9. Patrulater înscris în cerc. Patrulater circumscris unui cerc 26
§ 10. Puncte conciclice. Patrulater inscriptibil 27

1. Exerciții și probleme ..... 30.

A. Determinarea cercului 30
B. Cercuri congruente, arce și coarde în cerc 32
C. Dreapta tangentă la cerc într-un punct al cercului 33
D. Măsura unui unghi înscris într-un cerc 34
E. Dreapta tangentă în cerc dusă dintr-un punct exterior cercului 35
F. Patrulaterul inscriptibil 36

II. Relații metrice 39

§ 1. Raportul a două segmente. Segmente proporționale 39
§ 2. Teorema lui Thales 40
Reciproca teoremei lui Thales 43

2. Exerciții și probleme 47

A. Raportul a două segmente 47
B. Teorema lui Thales 47
§ 3. Asemănarea 53
§ 4. Cazurile de asemănare a triunghiurilor 56

3. Exerciții și probleme 61

A. Teorema fundamentală a asemănării 61
B. Triunghiuri asemenea 65
§ 5. Proiecții ortogonale 71
§ 6. Relații metrice în triunghiul dreptunghic 72

4. Exerciții și probleme 77

A. Teorema înălțimii 77
b. Teorema catetei 77
c. Teorema lui Pitagora 78
§ 7. Elemente de trigonometrie 82

5. Exerciții și probleme 89

III. Arii 92

§ 1. Introducere 92
§ 2. Aria unui triunghi 93
§ 3. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea 97
§ 4. Aria unui patrulater 97

6. Exerciții și probleme 101

E. Aria triunghiului 101
B. Aria patrulaterului 103

IV. Poligoane regulate 107

§ 1. Linie poligonală, poligon 107
§ 2. Poligoane regulate 109
§ 3. Latura și apotema unui poligon regulat înscris în cerc 110
§ 4. Aria unui poligon 112
§ 5. Lungimea și aria cercului 114

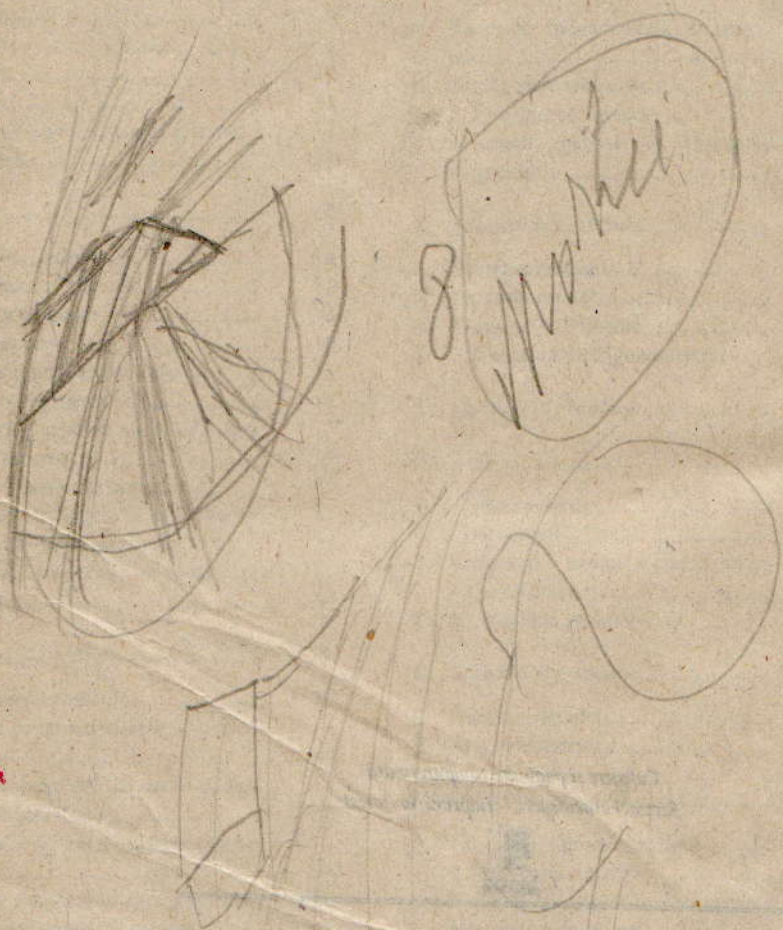
7. Exerciții și probleme 117

A. Poligoane regulate 117
B: Lungimea și aria cercului 119
Probleme propuse la concursurile de matematică ale elevilor 122
Răspunsuri, indicații și soluții 136

Culegere și paginare computerizată
Secția Fotoculegere – Imprimeria Coresi

Coli de tipar 11
Bun de tipar: 07.07.1995
Tiparul executat sub comanda nr. 50 143

Regia Autonomă a Imprimeriilor
Imprimeria „CORESI" București
România



Compania aeriană

Efectuează zboruri charter,
pasageri şi marfă
în ţară şi străinătate

Fly with us!

Tel. : 212.22.73
212.22.74
212.22.75
Fax : 312.97.58

Şos. Bucureşti - Ploieşti 14 - 22

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, R.A., BUCUREŞTI — 1995

Lei 1170

ISBN 973-30-3909-8